SISTEME LINIARE DISCRETE CU 1 GLD
MODELAREA ANALITICĂ A SISTEMELOR LINIARE DISCRETE

În dinamica structurilor obiectul principal este constituit de analiza relațiilor ce există între acțiune şi răspunsul dinamic.

În cazul în care elementele structurii sunt realizate din materiale caracterizate fizic ca omogene, izotrope, continue şi perfect elastice şi deplasările instantanee care se produc sunt mici în aşa fel încât modificările din punct de vedere geometric devin nesemnificative sistemul putând fi modelat ca un sistem cu comportare liniară.

În analiza liniară a sistemelor dinamice există o interdependență între caracteristica inerțială, disipativă şi elastică care nu se modifică în timp, iar scopul fundamental îl reprezintă evaluarea stării de tensiune şi deformație. Structurile actuale sunt deosebit de complexe ca alcătuire iar considerarea lor ca un tot unitar este practic imposibilă fapt ce a condus la elaborarea de modele care să aproximeze cât mai bine comportarea reală a structurii.

O structură este un mediu continuu alcătuit dintr-un număr infinit de puncte materiale astfel încât în fiecare punct se poate defini un câmp adică un grup format din:

-mărimi mecanice (forțe, eforturi, tensiuni);

-mărimi geometrice (deplasări, deformații, deformații specifice care caracterizează starea din acel punct).

Relațiile analitice dintre aceste mărimi se stabilesc prin intermediul ecuațiilor diferențiale de stare şi se pot distinge trei aspecte:

- ***aspectul mecanic*** al problemei de echilibru static şi/sau dinamic al structurii (legăturile fiind între mărimile mecanice);
- ***aspectul geometric sau cinematic*** (legăturile fiind între mărimile geometrice);
- ***aspectul fizic*** (legăturile fiind între mărimile mecanice şi geometrice).

Între relațiile de legătură dintre mărimile mecanice şi cele geometrice, pe de o parte, şi relațiile de legătură dintre mărimile geometrice şi posibilitatea de modificare a geometriei structurii pe durata acțiunii încărcărilor exterioare, pe de altă parte, se pot face diferite combinații care conduc la o mare varietate de posibilități de scriere a ecuațiilor de stare şi în consecință la diverse moduri de analiză a structurii.

Formularea ecuațiilor de stare după o teorie acceptată se poate face cu necunoscute mărimi geometrice (deplasări)sau cu necunoscute mărimi mecanice (tensiuni, eforturi, forțe de legătură).

Elaborarea modelului analitic presupune un ansamblu de operații care ar putea fi:

- ***elaborarea modelului de calcul (schematizarea structurii);***
- ***ataşarea unei teorii de calcul (idealizarea schemei de calcul);***
- ***adoptarea unei metode de calcul;***
- ***stabilirea procedeului numeric de rezolvare;***
- ***rezolvarea propriu-zisă;***
- ***validarea şi valorificarea rezultatelor.***

Înlocuirea sistemului real cu modelul de calcul se bazează pe discretizarea structurii într-un ansamblu de componente reprezentative. Pentru trecerea de la structura reală la modelul de calcul nu sunt algoritmi şi procedee generale care să asigure elaborarea unui model unic, care să aproximeze cu o eroare prestabilită structura de calculat. În general este posibil ca pentru aceeaşi structură să se elaboreze mai multe modele de calcul, toate corecte, dar cu performanțe diferite. Aceste modele trebuie comparate, iar compararea se poate face dacă transformăm sistemele continue în sisteme discrete echivalente.

În cazul analizei dinamice, din cauza imposibilității echilibrării instantanee a acțiunilor exterioare de către eforturi datorită ***inerției*** materialului, deplasările variabile în timp ale structurii sunt asociate cu accelerațiile care generează ***forțe de inerție*** sau ***momente de inerție*** şi cu viteze care contribuie la apariția şi exprimarea ***forțelor*** sau ***momentelor de amortizare***.

Parametrii - grade de libertate după direcția cărora acționează forțele specifice comportării dinamice (acțiuni, forțe de inerție, amortizare) se numesc ***grade de libertate dinamică*** - de aici şi clasificarea sistemelor după numărul de GLD atribuite:

- ***sisteme cu 1 GLD;***
- ***sisteme cu număr finit de GLD (n GLD);***
- ***sisteme cu masă continuă*** ∞ ***GLD***

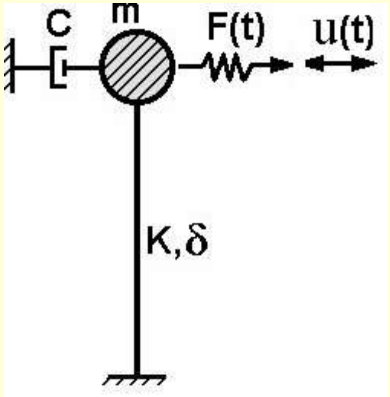
Din punct de vedere practic, de obicei, interesează doar mişcarea câtorva puncte semnificative ale structurii, de aici necesitatea şi utilitatea modelelor cu număr finit de grade de libertate dinamică.

Măsurarea răspunsului se poate face în domeniul timp obținând vibrograme sau în domeniul frecvențelor obținând funcții de răspuns în frecvență.

Importanța caracteristicilor dinamice ale sistemelor este evidentă, problema care se pune fiind aceea a determinării lor cât mai exacte şi aproximarea lor sub forma unui model matematic cât mai reprezentativ şi în acelaşi timp suficient de simplu pentru utilizare şi interpretare.

SISTEME LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE DINAMICĂ

Caracteristicile fizice esențiale tuturor structurilor elastice liniare supuse încărcărilor de natură dinamică sunt:

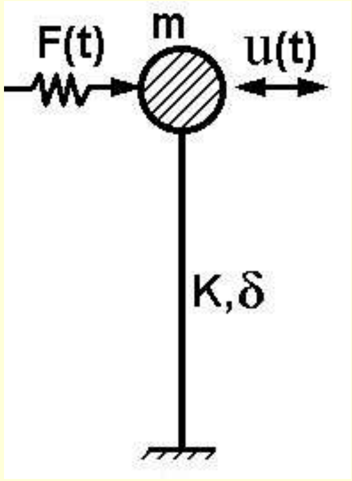


- **masa, *m*,** (moment de inerție masic)
- **proprietățile elastice, *k*** sau δ (rigiditatea sau flexibilitatea)
- **mecanismul de disipare a energiei** (amortizarea), *c*
- **sursa exterioară de excitație,** *F(t)*.

Ecuațiile generale de condiție, care guvernează dinamica structurilor, se bazează pe principiile mecanicii solidelor rigide şi mecanicii corpurilor deformabile.

Mecanica analitică furnizează multiple direcții de operare prin folosirea următoarelor posibilități: principiul lui d' Alembert, ecuațiile lui Lagrange de speța a doua, principiul lui Hamilton şi principiul lucrului mecanic virtual.

Dacă se utilizează metodele mecanicii corpurilor deformabile se pot formula condițiile de echilibru dinamic, exprimate pe poziția deformată instantanee, folosind principiul lui d'Alembert.



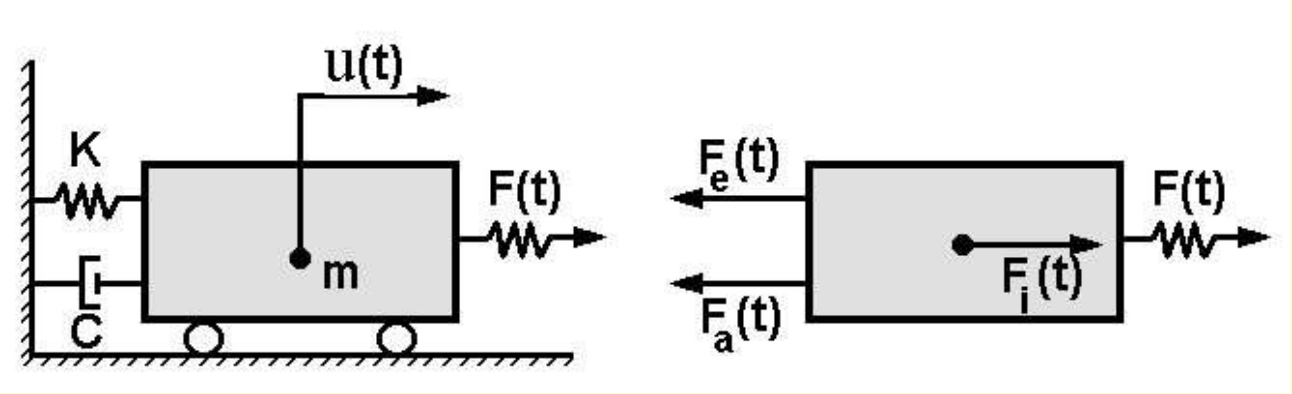


Fig.2.1 Modelul sistemului cu 1GLD de translație

După cum se vede în fig.2.1 forțele care acționează după direcția de deplasare sunt: forța exterioară *F(t)*, şi trei forțe generate de mişcare:

- ***forța de inerție*** $F_i(t)$***,***
- ***forța de amortizare*** $F_a(t)$
- ***forța de revenire a resortului elastic*** $F_e(t)$***.***

Ecuația mişcării exprimă echilibrul acestor forțe şi se scrie:

$$-F_i(t) + F_a(t) + F_e(t) = F(t) \qquad (2.1)$$

Fiecare dintre forțele din membrul întâi este funcție de deplasarea u*(t)* sau de derivatele sale în raport cu timpul:

$$F_i(t) = - m\,\ddot{u}(t)\ ; \qquad F_a(t) = c\,\dot{u}(t)\ ; \qquad F_e(t) = k\,u(t)\ ; \qquad (2.2)$$

- ***k*** - rigiditatea sistemului după direcția GLD – reprezintă forța care aplicată după direcția GLD produce o deplasare egala cu unitatea pe aceeaşi direcție

- δ – flexibilitatea sistemului – reprezintă deplasarea care apare după direcția GLD când după aceeaşi direcție acționează o forță egală cu unitatea

- **δ*k = 1 1/δ=k 1/k = δ**

- ***c*** - constanta de amortizare (amortizare vâscoasă liniară)

- ***m*** - masa sistemului sau măsura inerției (provine din masa proprie a structurii reale, mase adiționale)

- ***u(t), ú(t), ü(t)*** reprezintă deplasarea, viteza şi accelerația sistemului după direcția GLD acordat.

În aceste condiții ecuația de mişcare este:

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=F(t) \qquad (2.3)$$

Gradul de libertate dinamică poate fi şi de rotație (fig.2.2).

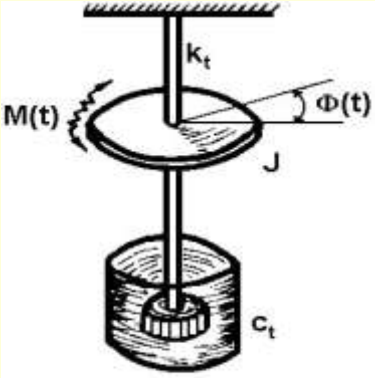


Fig.2.2 Modelul sistemului cu 1GLD de rotatie

În acest caz echilibrul este asigurat de momentul de inerție $M_i(t)$, momentul de amortizare $M_a(t)$, momentul elastic sau de revenire $M_e(t$ şi momentul dinamic exterior *M(t)*.

$$\mathrm{M_i(t)+M_a(t)+M_e(t)=M(t)} \qquad (2.4)$$

2.2.1. Vibrații libere. Soluții în domeniul timp

Vibrațiile libere ale unui sistem dinamic se produc în urma aplicării unei acțiuni inițiale de scurtă durată (impuls, şoc etc.). Mişcarea rezultată se manifestă după ce cauza care a scos sistemul din poziția de echilibru a încetat. Dacă sistemul oscilant este un sistem conservativ, vibrațiile care se produc sunt vibrații neamortizate, air dacă sistemul este neconservativ vibrațiile sistemului se amortizează după un anumit interrval de timp care depinde de mărimea capacității de amortizare.

a) Vibrații libere neamortizate

Ecuația de mişcare a unui sistem cu 1GLD (fig. 2.3) în vibrația liberă neamortizată este descrisă de relația (2.5) :

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \qquad \text{sau} \qquad \ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (2.5)$$

unde ω este pulsația proprie a sistemului,

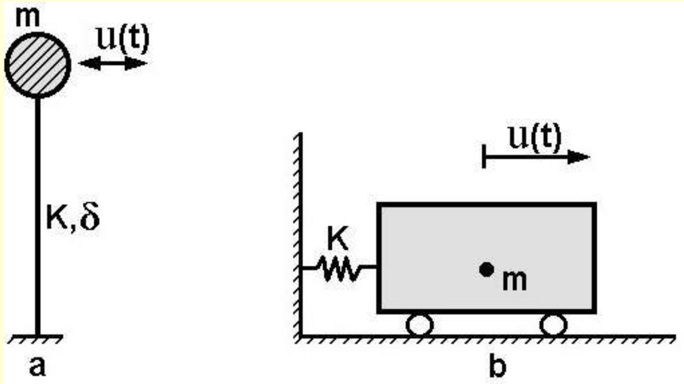


Fig. 2.3 Modelul sistemului cu 1GLD în vibrația liberă neamortizată

Soluția generală a ecuației (2.5) în domeniul timp este de forma:

$$u(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \qquad (2.6)$$

iar viteza este:

$$\dot{u}(t) = \omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t \qquad (2.7)$$

în care C_1 şi C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad C_1 = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \qquad (2.8)$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \qquad C_2 = u_0$$

Soluția ecuației (2.5) în acest caz devine:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \qquad (2.9)$$

$$u(t) = A \sin\left(\omega t + \varphi\right) \qquad (2.10)$$

unde:

- ***A*** amplitudinea mişcării, rămâne constantă în tot timpul mişcării
- ***tg*φ** caracterizează faza inițială a oscilației
- **(ω*t*+φ)** faza

$$A=\sqrt{u_0^2+\frac{\dot{u}_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi = arctg\frac{u_0\omega}{\dot{u}_0} \tag{2.11}$$

Prin derivarea succesivă a ecuației (2.9) se obțin viteza şi accelerația:

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= A\omega\cos(\omega t+\varphi)\\ \ddot{u}(t) &= -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi) = -\omega^2 u(t)\end{aligned} \tag{2.12}$$

Din relațiile (2.12) se constată că viteza este defazată cu $\pi/2$ înaintea deplasării iar accelerația cu $\pi/2$ înaintea vitezei şi cu π înaintea deplasării.

În fig. 2.4 sunt reprezentate grafic deplasarea, viteza şi accelerația în cazul vibrației libere neamortizate.

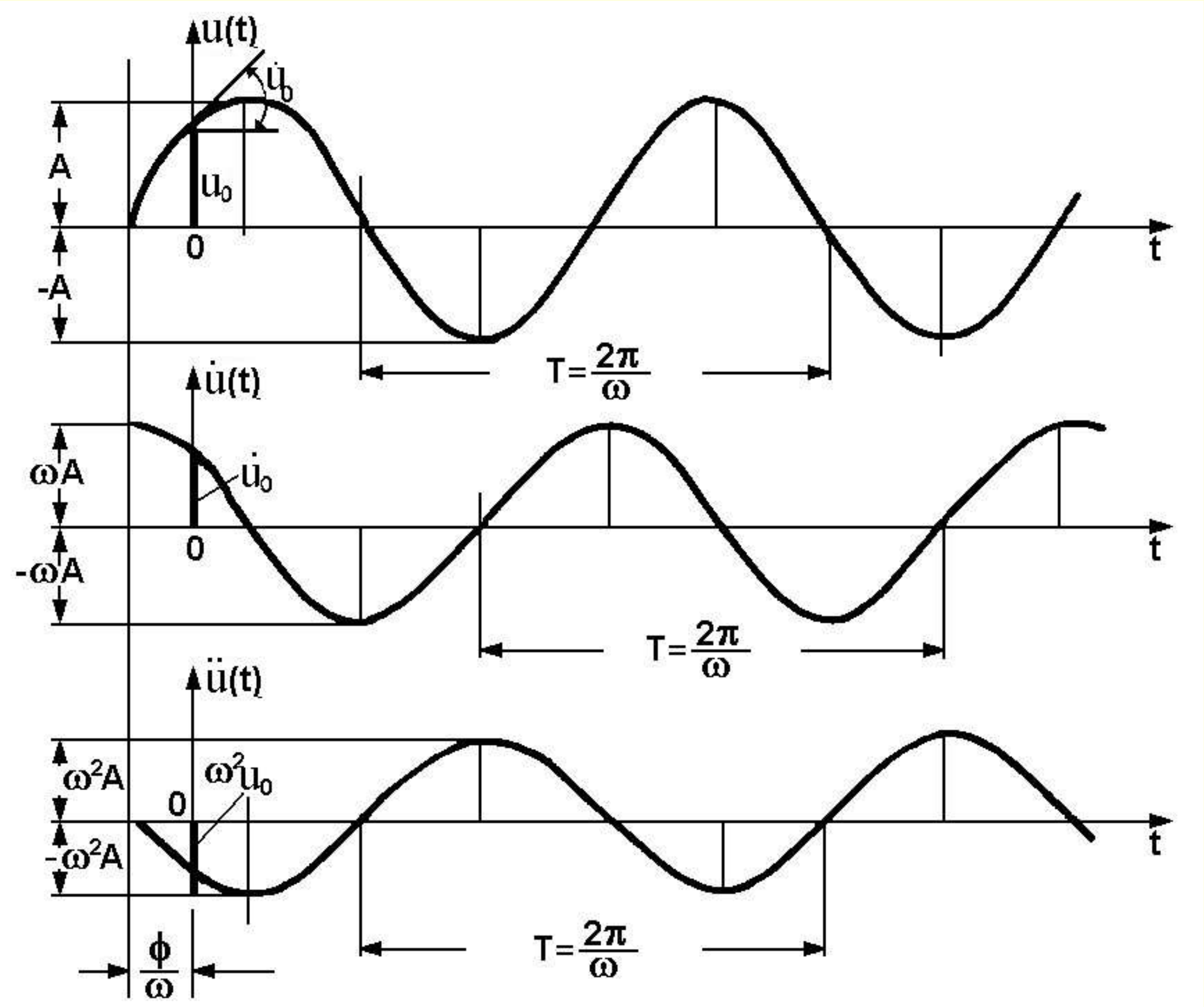


Fig.2.4 Reprezentarea grafica a deplasării, vitezei si accelerației în vibrația liberă neamortizată

Mişcarea descrisă de sistem este periodică, adică se repetă identic după un interval de timp *T,* numit perioadă proprie.

Perioada de variație a funcțiilor trigonometrice *sin* şi *cos* este 2π şi deci se deduce că ***perioada proprie, T,*** a mişcării este:

(2.13)

$$\sin(\omega t+\varphi)=\sin(\omega(t+T)+\varphi)$$

$$\omega t+\omega T+\varphi=\omega t+\varphi=2\pi$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\delta m}=2\pi\sqrt{\frac{\delta}{gG}}\qquad[s]$$

***Frecvența proprie a vibrațiilor*, *f*,** reprezintă numărul de vibrații executate de sistem într-o secundă:

(2.14)

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta G}}\qquad[Hz]$$

Pulsația proprie a sistemului (frecvența circulară), ω, reprezintă numărul de vibrații executat de sistem în 2π secunde:

(2.15)

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta G}}\qquad[s^{-1}]$$

în care:

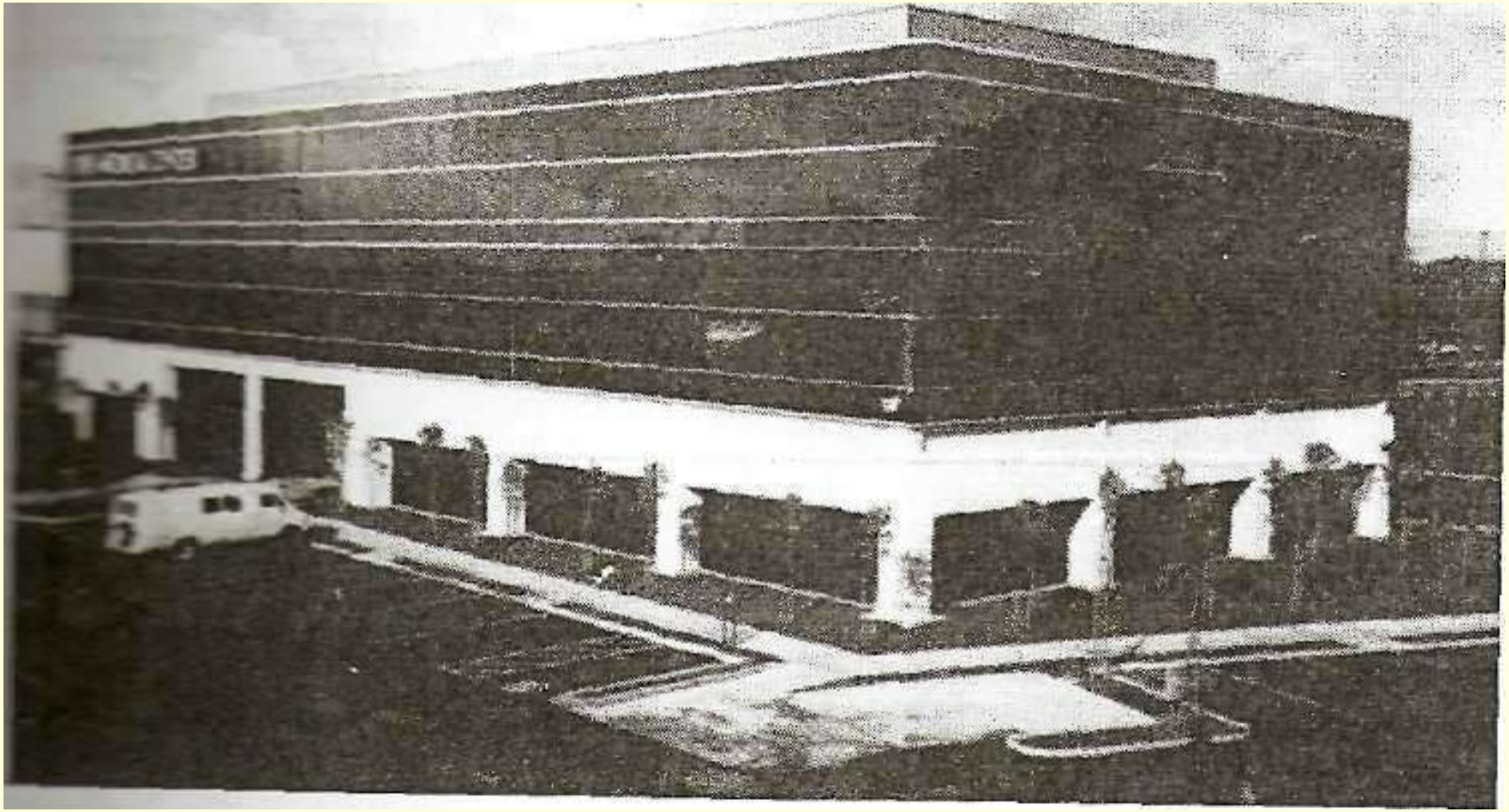
- ***g*** **este accelerația gravitațională,** ***g=9.81 m/s²***

- ***G*** **este greutatea corespunzătoare masei** ***m***

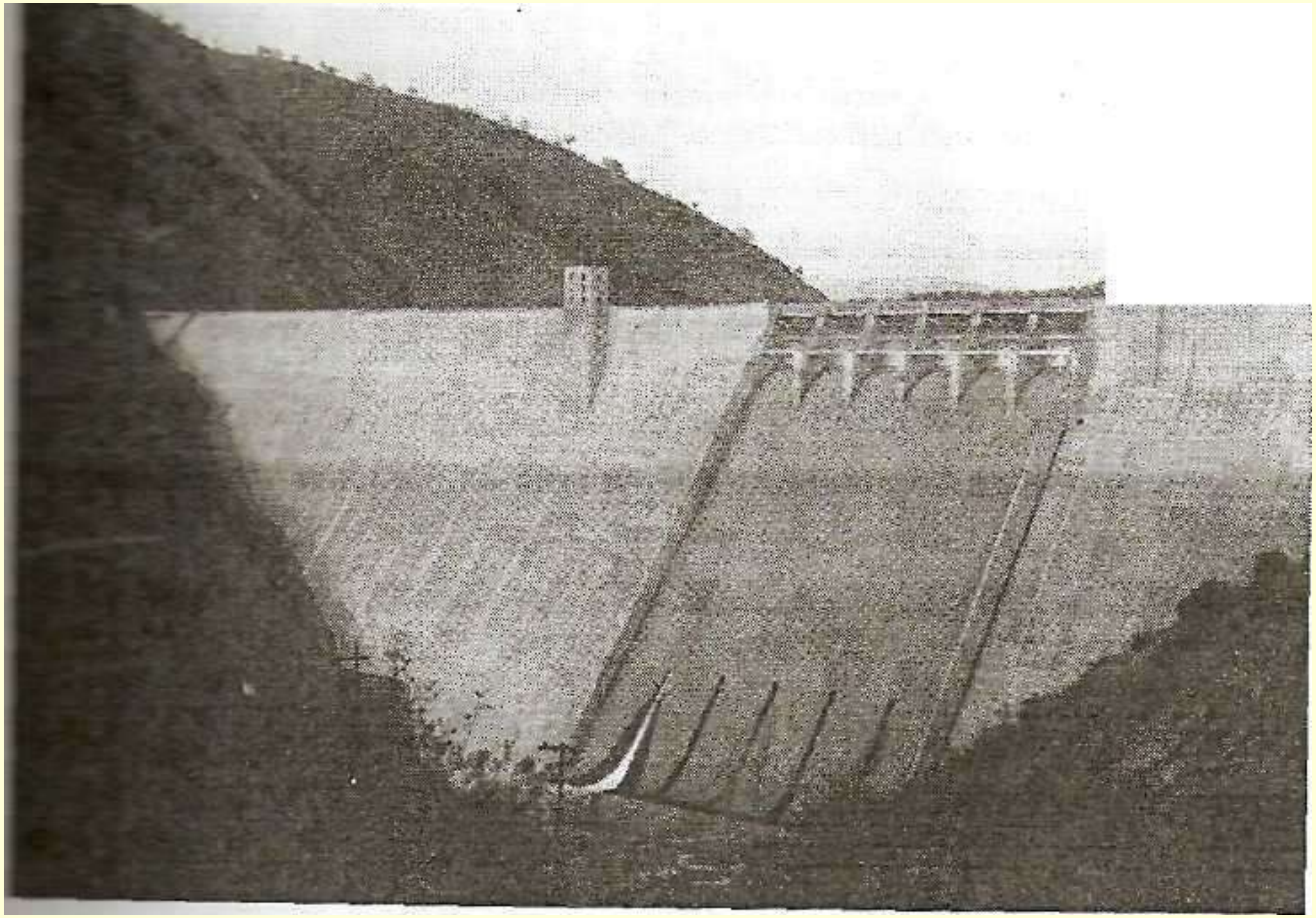
- ***k*** **este rigiditatea sistemului după direcția GLD şi reprezintă forța care produce după această direcție o deplasare egală cu unitatea.**

- δ **este flexibilitatea sistemului şi reprezintă deplasarea care apare după direcția gradului de libertate dinamică produsă de o forță egală cu unitatea ce acționează după aceeaşi direcție**

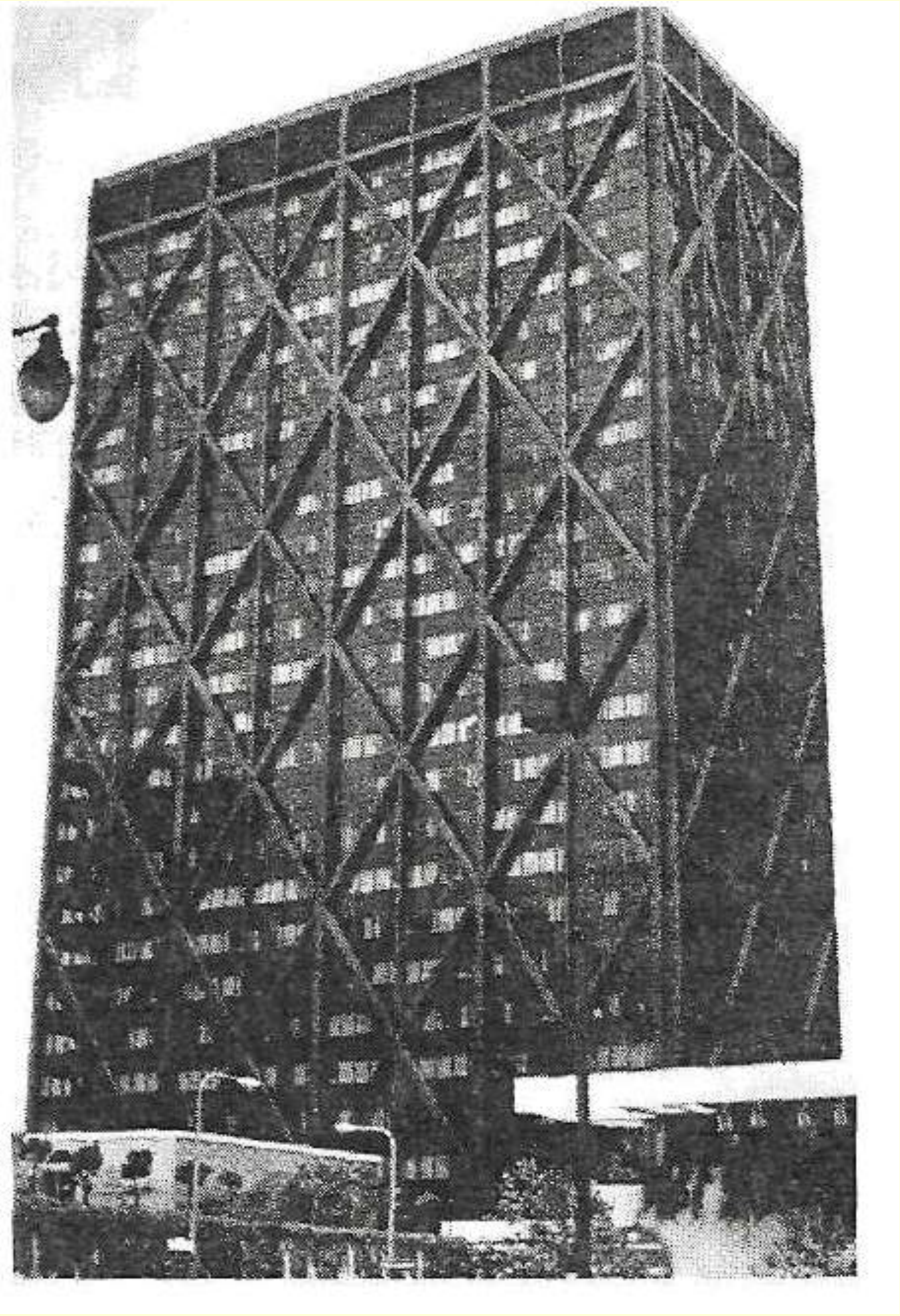
- $u_{st}^{G} = \delta \cdot G$ **reprezintă deplasarea după direcția GLD produsă de forța gravitațională** ***(săgeata statică)*****.**



Medical Center Building. Richmond. California.
The fundamental natural periods of this three-story steel frame building are 0.63 sec for vibration in the long direction. 0.74 sec in the short direction, and 0.46 sec for torsional vibration in about a vertical axis. These vibration properties were determined from motions of recorded during the 1989 Loma Prieta earthquake.

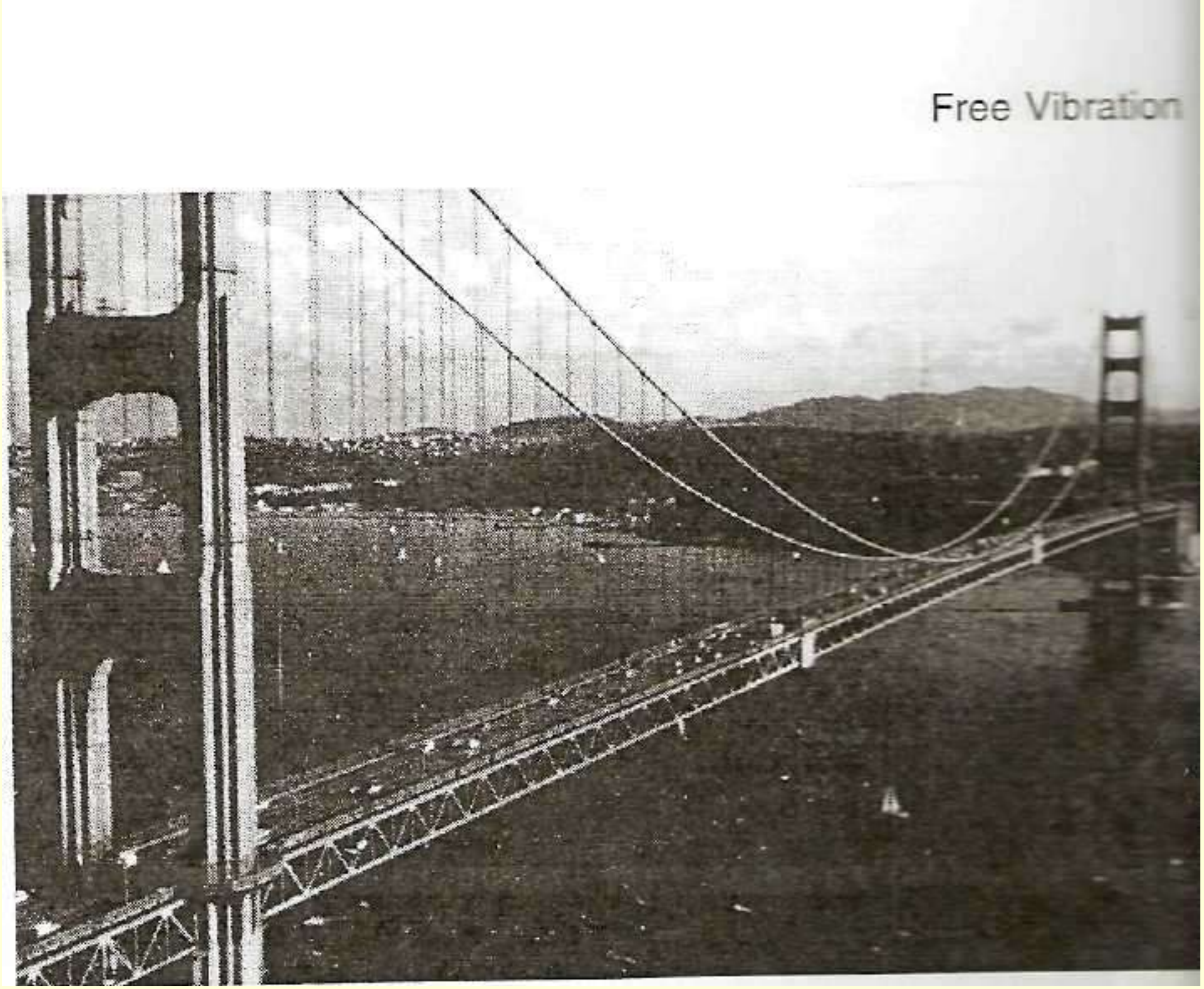


Pine Flat Dam on the Kings River, near Fresno, California.
The fundamental natural vibration period of this 400-ft-high concrete gravity dam was measured by forced vibration tests to be **0.288 s** and **0.306s** with the reservoir depth at 310 ft respectively.



Alcoa Building,
Francisco. California,
The fundamental natural vibration period of this 26-story steel building are **1.67s** for north-south vibration,. **2.21 sec f**or east-west vibration and 1.12 sec for torsional vibration about vertical axis**.**

Transamerica Building San Francisco, California
The fundamental natural vibration period of this 60-story steel building, tapered in elevation, are **2.90s** for north-south vibration also for east-west vibration



Golden Gate Bridge, San Francisco, California.
The fundamental natural vibration periods of this suspension bridge with the main span of 4200 ft are **18.2 s** for transverse vibration, **10.9 s** for vertical vibration. **3.81 s** for longitudinal vibration and **4.43 s** for torsionai vibration.

Aramon – France. Reinforced – concrete chimney

The fundamental natural vibration period of the 250 m-high chimney is **3.57s** (it was determined from records of wind- induced vibration)