SISTEME LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE DINAMICĂ
Vibrații libere amortizate. Soluții în domeniul timp

În cazul în care sistemul posedă capacitate de amortizare mişcarea acestuia încetează după un anumit interval de timp. Prezența amortizării se manifestă prin disiparea energiei în timp.

Modelul de calcul pentru un sistem cu 1GLD care vibrează liber amortizat este prezentat în fig. 2.5a şi 2.5b,

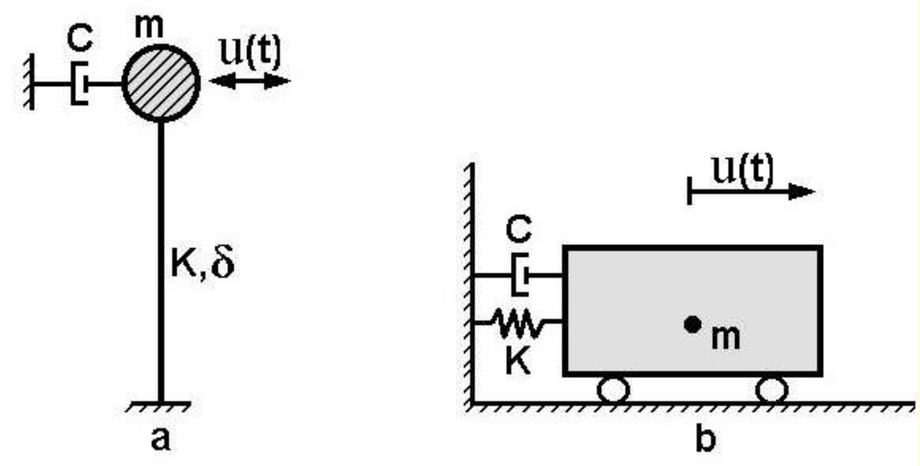


Fig. 2.5 Modelul sistemului cu 1 GLD în vibrația liberă amortizată

Ecuația mişcării este dată de relațiile (2.16) sau (2.17)

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=0 \quad (2.16)$$

sau

$$\ddot{u}(t)+2\beta\dot{u}(t)+\omega^2 u(t)=0 \quad (2.17)$$

unde:

$$2\beta=\frac{c}{m}$$

c este coeficientul de proporționalitate al amortizării sau coeficientul de amortizare vâscoasă.

Se propune o soluție particulară de forma

$$y(t)=Ce^{rt} \quad (2.18)$$

Ecuația caracteristică a ecuației (2.17) are forma:

$$r^2+2\beta r+\omega^2=0 \quad (2.19)$$

şi are soluțiile:

$$r_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega^2} \quad (2.20)$$

Funcție de raportul dintre β şi ω se disting următoarele trei cazuri:

b.1. Amortizare critică

Valoarea coeficientului de amortizare pentru care descriminantul este nul se numeşte coeficient de amortizare critică, c_{cr}.

$\beta_{cr}=\omega$; $c=c_{cr}$

$$\nu = \xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{\beta}{\omega} = 1 \qquad (2.21)$$

$\nu = \xi$ fracțiunea din amortizarea critică

$\boldsymbol{c_{cr}}$ amortizarea critică

$$c_{cr} = 2\beta m = 2m\omega = 2\sqrt{mk} = \frac{2k}{\omega}$$

Coeficientul de amortizare critică este o caracteristică proprie a sistemului oscilant şi se exprimă funcție de caracteristicile acestuia: masă şi rigiditate.

Soluția ecuației mişcării amortizate critic este:

$$u(t) = Me^{r_1 t} + Nte^{r_2 t} = e^{-\beta t}(C_1 + C_2 t) \qquad (2.22)$$

Constantele C1 şi C2 se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \tag{2.23}$$

$$M = u_0 \qquad N = \dot{u}_0 + \omega u_0$$

Soluția finală a ecuației de mişcare este:

$$u(t) = e^{-\omega t}\left(u_0 + \left(\dot{u}_0 + \omega u_0\right)t\right) \tag{2.24}$$

Relația (2.24) arată că mişcarea corespunzătoate acestui caz este aperiodică, după cum se poate observa şi din fig. 2.6 unde este reprezentată grafic mişcarea amortizată critic.

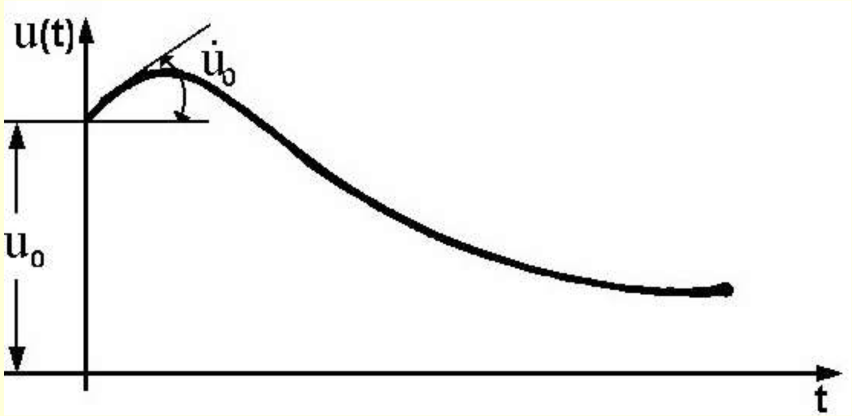


Fig.2.6 Curba deplasărilor în vibrația liberă amortizată critic

b.2. Amortizare supracritică

Atunci când valoarea coeficientului de amortizare este mai mare decât coeficientul de amortizare critică se consideră că sistemul are amortizare supracritică.

$$c > c_{cr}\ ;\ \beta > \omega\ ;\ \xi = \nu > 1$$

Rădăcinile ecuației caracteristice (2.19) sunt reale şi negative:

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \tag{2.25}$$

Se propune o soluție de forma

$$u(t) = Me^{r_1 t} + Ne^{r_2 t} \tag{2.26}$$

sau

$$u(t) = e^{-\beta t}\left(M\, e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2 t}} + N\, e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2 t}}\right) \tag{2.27}$$

Constantele *A* şi *B* se determină din condițiile inițiale

$$M=\frac{\dot{u}_0+u_0\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega^2}\right)}{2\sqrt{\beta^2-\omega^2}};\qquad N=-\frac{\dot{u}_0+u_0\left(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega^2}\right)}{2\sqrt{\beta^2-\omega^2}} \qquad (2.28)$$

Curba din fig. 2.7 reprezintă mişcarea unui sistem cu 1GLD în vibrația liberă amortizată supracritic care este o mişcare aperiodică.

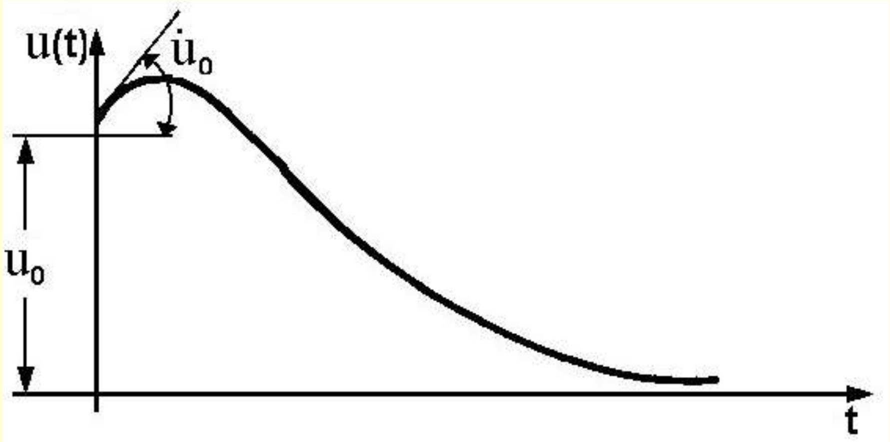


Fig. 2.7 Curba deplasărilor în vibrația liberă amortizată supracritic

b.3. Amortizare subcritică

Acesta este cazul care interesează pentru structurile de construcții

$c<c_{cr}$; $\beta<\omega$; $\xi=\nu<1$

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt complexe conjugate

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \qquad (2.29)$$

sau

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\omega^* \qquad (2.30)$$

unde ω^* este pseudopulsația şi are expresia:

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \qquad (2.31)$$

Soluția oscilației libere amortizate subcritic este dată de ecuațiile (2.32) sau (2.34):

$$u(t) = e^{-\beta t}(Me^{i\omega^* t} + Ne^{-i\omega^* t}) \qquad (2.33)$$

sau

$$u(t) = e^{-\beta t}(C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) \qquad (2.32)$$

în care M, N sau C_1 şi C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t=0 \qquad u(o)=u_0 \qquad \dot{u}(0)=\dot{u}_0$$

$$C_1=\frac{\dot{u}_0+\beta u_0}{\omega^*} \qquad C_2=u_0$$

Soluția ecuației se mai poate scrie sub forma:

$$u(t)=e^{-\beta t}\left(\frac{\dot{u}_0+\beta u_0}{\omega^*}\sin\omega^* t+u_0\cos\omega^* t\right) \qquad sau \qquad (2.34)$$

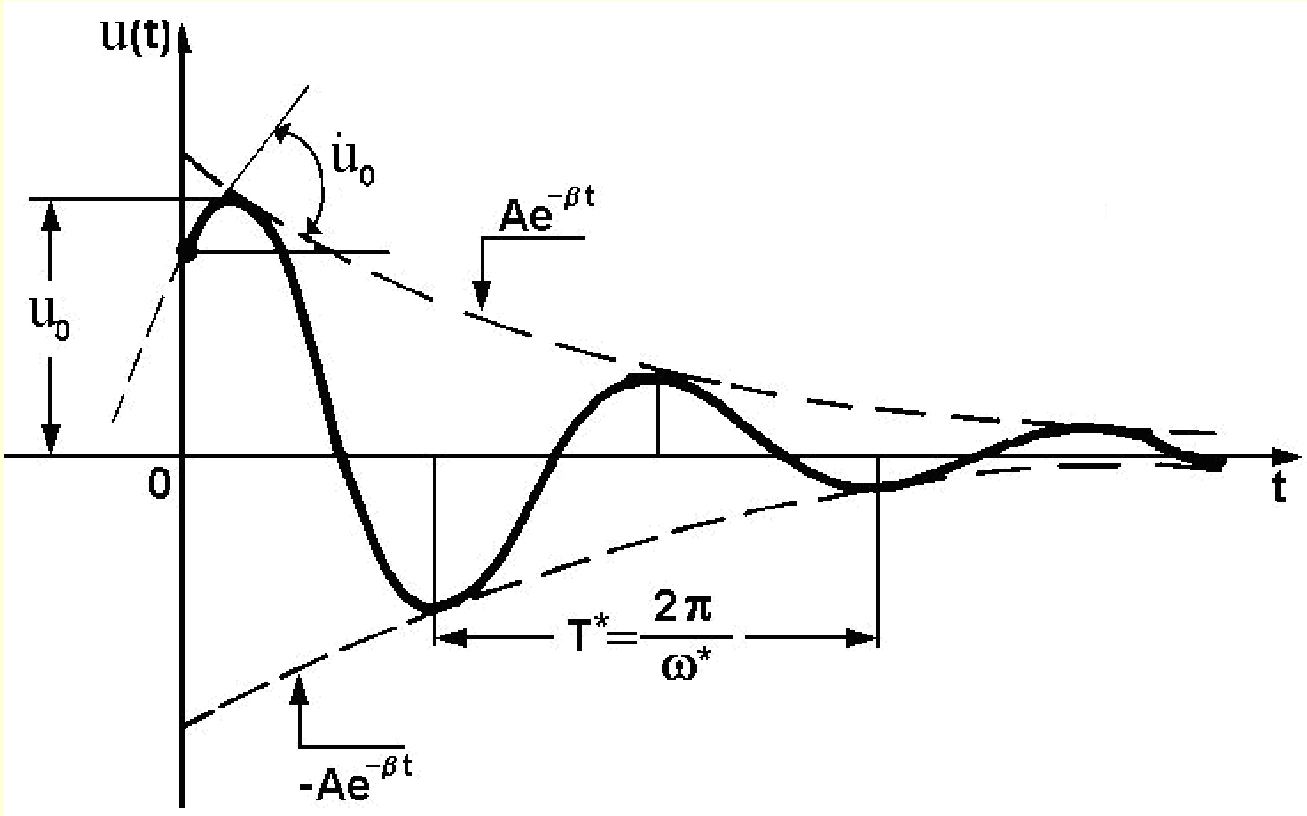
$$u(t)=Ae^{-\beta t}\sin(\omega^* t+\phi^*)$$

unde

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0+\beta u_0}{\omega^*}\right)^2+u_0^2}$$

$$\phi^*=arctg\,\frac{C_2}{C_1}=\frac{u_0\omega^*}{\dot{u}_0+\beta u_0} \qquad (2.35)$$

Mişcarea descrisă de ecuația (2.34) este o mişcare armonică de pulsație ω^* şi de amplitudine $A^{e-\beta t}$ care descreşte exponențial cu timpul (o asemenea mişcare se mai numeşte pseudoarmonică) şi este reprezentată în figura următoare



u(t)
$\dot{u}_0$
$Ae^{-\beta t}$
u_0
0
t
$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$
$-Ae^{-\beta t}$

Decrementul logaritmic al amortizării, Δ, reprezintă logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive decalate cu o perioadă

$$u_n = Ae^{-\beta t_n} \qquad u_{n+1} = Ae^{-\beta t_{n+1}} \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\beta T^*} \tag{2.36}$$

$$\Delta = \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = \beta T^* = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\xi$$

unde T* este pseudoperioada

Structurile de construcții au fracțiunea din amortizarea critică mai mică de 20% (tabelul nr.1) şi deci se poate neglija influența amortizării asupra caracteristicilor proprii ale sistemului, astfel ca:

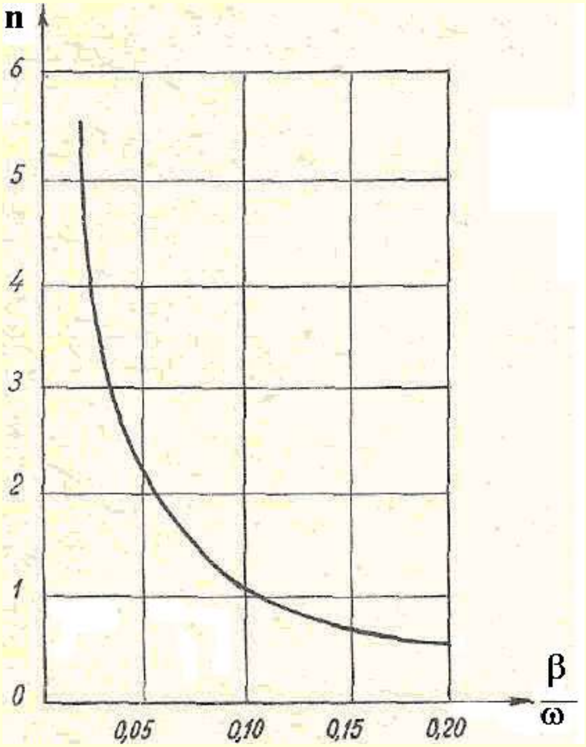
$$\omega^* \approx \omega \qquad T^* \approx T \qquad f^* \approx f \tag{2.37}$$

$$\omega^* = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \qquad T^* = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad f^* = f\sqrt{1-\zeta^2}$$

Decrementul logaritmic al amortizării se poate determina şi cu relația

$$\Lambda = \frac{1}{n}\ln\frac{u_0}{u_n} = 2\pi\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{n}\ln z$$

unde n reprezintă numărul de cicluri după care amplitudinea scade de un număr de ori z



Nr.crt.	Tipul structurii	Fracțiunea din amortizarea critică, ξ
1	Construcții cu structura din beton armat monolit	0.02...0.14
2	Construcții cu structura din zidărie sau prefabricate	0.06...0.18
3	Construcții cu structură metalică	0.02...0.08
4	Poduri de beton armat	0.03...0.16
5	Poduri metalice	0.02...0.08
6	Construcții masive	0.05...0.10
7	Terenuri de fundație	0.06...0.30
8	Nisip compact	0.10