2.2.3. Vibrații forțate. Soluții în domeniul timp
a. Vibrații forțate neamortizate.

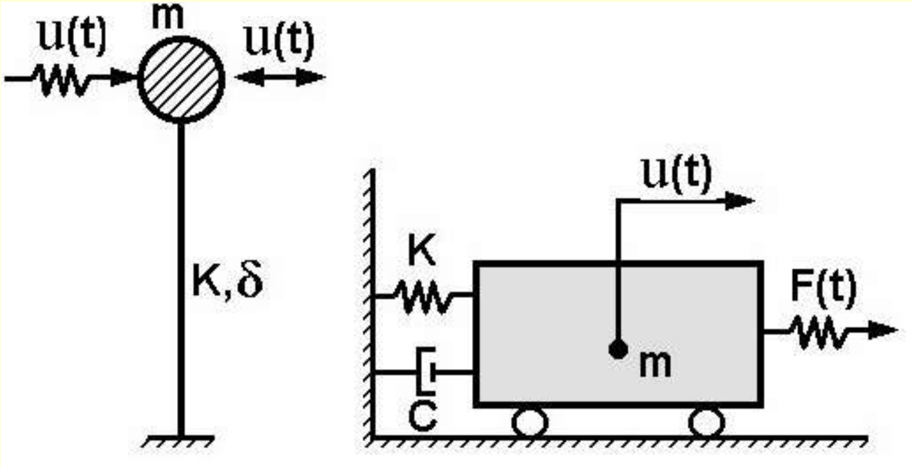


Fig. 2.11 Modelul de calcul al sistemului cu 1GLD în vibrația forțată neamortizată

Ecuația mişcării unui sistem cu 1GLD supus unei acțiuni exterioare oarecare *F(t)* corespunzătoare modelului de calcul din fig. 2.11 este:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F(t) \qquad (2.52)$$

Dacă forța exterioară este de forma :

$$F(t) = F_0 f(t) \qquad (2.53)$$

atunci ecuația (2.52) se mai poate scrie:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F_0}{m} f(t) \qquad (2.54)$$

Acțiunea *F(t)* poate fi considerată ca o succesiune de impulsuri elementare

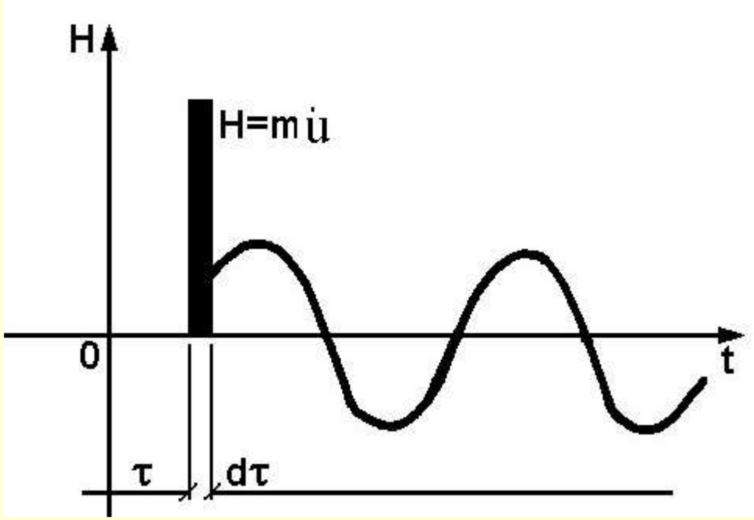
$dH = F(\tau)\, d\tau$ pentru $0 \le \tau \le \tau$ (2.55)

şi deci:

$$du(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} f(\tau) \sin\omega(t-\tau) d\tau \qquad pentru \tau > t \qquad (2.56)$$

Răspunsul sistemului la acțiunea unui impuls finit *H* este :

$$u(t) = \frac{H}{m\omega} \sin\omega(t-\tau) \qquad pentru\ \tau > t \qquad (2.57)$$



reprezentarea grafică fiind cea din fig. 2.12.

Fig. 2.12 Răspunsul în deplasări la un impuls finit

Soluția mişcării unui sistem cu 1GLD în vibrația forțată neamortizată, când forța exterioară este de forma (2.53) este dată de:

$$u(t)=\frac{F_0}{m\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \tag{2.58}$$

Reprezentarea grafică a ecuației (2.58) este cea din fig. 2.13.

Integrala din relația (2.58) poartă numele de integrala de convoluție sau integrala Duhamel.

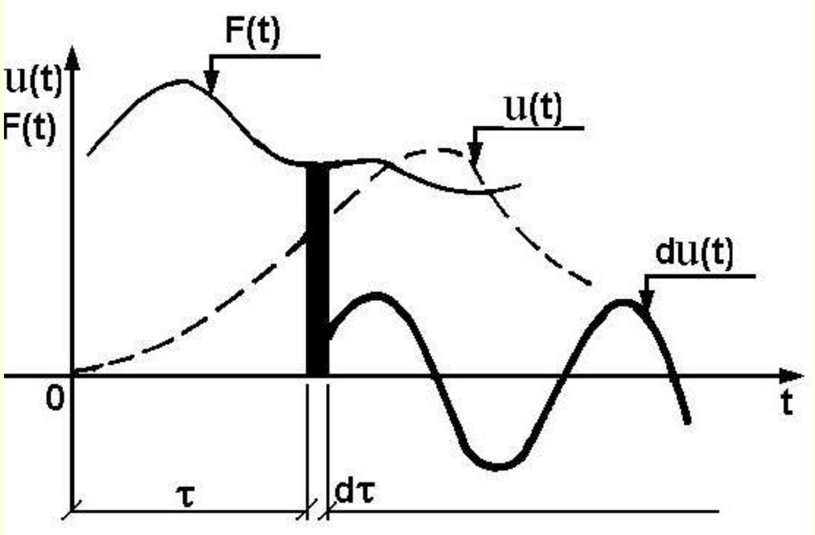


Fig. 2.13 Răspunsul în deplasări la o forță exterioară F(t)

b. Vibrații forțate amortizate

Modelul de calcul şi ecuația mişcării sunt reprezentate în fig. 2.14 şi respectiv ecuația (2.59):

$$m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=F(t) \tag{2.59}$$

în cazul acțiunii unui impuls *H* soluția are forma :

$$u(t)=\frac{H}{m\omega^*}e^{-\beta(t-\tau)}\sin\omega^*(t-\tau) \tag{2.60}$$

iar curba deplasărilor este dată de fig. 2.15.

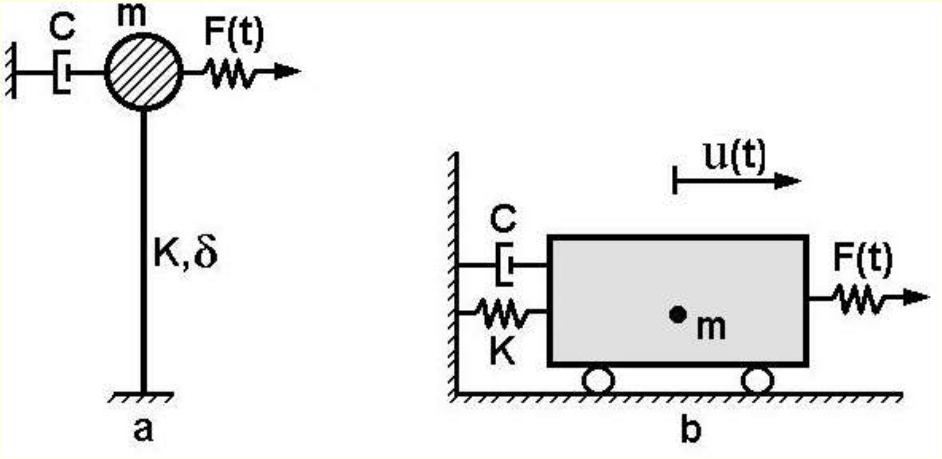


Fig. 2.14 Modelul de calcul în vibrația forțată amortizată acțiunea unui impuls

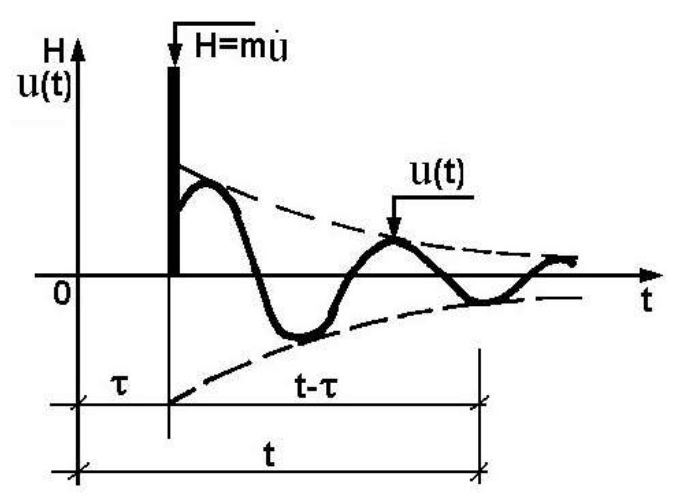


Fig. 2.15 Răspunsul în deplasări

Dacă sistemul este supus unei acțiuni perturbatoare oarecare *$F(t)=F_0 f(t)$* atunci ecuația mişcării este:

$$u(t)=\frac{F_0}{m\omega^*}\int_0^t f(\tau)e^{-\beta(t-\tau)}\sin\omega^*(t-\tau)d\tau \qquad (2.61)$$

În fig. 2.16 este reprezentată grafic la soluția ecuației (2.61).

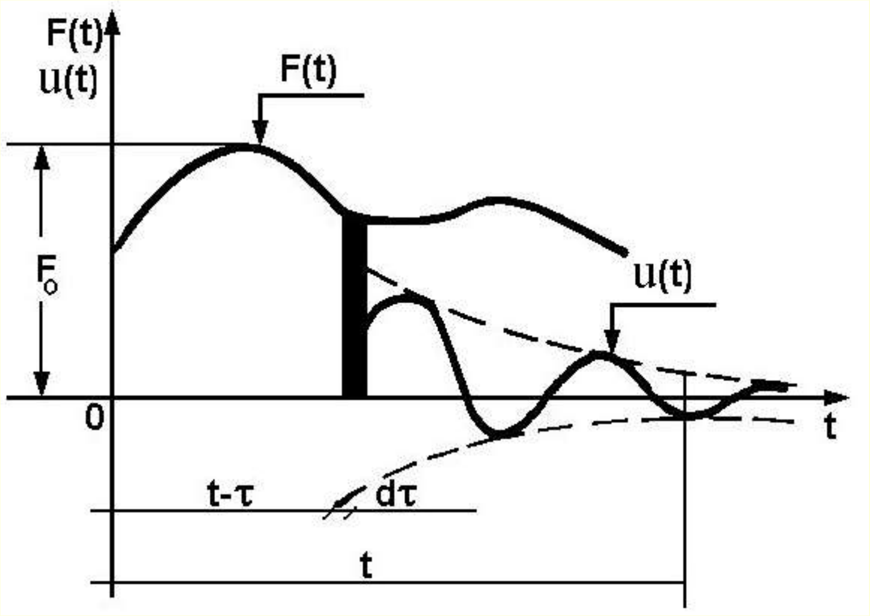


Fig. 2.16 Curba deplasărilor la o acțiune exterioară oarecare

Vibrații forțate armonice fără amortizare

Forța exterioară este de forma

$$F(t) = F_0 \sin \theta t \tag{2.62}$$

Ecuația mişcării în vibrația forțată armonică fără amortizare este:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \tag{2.63}$$

a cărei soluție generală este compusă din soluția în vibrația liberă neamortizată, u$_L$*(t),* şi soluția particulară a oscilației forțate, u$_F$*(t),* şi care are forma:

$$u(t) = u_L(t) + u_F(t) \tag{2.64}$$

Soluția în vibrația liberă are expresia:

$$u_L(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \tag{2.65}$$

iar soluția în vibrația forțată armonică are caracter staționar şi permanent şi este tot armonică de forma:

$$u_F(t) = M \sin \theta t + N \cos \theta t \tag{2.66}$$

Constantele M şi N se deretmină din condiția ca această soluție să satisfacă ecuația mişcării

$$\ddot{u}_F(t) = -(M\theta^2 \sin\theta t + N\theta^2 \cos\theta t) \tag{2.67}$$

$$-(M\theta^2 \sin\theta t + N\theta^2 \cos\theta t) + \omega^2 (M \sin\theta t + N \cos\theta t) = \frac{F_0}{m} \sin\theta t \tag{2.68}$$

$$M = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}; \qquad N = 0 \tag{2.69}$$

Soluția particulară este dată de:

$$u_F(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin\theta t \tag{2.70}$$

Iar soluția generală este:

$$u(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin\theta t \tag{2.71}$$

Constantele *C1* şi *C2* se determină din condițiile inițiale:

$$\dot{u}(t) = \omega C_1 \cos\omega t - \omega C_2 \sin\omega t + \frac{\theta F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\cos\theta t \tag{2.72}$$

$$t = 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$

Rezultă:

$$C_1 = \frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{\theta}{\omega}\frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\cos\theta t \qquad C_2 = u_0 \qquad \text{2.73)}$$

Soluția generală se poate scrie:

$$u(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t + u_0\cos\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\left(\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{2.74}$$

Dacă la timpul *t=0* atât deplasarea cât şi viteza sunt egale cu zero atunci soluția ecuației de mişcare este:

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\left(\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{2.75}$$

$$\frac{F_0}{m(\omega^2-\theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2[1-(\frac{\theta}{\omega})^2]} = \frac{1}{1-(\frac{\theta}{\omega})^2}\frac{F_0}{k} = D\Delta_{st} \tag{2.76}$$

unde $$D = \mu = \frac{1}{1-(\frac{\theta}{\omega})^2} \tag{2.77}$$

D sau $\boldsymbol{\mu}$ se numeşte coeficient de amplificare dinamică

$\boldsymbol{\Delta_{st}}$ este deplasarea statică după direcția GLD produsă de amplitudinea forței exterioare perturbatoare, F_0.

În realitate răspunsul liber se amortizează foarte repede, mişcarea se stabilizează şi rămâne numai influența răspunsului forțat. Soluția mişcării în acest caz devine:

$$u(t) = \mu\Delta_{st}\sin\theta t = u_d \sin\theta t \qquad u_d = \mu\Delta_{st} \tag{2.78}$$

Forța dinamică este dată de forța de inerție şi de forța exterioară perturbatoare

$$F_d = F(t) + F_{in}(t) = F_0 \sin\theta t + m\theta^2\mu\Delta_{st}\sin\theta t$$

$$F_d = F_0 + m\theta^2\mu\frac{F_0}{k} = F_0\left[1+\mu\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right] = \mu F_0 = DF_0 \tag{2.79}$$

Vibrații forțate armonice amortizate

În situațiile în care forța exterioară este armonică de forma :

$$F(t) = F_0 \sin \theta t \tag{2.80}$$

ecuația de mişcare este:

$$\ddot{u}(t) + 2\beta\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \tag{2.81}$$

iar soluția generală va fi :

$$u(t) = u_L(t) + u_F(t) \tag{2.82}$$

Soluția în vibrația liberă este

$$u_L(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \tag{2.83}$$

iar soluția în vibrația forțată este

$$u_F(t) = M^* \sin \theta t + N^* \cos \theta t \tag{2.84}$$

Constantele M* şi N* se determină din condiția ca soluția $y_F(t)$ să satisfacă ecuația de mişcare (2.84)

$$M^* = \frac{F_0}{m}\frac{\omega^2-\theta^2}{(\omega^2-\theta^2)^2+4\beta^2\theta^2} \qquad N^* = -\frac{F_0}{m}\frac{2\beta\theta}{(\omega^2-\theta^2)^2+4\beta^2\theta^2} \tag{2.85}$$

Soluția $y_F(t)$ reprezintă o suprapunere de două oscilații armonice de pulsație θ şi deci ea se mai poate scrie:

$$u_F(t) = A^*\sin(\theta t-\varphi^*)$$

$$A^* = \sqrt{M^{*2}+N^{*2}} \qquad tg\varphi^* = -\frac{N^*}{M^*} \tag{2.86}$$

Amplitudinea A^* are expresia:

$$A^* = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\theta^2)^2+4\beta^2\theta^2}} \qquad tg\varphi^* = \frac{2\beta\theta}{(\omega^2-\theta^2)^2} \tag{2.87}$$

Soluția stabilă a mişcării este :

$$u(t)=\frac{F_0}{m\omega}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}\sin(\theta t-\phi) \qquad (2.88)$$

Dacă se notează

$$D(t)=\mu(t)=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}\sin(\theta t-\phi) \qquad (2.89)$$

unde *D(t)* este funcția de multiplicare (amplificare) dinamică şi

$$D^*=\mu^*=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}\,, \qquad tg\varphi^*=\frac{2\zeta\frac{\theta}{\omega}}{1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \qquad (2.90)$$

unde: *D** factor de amplificare dinamică sau coeficient dinamic

$\varphi*$ unghi de fază

Soluția mişcării devine: $u(t) = D(t)\dfrac{F_0}{m\omega^*}$

(2.91)

Variația coeficientului dinamic funcție de raportul θ/ω este reprezentată în fig.2.17.

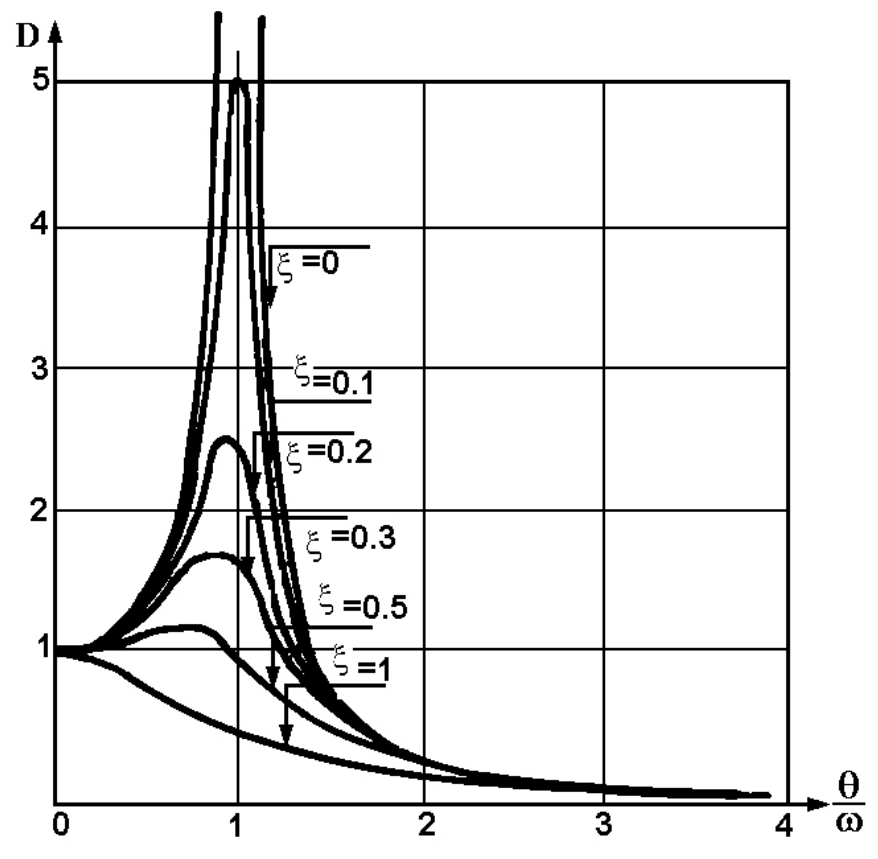


Fig. 2.17 Variația coeficientului dinamic funcție de θ/ω

Din fig. 2.17 se poate observa că influența amortizării este mai puternică în zona $\theta/\omega =1$ (zona rezonanței) şi că pentru valori mici ale pulsației θ coeficientul dinamic este egal cu 1, iar pentru valori mari ale pulsației θ coeficientul dinamic tinde către zero.

Variația unghiului de fază, ϕ, funcție de θ/ω este reprezentată în fig.2.18.

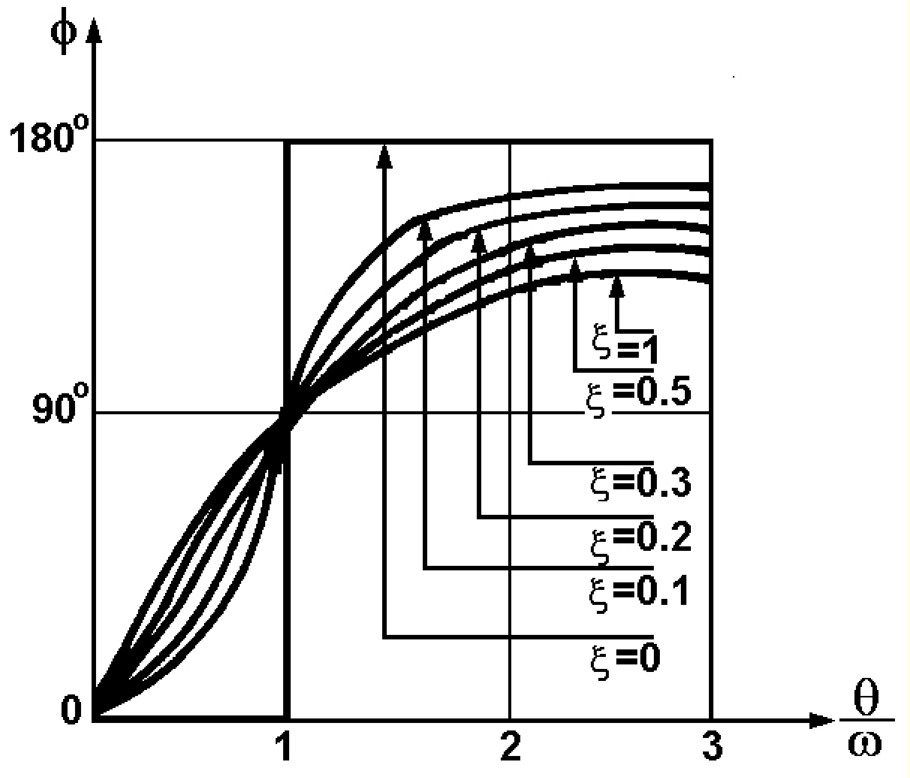


Fig. 2.18 Variația unghiului de fază funcție de θ/ω