SISTEME LINIARE CU UN NUMĂR FINIT DE GRADE DE LIBERTATE DINAMICĂ

Structurile reale se pot transforma, pe baza unei modelări corespunzătoare, în sisteme oscilante discrete cu un număr limitat de grade de libertate dinamică. Modelul de calcul sau modelul discret simplificat va reflecta cât mai fidel comportarea sistemului real, astfel încât configurația deformatelor dinamice să fie evaluate cu cât mai multă exactitate.

Masele concentrate provin din masa proprie a structurii, din masele unităților nestructurale precum şi din masele încărcărilor adiționale. Modelarea disipativă va fi reprezentate prin prezența amortizării, iar modelarea elastică va fi reprezentată prin intermediul proprietăților de rigiditate sau de flexibilitate.

Caracteristicile primare de definire ale modelului de calcul dinamic vor fi:

[M] matricea de inerție (a maselor),

[C] matricea de amortizare,

[K] matricea de rigiditate laterală (dinamică),sau

[D] matricea de flexibilitate laterală (dinamică)

Se admite că sistemul dinamic are o comportare liniară (fizică şi geometrică) şi deci se vor aplica pricipiile superpoziției şi proporționalității.

Dacă se utilizează metodele mecanicii corpurilor deformabile se pot formula condițiile de echilibru dinamic, exprimate pe poziția deformată instantanee, folosind principiul lui d’Alembert

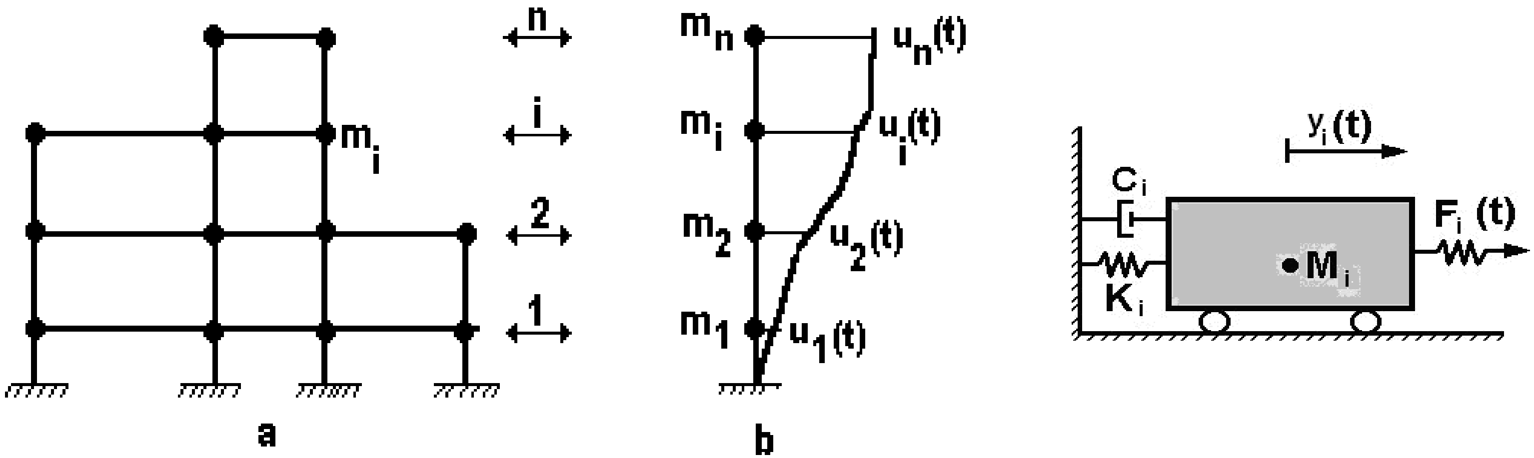


Fig.3.1

După cum se vede în fig.3.1 forțele care acționează după direcția fiecărui grad de libertate dinamică de translație sunt: forța exterioară *Fi(t)*, şi trei forțe generate de mişcare: forța de inerție $F_{i,\,in}(t)$, forța de amortizare $F_{a,\,i}(t)$ şi forța de revenire a resortului elastic $F_{e,\,i}(t)$.

Ecuația mişcării exprimă echilibrul acestor sisteme de forțe şi se scrie astfel:

$$-\bar{F}_{i,in}(t) + \bar{F}_{a,i}(t) + \bar{F}_{e,i}(t) = \bar{F}_{i}(t) \qquad (3.1)$$

unde:

$F_{i,in}(t) = [M]\{\ddot{u}_i(t)\}$ vectorul forțelor de inerție

$F_{a,i}(t) = [C]\{\dot{u}_i(t)\}$ vectorul forțelor de amortizare

$F_{e,i}(t) = [K]\{u_i(t)\}$ vectorul forțelor de revenire (elastice)

$F_i(t)$ vectorul forțelor exterioare perturbatoare

Sistemul de ecuații de mişcare pentru un sistem liniar discret cu nGLD, fig. 3.1 se poate scrie:

$$[M]\{\ddot{u}_i(t)\}+[C]\{\dot{u}_i(t)\}+[K]\{u_i(t)\}=\{F_i(t)\} \qquad (3.2)$$

unde:

$\{\ddot{u}_i(t)\}$ vectorul coloană al accelerațiilor

$\{ú_i(t)\}$ vectorul coloană al vitezelor

$\{u_i(t)\}$ vectorul coloană al deplasărilor

$\{F_i(t)\}$ vectorul forțelor exterioare

Vibrații libere. Valori şi vectori proprii
Metoda matricei de rigiditate laterală

Pentru determinarea frecvențelor naturale (valorile proprii) şi a formelor proprii de vibrație (vectorii proprii) se consideră că sistemul vibrează liber neamortizat. În acest caz sistemul de ecuații de mişcare este:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\}+[K]\{u(t)\}=\{0\} \tag{3.3}$$

Acceptând o soluție de forma:

$$\{u(t)\}=\{U\}\sin(\omega t+\varphi) \tag{3.4}$$

unde: $\{U\}$ vector arbitrar
ω pulsație proprie
φ unghi de fază

sistemul (2.83) devine:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{U\}\sin(\omega t+\varphi)=\{0\} \tag{3.5}$$

Sistemul (3.5) trebuie să aibă soluții nebanale pentru toate valorile lui *t*

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{U\}=\{0\} \qquad (3.6)$$

după preânmulțirea la stânga cu $[M]^{-1}$:

$$\left([M]^{-1}[K]-\omega^2[I]\right)\{U\}=\{0\} \qquad (3.7)$$

unde: $[I]=[M]^{-1}[M]$ matrice unitate

$[\tilde{M}]=[M]^{-1}[K]$ matrice dinamică

Sistemul de ecuații (3.7) este cunoscut şi sub numele de "*problema valorilor proprii generalizată*" dacă se pune sub forma:

$$\left([\tilde{M}]-\lambda[I]\right)\{U\}=\{0\} \qquad (3.8)$$

în care $\boldsymbol{\lambda = \omega^2}$.

Sistemul de ecuații (3.7) sau (3.8) fiind omogen pentru a avea soluții diferite de soluția banală este necesar ca determinantul coeficienților să fie nul:

$$\left|[\tilde{M}]-\lambda[I]\right|=0 \tag{3.9}$$

Ecuația (3.9), numită şi ecuație caracteristică, se mai poate scrie, după dezvoltarea determinantului, astfel:

$$\lambda^{n}+C_{1}\lambda^{n-1}+C_{2}\lambda^{n-2}+\ldots\ldots+C_{n}=0 \tag{3.10}$$

Rădăcinile λ_i ale ecuației (3.10) se numesc **"valori proprii"** iar pulsațiile naturale neamortizate se determină din relația:

$$\lambda_i=\omega_i^2 \qquad i=1,N_m \tag{3.11}$$

Înlocuind λ_i in sistemul (2.88) se obțin vectorii proprii corespunzători sau formele proprii de oscilație notate $\{U_i\}$.

Un vector $\{U_i\}$ reprezintă modul de deformare al structurii pentru pulsația naturală corespunzătoare, ω_i^2.

Deoarece sistemul de ecuații (3.7) este omogen nu există o soluție unică pentru $\{U_i\}$ şi deci se poate obține un raport între componentele vectorului $\{U_i\}$.

Astfel, forma proprie este definită de raportul amplitudinile mişcărilor diferitelor puncte de pe structură când aceasta este excitată cu frecvența sa proprie.

Pulsația naturală ω_i împreună cu forma proprie de oscilație $\{U_i\}$ alcătuiesc modul propriu de oscilație *i.*

Matricea spectrală este constituită din pulsațiile naturale şi are forma:

$$[\Omega] = [\omega_i^2] \tag{3.12}$$

Matricea modală se formează din formele de vibrație corespunzătoare:

$$[U] = [\{U_1\},\{U_2\},\ldots,\{U_i\},\ldots\{U_N\}] \tag{3.13}$$

0 valoare proprie, λ_i, şi vectorul propriu corespunzător, $\{U_i\}$ satisfac sistemul de ecuații (3.6), adică:

$$[K]\{U_i\} = \lambda_i [M]\{U_i\} \tag{3.14}$$

Preânmulțind la stânga cu transpusul unui alt mod, *j*, se obține:

$$\{U_j\}^T[K]\{U_i\} = \lambda_i \{U_j\}^T[M]\{U_i\} \qquad (2.95)$$

Acelaşi lucru se poate face pentru o valoare proprie *j* şi vectorul propriu corespunzător *{U_j}* şi transpusul vectorului *i:*

$$\{U_i\}^T[K]\{U_j\} = \lambda_i \{U_i\}^T[M]\{U_j\} \qquad (2.96)$$

Deoarece *[M]* şi *[K]* sunt matrice simetrice se mai poate scrie:

$$\{U_j\}^T[K]\{U_i\} = \{U_i\}^T[K]\{U_j\} \qquad (2.97)$$

$$\{U_j\}^T[M]\{U_i\} = \{U_i\}^T[M]\{U_j\}$$

Scăzând ecuația (2.96) din (2.95) se obține

$$(\lambda_j - \lambda_i)\{U_i\}^T[M]\{U_j\} = 0 \qquad (2.98)$$

Dacă $\lambda_i \neq \lambda_j$, atunci

$$\{U_i\}^T[M]\{U_i\} = 0 \qquad (2.99)$$

$$\{U_i\}^T[K]\{U_i\} = 0 \qquad (2.100)$$

Din punct de vedere energetic relațiile (2.99) şi (2.100) arată că lucru mecanic al forțelor de inerție corespunzătoare unui mod propriu de vibrație *i*, atunci când ele parcurg cu întreaga lor intensitate deplasările corespunzătoare altui mod, este nul; cu alte cuvinte, *nu poate avea loc un transfer de energie de la un mod propriu la alt mod propriu de vibrații*.

Când una dintre componentele vectorului este aleasă arbitrar atunci restul de (N_{m-1}) componente sunt determinate din raportul dintre două componente, raport ce este constant:

$$\{ Y_i \}^T [M]\{ Y_i \} = const . \tag{2.101}$$

Procesul de ajustare a componentelor formelor proprii este numit *"normalizare"* iar formele proprii scalate care rezultă se numesc *"forme ortonormate"*.

Există mai multe căi de normalizare a formelor proprii, şi anume:

a) constanta din ecuația (2.101) să fie egală cu 1;

b) cea mai mare componentă a formei proprii să fie egală cu 1 (ceea ce este convenabil pentru desenarea formei proprii);

c) o componentă particulară a formei să fie egală cu 1;

d) lungimea vectorului propriu să fie egal cu 1.

Vibrații libere amortizate

Sistemul de ecuații în cazul mişcării libere amortizate pentru un sistem cu nGLD este:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\}+[C]\{\dot{u}(t)\}+[K](u(t)\}=\{0\} \tag{2.102}$$

unde *[C]* este matricea de amortizare (vâscoasă echivalentă).

Facem schimbarea de variabilă:

$$\{u(t)\}=[\Upsilon]\{q(t)\}=\sum_{i=1}^{N}\Upsilon_i q_i \tag{2.103}$$

unde *{q(t)}* reprezintă vectorul coordonatelor generalizate (sau coordonate normale sau modale).

Sistemul de ecuații (2.102), după schimbarea de variabilă (2.103) şi preînmulțirea lui cu $[U]^T$, devine:

$$[U]^T[M][U]\{\ddot{q}(t)\}+[U]^T[C][U]\{\dot{q}(t)\}+[U]^T[K][U]\{q(t)\}=\{0\} \tag{2.104}$$

Notăm: $[M_g] = [Y]^T[M][Y]$ matricea maselor generalizată

$[C_g] = [Y]^T[C][Y]$ matricea de amortizare generalizată (2.105)

$[K_g] = [Y]^T[K][Y]$ matricea de rigiditate generalizată

Matricele $[M]$, $[C]$, $[K]$ sunt matrice simetrice şi deci $[M_g]$, $[C_g]$, $[K_g]$ vor rezulta diagonale. Sistemul de ecuații (2.104) devenind:

$$[M_g]\{\ddot{q}(t)\} + [C_g]\{\dot{q}(t)\} + [K_g]\{q(t)] = \{0\} \tag{2.106}$$

iar a "i" -a ecuații se poate scrie:

$$m_i \ddot{q}_i(t) + c_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = 0 \tag{2.107}$$

sau

$$\ddot{q}_i(t) + 2\nu_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \tag{2.108}$$

Sistemul de n ecuații dependente corespunzătoare sistemului cu nGLD (2.102), s-a decuplat intr-un sistem de N_m ecuații independente, fiecare ecuație reprezentând mişcarea liberă amortizată pentru GLD corespunzător.

Soluția ecuației (2.108) este de forma:

$$q_i = e^{-\nu\omega_i^*}\left(\frac{\dot{q}_{0i} + q_{0i}\nu_i\omega_i^*}{\omega_i^*}\sin\omega_i^* t + q_{0i}\cos\omega_i^* t\right)_{\dot{q}_0} \qquad (2.109)$$

în care

$$\omega_i^* = \omega i\sqrt{1-\nu_i^2} \qquad (2.110)$$

q_{oi} şi $\dot{q}_{0i}$ reprezintă al *"i"*-lea termen din vectorii $\{q_o\}$, respectiv $\{\dot{q}_0\}$.

Vectorii $\{q_o\}$ şi $\{\dot{q}_0\}$ se determină din condițiile inițiale şi din condițiile de ortogonalitate, astfel:

$$\{q_o\} = [U]^T[M]\{u_0\} \qquad (2.111)$$

Vibrații forțate neamortizate

Sistemul de ecuații de mişcare este:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\}+[K]\{u(t)\}=\{F(t)\} \qquad (2.112)$$

Dacă utilizăm aceeaşi schimbare de variabilă ca şi în cazul vibrațiilor libere (2.103) sistemul de ecuații (2.112) devine

$$[M][U]\{\ddot{q}(t)\}+[K][U]\{q(t)\}=\{F(t)\} \qquad (2.113)$$

După preânmulțirea cu *$[U]^T$* şi utilizând relațiile (2.105) se obține:

$$[M_g]\{\ddot{q}(t)\}+[K_g]\{q(t)\}=[U]^T\{F(t)\}=\{F_g(t)\} \qquad (2.114)$$

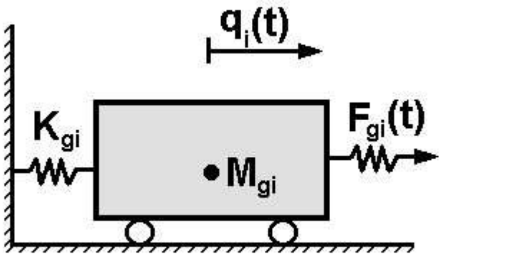
O ecuație *"i"* din sistemul (2.114) se poate scrie astfel:

$$M_{gi}\ddot{q}_i(t)+K_{gi}q_i(t)=\{U_i\}^T\{F(t)\}=F_{gi}(t) \qquad i=1,\ldots,N_m \qquad (2.115)$$

Ecuația (2.115) reprezintă ecuația mişcării unui sistem cu 1GLD în vibrația forțată neamortizată, schematizat în figura de mai jos

Ecuația (2.115) se mai poate scrie şi sub forma:

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{F_{gi}}{M_{gi}} = \frac{\{Y_i\}^T\{F\}}{\{Y_i\}^T[M_g]\{Y_i\}} \qquad (2.116)$$



Soluția ecuației (2.116) este:

$$q_i(t) = \frac{1}{M_{gi}\omega_i}\int_0^t F_{gi}(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (2.117)$$

După rezolvarea celor N_m ecuații de forma (2.115) soluția mişcării se obține prin transformarea inversă din coordonate generalizate în coordonate normale şi poate fi scrisă ca o sumă de mişcări ale fiecărui mod în anumite proporții şi faze relative, astfel:

$$\{y_i(t)\} = q_1\{Y_1\}\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + q_2\{Y_2\}\cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \cdots + q_n\{Y_n\}\cos(\omega_n t - \varphi_n) \qquad (2.118)$$

Vibrații forțate amortizate. Amortizare vâscoasă

Mişcarea unui sistem cu *nGLD* în vibrația forțată amortizată este descrisă de sistemul de ecuații:

$$[M]\{\ddot{y}(t)\}+[C]\{\dot{y}(t)\}+[K]\{y(t)\}=\{F(t)\} \qquad (2.119)$$

Se consideră că amortizarea este de tip vâscos şi proporțională, adică matricea de amortizare este proporțională cu matricea maselor sau cu matricea de rigiditate sau cu o combinație liniară a celor două matrice:

$$[C]=a[M] \quad ; \quad [C]=b[K] \quad \text{sau} \quad [C]=a[M]+b[K] \qquad (2.120)$$

unde *a* şi *b* sunt constante reale.

Aplicând aceeaşi transformare de variabilă în coordonate normale va rezulta decuplarea sistemului cu *nGLD* în N_m sisteme cu *1GLD*

$$[M_g]\{\ddot{q}(t)\}+[C_g]\{\dot{q}(t)\}+[K]\{q(t)\}=[Y]^T\{F(t)\} \qquad (2.121)$$

unde $[C_g] = a[M_g] + b[K_g]$

Ecuația *"i"* este de forma:

$$M_{gi}\ddot{q}_i(t)+C_{gi}\dot{q}_i(t)+K_{gi}q_i(t)=\{U_i\}^T\{F\}=F_{gi}(t) \qquad (2.122)$$

şi reprezintă ecuația mişcării pentru sistemul cu *1GLD* a cărui model de calcul poate fi cel din figura

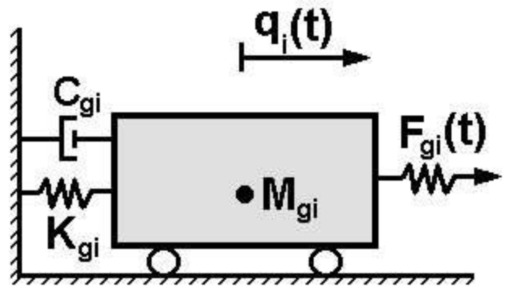


Fig. 2.28. Modelul de calcul pentru sistemul cu amortizare vâscoasă

Ecuația (2.121) mai poate fi scrisă şi sub forma

$$\ddot{q}_i(t)+2\nu_i\omega_i\dot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=\frac{\{U_i\}^T F_{gi}(t)}{M_{gi}}=\frac{F_{gi}}{M_{gi}} \qquad (2.123)$$

unde:

$$\nu_i=\frac{C_{gi}}{2\sqrt{K_{gi}M_{gi}}} \qquad (2.124)$$

Dacă matricea de amortizare este proporțională numai cu matricea de rigiditate adică *[C]=a[K]* atunci: :

$$\nu_i = a\frac{K_{gi}}{\sqrt{K_{gi}M_{gi}}} = a\omega_i \qquad (2.125)$$

Soluția ecuației (2. 122) este

$$q_I(t) = e^{-\nu_i\omega_i t}\left(\frac{\dot{q}_{0i} + q_{0i}\,\nu_i\omega_i}{\omega_i}\sin\omega_i^* t + q_{0i}\cos\omega_i^*\right) + \frac{1}{M_{gi}\omega_i^*}\int_0^t F_{gi}(\tau)e^{-\nu_i\omega_i^*(t-\tau)}\sin\omega_i^*(t-\tau)d\tau \qquad (2.126)$$

Prin rezolvarea celor N_m ecuații corespunzătoare celor N_m frecvențe naturale (moduri proprii) şi prin transformarea de variabilă din coordonate generalizate (normale) în coordonate inițiale se obține soluția mişcării *u(t).*