NOȚIUNI DE TEORIA VIBRAȚIILOR

Acțiune dinamică - solicitare produsă de încărcări variabile în timp care are ca efect principal mişcarea structurii. Efectul de mişcare explică de ce pentru determinarea stării de tensiune şi de deformație este necesar să se țină cont, pe lângă caracteristicile de rigiditate ale structurii, şi de proprietățile ei inerțiale care depind de distribuția maselor în structură.

Dinamica construcțiilor se ocupă cu studiul şi calculul structurilor de construcții la acțiunea încărcărilor dinamice (încărcări a căror intensitate variază rapid în timp).

Analiză dinamică - ansamblul de procedee şi metode care permit exprimarea matematică a relației acțiune-răspuns în vederea evaluării calitative şi cantitative a stării variabile de tensiune şi deformație din elementele şi structurile de rezistență. Problema analizei comportării dinamice a structurilor este o parte a problemei evaluării siguranței structurale.

Răspuns dinamic se înțelege starea instantanee a unui sistem dinamic supus unor acțiuni reale sau simulate şi variabile în timp.

Clasificarea mişcărilor vibratorii

Sistemele execută în timpul exploatării mişcări variabile în timp care se numesc ***vibrații***sau ***oscilații***.

Vibrațiile pot fi:

A. ***după natura deformațiilor produse în elementele structurii***

- ***vibrații transversale*** – când se produc deformații de încovoiere sau forfecare;
- ***vibrații longitudinale*** – când se produc deformații axiale de compresiune şi de întindere;
- ***vibrații de torsiune*** – când deformațiile alternante produse sunt de torsiune.

B. în funcție de relația dintre forțele elastice care se dezvoltă în structură şi deplasările acesteia:

- ***vibrații liniare*** – atunci când forțele elastice sun proporționale cu deplasările. ***vibrații neliniare*** – în care relația dintre forțele elastice şi deplasări este neliniară.

C. în funcție de cauzele care produc vibrațiile :

- ***vibrații libere*** – când structura scoasă din poziția de echilibru de către o cauză perturbatoare execută mişcarea numai sub acțiunea forțelor elastice interioare;
- ***vibrații forțate*** – care se produc sub acțiunea unei cauze perturbatoare exterioare care acționează pe întreaga durată a vibrațiilor.

Clasificarea acțiunilor dinamice exterioare

A. ***- acțiuni naturale*** (mişcarea seismică, vântul în rafale, variații mari de temperatură, acțiuni hidrodinamice et.)

- acțiuni artificiale (provin din procesele tehologice industriale, din trafic, din explozii etc.)

B. ***- acțiuni deterministe*** – se caracterizează printr-o variație complet definită în timp
- acțiuni aleatoare - variația nu este pe deplin definită în timp şi poate fi caracterizată numai pe baze statistice

C. ***- acțiuni directe*** – se aplică direct asupra elementelor portante ale structurii de rezistență
- acțiuni indirecte – se transmit structurilor prin medii de propagare (explozii subterane, acțiuni seismice, procese industriale, trafic)

D. ***- acțiuni tranzitorii*** – acțiuni de scurtă durată, impulsive
- acțiuni permanente – acțiuni de lungă durată

E. ***- acțiuni reale***
- acțiuni simulate

Situațiile în care se impune calculul dinamic al unei structuri

încărcarea dinamică provenind din:

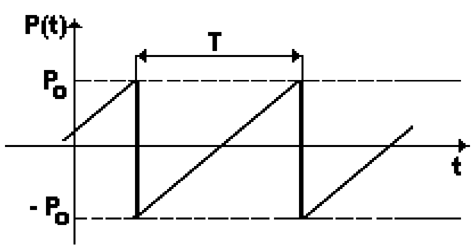
- acțiunea seismică
- acțiunea din vânt sau valuri de apă
- vibrațiile provocate de maşini grele cu piese mobile neechilibrate (motoare electrice, generatoare electrice, turbogeneratoare etc.)
- vibrațiile produse de funcționarea agregatelor care dezvoltă şocuri (ciocane de forjat, concasoare etc.)
- vibrațiile şi forțele de impact produse de traficul vehiculelor sau din acțiunea podurilor rulante grele
- vibrațiile autoinduse ca urmare a acțiunii forțelor aerodinamice, ca de exemplu în cazul acțiunii rafalelor de vânt asupra podurilor suspendate
- impactul undei de şoc produsă de explozii.

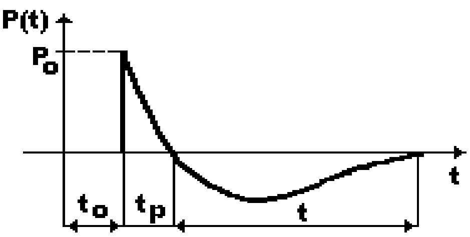
În funcție de legea de variație în timp, modelarea forțelor dinamice poate fi abordată prin exprimarea variației acestora prin funcții *periodic*e sau funcții *neperiodice*.

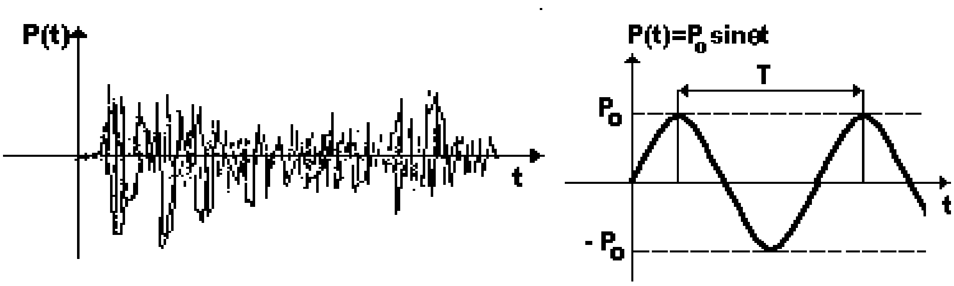
Forțele dinamice periodice se repetă identic după trecerea unui interval de timp *T*. Forțele dinamice periodice pot fi armonice, dacă se exprimă matematic prin funcții trigonometrice, sau nearmonice (fig.1a,1b).

Forțele dinamice neperiodice pot fi:

- *cvasiperiodice* (forțe impulsive produse de explozii),fig.1c
- *tranzitorii* (forțele seismice),fig.1d.







Sistem dinamic. Model dinamic

Noțiunea de ***sistem dinamic*** este utilizată ca o abstractizare a specificului corpurilor reale care prezintă modificări relativ rapide de stare în timp. Utilizarea conceptului de sistem dinamic în cazul cel mai simplu este ilustrat în figura 2.

Fig.2

Un sistem dinamic este caracterizat prin anumite proprietăți, de natură calitativă specifică, care pot fi precizate cantitativ prin valorile unor parametri. Acest sistem are, la un moment dat, o anumită stare, care poate să se modifice în timp. Acțiunile dinamice diverse, aplicate sistemului, produc modificări de stare ale acestuia, produc un aşa-numit răspuns al sistemului.

Sistemele dinamice sunt definite şi sisteme inerțiale deoarece cel mai important element constitutiv îl reprezintă masa.

În general, ***prin sistem dinamic se înțelege asocierea , în anumite condiții de compatibilitate a mişcării, a unor caracteristici inerțiale, disipative şi elastice***.

Descrierea analitică a comportării unui sistem dinamic se exprimă pe baza unui model matematic.

Noțiunea de ***model dinamic*** este utilizată în legătură cu reprezentările diferitelor sisteme dinamice. Aceste reprezentări cuprind, de la caz la caz, diferite idealizări, simplificări sau schematizări. Cu cât modelul matematic reflectă mai riguros comportarea fizică a modelului dinamic cu atât rezultatele obținute pe cale analitică vor fi mai precise.

Modelul dinamic al unei structuri cuprinde toate elementele necesare pentru a scrie ecuațiile de mişcare corespunzătoare.

Un model dinamic trebuie să precizeze următoarele elemente:

- ***mărimea maselor***
- ***caracteristicile cinematice ale sistemului***
- ***legăturile deformabile ale sistemului***
- ***acțiunile la care este supus sistemul.***

Proprietățile inerțiale ale unui sistem în mişcare depind de distribuția maselor în structură. Distribuția maselor într-un element este continuă şi în limitele ipotezelor ce se admit în calcule şi poate fi determinată fără dificultăți.

Grade de libertate dinamică (GLD)

Numărul minim de coordonate independente (parametri independenți –translații sau rotații) necesare pentru a defini în mod univoc poziția unui sistem în orice moment al mişcării constituie ***numărul gradelor de libertate dinamică*.**

Numărul gradelor de libertate dinamică coincide cu numărul deplasărilor independente pe care le poate avea un sistem oscilant.

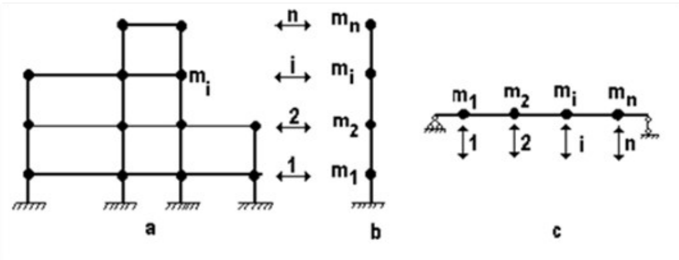
În calculul dinamic se acceptă un model simplificat, în care masa continuă este concentrată într-un număr finit de puncte ceea ce conduce la un model dinamic cu mase discrete.

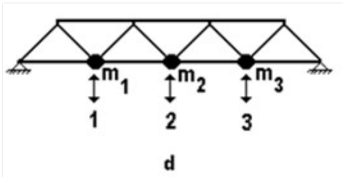
Modelarea sistemului dinamic prin discretizare inerțială trebuie să aibă în vedere mai mulți factori, cum ar fi: fenomenele dinamice dominante, particularitățile structurilor reale, distribuția efectivă a maselor.

Modelele de calcul dinamic pot fi:

- modele cu 1GLD   (figura 3)
- modele cu nGLD   (figura 4)
- modele cu ¥ GLD (masă distribuită) (figura 5)

Fig. 3





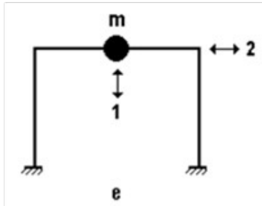


Fig. 4

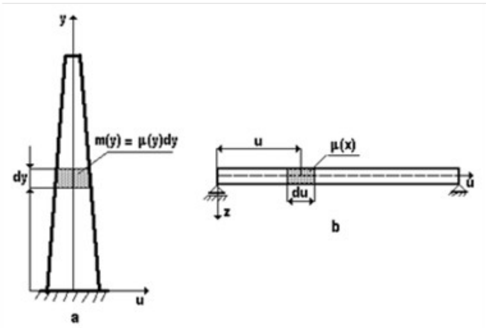


Fig. 5

SISTEME LINIARE DISCRETE CU 1 GLD

MODELAREA ANALITICĂ A SISTEMELOR   LINIARE DISCRETE

În dinamica structurilor obiectul principal este constituit de analiza relaţiilor ce există între acţiune şi răspunsul dinamic.

În cazul în care elementele structurii sunt realizate din materiale caracterizate fizic ca omogene, izotrope, continue şi perfect elastice şi deplasările instantanee care se produc sunt mici în aşa fel încât modificările din punct de vedere geometric devin nesemnificative sistemul putând fi modelat ca un sistem cu comportare liniară.

În analiza liniară a sistemelor dinamice există o interdependenţă între caracteristica inerţială, disipativă şi elastică care nu se modifică în timp, iar scopul fundamental îl reprezintă evaluarea stării de tensiune şi deformaţie. Structurile actuale sunt deosebit de complexe ca alcătuire iar considerarea lor ca un tot unitar este practic imposibilă fapt ce a condus la elaborarea de modele care să aproximeze cât mai bine comportarea reală a structurii.

O structură este un mediu continuu alcătuit dintr-un număr infinit de puncte materiale astfel încât în fiecare punct se poate defini un câmp adică un grup format din:

-mărimi mecanice (forțe, eforturi, tensiuni);

-mărimi geometrice (deplasări, deformații, deformații specifice care caracterizează starea din acel punct).

Relațiile analitice dintre aceste mărimi se stabilesc prin intermediul ecuațiilor diferențiale de stare şi se pot distinge trei aspecte:

- ***aspectul mecanic*** al problemei de echilibru static şi/sau dinamic al structurii (legăturile fiind între mărimile mecanice);
- ***aspectul geometric sau cinematic*** (legăturile fiind între mărimile geometrice);
- ***aspectul fizic*** (legăturile fiind între mărimile mecanice şi geometrice).

Între relațiile de legătură dintre mărimile mecanice şi cele geometrice, pe de o parte, şi relațiile de legătură dintre mărimile geometrice şi posibilitatea de modificare a geometriei structurii pe durata acțiunii încărcărilor exterioare, pe de altă parte, se pot face diferite combinații care conduc la o mare varietate de posibilități de scriere a ecuațiilor de stare şi în consecință la diverse moduri de analiză a structurii.

Formularea ecuațiilor de stare după o teorie acceptată se poate face cu necunoscute mărimi geometrice (deplasări)sau cu necunoscute mărimi mecanice (tensiuni, eforturi, forțe de legătură).

Elaborarea modelului analitic presupune un ansamblu de operații care ar putea fi:

- ***elaborarea modelului de calcul (schematizarea structurii);***
- ***ataşarea unei teorii de calcul (idealizarea schemei de calcul);***
- ***adoptarea unei metode de calcul;***

- ***stabilirea procedeului numeric de rezolvare;***
- ***rezolvarea propriu-zisă;***
- ***validarea şi valorificarea rezultatelor.***

Înlocuirea sistemului real cu modelul de calcul se bazează pe discretizarea structurii într-un ansamblu de componente reprezentative. Pentru trecerea de la structura reală la modelul de calcul nu sunt algoritmi şi procedee generale care să asigure elaborarea unui model unic, care să aproximeze cu o eroare prestabilită structura de calculat. În general este posibil ca pentru aceeaşi structură să se elaboreze mai multe modele de calcul, toate corecte, dar cu performanțe diferite. Aceste modele trebuie comparate, iar compararea se poate face dacă transformăm sistemele continue în sisteme discrete echivalente.

În cazul analizei dinamice, din cauza imposibilității echilibrării instantanee a acțiunilor exterioare de către eforturi datorită ***inerției*** materialului, deplasările variabile în timp ale structurii sunt asociate cu accelerațiile care generează ***forțe de inerție*** sau ***momente de inerție*** şi cu viteze care contribuie la apariția şi exprimarea ***forțelor*** sau ***momentelor de amortizare***.

Parametrii - grade de libertate după direcția cărora acționează forțele specifice comportării dinamice (acțiuni, forțe de inerție, amortizare) se numesc ***grade de libertate dinamică*** - de aici şi clasificarea sistemelor după numărul de GLD atribuite:

- ***sisteme cu 1 GLD;***
- ***sisteme cu număr finit de GLD (n GLD);***
- ***sisteme cu masă continuă ¥ GLD***

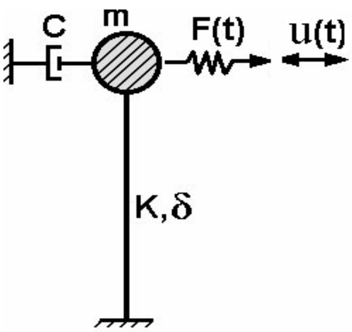
Din punct de vedere practic, de obicei, interesează doar mişcarea câtorva puncte semnificative ale structurii, de aici necesitatea şi utilitatea modelelor cu număr finit de grade de libertate dinamică.

Măsurarea răspunsului se poate face în domeniul timp obținând vibrograme sau în domeniul frecvențelor obținând funcții de răspuns în frecvență.

Importanța caracteristicilor dinamice ale sistemelor este evidentă, problema care se pune fiind aceea a determinării lor cât mai exacte şi aproximarea lor sub forma unui model matematic cât mai reprezentativ şi în acelaşi timp suficient de simplu pentru utilizare şi interpretare.

SISTEME LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE DINAMICĂ

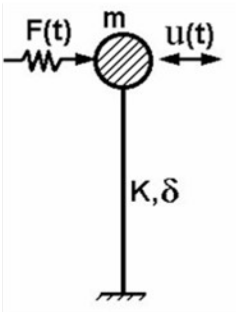
Caracteristicile fizice esențiale tuturor structurilor elastice liniare supuse încărcărilor de natură dinamică sunt:

- **masa, *m*,** (moment de inerție masic)
- **proprietățile elastice, *k*** sau ***d*** (rigiditatea sau flexibilitatea)
- **mecanismul de disipare a energiei** (amortizarea), *c*
- **sursa exterioară de excitație,** *F(t)*.
- 

Ecuațiile generale de condiție, care guvernează dinamica structurilor, se bazează pe principiile mecanicii solidelor rigide şi mecanicii corpurilor deformabile.

Mecanica analitică furnizează multiple direcții de operare prin folosirea următoarelor posibilități: principiul lui d' Alembert, ecuațiile lui Lagrange de spețа a doua, principiul lui Hamilton şi principiul lucrului mecanic virtual.

Dacă se utilizează metodele mecanicii corpurilor deformabile se pot formula condițiile de echilibru dinamic, exprimate pe poziția deformată instantanee, folosind principiul lui d’Alembert.



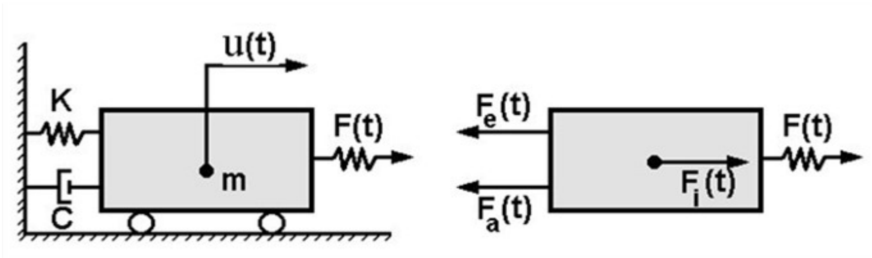


Fig.2.1 Modelul sistemului cu 1GLD de translație

După cum se vede în fig.2.1 forțele care acționează după direcția de deplasare sunt: forța exterioară *F(t)*, şi trei forțe generate de mişcare:

- ***forța de inerție $F_i(t)$,***
- ***forța de amortizare $F_a(t)$***
- ***forța de revenire a resortului elastic $F_e(t)$.***

Ecuația mişcării exprimă echilibrul acestor forțe şi se scrie:

$$- F_i(t) + F_a(t) + F_e(t) = F(t) \qquad (2.1)$$

Fiecare dintre forțele din membrul întâi este funcție de deplasarea u*(t)* sau de derivatele sale în raport cu timpul:

$$F_i(t) =- m\,\ddot{u}(t)\ ; \quad F_a(t) = c\,\acute{u}(t)\ ; \quad F_e(t) = k\,u(t)\ ; \qquad (2.2)$$

- ***k*** - rigiditatea sistemului după direcția GLD – reprezintă forța care aplicată după direcția GLD produce o deplasare egala cu unitatea pe aceeaşi direcție
- ***d*** **-** flexibilitatea sistemului – reprezintă deplasarea care apare după direcția GLD când după aceeaşi direcție acționează o forță egală cu unitatea
- **d*k = 1 1/d=k 1/k = d**
- ***c*** - constanta de amortizare (amortizare vâscoasă liniară)

- ***m*** - masa sistemului sau măsura inerției (provine din masa proprie a structurii reale, mase adiționale)
- ***u(t), ú(t), ü(t)*** reprezintă deplasarea, viteza şi accelerația sistemului după

direcția GLD acordat.

În aceste condiții ecuația de mişcare este:

$$\boxed{m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)} \qquad (2.3)$$

Gradul de libertate dinamică poate fi şi de rotație (fig.2.2).

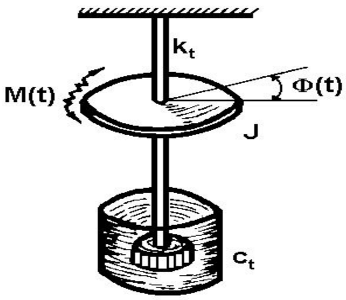


Fig.2.2 Modelul sistemului cu 1GLD de rotatie

În acest caz echilibrul este asigurat de momentul de inerție *M_i(t)*, momentul de amortizare *M_a(t)*, momentul elastic sau de revenire *M_e(t* şi momentul dinamic exterior *M(t)*.

$$\boxed{M_i(t) + M_a(t) + M_e(t) = M(t)} \qquad (2.4)$$

2.2.1. Vibrații libere. Soluții în domeniul timp

Vibrațiile libere ale unui sistem dinamic se produc în urma aplicării unei acțiuni inițiale de scurtă durată (impuls, şoc etc.). Mişcarea rezultată se manifestă după ce cauza care a scos sistemul din poziția de echilibru a încetat. Dacă sistemul oscilant este un sistem conservativ, vibrațiile care se produc sunt vibrații neamortizate, air dacă sistemul este neconservativ vibrațiile sistemului se amortizează după un anumit interrval de timp care depinde de mărimea capacității de amortizare.

a) Vibrații libere neamortizate

Ecuația de mişcare a unui sistem cu 1GLD (fig. 2.3) în vibrația liberă neamortizată este descrisă de relația (2.5) :

$$\boxed{m\ddot{y}(t) + ky(t) = 0} \qquad (2.5)$$

sau

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0}$$

unde *w* este pulsația proprie a sistemului,

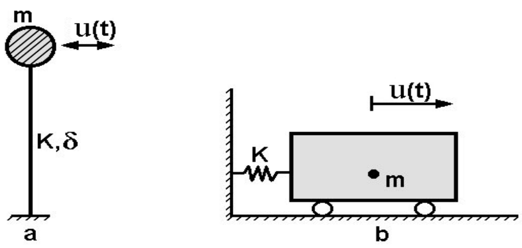


Fig. 2.3 Modelul sistemului cu 1GLD în vibrația liberă neamortizată

Soluția generală a ecuației (2.5) în domeniul timp este de forma:

$$u(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \qquad (2.6)$$

iar viteza este:

$$\dot{u}(t) = \omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t \qquad (2.7)$$

în care C_1 şi C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad C_1 = \frac{\dot{u}_0}{\omega}$$
$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \qquad C_2 = u_0 \qquad (2.8)$$

Soluția ecuației (2.5) în acest caz devine:

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t \qquad (2.9)$$

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \qquad (2.10)$$

unde:

- ***A*** amplitudinea mişcării, rămâne constantă în tot timpul mişcării
- ***tgj*** caracterizează faza inițială a oscilației
- ***(wt+j)*** faza

$$\boxed{A = \sqrt{u_0^2 + \frac{\dot{u}_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi = arctg \frac{u_0 \omega}{\dot{u}_0}} \qquad (2.11)$$

Prin derivarea succesivă a ecuației (2.9) se obțin viteza şi accelerația:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{u}(t) &= A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{u}(t) &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 u(t) \end{aligned}} \qquad (2.12)$$

Din relațiile (2.12) se constată că viteza este defazată cu *p/2* înaintea deplasării iar accelerația cu *p/2* înaintea vitezei şi cu *p* înaintea deplasării.

În fig. 2.4 sunt reprezentate grafic deplasarea, viteza şi accelerația în cazul vibrației libere neamortizate.

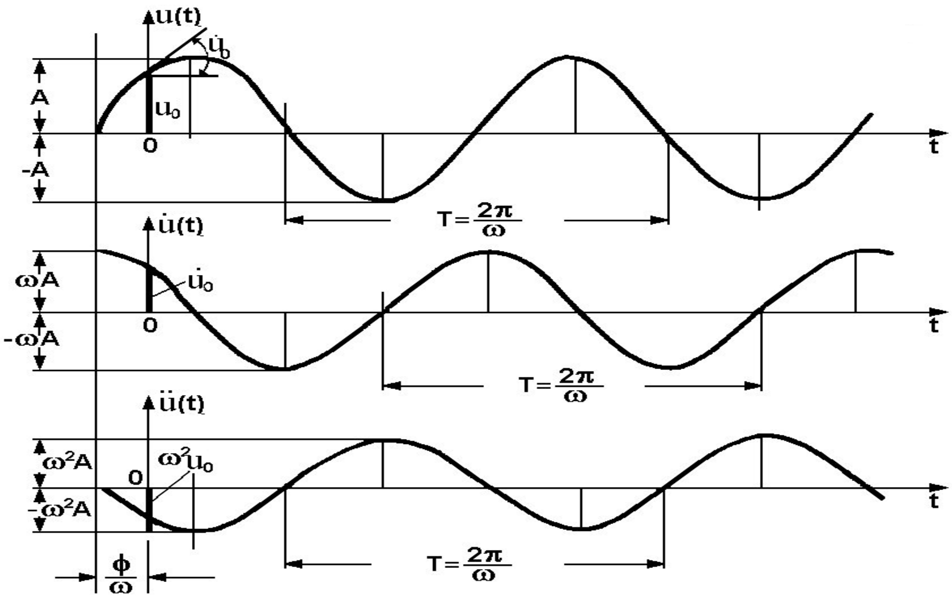


Fig.2.4 Reprezentarea grafica a deplasării, vitezei si accelerației în vibrația liberă neamortizată

Mişcarea descrisă de sistem este periodică, adică se repetă identic după un interval de timp *T,* numit perioadă proprie.

Perioada de variație a funcțiilor trigonometrice *sin* şi *cos* este *2p* şi deci se

deduce că ***perioada proprie, T,*** a mişcării este:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\omega t+\varphi)=\sin(\omega(t+T)+\varphi)\\&\omega t+\omega T+\varphi=\omega t+\varphi=2\pi\end{aligned}} \quad (2.13)$$

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\delta m}=2\pi\sqrt{\frac{\delta}{gG}}\quad [s]}$$

***Frecvența proprie a vibrațiilor*, *f*,** reprezintă numărul de vibrații executate de sistem într-o secundă:

$$\boxed{f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta G}}\quad [Hz]} \quad (2.14)$$

Pulsația proprie a sistemului (frecvența circulară), ***w***, reprezintă numărul de vibrații executat de sistem în 2p secunde:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta G}} \qquad [s^{-1}]} \qquad (2.15)$$

în care:

- ***g* este accelerația gravitațională, *g=9.81 m/s²***
- ***G* este greutatea corespunzătoare masei *m***
- ***k* este rigiditatea sistemului după direcția GLD şi reprezintă forța care produce după această direcție o deplasare egală cu unitatea.**
- ***d* este flexibilitatea sistemului şi reprezintă deplasarea care apare după direcția gradului de libertate dinamică produsă de o forță egală cu unitatea ce acționează după aceeaşi direcție**
- **reprezintă deplasarea după direcția GLD produsă de forța gravitațională *(săgeata statică)*.**

SISTEME LINIARE CU UN GRAD DE LIBERTATE DINAMICĂ
Vibrații libere amortizate. Soluții în domeniul timp

În cazul în care sistemul posedă capacitate de amortizare mişcarea acestuia încetează după un anumit interval de timp. Prezența amortizării se manifestă prin disiparea energiei în timp.

Modelul de calcul pentru un sistem cu 1GLD care vibrează liber amortizat este prezentat în fig. 2.5a şi 2.5b,

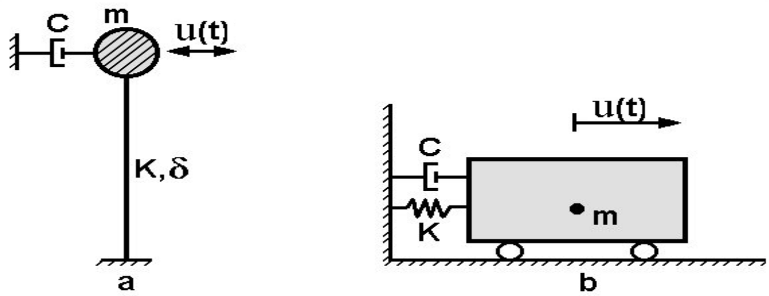


Fig. 2.5 Modelul sistemului cu 1 GLD în vibrația liberă amortizată

Ecuația mişcării este dată de relațiile (2.16) sau (2.17)

$$\boxed{m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=0} \qquad (2.16)$$

sau $$\boxed{\ddot{y}(t)+2\beta\dot{y}(t)+\omega^2 y(t)=0} \qquad (2.17)$$

unde: $$\boxed{2\beta=\frac{c}{m}}$$

c este coeficientul de proporționalitate al amortizării sau coeficientul de amortizare vâscoasă.

Se propune o soluție particulară de forma

$$\boxed{u(t)=Ce^{rt}} \qquad (2.18)$$

Ecuația caracteristică a ecuației (2.17) are forma:

$$\boxed{r^2+2\beta r+\omega^2=0} \qquad (2.19)$$

şi are soluțiile:

$$\boxed{r_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega^2}} \qquad (2.20)$$

Funcție de raportul dintre *b* şi *w* se disting următoarele trei cazuri:

b.1. Amortizare critică

Valoarea coeficientului de amortizare pentru care descriminantul este nul se numeşte coeficient de amortizare critică, c_{cr}.

$b_{cr}=w$; $c=c_{cr}$

$$\boxed{\nu=\frac{\beta}{\omega}=1 \quad , \quad \nu=\frac{c}{c_{cr}}} \qquad (2.21)$$

n = x fracțiunea din amortizarea critică

$\boldsymbol{c_{cr}}$ amortizarea critică

$$\boxed{c_{cr}=2\beta m=2m\omega=2\sqrt{mk}=\frac{2k}{\omega}}$$

Coeficientul de amortizare critică este o caracteristică proprie a sistemului oscilant şi se exprimă funcție de caracteristicile acestuia: masă şi rigiditate.

Soluția ecuației mişcării amortizate critic este:

$$\boxed{u(t) = Me^{r_1 t} + Nte^{r_2 t} = e^{-\beta t}(C_1 + C_2 t)} \qquad (2.22)$$

Constantele C1 şi C2 se determină din condițiile inițiale:

(2.23)

$$t = 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad u(0) = u_0$$

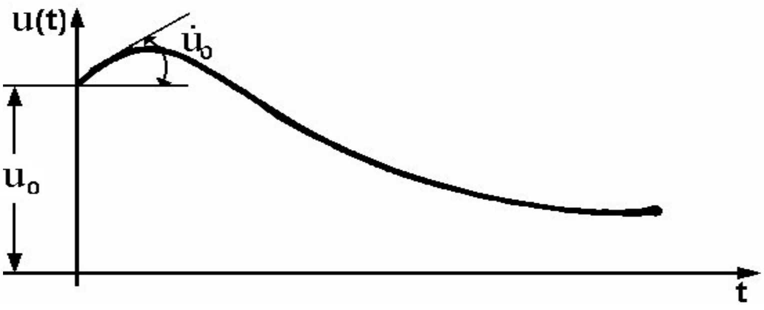
$$M = u_0 \qquad N = u_0 + \omega u_0$$

Soluția finală a ecuației de mişcare este:

$$u(t) = e^{-\omega t}\left(u_0 + \left(\dot{u}_0 + \omega u_0\right)t\right) \qquad (2.24)$$

Relația (2.24) arată că mişcarea corespunzătoate acestui caz este aperiodică, după cum se poate observa şi din fig. 2.6 unde este reprezentată grafic mişcarea amortizată critic.

Fig.2.6 Curba deplasărilor în vibrația liberă amortizată critic



b.2. Amortizare supracritică

Atunci când valoarea coeficientului de amortizare este mai mare decât coeficientul de amortizare critică se consideră că sistemul are amortizare supracritică.

$c>c_{cr}$; b>w ; x=n>1

Rădăcinile ecuației caracteristice (2.19) sunt reale şi negative:

$$\boxed{r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}}\qquad(2.25)$$

Se propune o soluție de forma

$$\boxed{u(t) = Me^{r_1 t} + Ne^{r_2 t}}\qquad(2.26)$$

sau

$$\boxed{y(t) = e^{-\beta t}(C_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega^2}t})}\qquad(2.27)$$

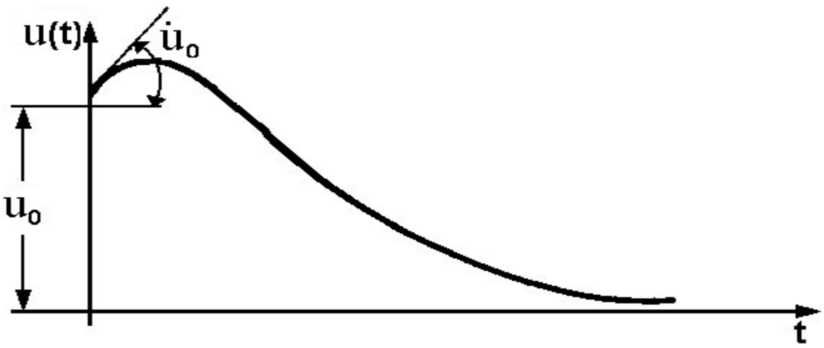
Constantele *A* şi *B* se determină din condițiile inițiale

$$M = \frac{\dot{u}_0 + u_0\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}\right)}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}; \qquad N = -\frac{\dot{u}_0 + u_0\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}\right)}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

(2.28)

Curba din fig. 2.7 reprezintă mişcarea unui sistem cu 1GLD în vibrația liberă amortizată supracritic care este o mişcare aperiodică.

Fig. 2.7 Curba deplasărilor în vibrația liberă amortizată supracritic



b.3. Amortizare subcritică

Acesta este cazul care interesează pentru structurile de construcții

$c<c_{cr}$; b<w ; x=n<1

Rădăcinile ecuației caracteristice sunt complexe conjugate

$$\boxed{r_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}\qquad(2.29)$$

sau $\boxed{r_{1,2} = -\beta \pm j\omega^*}$ (2.30) unde *w** este pseudopulsația şi are expresia:

$$\boxed{\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \omega\sqrt{1-\nu^2}} \qquad (2.31)$$

Soluția oscilației libere amortizate subcritic este dată de ecuațiile (2.32) sau (2.34):

$$u(t) = e^{-\beta t}(Me^{i\omega^* t} + Ne^{-i\omega^* t}) \quad \text{sau}$$
$$u(t) = e^{-\beta t}(C_1 \sin\omega^* t + C_2 \cos\omega^* t) \qquad (2.32)$$

în care M, N sau C_1 şi C_2 se determină din condițiile inițiale:

Soluția ecuației se mai poate scrie sub forma:

$$t = 0 \qquad u(o) = u_0 \qquad \dot{u}(0) = \dot{u}_0$$
$$C_1 = \frac{\dot{u}_0 + \beta u_0}{\omega^*} \qquad C_2 = u_0$$

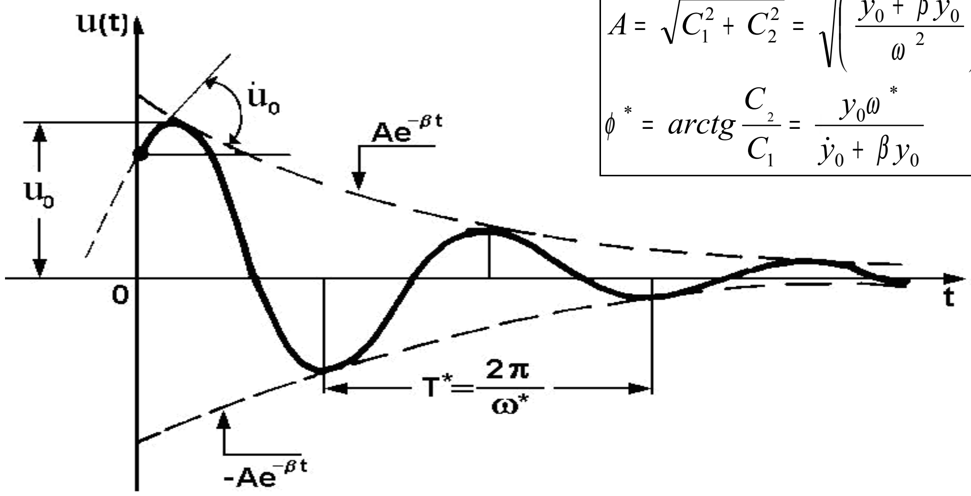
(2.34)

unde

$$u(t) = e^{-\beta t}\left(\frac{\dot{u}_0 + \beta u_0}{\omega^*}\sin\omega^* t + u_0 \cos\omega^* t\right) \quad sau$$
$$u(t) = A e^{-\beta t}\sin(\omega^* t + \phi^*) \qquad (2.35)$$

Mişcarea descrisă de ecuația (2.34) este o mişcare armonică de pulsație *w** şi de amplitudine A^{e-bt} care descreşte exponențial cu timpul (o asemenea mişcare se mai numeşte pseudoarmonică) şi este reprezentată în figura următoare

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{y}_0 + \beta y_0}{\omega^2}\right)^2 + y_0^2}$$
$$\phi^* = arctg\frac{C_2}{C_1} = \frac{y_0\omega^*}{\dot{y}_0 + \beta y_0}$$



Decrementul logaritmic al amortizării, D, reprezintă logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive decalate cu o perioadă

$$u_n = Ae^{-\beta t_n} \qquad u_{n+1} = Ae^{-\beta t_{n+1}} \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\beta T^*}$$
$$\Delta = \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} = \beta T^* = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 2\pi\xi \qquad (2.36)$$

unde T* este pseudoperioada

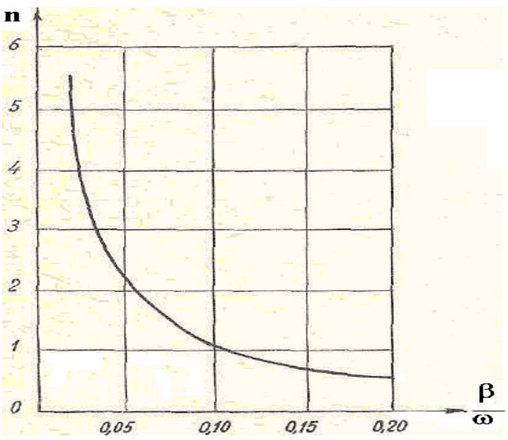
Structurile de construcții au fracțiunea din amortizarea critică mai mică de 20% (tabelul nr.1) şi deci se poate neglija influența amortizării asupra caracteristicilor proprii ale sistemului, astfel ca:

$$\omega^* \approx \omega \qquad T^* \approx T \qquad f^* \approx f \qquad (2.37)$$
$$\omega^* = \omega\sqrt{1-\zeta^2} \qquad T^* = \frac{T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad f^* = f\sqrt{1-\zeta^2}$$

Decrementul logaritmic al amortizării se poate determina şi cu relația

$$\Lambda = \frac{1}{n}\ln\frac{u_0}{u_n} = 2\pi\frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{n}\ln z$$

unde n reprezintă numărul de cicluri după care amplitudinea scade de un număr de ori z



Nr.crt.	Tipul structurii	Fracțiunea din amortizarea critică, ξ
1	Construcții cu structura din beton armat monolit	0.02...0.14
2	Construcții cu structura din zidărie sau prefabricate	0.06...0.18
3	Construcții cu structură metalică	0.02...0.08
4	Poduri de beton armat	0.03...0.16
5	Poduri metalice	0.02...0.08
6	Construcții masive	0.05...0.10
7	Terenuri de fundație	0.06...0.30
8	Nisip compact	0.10

2.2.3. Vibrații forțate. Soluții în domeniul timp

a. Vibrații forțate neamortizate.

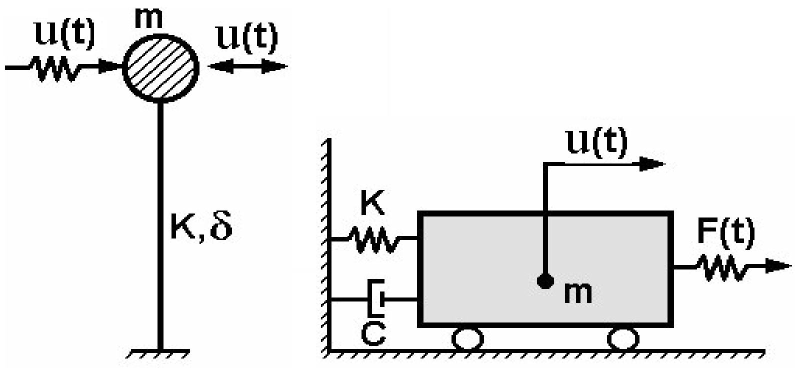


Fig. 2.11 Modelul de calcul al sistemului cu 1GLD în vibrația forțată neamortizată

Ecuația mişcării unui sistem cu 1GLD supus unei acțiuni exterioare oarecare *F(t)* corespunzătoare modelului de calcul din fig. 2.11 este:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = F(t) \qquad (2.52)$$

Dacă forța exterioară este de forma :

$$\boxed{F(t) = F_0 f(t)} \qquad (2.53)$$

atunci ecuația (2.52) se mai poate scrie:

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F_0}{m} f(t)} \tag{2.54}$$

Acțiunea *F(t)* poate fi considerată ca o succesiune de impulsuri elementare

dH=F(t) dt pentru *0 £ t £ t* (2.55)

şi deci:

$$\boxed{dy(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \qquad pentru\,\tau > t} \tag{2.56}$$

Răspunsul sistemului la acțiunea unui impuls finit *H* este :

$$\boxed{y(t) = \frac{H}{m\omega}\sin\omega(t-\tau) \qquad pentru\,\tau > t}$$

(2.57)

reprezentarea grafică fiind cea din fig. 2.12.

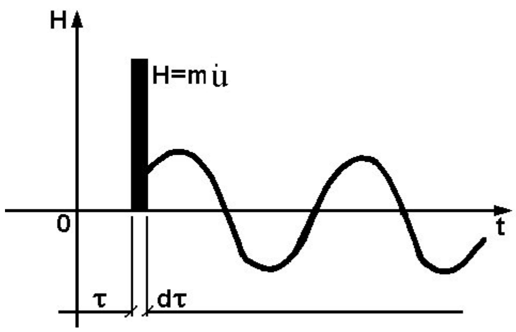


Fig. 2.12 Răspunsul în deplasări la un impuls finit

Soluția mişcării unui sistem cu 1GLD în vibrația forțată neamortizată, când forța exterioară este de forma (2.53) este dată de:

$$\boxed{y(t) = \frac{F_0}{m\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau} \tag{2.58}$$

Reprezentarea grafică a ecuației (2.58) este cea din fig. 2.13.

Integrala din relația (2.58) poartă numele de integrala de convoluție sau integrala Duhamel.

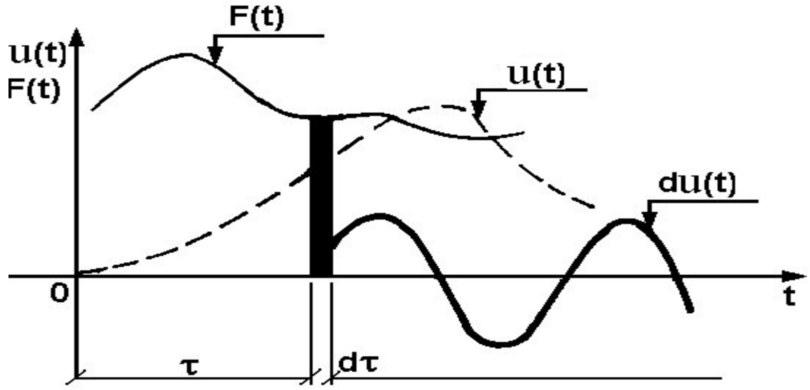


Fig. 2.13 Răspunsul în deplasări la o forță exterioară F(t)

b. Vibrații forțate amortizate

Modelul de calcul şi ecuația mişcării sunt reprezentate în fig. 2.14 şi respectiv ecuația (2.59):

$$\boxed{m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t)}$$

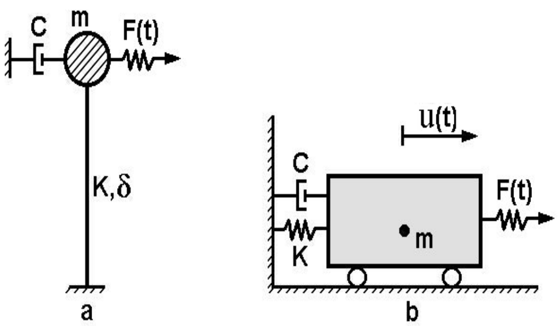
(2.59)

în cazul acțiunii unui impuls *H* soluția are forma :

$$\boxed{y(t) = \frac{H}{m\omega^*} e^{-\beta(t-\tau)} \sin\omega^*(t-\tau)}$$

(2.60)

iar curba deplasărilor este dată de fig. 2.15.



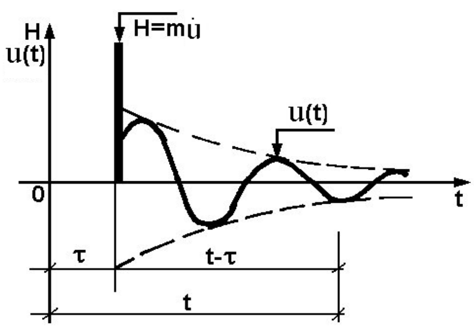


Fig. 2.14 Modelul de calcul în vibrația forțată amortizată   Fig. 2.15 Răspunsul în deplasări   acțiunea unui impuls

Dacă sistemul este supus unei acțiuni perturbatoare oarecare *F(t)=F₀f(t)* atunci ecuația mişcării este:

$$\boxed{y(t) = \frac{F_0}{m\omega^*} \int_0^t f(\tau) e^{-\beta(t-\tau)} \sin\omega^*(t-\tau) d\tau} \qquad (2.61)$$

În fig. 2.16 este reprezentată grafic la soluția ecuației (2.61).

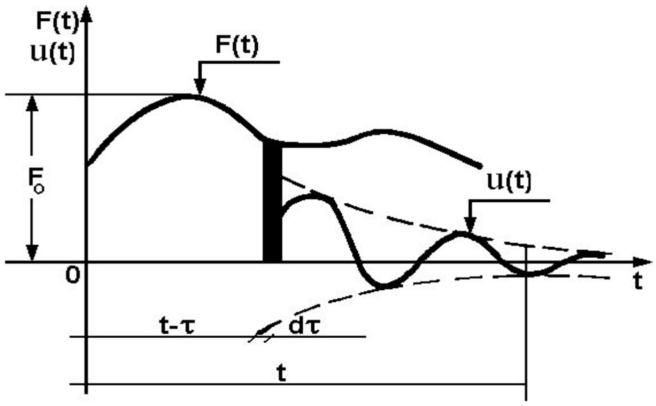


Fig. 2.16 Curba deplasărilor la o acțiune exterioară oarecare

Vibrații forțate armonice fără amortizare

Forța exterioară este de forma

$$\boxed{F(t) = f_0 \sin\theta t} \qquad (2.62)$$

Ecuația mişcării în vibrația forțată armonică fără amortizare este:

$$\boxed{\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t} \qquad (2.63)$$

a cărei soluție generală este compusă din soluția în vibrația liberă neamortizată, $u_L(t)$, şi soluția particulară a oscilației forțate, $u_F(t)$, şi care are forma: $\boxed{u(t) = u_L(t) + u_F(t)}$

(2.64)

Soluția în vibrația liberă are expresia:

$$\boxed{u_L(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t} \qquad (2.65)$$

iar soluția în vibrația forțată armonică are caracter staționar şi permanent şi este tot armonică de forma:

$$\boxed{\ddot{u}_F(t) = -(M\theta^2 \sin\theta t + N\theta^2 \cos\theta t)} \qquad (2.66)$$

Constantele M şi N se deretmină din condiția ca această soluție să satisfacă ecuația mişcării

$$\boxed{u_F(t) = M\sin\theta t + N\cos\theta t} \qquad (2.67)$$

$$\boxed{-(M\theta^2\sin\theta t + N\theta^2\cos\theta t) + \omega^2(M\sin\theta t + N\cos\theta t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t} \qquad (2.68)$$

$$\boxed{M = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}; \qquad N = 0} \qquad (2.69)$$

Soluția particulară este dată de:

$$\boxed{u_F(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\sin\theta t} \qquad (2.70)$$

Iar soluția generală este:

$$\boxed{u(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\sin\theta t} \qquad (2.71)$$

Constantele *C1* şi *C2* se determină din condițiile inițiale:

$$\boxed{\dot{u}(t) = \omega C_1\cos\omega t - \omega C_2\sin\omega t + \frac{\theta F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\cos\theta t}$$

$$\boxed{t = 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad \dot{u}(0) = \dot{u}_0} \qquad (2.72)$$

Rezultă:

$$\boxed{C_1 = \frac{\dot{u}_0}{\omega} - \frac{\theta}{\omega}\frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\cos\theta t \qquad C_2 = u_0} \qquad 2.73)$$

Soluția generală se poate scrie:

$$\boxed{u(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin\omega t + u_0\cos\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}(\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t)} \qquad (2.74)$$

Dacă la timpul *t=0* atât deplasarea cât şi viteza sunt egale cu zero atunci soluția ecuației de mişcare este:

$$\boxed{u(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}(\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t)} \qquad (2.75)$$

$$\boxed{\frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2[1 - (\frac{\theta}{\omega})^2]} = \frac{1}{1 - (\frac{\theta}{\omega})^2}\frac{F_0}{k} = D\Delta_{st}} \qquad (2.76)$$

unde

$$\boxed{D = \mu = \frac{1}{1 - (\frac{\theta}{\omega})^2}} \qquad (2.77)$$

D sau ***m*** se numeşte coeficient de amplificare dinamică

$\boldsymbol{D_{st}}$ este deplasarea statică după direcția GLD produsă de amplitudinea forței exterioare perturbatoare, F_0.

În realitate răspunsul liber se amortizează foarte repede, mişcarea se stabilizează şi rămâne numai influența răspunsului forțat. Soluția mişcării în acest caz devine:

$$\boxed{u(t) = \mu\Delta_{st}\sin\theta t = u_d\sin\theta t \qquad u_d = \mu\Delta_{st}} \tag{2.78}$$

Forța dinamică este dată de forța de inerție şi de forța exterioară perturbatoare

$$\boxed{\begin{aligned} &F_d = F(t) + F_{in}(t) = F_0\sin\theta t + m\theta^2\mu\Delta_{st}\sin\theta t \\ &F_d = F_0 + m\theta^2\mu\frac{F_0}{k} = F_0\left[1 + \mu\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right] = \mu F_0 = DF_0 \end{aligned}} \tag{2.79}$$

Vibrații forțate armonice amortizate

În situațiile în care forța exterioară este armonică de forma :

$$\boxed{F(t) = f_0\sin\theta t} \tag{2.80}$$

ecuația de mişcare este:

$$\boxed{\ddot{u}(t) + 2\beta\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t} \tag{2.81}$$

iar soluția generală va fi :

$$\boxed{u(t) = u_L(t) + u_F(t)} \tag{2.82}$$

Soluția în vibrația liberă este

$$\boxed{u_L(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t} \tag{2.83}$$

iar soluția în vibrația forțată este

$$\boxed{u_F(t) = M^*\sin\theta t + N^*\cos\theta t} \tag{2.84}$$

Constantele M* şi N* se determină din condiția ca soluția $y_F(t)$ să satisfacă ecuația de mişcare (2.84)

$$A^* = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4\beta^2\theta^2}} \qquad tg\varphi^* = \frac{2\beta\theta}{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2} \tag{2.85}$$

Soluția $y_F(t)$ reprezintă o suprapunere de două oscilații armonice de pulsație *q* şi deci ea se mai poate scrie:

$$M^* = \frac{F_0}{m}\frac{\omega^2 - \theta^2}{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4\beta^2\theta^2} \qquad N^* = -\frac{F_0}{m}\frac{2\beta\theta}{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4\beta^2\theta^2} \tag{2.86}$$

Amplitudinea *A** are expresia:

$$\begin{aligned} &u_F(t) = A^*\sin(\theta t - \varphi^*) \\ &A^* = \sqrt{M^{*2} + N^{*2}} \qquad tg\varphi^* = -\frac{N^*}{M^*} \end{aligned} \tag{2.87}$$

Soluția stabilă a mişcării este :

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega^*}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega^*}\right)^2}}\sin(\theta t - \phi) \tag{2.88}$$

Dacă se notează

$$y(t) = \frac{F_0}{m\omega^*}\frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega^*}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega^*}\right)^2}}\sin(\theta t - \phi) \tag{2.89}$$

unde *D(t)* este funcția de multiplicare (amplificare) dinamică şi

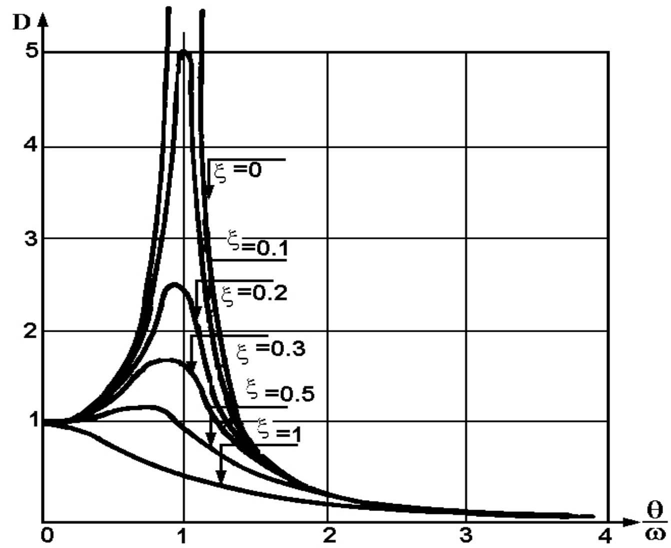
$$D^* = \mu^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}, \qquad tg\varphi^* = \frac{2\zeta\frac{\theta}{\omega}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \tag{2.90}$$

unde: *D** factor de amplificare dinamică sau coeficient dinamic

*j** unghi de fază

Soluția mişcării devine: $$u(t) = D(t)\frac{F_0}{m\omega^*} \tag{2.91}$$

Variația coeficientului dinamic funcție de raportul *q/w* este reprezentată în fig.2.17.



Din fig. 2.17 se poate observa că influența amortizării este mai puternică în zona *q/w =1* (zona rezonanței) şi că pentru valori mici ale pulsației *q* coeficientul dinamic este egal cu 1, iar pentru valori mari ale pulsației *q* coeficientul dinamic tinde către zero.

Variația unghiului de fază, *f*, funcție de *q/w* este reprezentată în fig.2.18.

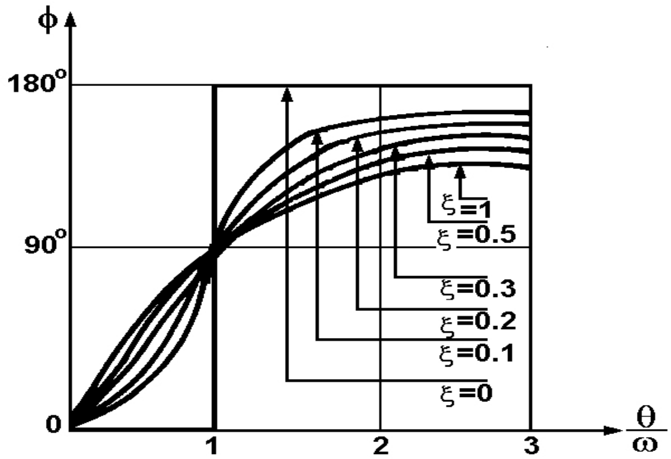


Fig. 2.18 Variația unghiului de fază funcție de q/w