CURSUL 1

STABILITATEA ŞI DINAMICA CONSTRUCŢIILOR

1.1.Generalităţi

Obiectul de studiu “Stabilitatea şi Dinamica Construcţiilor” se predă studenţilor, care aprofundează profilul construcţii, în anul al III-lea, semestrul 6, pe durata a 14 săptămâni.

Disciplina se compune din trei părţi distincte:

a) Dinamica Construcţiilor;
b) Stabilitatea Construcţiilor şi
c) Calculul de Ordinul II.

Dinamica construcţiilor este o ştiinţă ce face parte din Mecanica construcţiilor, alături de: Mecanica Teoretică, Rezistenţa Materialelor, Statica Construcţiilor, Teoria Elasticităţii etc. Are ca obiect de studiu echilibrul dinamic al structurilor, exprimat prin metode specifice pentru aflarea stării de efort şi deformaţie, produsă de acţiuni.

Scrierea ecuaţiilor de echilibru se face aplicând principiul lucrului mecanic virtual, principiul lui D'Alembert, ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua sau principiul lui Hamilton.

Stabilitatea Construcţiilor şi Calculul de Ordinul II. Exprimarea echilibrului unei structuri în raport cu poziţia sa deformată, face obiectul de studiu al stabilităţii şi calculului de ordinal II.

Calculul de stabilitate constă din identificarea naturii echilibrului poziţiei deformate a unei structuri. Mărimile eforturilor axiale sunt necunoscute.

Calculul de ordinul II al unei structuri de rezistenţă, constă din determinarea stării de tensiune şi deformaţie prin exprimarea echilibrului în raport cu poziţia sa deformată. În calculul de ordinul II, sarcinile transversale şi eforturile axiale se presupun cunoscute.

1.2. Dinamica construcţiilor

1.2.1. Acţiuni. Sistem. Răspuns

Abordarea sistemică a problemelor din Dinamica Structurilor presupune definirea sistemului vibrant, a acţiunilor şi a răspunsului.

Acţiunea reprezintă o cauză care produce, în elementele unei structuri de rezistenţă a unei construcţii, eforturi şi tensiuni, deplasări şi deformaţii, pulsaţii etc. Pentru calcul, acţiunea se reprezintă sub formă de forţe şi deplasări, caracterizate cantitativ prin parametri corespunzători.

Acţiunea dinamică reprezintă o cauză rapid variabilă în timp, ce se manifestă asupra unui sistem dinamic, generând eforturi inerţiale. Exemple de acţiuni dinamice:

a) acţiuni produse de utilaje şi echipamente: maşini unelte, motoare cu mecanism bielă – manivelă, prese şi maşini de forat, concasoare şi mori (din industria materialelor de construcţii);
b) sarcini mobile: trafic, autovehicule, poduri rulante, vagoane de cale ferată etc.;
c) acţiunea vântului;
d) acţiunea seismică;
e) explozii.

Sistem. Un Sistem vibrant este constituit din structura propriu-zisă a unei construcţii la care se ataşează mase distribuite (după o anumită lege) şi/sau mase concentrate.

Orice structură este capabilă, sub acţiunea unor cauze cu caracter dinamic (variabile în timp), să efectueze mişcări relative în jurul unei poziţii de echilibru. Acest fenomen se datorează faptului că structura posedă proprietăţi inerţiale (mase concentrate şi distribuite) şi elastice (definite prin flexibilitate sau rigiditate).

Deoarece mişcarea unui asemenea sistem se repetă, în timp, după anumite legi de variaţie, tipul de comportament al sistemului se numeşte mişcare vibratorie sau vibraţie.

Răspuns. *Răspunsul dinamic liber* caracterizează mişcarea unui sistem vibrant în anumite condiţii iniţiale (deplasare sau viteză), după ce a încetat cauza care a produs mişcarea.

Răspunsul dinamic forţat caracterizează mişcarea unui sistem dinamic pe timpul istoric al aplicării acţiunii dinamice. Răspunsul dinamic se exprimă în mărimi cinematice fundamentale: deplasări, viteze şi acceleraţii sau derivate: energii, forţe generalizate, eforturi, tensiuni şi deformaţii.

Obiectul de studiu al Dinamicii Structurilor îl constituie identificarea relaţiilor existente între acţiunile dinamice, parametrii de definire a sistemului vibrant şi răspunsul dinamic al acestuia.

1.2.2. Aspecte fundamentale în Dinamica Structurilor

Cele trei probleme fundamentale ale Dinamicii Structurilor sunt următoarele:

a) Analiza;
b) Sinteza şi
c) Identificarea.

Analiza. Prin analiza unui sistem vibrant se înţelege determinarea caracteristicilor de răspuns ale acestuia când se cunosc: acţiunea şi caracteristicile sistemului.

Sinteza. Sinteza unui sistem dinamic reprezentă modul cel mai complex de a trata problemele de dinamică. Se pune problema determinării caracteristicilor fizice ale sistemului cunoscând: acţiunea şi răspunsul.

Identificarea excitaţiei. În cazul în care se cunosc caracteristicile sistemului dinamic şi răspunsul acestuia, se poate determina acţiunea aplicată pe sistem. Sistemul joacă rolul unui instrument de măsură.

1.2.3. Clasificarea mişcărilor vibratorii

Mişcările vibratorii pot fi clasificate din mai multe puncte de vedere, funcţie de cauza care produce vibraţia, forţele de rezistentă, de excitaţie etc.

a) După reprezentarea analitică:

i. vibraţii armonice – mişcări reprezentate prin funcţii trigonometrice;
ii. vibraţii periodice – mişcări care se repetă identic după un interval de timp, T, numit perioadă de vibraţie;
iii. vibraţii descrescătoare – amplitudinile mişcării se micşorează în timp;
iv. vibraţii crescătoare – amplitudinile mişcării cresc în timp.

b) După cauza care produce vibraţia:

i. vibraţii libere – produse de un şoc (condiţii iniţiale: viteză şi deplasare). Cauza dispare şi sistemul vibrează liber, pe toată durata mişcării sistemul înmagazinează energie;

ii. vibraţii forţate – sunt produse de o excitaţie perturbatoare exterioară independentă de caracteristicile sistemului vibrant. Sistemul înmagazinează energie pe toată durata mişcării; forţele perturbatoare pot fi armonice, periodice sau oarecare;

iii. vibraţii parametrice – sunt produse de vibraţia periodică a unui parametru al mişcării: masa, constanta elastică sau amortizarea, care sunt variabile în timp;

iv. vibraţii autoexcitate – produse de cauze interne ale sistemului;

v. şocul – caracterizează un fenomen extrem de rapid şi de mare intensitate; dacă şocul este de foarte scurtă durată vibraţia se transformă în vibraţie liberă.

c) După forţa de rezistenţă:

i. vibraţii neamortizate – forţele de frecare sunt mici şi se neglijează;

ii. vibraţii amortizate – forţele interioare nu se pot neglija şi în interiorul sistemului se produc disipări importante de energie.

d. După modul de exprimare a excitaţiei sau a răspunsului:

iii. vibraţii deterministe – orice mărime ce caracterizează vibraţia poate fi determinată, la un moment dat, cunoscând funcţia prin care este reprezentată vibraţia;

iv. vibraţii aleatoare (nedeterministe) – mărimile caracteristice ale vibraţiei sunt determinate pe baze probabilistice.

1.2.4. Modelarea sistemelor

Structurile de rezistenţă ale construcţiilor sunt sisteme cu masă distribuită continuu după a anumită lege. Caracteristicile acestor sisteme pot defini un model fizic şi un model matematic.

Modelul fizic este compus din schema statică a structurii, obţinută prin reducerea elementelor de construcţie la axele sale, de exemplu: grinzi simplu rezemate, grinzi cu console, grinzi cu zăbrele, arce, cadre etc., la care se ataşează mase concentrate sau distribuite (după o anumită lege). Modelul astfel obţinut, poartă denumirea de sistem dinamic sau vibrant.

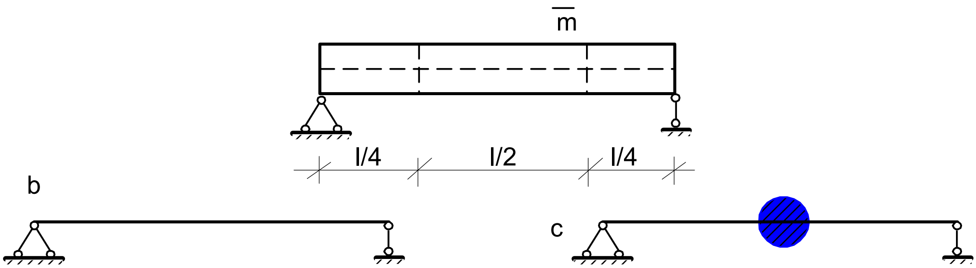

Fig.1.1. Grinda simplu rezemată:
a. grinda propriu – zisă cu masă distribuită; b. schema statică a grinzii, c. sistemul dinamic (vibrant) cu masă concentrată

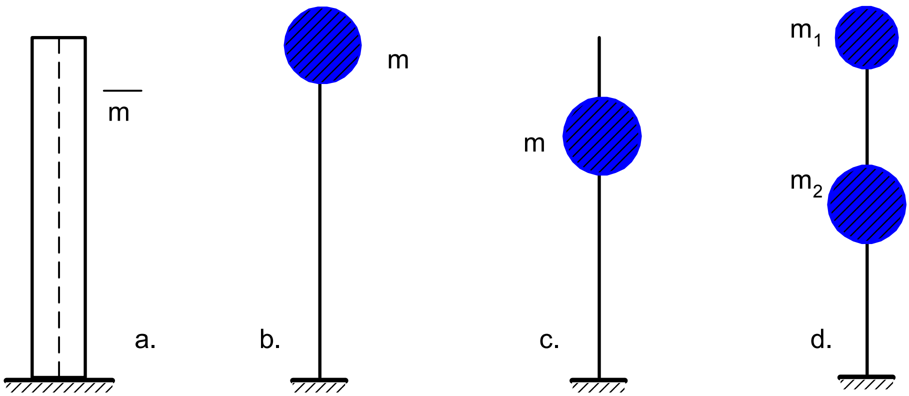

Fig. 1.2. Grinda încastrată :
a. grinda propriu – zisă cu masă distribuită; b., c. şi d. sisteme dinamice (vibrante) cu masă concentrată

Modelul matematic este constituit din ecuaţiile de echilibru dinamic al modelului vibrant.

Orice sistem vibrant este capabil, sub acţiunea unor cauze cu caracter dinamic (variabil în timp), să efectueze mişcări relative în jurul unei poziţii de echilibru. Acest fenomen se datorează faptului că modelul posedă caracteristici elastice şi inerţiale. Caracteristicile elastice sunt definite prin rigidităţi şi/sau flexibilităţi. Cele inerţiale sunt statuate prin mase concentrate sau/şi distribuite.

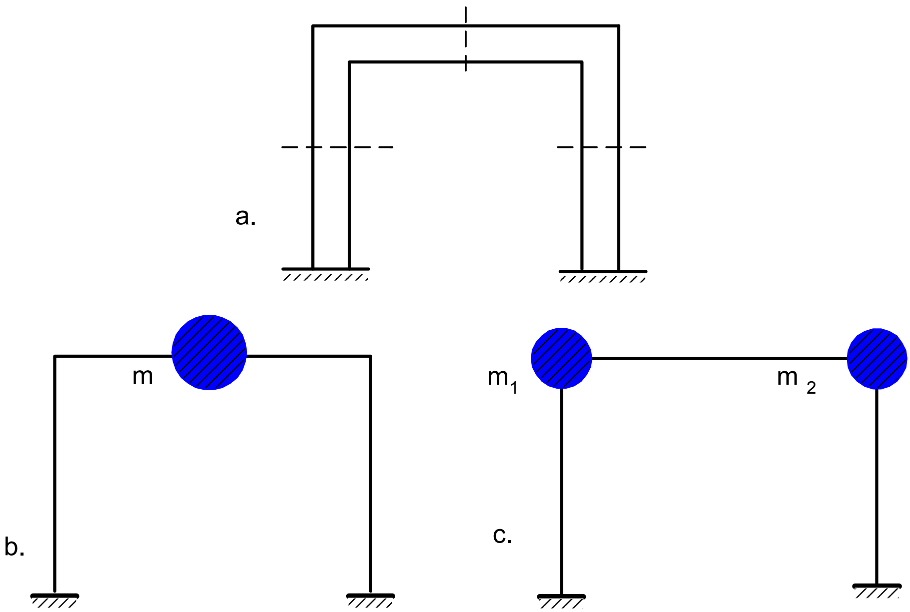

Fig. 1.3. Cadru static nedeterminat: a. cadru propriu-zis;
b., c. sisteme dinamice

Mişcarea care se repetă, în timp, după o anumită lege se numeşte *vibraţie* sau *mişcare vibratorie*. Mişcarea vibratorie după o anumită perioadă de timp încetează datorită caracteristicilor de amortizare ale sistemului dinamic.

1.2.5. Coordonate dinamice

Poziţia instantanee a unui sistem vibrant, în orice moment al mişcării, poate fi determinată printr-o infinitate de parametri independenţi sau coordonate dinamice, numite şi grade de libertate dinamică (notate, pe scurt, GLD).

Deplasările măsurate pe direcţia GLD reprezintă necunoscutele fundamentale ale Dinamicii Structurilor.

În vederea simplificării modelului dinamic, sistemul dinamic cu masă distribuită poate fi transformat, presupunând un anumit grad de aproximare, într-un sistem cu mase distribuite. Gradul de aproximare este cu atât mai mare cu cât numărul de mase este mai mic.

Pentru un sistem static determinat (model static) se pot evidenţia caracteristicile statice, definite prin intermediul gradului de nedeterminare statică, notat – GNS şi gradul de nedeterminare cinematico-elastică, GNCE, figura 1.4.

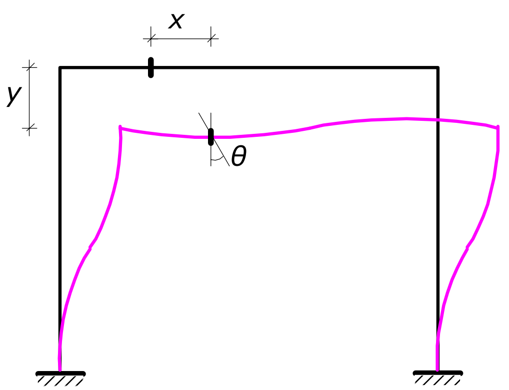

Fig. 1.4. Poziţia iniţială şi deplasată a unui cadru;
x, y şi θ – coordonate statice

Prin grad de nedeterminare statică, al unei structuri static nedeterminată, se înţelege numărul minim de legături care trebuie suprimate pentru ca structura să devină static determinată. Se determină cu relaţia:

$$GNS = (l + r) - 3c \tag{1.1}$$

sau

$$GNS = 3k - \sum s \tag{1.2}$$

unde: l reprezintă numărul de legături simple interioare,
r – numărul de legături simple din reazem;
k – numărul de contururi distincte;
s – numărul de legături simple lipsă unui contur pentru ca acesta să fie de trei ori static nedeterminat;
c – numărul de corpuri.

Prin grad de nedeterminare cinematico-elastică a unei structuri se înţelege posibilităţile distincte de deplasare a nodurilor. Se stabileşte cu relaţia:

$$GNC = 3 * N, \tag{1.3}$$

pentru structuri plane şi cu formula

$$GNC = 6 * N, \tag{1.4}$$

pentru structuri spaţiale

sau

$$GNC = N + g, \tag{1.5}$$

$$g = 3 * c - (l + r), \tag{1.6}$$

unde: N reprezintă numărul de noduri rigide,

g – numărul de grade de libertate, care se determină pe o structură obţinută din structura dată (static nedeterminată) prin introducerea de articulaţii în nodurile rigide şi în reazemele încastrate;

c, l, r – idem relaţia (1.1).

Gradul de libertate dinamică se determină cu relaţiile:

$$GLD = 3 * N \tag{1.7}$$

pentru sisteme dinamice plane
şi

$$GLD = 6 * N, \tag{1.8}$$

pentru sistemele dinamice aflate într-o stare spaţială de comportare sau

$$GLD = \infty, \tag{1.9}$$

în cazul sistemelor dinamice cu mase distribuite după o anumită lege de variaţie.

Asemănarea dintre relaţii (1.3) şi (1.6), respectiv (1.4) cu (1.7) ne relevă faptul că gradul de nedeterminare cinematico-elastică, determinat pentru un model static, este egal cu gradul de libertate dinamică, dacă sistemul dinamic, pe care de determină GLD, este obţinut prin concentrarea maselor în nodurile rigide ale modelului static, figura 1.5.

Referitor la relaţiile (1.6) şi (1.7) este de menţionat faptul că la acordarea numărului de grade de libertate dinamică se va lua în considerare numai deplasările importante. Astfel, în cazul situaţiilor din figura 1.6, numărul real al gradelor de libertate este mai mic decât cel obţinut din calcul, aplicând relaţia (1.6), deoarece unele deplasări dinamice sunt nesemnificative în comparaţie cu altele.

1.2.6. Sistem dinamic (vibrant)

Asocierea următoarelor caracteristici fundamentale:

a) inerţială (generată de mişcare);
b) disipativă (generată de capacitatea de amortizare);
c) elastică, datorată de proprietăţile de deformabilitate ale sistemului, care nu se modifică pe toată durata mişcării,

se numeşte (reprezintă un) sistem dinamic (model dinamic, sistem vibrant).

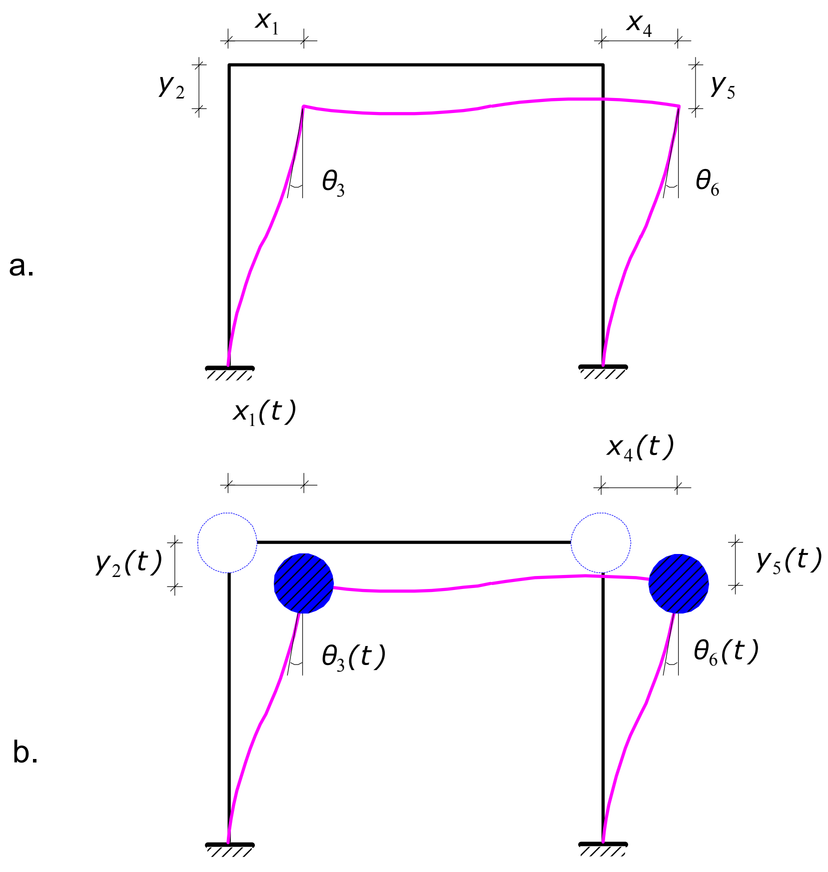

Fig. 1.5. Model static şi model dinamic. Comparaţie între gradele de nedeterminare cinematico-elastice şi gradele de libertate dinamică:
a. structura deformată a modelului static se caracterizează prin GNCE = 6 (două noduri a câte trei deplasări);
b. modelul dinamic defineşte GLD = 6 (două mase a câte 3GLD)

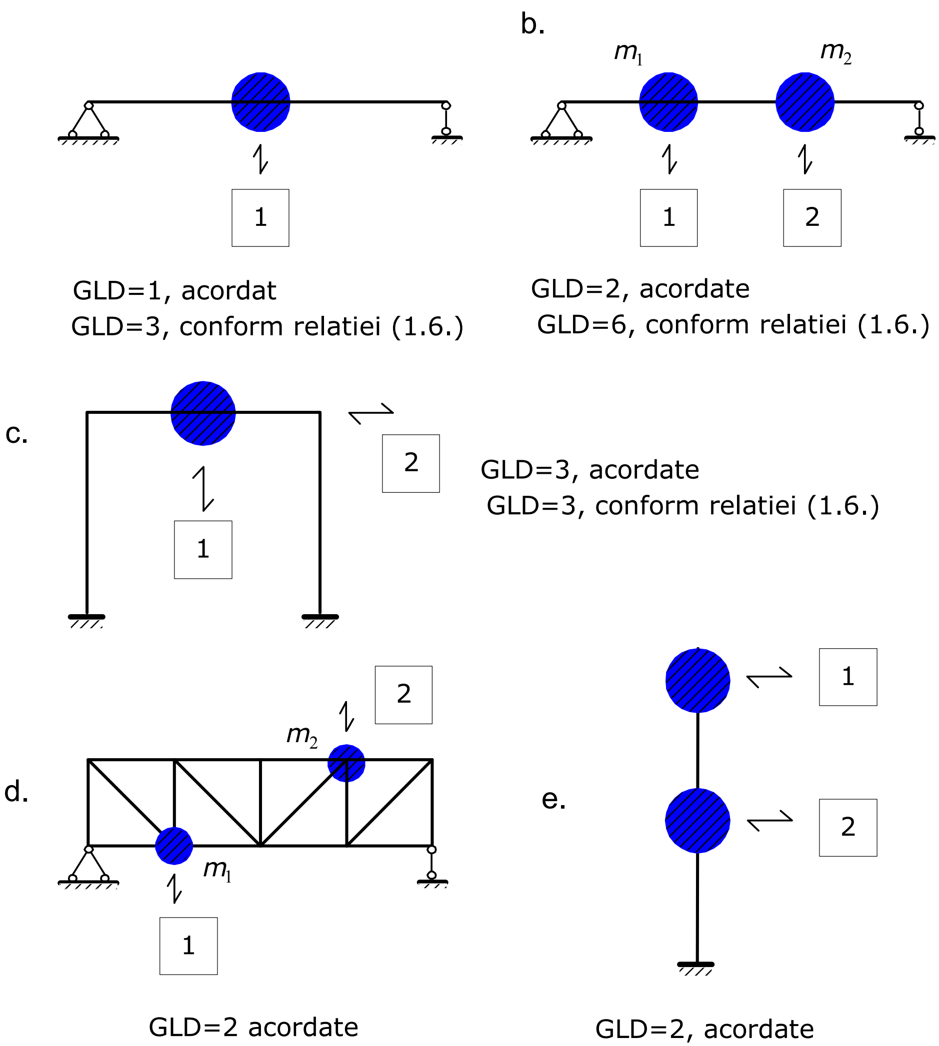

Fig. 6. Modalităti de acordare a gradelor de libertate dinamică pentru diverse modele dinamice

Cel mai simplu sistem dinamic poate fi obţinut prin asamblarea unei mase cu un element elastic caracterizat prin flexibilitate, notată δ sau rigiditate, notată *k*, în anumite condiţii de fixare în plan sau spaţiu, figura 1.7.

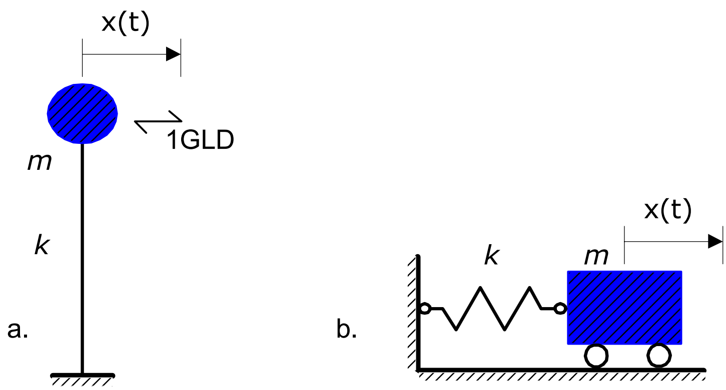

Fig. 1.7. Sisteme dinamice cu 1GLD

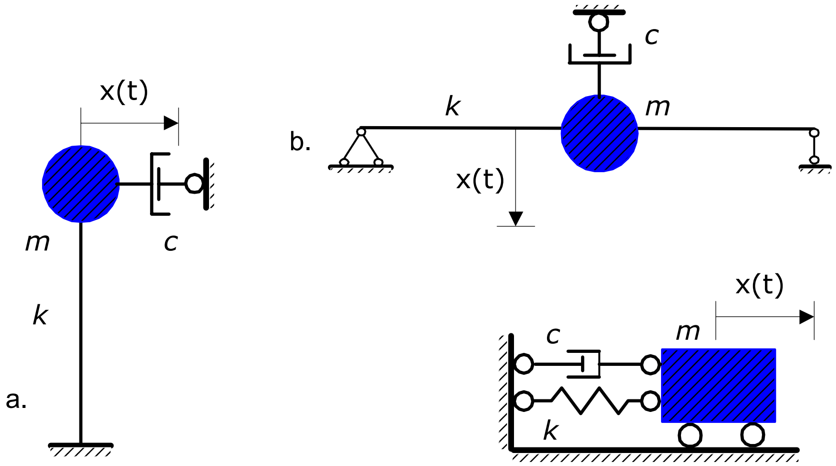

Fig. 1.8. Sisteme dinamice complete cu 1GLD

În Dinamica Structurilor pentru realizarea sistemelor dinamice se utilizează o serie de modele reologice, printre care menţionăm: modelul Hooke, modelul Newton, modelul Kelvin – Voigt, modelul Maxwell etc., figura 1.9.

Descrierea analitică a comportării unui sistem dinamic se realizează pe baza unui model matematic.

Masa. Masa a fost definită de Newton ca o noţiune care reflectă proprietăţile generale şi obiective de inerţie şi gravitaţie ale materiei.

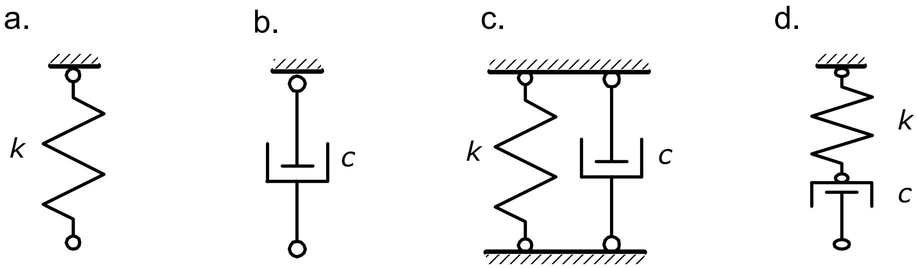

Fig. 1.9. Modele reologice: a. Hooke; b. Newton; c.Kelvin-Voigt; d. Maxwell

Masa se determină cu relaţia:

$$m = \rho * V \text{ ,[kg]} \qquad (1.9)$$

unde: ρ reprezintă densitatea materialului, [kg m^{-3}];
V – volumul materialului, [m^3].
Masa se poate calcula şi cu relaţia:

$$m = \rho \frac{G}{\gamma}, \text{ [kg]} \qquad (1.10)$$

în care: γ reprezintă greutatea specifică a materialului, unitatea de măsură: [N m^{-3}];
G – greutatea corpului, unitatate de măsură: [N].

Egalând relaţiile (1.9) şi (1.10) rezultă:

$$\rho V = \rho \frac{G}{\gamma}$$

sau

$$V = \rho \frac{G}{\gamma} = \rho \frac{mg}{\gamma},$$

în final:

$$m = V \frac{\gamma}{g}. \qquad (1.11)$$

Relaţia (1.11) se utilizează pentru determinarea masei prin intermediul volumului materiei, *V,* greutatea specifică a acesteia, γ şi acceleraţia gravitaţională, *g*.

Caracteristica disipativă. În cazul amortizării vâscoase, caracteristică disipativă se evidenţiază prin intermediul coeficientului de amortizare vâscoase, notat *c*. Considerând forţa de amortizare proporţională cu viteza prin intermediul coeficientului de amortizare, aceasta se determină cu relaţia:

$$F_a = c * v \tag{1.12}$$

unde: F_a reprezintă forţa de amortizare, [N];
v – viteza, [ms^{-1}];
c – coeficientul de amortizare vâscoasă.

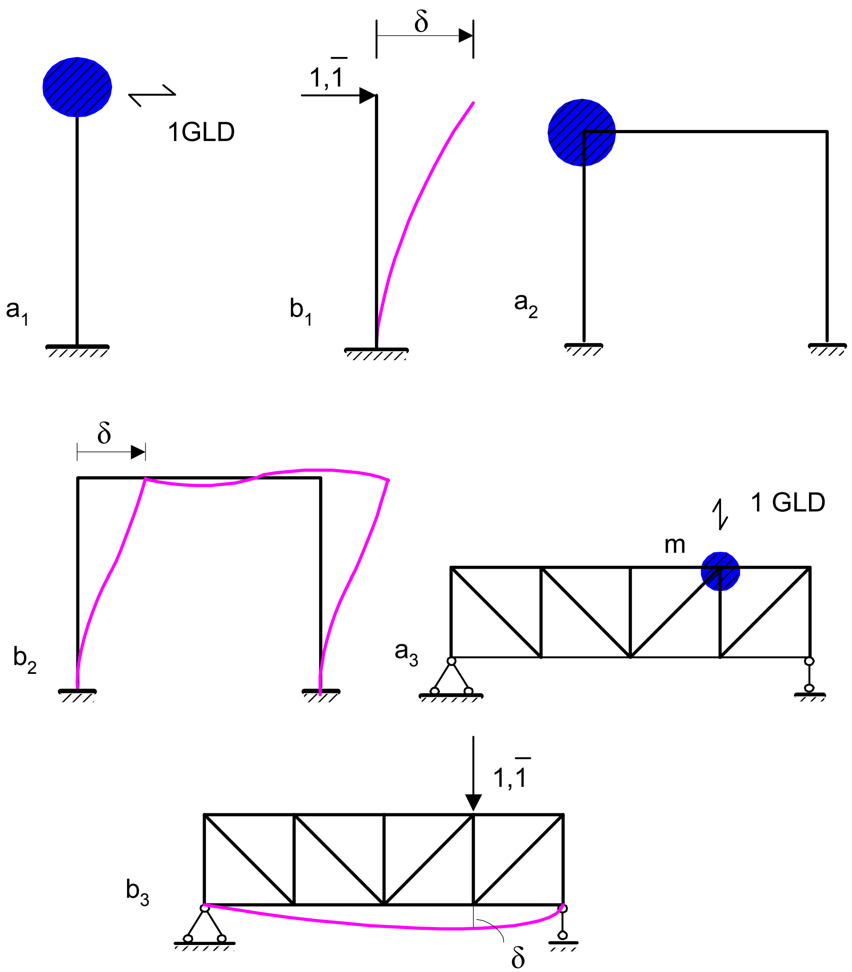

Fig. 1.10. Sisteme vibrante. Situaţii de încărcare pentru determinarea flexibilităţii, δ.

Din relaţia (1.12) se exprimă coeficientul de amortizare:

$$c = \frac{F_a}{v} \tag{1.13}$$

şi apare evidentă că unitatea de măsură este: [N m^{-1}s] sau [kg s^{-1}].

Caracteristica elastică. Flexibilitatea, notată δ, se defineşte ca fiind deplasarea măsurată pe direcţia gradului de libertate dinamică a unui sistem vibrant, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată în dreptul masei şi pe direcţia GLD. Se calculează cu relaţia Mohr - Maxwell:

$$\delta = \sum \int \frac{\overline{M}(x) * M(x)}{EI} dx \text{ , } [m\ N^{-1}] \tag{1.14}$$

În figura 1.10. sunt prezentate diverse situaţii de încărcare pentru calculul flexibilităţii.

Rigiditatea reprezintă, în cazul unui sistem vibrant cu 1 GLD, forţa care acţionând în dreptul masei şi pe direcţia GLD, produce pe această direcţie o deplasare egală cu unitatea, figura 1.11.

Rigiditatea este inversul flexibilităţii. Rezultă relaţia:

$$\delta * k = 1 \text{ .} \tag{1.15}$$

Apare evident că unitatea de măsură a rigidităţii este: [N m^{-1}].