CURSUL 2

SISTEME CU UN GRAD DE LIBERTATE DINAMICĂ

2.1. Vibraţiile libere ale sistemelor cu 1GLD

2.1.1. Ecuaţii de echilibru

Ecuaţiile de echilibru care guvernează mişcările unui sistem cu 1 GLD, figura 2.1, se deduc prin exprimarea echilibrului dinamic instantaneu. Echilibrul dinamic, conform principiului lui d'Alembert, se reduce la un echilibru static prin includerea şi a forţei de inerţie. Echilibrul dinamic se exprimă în raport cu poziţia de echilibru static al sistemului vibrant.

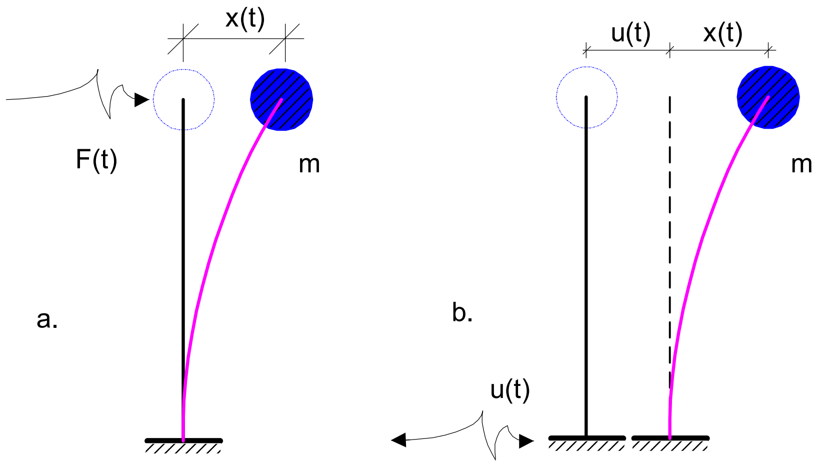

Fig.2.1. Modalităţi de acţionare a sistemelor cu 1GLD:
a. aplicarea directă a acţiunii, b. aplicarea indirectă a acţiunii

Forţele care intervin în ecuaţiile generale de condiţie sunt incluse în două categorii:

a. forţe active, care întreţin mişcarea, clasificate în:
   i. acţiuni exterioare;
   ii. forţe de inerţie, generate de masele în mişcare;
b. forţe pasive, care se opun mişcării, numite şi forţe de rezistenţă, generate de caracteristicile elastice şi disipative generate de amortizare, distingem:
   i. forţa elastică;
   ii. forţa de amortizare.

Acţiunile exterioare care se manifestă asupra sistemelor cu 1GLD se pot clasifica în două categorii, în acest sens nominalizăm:

a. acţiuni aplicate direct pe sistem, figura 2.1.a, notate F(t);
b. acţiuni aplicate indirect prin intermediul unei deplasări aplicate bazei de rezemare a sistemului, figura 2.1.b, notate u(t).

Forţele care participă la echilibrul dinamic instantaneu, în cazul acţiunilor aplicate direct pe sistem, figura 2.1, sunt următoarele:

a. forţa de inerţie:
   i. notaţie - $F_i(t)$;
   ii. relaţie de calcul:

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t)\,; \tag{2.1}$$

iii. unitate de măsură – [N],

unde : *m* reprezintă masa concentrată a sistemului vibrant;
$x(t)$ – deplasarea dinamică instantanee;
$\ddot{x}(t)$ - acceleraţia;

b. forţa de amortizare:
   i. notaţie - $F_a(t)$;
   ii. relaţie de calcul:

$$Fa(t) = -c\dot{x}(t)\,; \tag{2.2}$$

   iii. unitate de măsură – [Kgs^{-1}],

în care: c reprezintă coeficientul de amortizare vâscoasă;
$\dot{x}(t)$ - viteza;

c. forţa perturbatoare:
   i. notaţie - $F(t)$;
   ii. relaţie de calcul, în cazul acţiunilor armonice:

$$F(t) = F_0 \sin\theta\, t\,; \tag{2.3}$$

   iii. unitate de măsură – [N],

unde: F_0 reprezintă amplitudinea forţei perturbatoare, măsurată în [N],
θ – pulsaţia proprie a forţei perturbatoare, măsurată în [rad s^{-1}];

d. forţa elastică:
   i. notaţie - $F_e(t)$;
   ii. relaţie de calcul:

$$Fe(t) = kx(t)\,; \tag{2.4}$$

   iii. unitate de măsură – [N],

în care: k reprezintă rigiditatea măsurată în [Nm^{-1}].

Obs.: În cazul aplicării indirecte a acţiunilor pe sistemul vibrant, prin intermediul deplasării bazei sistemului, de exemplu producerea unei mişcări seismice, forţa de inerţie se determină cu relaţia:

$$Fi(t) = -m((\ddot{x}(t) + \ddot{u}(t))\,, \tag{2.5}$$

unde: $m(\ddot{x}(t) + \ddot{u}(t)$ reprezintă acceleraţia absolută instantanee.

Ecuaţiile mişcării vor fi:

a. în cazul aplicării directe a acţiunilor:

$$F_a(t) + F_e(t) = F(t) + F_i(t) \tag{2.6}$$

sau introducând expresiile forţelor, relaţiile: (2.2), (2.4) şi (2.5), se ajunge la forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin\theta t\,; \tag{2.7}$$

b. pentru situaţia aplicării indirecte a acţiunilor:

$$F_a(t) + F_e(t) = F_i(t) \tag{2.8}$$

sau înlocuind relaţiile de definire a forţelor, relaţiile: (2.1), (2.2) şi (2.4), obţinem

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{u}(t). \tag{2.9}$$

2.1.2. Vibraţii libere fără amortizare

Se consideră un sistem vibrant cu 1GLD, fără caracteristici disipative, constituit dintr-o masă şi un element elastic, figura 2.2. Cum forţele perturbatoare sunt nule, atunci ecuaţia (2.7) se reduce la forma:

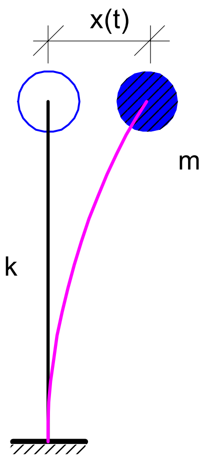

Fig. 2.2. Model dinamic simplu

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \tag{2.10}$$

Prin împărţirea termenilor ecuaţiei prim masă, ecuaţia (2.10) devine:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{2.11}$$

Pentru a defini pulsaţia proprie a sistemului se introduce relaţia:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{2.12}$$

în care: ω reprezintă pulsaţia proprie a sistemului vibrant.

Ecuaţia (2.10) are alura:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{2.13}$$

Deoarece vibraţiile unui sistem dinamic, fără a fi acţionat de forţe perturbatoare, au un caracter armonic, soluţia ecuaţiei (2.13) este:

$$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t . \tag{2.14}$$

Prin derivări succesive se calculează expresiile vitezelor şi acceleraţiilor:

$$\dot{x}(t) = C_1\omega \cos\omega t - C_2 \sin\omega t , \tag{2.15}$$

$$\ddot{x}(t) = -C_1\omega^2 \sin\omega t - C_2\omega^2 \cos\omega t . \tag{2.16}$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile iniţiale ale mişcării, pentru o deplasare şi o viteză. Deci, la momentul $t = 0$, cunoaştem:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} . \tag{2.17}$$

Introducând condiţiile (2.17) în relaţiile (2.14) şi (2.15) se obţin expresiile:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega},\ C_2 = x_0 . \tag{2.18}$$

Cu expresiile (2.18), relaţia (2.14) devine:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t + x_0 \cos\omega t \tag{2.19}$$

sau comparând cele două mişcări rezultă:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \psi) . \tag{2.20}$$

Amplitudinea mişcării, notată *A*, se determină cu relaţia:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^{\ 2}} , \tag{2.21}$$

iar faza iniţială a vibraţiei, ψ:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{x_0\omega}{{}_0v} . \tag{2.22}$$

Derivând succesiv relaţia (2.20) se deduc variaţiile vitezelor şi acceleraţiilor sistemului vibrant:

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \psi) , \tag{2.23}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \psi) = -\omega^2 x(t) . \tag{2.24}$$

Conform relaţiilor de mai sus, viteza este defazată cu $\pi/2$ înaintea deplasării, iar acceleraţia cu $\pi/2$ înaintea deplasării.

În figura 2.3 sunt prezentate reprezentările grafice ale expresiilor: (2.20), (2.23), (2.24).

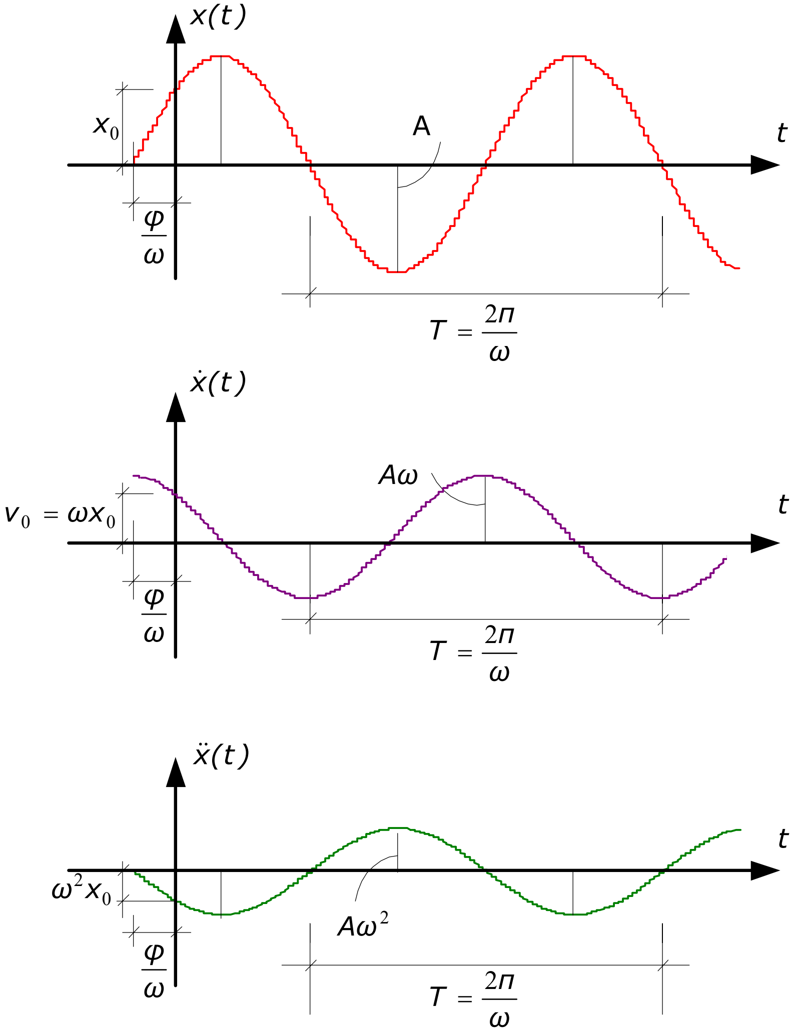

Fig.2.3. Sistem cu 1GLD. Reprezentarea grafică a deplasărilor, vitezelor şi acceleraţiilor

Analizând reprezentările grafice constatăm:

a. reprezentările definesc vibraţii armonice;
b. mişcările (deplasări, viteze şi acceleraţii) au aceeaşi pulsaţie ω şi, deci, aceeaşi pulsaţie T;

c. vibraţia liberă are un caracter permanent şi de durată infinită, datorită absenţei forţei de amortizare.

Din studiul relaţiei (2.12) rezultă că pulsaţia proprie de vibraţie, ω, este o caracteristică intrinsecă a sistemului vibrant, deoarece depinde de doi parametri de definire ai sistemului: masa, m şi rigiditatea, k. Se determină cu relaţia:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{2.25}$$

iar dacă înlocuim regiditatea cu flexibilitatea, deoarece kδ=1, rezultă:

$$\omega = (m\delta)^{-1}\,. \tag{2.26}$$

Pulsaţia proprie de vibraţie reprezintă numărul de vibraţii complete care se produc într-un interval de timp egal cu 2π secunde.

Perioada proprie de vibraţie se identifică cu timpul minim necesar pentru ca o mişcare simplă periodică sau oarecare să se repete identic. Se calculează cu relaţia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,, \quad [s]. \tag{2.27}$$

Frecvenţa proprie semnifică numărul de vibraţii complete produse într-un interval de timp egal cu o secundă, se determină cu expresia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,, \quad [s^{-1}]\ \text{sau}\ [Hz]. \tag{2.28}$$

2.1.3. Etape pentru calculul caracteristicilor proprii ale unei vibraţii

Pentru determinarea caracteristicilor proprii de vibraţie ale unui sistem vibrant se folosesc relaţiile de calcul: (2.25) sau (2.26), (2.27) şi (2.28), urmând următoarea eşalonare a calculelor:

a) Stabilirea sistemului vibrant. Se pleacă de la sistemul constructiv real, pentru care se construieşte modelul static (schema statică a structurii), iar prin concentrarea masei într-o secţiune şi acordarea gradului de libertate semnificativ se obţine sistemul vibrant (modelul dinamic), cu un GLD.

b) Determinarea flexibilităţii sau a rigidităţii sistemului vibrant:
   b.1.) Calculul flexibilităţii, figura 2.4:
      i. notaţii: δ sau f;
      ii. definiţie – flexibilitatea reprezintă deplasarea măsurată pe direcţia gradului de libertate dinamică a unui sistem

vibrant, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată în dreptul masei şi pe direcţia gradului de libertate;

iii. unitate de măsură – $\left[mN^{-1}\right]$;

iv. schema de calcul, figura 2.4;

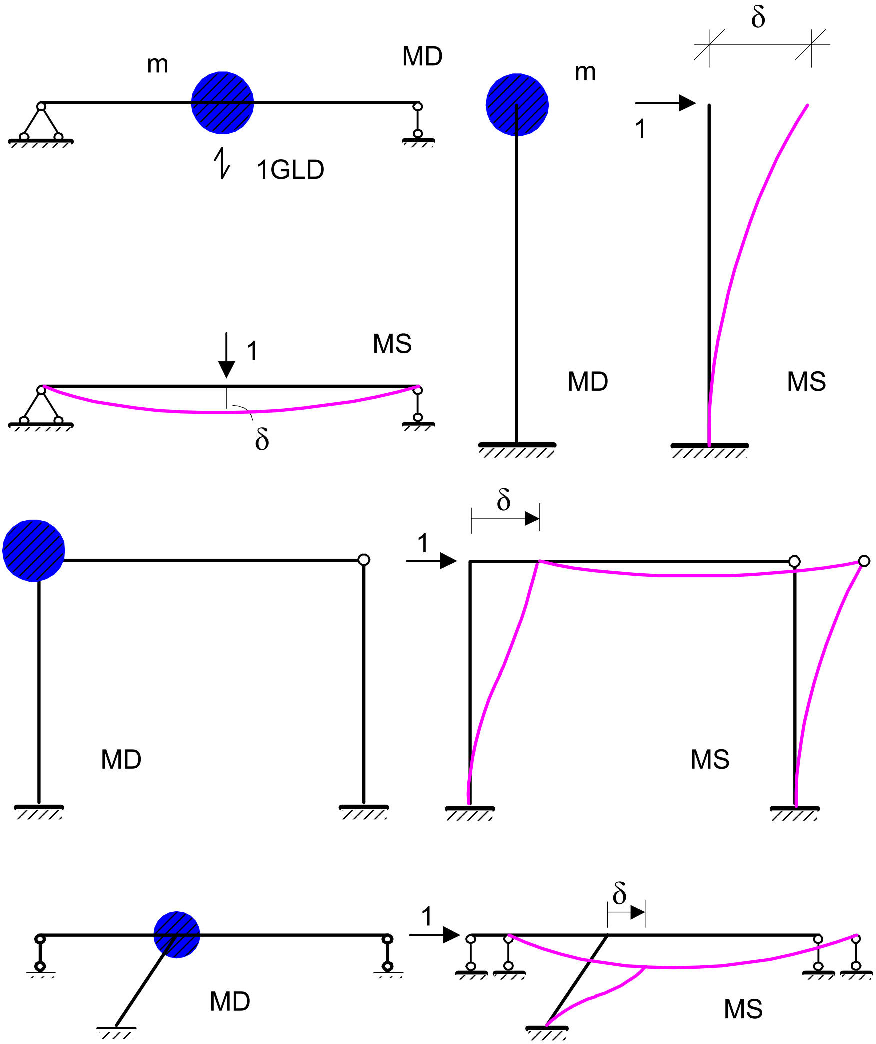

Fig. 2.4. Modele dinamice şi situaţii de încărcare pentru calculul flexibilităţii

v. relaţie de calcul:

$$\delta = \int_0^l \frac{\overline{M}(t)M(t)}{EI}dx\,. \tag{2.29}$$

Aplicarea relaţiei (2.29) presupune existenţa a două situaţii (stări) de încărcare: starea reală şi starea virtuală (fictivă). Starea reală a fost definită în figura 2.3. Starea virtuală se constituie din structura dată (schema statică, modelul static) acţionată în dreptul masei şi pe direcţia pe care dorim să determinăm deplasarea, aici direcţia este tot direcţie GLD, de o forţă egală cu unitatea. Rezultă că în cazul sistemelor cu 1GLD cele două stări, reală şi virtuală, coincid;

vi. Metode pentru trasarea diagramelor de eforturi. În cazul structurilor static nedeterminate, în vederea trasării diagramelor de eforturi – momente încovoietoare, se folosesc două metode: a eforturilor (a forţelor) şi a deplasărilor (deformaţiilor).

b.2.) Calculul rigidităţii, figura 2.5:

i. notaţie: k;
ii. definiţie – rigiditatea reprezintă forţa care aplicată în dreptul masei şi pe direcţia GLD, produce pe această direcţie o deplasare egală cu unitatea;
iii. unitate de măsură – $\left[m^{-1}N\right]$;
iv. scheme de calcul, figura 2.5.

Există două posibilităţi de a afla valoarea unei rigidităţi. *Prima metodă constă* în aplicarea definiţiei. Forţa aplicată pe structură, figura 2.5.a sau b, notată k, necunoscută, determină pe direcţia GLD o deplasare egală cu unitatea. Se aplică metoda Mohr-Maxwell şi se calculează expresia deplasării produse de forţa k, care prin egalare cu unitatea evidenţiază o ecuaţie, în care necunoscuta este forţa k. Prin soluţionarea ecuaţiei se obţine valoarea rigidităţii.

A *doua cale* pentru găsirea valorii rigidităţii constă în blocarea deplasării pe direcţia GLD, figura 2.5.c sau d, printr-un blocaj de tip reazem simplu, pentru deplasarea liniară sau un blocaj de nod, pentru deplasarea unghiulară. Reacţiunea din blocaj (blocaj de nod sau reazem simplu), în cazul în care sistemul este acţionat cu o cedare de reazem egală cu unitatea, în blocajul introdus fictiv, pe direcţia GLD, reprezintă rigiditatea sistemului.

Prin introducerea blocajelor (pentru deplasări liniare sau unghiulare) sistemul vibrant îşi măreşte nedeterminarea statică, în cazul unei structuri static nedeterminată şi devine static nedeterminată, în cazul unei structuri static determinată.

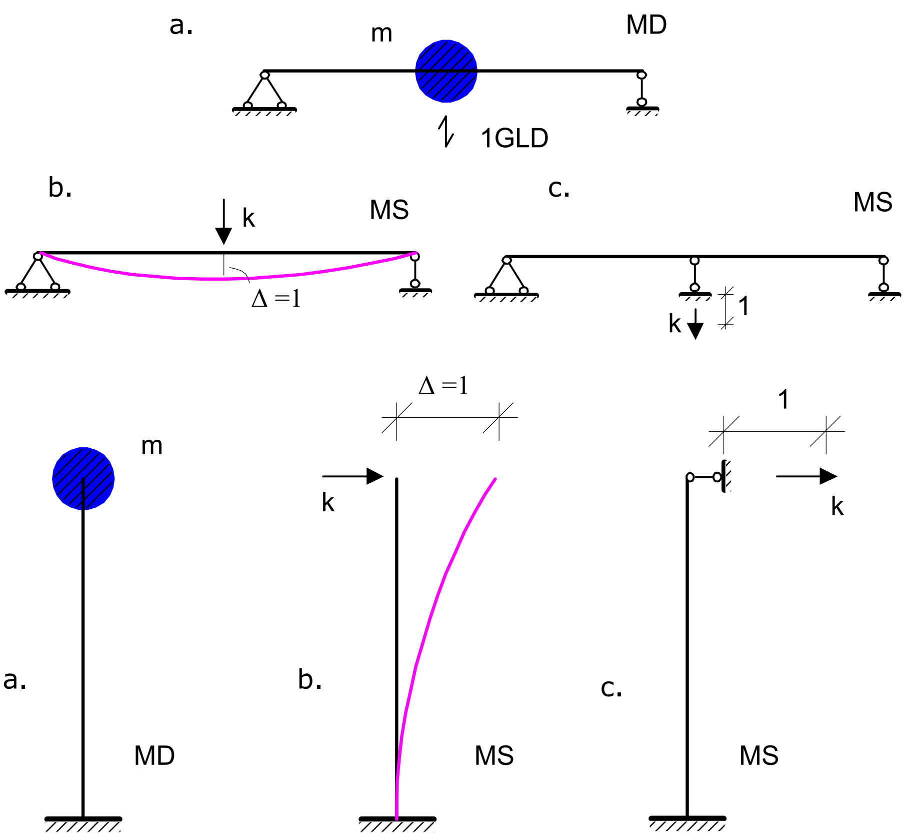

Fig. 2.5. Modele dinamice şi situaţii de încărcare pentru aflarea rigidităţii: a. model dinamic. b. schemă de calcul cu rigiditatea aplicată ca acţiune; c. schemă de calcul pentru determinarea rigidităţii ca reacţiune

c) Determinarea pulsaţiei, frecvenţei şi perioadei proprii de vibraţie:

   c.1.) În cazul în care se lucrează cu flexibilitatea sistemului, pentru aflarea caracteristicilor dinamice se utilizează relaţiile: (2.26), (2.27) şi (2.28).

   c.2.) Atunci când se foloseşte rigiditatea în soluţionarea unui sistem dinamic cu un grad de libertate dinamic, la calculul caracteristicilor dinamice se folosesc expresiile: (2.25), (2.27) şi (2.28).

2.1.4. Vibraţii libere cu amortizare vâscoasă

Se consideră un sistem vibrant, figura 2.6, definit prin trei caracteristici:

a) masa (inerţială), m;

b) disipativă, definită prin intermediul coeficientului de amortizare vâscoasă, c;

c) elastică, coeficientul de rigiditate, k.

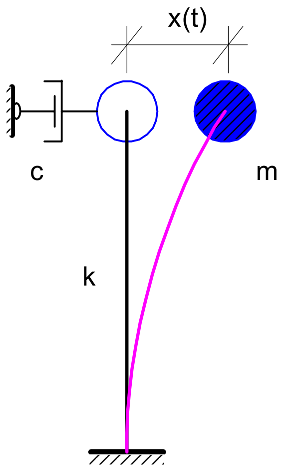

Fig. 2.6. Model dinamic complet

Un astfel de sistem, supus acţiunii unui şoc: deplasare şi viteză iniţiale, întră în vibraţii libere. Dar, deoarece posedă capacitate de amortizare, mişcarea sa încetează după un interval de timp, datorită producerii unei disipări de energie.

În ecuaţia de echilibru dinamic instantaneu intervin următoarele forţe:

a) forţa de inerţie:

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t)\,; \tag{2.30}$$

b) forţa de amortizare:

$$F_a(t) = c\dot{x}(t)\,; \tag{2.31}$$

c) forţa elastică:

$$F_e(t) = kx(t)\,. \tag{2.32}$$

Ecuaţia de mişcare va avea forma de mai jos:

$$F_a(t) + F_e(t) = F_i(t) \tag{2.33}$$

Se introduce în ecuaţia (2.33) expresiile forţelor, relaţiile (2.30), (2.31) şi (2.32), şi se obţine ecuaţia:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 . \tag{2.34}$$

Pentru a transforma ecuaţia (2.34) într-o ecuaţie integrabilă, toţi termenii ecuaţiei se împart prin masa sistemului, m, rezultă:

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 . \tag{2.35}$$

Se introduc notaţiile:

$$\frac{c}{m} = 2\beta \tag{2.36}$$

şi

$$\frac{k}{m} = \omega^2 , \tag{2.37}$$

iar ecuaţia (2.35) devine:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 , \tag{2.38}$$

cu ecuaţia caracteristică:

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0 , \tag{2.39}$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} . \tag{2.40}$$

În funcţie de valoarea discriminantului, distingem următoarele cazuri de amortizare în sistemul vibrant:

a) amortizare critică când este îndeplinită condiţia:

$$\beta^2 - \omega^2 = 0 ; \tag{2.41}$$

b) amortizare supracritică:

$$\beta^2 - \omega^2 \rhd 0 ; \tag{2.42}$$

c) amortizare subcritică:

$$\beta^2 - \omega^2 \lhd 0 . \tag{2.43}$$

În cazul amortizării critice valoarea coeficientului de amortizare, pentru care se anulează discriminantul, poartă denumirea de coeficient de amortizare critică, notat c_{cr}. Se introduce expresia (2.36) în relaţia (2.41):

$$\frac{c_{cr}^2}{4m^2} - \omega^2 = 0$$

de unde

$$c_{cr} = 2m\omega . \qquad (2.44)$$

Se introduce noţiunea de fracţiune din amortizarea critică, notată ν, care, prin definiţie, reprezintă raportul dintre coeficientul de amortizare, c şi coeficientul de amortizare critică, c_{cr}, astfel:

$$\nu = \frac{c}{c_{cr}} \qquad (2.45)$$

sau dacă se introduce în relaţia (2.45), expresiile (2.36) şi (2.44) aceasta devine:

$$\nu = \frac{2m\beta}{2m\omega} . \qquad (2.46)$$

Din ultima expresie, se poate pune în evidenţă o relaţie de calcul pentru coeficientul de amortizare β, funcţie de fracţiunea din amortizarea critică şi pulsaţia proprie:

$$\beta = \nu\omega . \qquad (2.47)$$

Mişcarea vibratorie, în cazul amortizării critice, îşi pierde caracterul vibratoriu şi poartă denumirea de mişcare aperiodică.

Amortizarea supracritică nu este proprie construcţiilor, mişcarea sistemului este tot o mişcare aperiodică.

Se vor analiza, în continuare, sistemele vibratorii care posedă amortizarea subcritică, propriii construcţiilor. Aceste sisteme sunt caracterizate prin:

$$c < c_{cr}$$

şi

$$\nu < 1 ,$$

iar rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt imaginare:

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega^2 - \beta^2} , \qquad (2.48)$$

unde $j = \sqrt{-1}$

şi

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\omega^* , \qquad (2.49)$$

în care

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} , \qquad (2.50)$$

iar ω^* reprezintă pulsaţia proprie a sistemului vibrant, când se ia în considerare amortizarea.

Soluţia ecuaţiei (2.38) este:

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \tag{2.51}$$

şi

$$x(t) = Ae^{(-\beta + j\omega^*)t} + Be^{(-\beta - j\omega^*)t} \tag{2.52}$$

sau

$$x(t) = e^{-\beta t}(Ae^{j\omega^* t} + Be^{-j\omega^* t}). \tag{2.53}$$

De asemenea, se poate exprima deplasarea prin relaţia:

$$x(t) = e^{-\beta t}(C_1 \sin\omega^* t + C_2 \cos\omega^* t \tag{2.54}$$

sau

$$x(t) = A\sin(\omega^* t + \varphi^*), \tag{2.55}$$

unde

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \tag{2.56}$$

$$\mathrm{tg}\psi^* = \frac{C_2}{C_1}. \tag{2.57}$$

Constantele de integrare se determină din condiţii iniţiale:

$$t = 0 \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}, \tag{2.58}$$

rezultă:

$$C_1 = \frac{v_0 + v\omega x_0}{\omega^*}, \tag{2.59}$$

$$C_2 = x_0. \tag{2.60}$$

Mişcarea descrisă de funcţia (2.55) reprezintă o mişcare armonică de pulsaţie ω^* şi amplitudine $Ae^{-\beta t}$, care descreşte exponenţial în timp şi care se numeşte mişcare pseudoarmonică. Reprezentarea unei astfel de mişcări este prezentată în figura 2.7.

Caracteristicile dinamice proprii ale mişcării sunt:

a) pulsaţia proprie, calculată cu relaţia:

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \tag{2.61}$$

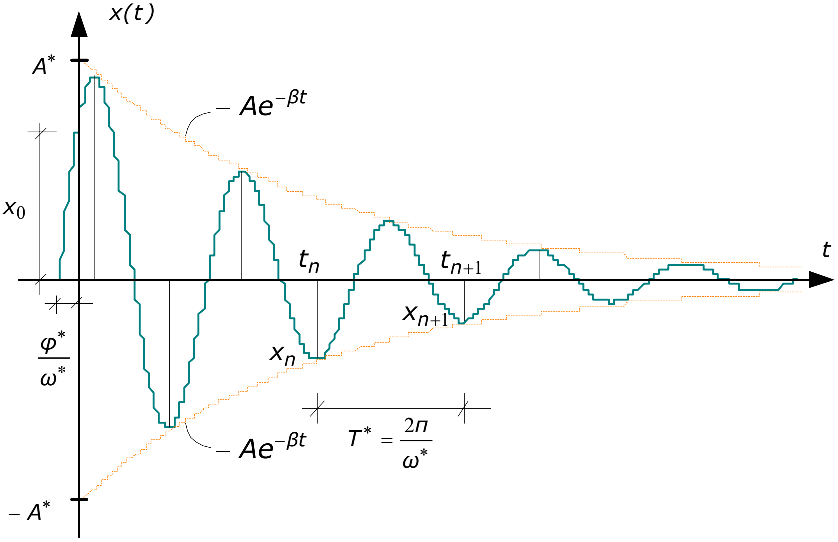

Fig. 2.7. Reprezentarea grafică a unei mişcări pseudoarmonice

şi conform expresiei (2.47) rezultă:

$$\omega^* = \omega\sqrt{1-\nu^2}\ ; \qquad 2.62)$$

b) frecvenţa proprie:

$$f^* = f\sqrt{1-\nu^2}\ ; \qquad (2.63)$$

c) perioada proprie:

$$T^* = \frac{T}{\sqrt{1-\nu^2}}\ . \qquad (2.64)$$

Experimental s-au obţinut valori ale fracţiunii din amortizarea critică pentru diferite materiale şi construcţii, acestea sunt prezentate în tabelul nr.1.

Tabelul nr.1. Fracţiunea din amortizarea critică

Construcţii şi terenuri	**ν , fracţiunea din amortizarea critică**
Construcţie cu structura din beton armat monolit	0.02 – 0.14
Construcţie cu structura din zidărie	0.06 – 0.18
Construcţie industrială cu structura monolită	0.02 – 0.06

Poduri din beton armat	0.03 – 0.016
Poduri metalice	0.02 – 0.08
Construcţii masive	0.05 – 0.1
Terenuri de fundare	0.06 – 0.3
Nisip compact	0.1

Analizând valorile din tabel, global, se consideră că pentru sectorul de construcţii se poate accepta, referitor la fracţiunea din amortizarea critică, valoare:

$$v \approx 0.2 \tag{2.65}$$

şi, deci

$$\omega^* \approx \omega, \qquad f^* \approx f, \qquad T^* = T\,. \tag{2.66}$$

Gradul de amortizare al unei construcţii se defineşte prin intermediul decrementului logaritmic, notat Δ.

Decrementul logaritmic al amortizării reprezintă logaritmul natural al raportului dintre două amplitudinii succesive decalate de o perioadă, figura 2.7.

$$\Delta = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}}\,. \tag{2.67}$$

Dar, se cunoaşte că

$$x_n = Ae^{-\beta t_n} \tag{2.68}$$

si

$$x_{n+1} = Ae^{-\beta_{n+1}}\,. \tag{2.69}$$

Introducând (2.68) şi (2.69) în (2.67) rezultă

$$\Delta = \beta T^* = v\omega T^* = v\frac{2\pi}{T}T^* \tag{2.70}$$

sau

$$\Delta = 2\pi v\,. \tag{2.71}$$