CURSUL 3

SISTEME VIBRANTE CU 1GLD

3.1 Vibraţii forţate neamortizate

Se consideră un sistem vibrant cu 1GLD acţionat de o forţă perturbatoare de tip armonic, figura 3.1.

Forţele care îşi fac echilibru sunt:

a) forţa de inerţie

$$F_i(t) = -m\ddot{x}(t)\ ; \tag{3.1}$$

b) forţa elastică

$$F_e(t) = kx(t)\,; \tag{3.2}$$

c) forţa perturbatoare

$$F(t) = F_0 \sin\theta t\,. \tag{3.3}$$

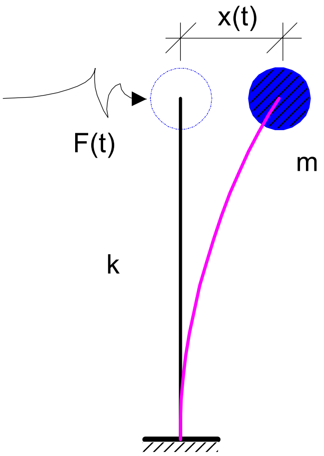

Fig. 3.1. Sistem vibrant acţionat
de o forţă armonică

Conform principiului lui d'Alembert ecuaţia de echilibru dinamic instantaneu va avea forma:

$$F_e(t) = F_i(t) + F(t) \tag{3.4}$$

sau înlocuind expresiile forţelor, relaţiile (3.1), (3.2) şi (3.3), în ecuaţia (3.4), aceasta devine:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin\theta t\,. \tag{3.5}$$

Se împarte fiecare termen al ecuaţiei prin masa sistemului vibrant şi se obţine o nouă formă a ecuaţiei

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t\,. \tag{3.6}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (3.6) este:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t)\,, \tag{3.7}$$

unde: $x_L(t)$ reprezintă soluţia ecuaţiei omogene corespunzătoare vibraţiilor libere şi are forma:

$$x_L(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t\,; \tag{3.8}$$

$x_F(t)$ - soluţia particulară, corespunde perturbaţiei armonice şi reprezintă răspunsul forţat al sistemului, se prezintă sub forma:

$$x_F(t) = M\sin\theta t + N\cos\theta t\,. \tag{3.9}$$

Această soluţie, relaţia (3.9), trebuie să satisfacă ecuaţia mişcării (3.6). Pentru aceasta, soluţia (3.9) se derivează succesiv de două ori:

$$\dot{x}_F(t) = M\theta\sin\theta t - N\theta\cos\theta t \tag{3.10}$$

şi

$$\ddot{x}_F(t) = -M\theta^2\sin\theta t - N\theta^2\cos\theta t\,. \tag{3.11}$$

Introducând expresiile (3.9), (3.10) şi (3.11) în ecuaţia (3.6) se obţine:

$$-\theta^2(M\sin\theta t + N\cos\theta t) + \omega^2(M\sin\theta t + N\cos\theta t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t \tag{3.12}$$

sau

$$M(\omega^2 - \theta^2)\sin\theta t + N((\omega^2 - \theta^2)\cos\theta t = \frac{F_0}{m}\sin\theta t\,. \tag{3.13}$$

Prin identificarea coeficienţilor funcţiilor trigonometrice se determină constantele M şi N:

$$M(\omega^2 - \theta^2) = \frac{F_0}{m} \tag{3.14}$$

şi

$$N((\omega^2 - \theta^2)\cos\theta t = 0 \tag{3.15}$$

sau

$$M = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \tag{3.16}$$

şi

$$N = 0 \tag{3.17}$$

Soluţia particulară devine:

$$x_F(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\sin\theta t\,, \tag{3.18}$$

iar cea generală:

$$X(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}\sin\theta t \tag{3.19}$$

şi

$$\dot{X}(t) = C_1\omega\cos\omega t - C_2\omega\sin\omega t + \frac{F_0\theta}{m(\omega^2-\theta^2)}\cos\theta t\,. \tag{3.20}$$

Constantele C_1 şi C_1 se determină din condiţii iniţiale:

$$t = 0\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}. \tag{3.21}$$

Conform relaţiilor (3.19), (3.20) şi (3.21) rezultă:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\theta}{\omega}\frac{F_0}{m(\omega^2-\theta^2)}\,, \tag{3.22}$$

$$C_2 = x_0\,. \tag{3.23}$$

Soluţia generală ia forma:

$$X(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2-\theta^2)}(\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t)\,. \tag{3.24}$$

În regim staţionar soluţia este:

$$X(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2-\theta^2)}(\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t)\,. \tag{3.25}$$

Factorul adimensional al relaţiei (3.25) se rearanjează sub forma:

$$\frac{F_0}{m(\omega^2-\theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})} = \frac{F_0}{\frac{k}{\omega_2}\omega^2(1-\frac{\theta^2}{\omega^2})} = \frac{F_0}{k}\frac{1}{(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}} = \mu\delta F_0\,, \tag{3.26}$$

unde μ poartă numele de coeficient dinamic sau factor de amplificare dinamică, se determină cu relaţia:

$$\mu = \frac{1}{1-\frac{\theta^2}{\omega^2}}\,. \tag{3.27}$$

Cu notaţiile de mai sus, expresia deplasării dinamice, x(t) se determină cu relaţia:

$$X(t) = \mu F_0\delta(\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t)\,. \tag{3.28}$$

Luând în considerare faptul că vibraţiile proprii se amortizează şi fiind caracterizate, după cum rezultă în relaţia (3.28), prin funcţia $\sin\omega t$, această relaţie se simplifică devenind:

$$X(t) = \mu F_0\delta\sin\theta t\,. \tag{3.29}$$

3.2. Vibraţii forţate amortizate

Se consideră un sistem vibrant, alcătuit prin asocierea a trei caracteristici: inerţială, disipativă şi elastică, acţionat de o forţă perturbatoare, figura 3.2.

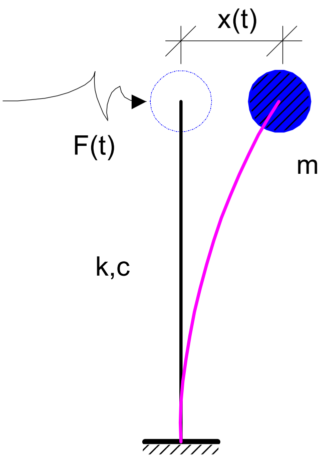

Fig. 3.2. Sistem vibrant complet acţionat de o forţă armonică

$$F(t) = F_0 \sin\theta t\,. \tag{3.30}$$

Ecuaţia mişcării este:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(x) + kx(t) = F_0 \sin\theta t \tag{3.31}$$

sau

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t \tag{3.32}$$

şi

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t\,. \tag{3.33}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (3.33) are forma:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t)\,. \tag{3.34}$$

Soluţia vibraţiilor libere este:

$$X_L(t) = e^{-\beta t}(C_1 \sin\omega^* t + C_2 \cos\omega^* t) \tag{3.35}$$

sau

$$x_L(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega^* t + \varphi^*)\,. \tag{3.36}$$

Soluţia particulară se adoptă de forma:

$$x_F(t) = M\sin\theta t + \cos\theta t\,, \tag{3.37}$$

Această soluţie trebuie să verifice ecuaţia (3.33) pentru a determina constantele de integrare

$$\begin{aligned} &-M\theta^2 \sin\theta t - N\theta^2 \cos\theta t + 2\beta(M\theta\cos\theta t - N\theta\sin\theta t) + \\ &+ M\omega^2 \sin\theta t + N\beta\omega^2 \cos\theta t = \frac{F_0}{m}\sin\theta t \end{aligned} \tag{3.38}$$

sau

$$(M(\omega^2 - \theta^2) - 2N\beta\theta)\sin\theta t + (N(\omega^2 - \theta^2) + 2M\beta\theta)\cos\theta t = \frac{F_0}{m}\sin\theta t\,. \tag{3.39}$$

Constantele M şi N se determină prin identificarea coeficienţilor funcţiilor trigonometrice din relaţia (3.39):

$$\begin{cases} M(\omega^2 - \theta^2) - 2N\beta\theta = \dfrac{F_0}{m} \\ N(\omega^2 - \theta^2) - 2M\beta\theta = 0 \end{cases}. \tag{3.40}$$

Constantele de integrare se determină rezolvând sistemul de ecuaţii (3.40), astfel:

$$N = -\frac{F_0}{m}\frac{2\beta\theta}{(\omega^2 - \theta^2)^2 - 4\beta^2\theta^2}\,, \tag{3.41}$$

$$M = -\frac{F_0}{m}\frac{\omega^2 - \theta^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 - 4\beta^2\theta^2}\,. \tag{3.42}$$

Se introduc constantele (3.41) şi (3.42) în expresia soluţiei particulare (3.37) şi se obţine soluţia vibraţiilor forţate:

$$x_F(t) = A_1 \sin(\theta t - \psi_1)\,, \tag{3.43}$$

unde

$$A_1 = \sqrt{N^2 + M^2} \tag{3.44}$$

sau introducând relaţiile (3.41) şi (3.42), rezultă:

$$A_1 = \delta F_0 \mu^* \tag{3.45}$$

în care

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - \dfrac{\theta^2}{\omega^2})^2 + 4v^2\dfrac{\theta^2}{\omega^2}}} \tag{3.46}$$

şi

$$tg\psi_1 = -\frac{N}{M} = \frac{2\nu\frac{\theta}{\omega}}{1-\frac{\theta}{\omega}}. \qquad (3.47)$$

Parametrul μ^* poartă numele de factor de amplificare dinamică în care este inclusă şi influenţa amortizării.

Soluţia generală are forma:

$$X(t) = e^{-\nu\omega t}(C_1 \sin\omega^* t + C_2 \cos\omega^* t) + \delta F_0 \mu \sin(\theta t - \psi_1). \qquad (3.48)$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţii iniţiale:

$$t = 0 \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) - v_0 \end{cases}. \qquad (3.49)$$

Se deduc constantele:

$$C_1 = -M\frac{\theta}{\omega^*} - N\frac{\beta}{\omega^*}, \qquad (3.50)$$

$$C_2 = -N. \qquad (3.51)$$

3.3. Etape de calcul pentru trasarea diagramelor de eforturi maxime şi minime în cazul vibraţiilor forţate

În vederea trasării diagramelor de eforturi minime şi maxime, pentru modelele dinamice ale unor structuri, se parcurg următoarele etape de calculul:

a) Se determină rigiditatea sistemului, k $[Nm^{-1}]$;

b) Se calculează pulsaţia proprie de vibraţie, ω, cu relaţia:

$$\omega = \frac{k}{m}, \; [rads^{-1}];$$

c) Se determină factorul de amplificare dinamică, μ, aplicând relaţia (3.26) sau (3.46), după cum luăm sau nu în considerare amortizarea în procedura de calcul;

d) Se încarcă structura dată, sistemul dinamic, cu amplitudinea forţei de inerţie şi amplitudinea forţei perturbatoare.

Dacă forţa perturbatoare este aplicată în dreptul masei şi pe direcţia GLD, atunci cele două forţe se însumează formând aşa zisa forţă dinamică, notată $F_d(t)$, deci:

$$F_d(t) = F_i(t) + F(t)$$

sau

$$F_d(t) = -m\ddot{x}(t) + F_0 \sin\theta t\,, \tag{3.52}$$

iar utilizând relaţia (3.29), expresia (3.52) devine:

$$F_d(t) = \mu\delta F_0\theta^2 \sin\theta t + F_0 \sin\theta t \tag{3.53}$$

ori

$$F_d(t) = \mu F_0 \sin\theta t\,. \tag{3.54}$$

Amplitudinea forţei dinamice se calculează cu relaţia:

$$F_d = \mu F_0\,, \tag{3.55}$$

în cazul vibraţiilor forţate neamortizate şi cu relaţia:

$$F_d = \mu^* F_0\,, \tag{3.56}$$

în cazul vibraţiilor forţate amortizate.

Pentru trasarea diagramelor de eforturi minime şi maxime, forţa dinamică are dublu sens.

3.4. Vibraţii forţate produse de forţe perturbatoare în alte situaţii de încărcare

Se vor analiza mai multe situaţii de încărcare:

a) Acţiunea unei forţe perturbatoare aplicată pe sistem în altă secţiune decât în cea în care este concentrată masa, figura 3.3.

Pentru aflarea răspunsului în deplasări al sistemului vibrant acţionat de o forţă perturbatoare armonică în secţiunea k se utilizează relaţiile (3.29), în cazul vibraţiilor forţate neamortizate şi (3.43) coroborat cu (3.45), în cazul vibraţiilor amortizate. Rezultă expresiile:

$$x_j(t) = \mu\delta_{jk}F_{0,k}(t)\sin\theta t \tag{3.56}$$

şi

$$x_j(t) = \mu^*\delta_{jk}F_{0,k}(t)\sin(\theta t - \varphi_1)\,. \tag{3.57}$$

b) Acţiunea mai multor forţe de aceeaşi pulsaţie, de forma

$$F_k(t) = F_{0,k} \sin\theta t \tag{3.58}$$

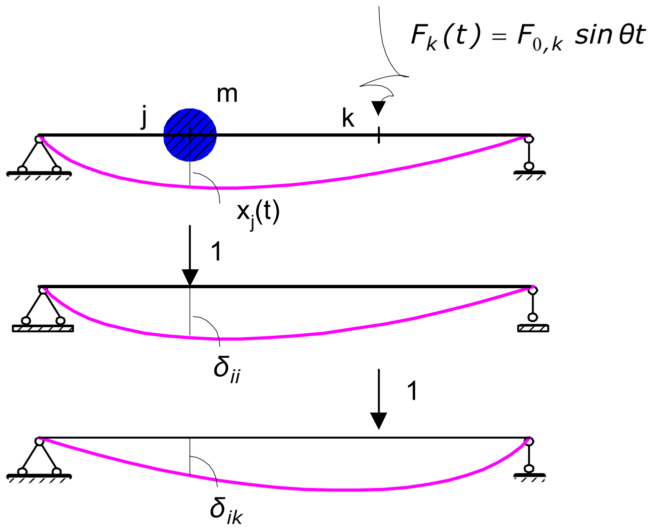

Fig. 3.3. Sistem vibrant încărcat cu o forţă perturbatoare

Răspunsul în deplasări se calculează cu expresia (3.29), în cazul vibraţiilor forţate neamortizate, şi (3.43) coroborat cu (3.45), în cazul vibraţiilor amortizate. Se deduc relaţiile:

$$x_j(t) = \mu \sum_{k=1}^{m} \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin\theta t \qquad (3.59)$$

şi

$$x_j(t) = \mu^* \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin(\theta t - \varphi_1)\,. \qquad (3.60)$$

c) Acţiunea mai multor forţe perturbatoare de pulsaţii diferite:

$$F_l(t) = F_{0,l} \sin\theta_i t \qquad (3.61)$$

$$F_k(t) = F_{0,k} \sin\theta_k t\,. \qquad (3.62)$$

Pentru aflarea răspunsului în deplasări se folosesc relaţiile (3.29), (3.43) şi (3.45). Se găsesc relaţiile:

$$x_j(t) = \mu_l \delta_{jl} F_{0,l}(t) \sin\theta_l t + \mu_k \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin\theta_k t \qquad (3.63)$$

şi

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \delta_{jk} F_{0,k}(t) \sin\theta_k t \qquad k = 1,2,\ldots\ldots,n\,, \qquad (3.63)$$

unde

$$\mu_k = \frac{1}{1 - \frac{\theta_k^2}{\omega^2}} \tag{3.64}$$

şi

$$\mu l = \frac{1}{1 - \frac{\theta_l^2}{\omega^2}}, \tag{3.65}$$

referitor la relaţia (3.62) şi

$$\mu_k^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\theta_k^2}{\omega^2})^2 + 4v^2 \frac{\theta_k^2}{\omega^2}}}, \tag{3.66}$$

în ceea ce priveşte expresia (3.63).