CURSUL 4

SISTEME VIBRANTE CU nGLD

4.1 Vibraţii libere. Metoda forţelor de inerţie sau metoda matricei de flexibilitate

Se consideră un sistem vibrant cu nGLD. Sistemul este alcătuit dintr-o grindă simplu rezemată (modelul static) cu n mase concentrate cărora li se acordă nGLD. Deplasările necunoscute fiind deplasările măsurate pe direcţia gradelor de libertate dinamică, notate $y_j(t)$, figura 4.1.a.

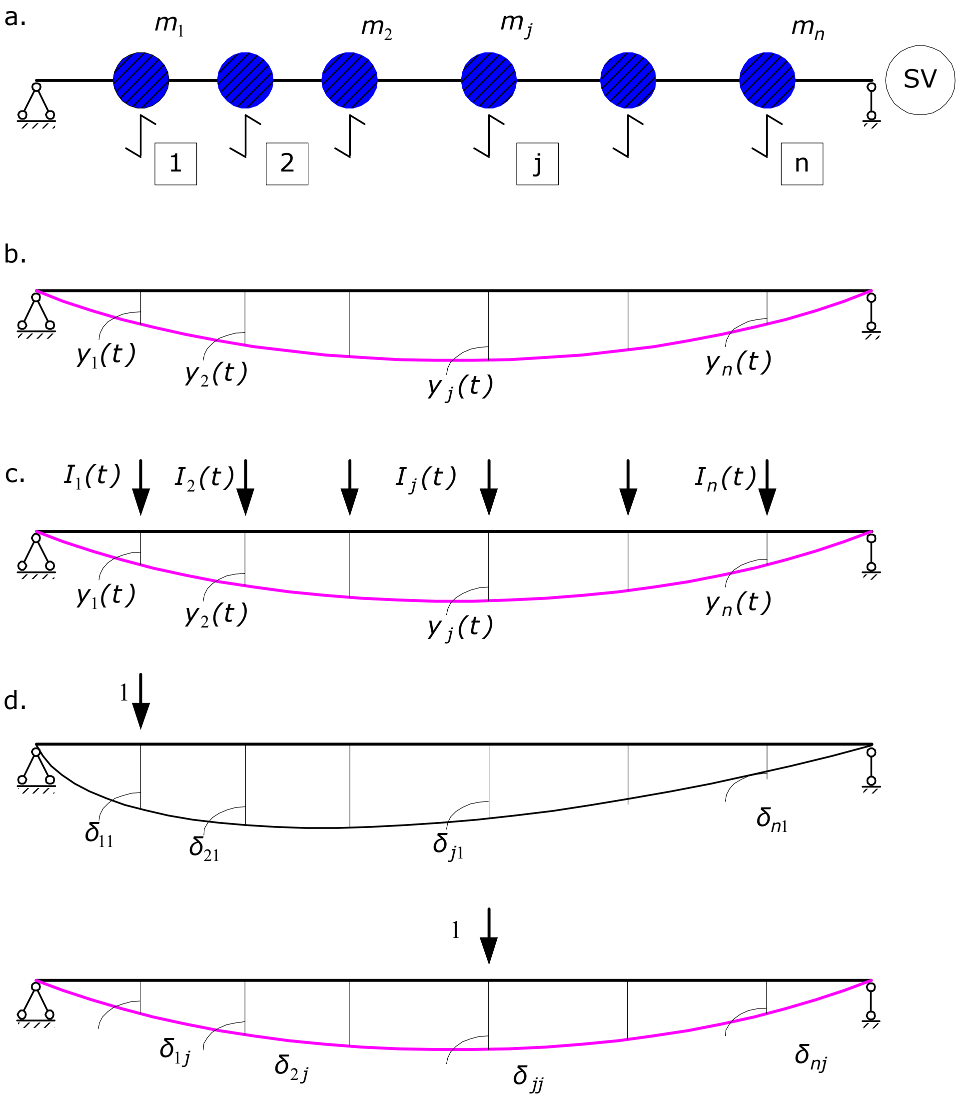

Fig. 4.4. Sistem vibrant cu n GLD

Sub acţiunea unui impuls iniţial (deplasare şi viteză) sistemul vibrant va vibra în jurul unei poziţii de echilibru static, figura 4.1.b. La momentul t al mişcării se pot măsura deplasările dinamice instantanee pe direcţia gradelor de libertate, de exemplu $y_j(t)$, pentru gradul de libertate j. Pentru toate cele n deplasări se constituie vectorul deplasărilor dinamice instantanee, vectorul (matricea coloană) $\{y(t)\}$:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ y_j(t) \\ . \\ y_n(t) \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

Pe direcţia gradelor de libertate iau naştere forţe de inerţie, pentru GLD$_j$, se notează forţa de inerţie $I_j(t)$, iar pentru toate gradele de libertate ale sistemului vibrant se constituie vectorul forţelor de inerţie notat $\{I(t)\}$:

$$\{I(t)\} = \begin{Bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ . \\ I_j(t) \\ . \\ I_n(t) \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_1\ddot{y}_1(t) \\ m_2\ddot{y}_2(t) \\ . \\ m_j\ddot{y}_j(t) \\ . \\ m_n\ddot{y}_n(t) \end{Bmatrix} = -[m]\{\ddot{y}(t)\} \tag{4.2}$$

unde: $[m]$ reprezintă matricea diagonală a maselor sau matricea de inerţie;

$\{\ddot{y}(t)\}$ - vectorul acceleraţiilor.

Prin aplicarea pe sistemul virant a forţelor de inerţie, pe direcţia gradelor de libertate dinamică, figura 4.c, se obţine deformata dinamică a sistemului dinamic, iar pe direcţia GLD se măsoară deplasările $y_i(t)$. Acest lucru se datorează principiului lui d'Alembert.

Dacă în locul forţelor de inerţie, se aplică pe sistem câte o singură forţă, egală cu unitatea, pe direcţia GLD, în „n" situaţii de încărcare, corespunzătoare celor nGLD, figura 4.1.d, e..., pe direcţiile gradelor de libertate dinamică se măsoară „n" seturi de câte „n" deplasări unitare, notate: $\delta_{11}, \delta_{21,}, ...,\delta_{j1,}, ...,\delta_{jj}, ...,\delta_{nn}$. Cu aceste deplasări unitare se constituie o matrice cu „n" linii şi „n" coloane, notată $[\Delta]$, relaţia (4.3).

Un element al matricei $[\Delta]$, notat δ_{jn} reprezintă deplasarea măsurată pe direcţia GLDj, când sistemul vibrant este acţionat pe direcţia GLDn cu o forţă egală cu unitatea.

$$[\Delta]=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & . & \delta_{1j} & . & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & . & \delta_{2j} & . & \delta_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & . & \delta_{jj} & . & \delta_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & . & \delta_{nj} & . & \delta_{nn} \end{bmatrix}.. \tag{4.3}$$

Prin suprapunerea efectelor, deplasările pe direcţiile gradelor de libertate „1”, „2”,..., „j” şi , respectiv, „n”, se determină cu relaţiile:

$$\begin{cases} y_1(t)=\delta_{11}I_1(t)+\delta_{12}I_2(t)+\ldots+\delta_{1j}I_j(t)+\ldots+\delta_{1n}I_n(t) \\ y_2(t)=\delta_{21}I_1(t)+\delta_{22}I_2(t)+\ldots+\delta_{2j}I_j(t)+\ldots+\delta_{2n}I_n(t) \\ . \; . \\ y_j(t)=\delta_{j1}I_1(t)+\delta_{j2}I_2(t)+\ldots+\delta_{jj}I_j(t)+\ldots+\delta_{jn}I_n(t) \\ . \; . \\ y_n(t)=\delta_{n1}I_1(t)+\delta_{n2}I_2(t)+\ldots+\delta_{nj}I_j(t)+\ldots+\delta_{nn}I_n(t) \end{cases}. \tag{4.4}$$

Ecuaţiile (4.4) formează un sistem de ecuaţii care, sub formă matriceală, poate fi scrisă:

$$\{y(t)\}=[\Delta]\{I(t)\} \tag{4.5}$$

Prin introducerea în sistemul (4.5) a vectorului forţelor de inerţie, relaţia (4.2), se obţine:

$$[\Delta][m]\{\ddot{y}(t)\}+\{y(t)\}=\{0\}, \tag{4.6}$$

care reprezintă ecuaţia matriceală a vibraţiilor libere ale sistemelor vibrante cu nGLD.

Sistemul de ecuaţii (4.6) este verificat de soluţii particulare armonice de forma:

$$y_j(t)=A_j\sin(\omega t+\varphi) \tag{4.7}$$

în care A_j reprezintă amplitudinea deplasării dinamice, iar pentru toate gradele de libertate dinamice se constituie vectorul deplasărilor:

$$\{y(t)\}=\{A\}\sin(\omega t+\varphi) \tag{4.8}$$

şi vectorul vitezelor:

$$\{\ddot{y}(t)\}=-\{A\}\omega^2\sin(\omega t+\varphi) \tag{4.9}$$

unde $\{A\}$ este vectorul amplitudinilor deplasărilor dinamice.

Soluţiile particulare (4.8) şi (4.9) caracterizează vibraţiile proprii ale sistemului dinamic. Se introduc aceste soluţii în sistemul de ecuaţii (4.6) şi se obţine:

$$-\{A\}\sin(\omega t+\varphi)+\omega^2[\Delta][m]\{A\}\sin(\omega t+\varphi)=\{0\} \qquad (4.10)$$

sau

$$(\omega^2[\Delta][m]-[I])\{A\}=\{0\}, \qquad (4.11)$$

care reprezintă ecuaţia generală a vibraţiilor proprii, unde $[I]$ este matricea diagonală unitate (toate elementele de pe diagonala principală sunt egale cu unitatea, iar celelalte elemente sunt nule).

Ecuaţia matriceală (4.11) este algebrică, liniară şi omogenă.

Sistemul vibrează atunci când $A_j \neq 0$, deoarece soluţia banală verifică ecuaţia (4.11), dar nu este interensantă deoarece corespunde unei poziţii de repaus a sistemului.

Pentru ca sistemul de ecuaţii (4.11) să admită soluţii diferite de zero, determinantul prrincipal trebuie să fie nul:

$$\left|\omega^2[\Delta][m]-[I]\right|=0 \qquad (4.12)$$

sau

$$\begin{bmatrix} \omega^2\delta_{11}m_1-1 & \omega^2\delta_{12}m_2 & . & \omega^2\delta_{1j}m_j & . & \omega^2\delta_{1n}m_n \\ \omega^2\delta_{21}m_1 & \omega^2\delta_{22}m_2-1 & . & \omega^2\delta_{2j}m_j & . & \omega^2\delta_{2n}m_n \\ . & . & . & . & . & . \\ \omega^2\delta_{j1}m_1 & \omega^2\delta_{j2}m_2 & . & \omega^2\delta_{jj}m_j-1 & . & \omega^2\delta_{jn}m_n \\ . & . & . & . & . & . \\ \omega^2\delta_{n1}m_1 & \omega^2\delta_{n2}m_2 & . & \omega^2\delta_{nj}m_j & . & \omega^2\delta_{nn}m_n-1 \end{bmatrix}=0 \qquad (4.13)$$

Dacă se notează $\lambda=\frac{1}{\omega^2}$ ecuaţia (4.13) devine:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11}m_1-\lambda & \delta_{12}m_2 & . & \delta_{1j}m_j & . & \omega\delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\lambda & . & \delta_{2j}m_j & . & \omega\delta_{2n}m_n \\ . & . & . & . & . & . \\ \delta_{j1}m_1 & \delta_{j2}m_2 & . & \delta_{jj}m_j-\lambda & . & \delta_{jn}m_n \\ . & . & . & . & . & . \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & . & \delta_{nj}m_j & . & \delta_{nn}m_n-\lambda \end{bmatrix}=0 \qquad (4.14)$$

sau prin dezvoltare:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_k\lambda^{n-k} + ... + a_n = 0 \qquad (4.15)$$

De asemenea, dezvoltând determinantul (4.13) se obţine o ecuaţie de gradul „n” în ω^2 numită ecuaţie caracteristică sau ecuaţia frecvenţelor (pulsaţiilor) sistemului vibrant.

Rezolvănd ecuaţia caracteristicilor (4.15) se obţin „n” rădăcini reale şi pozitive notate:

$$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i, ..., \omega_n$$

reprezentând pulsaţiilor proprii (naturale) ale sistemului dinamic.

Pulsaţia proprie cu valoarea cea mai mică, notată prin ω_1, se numeşte pulsaţie proprie fundamentală, iar celelalte valori, în general notate, ω_i, reprezintă pulsaţiile proprii de ordin superior:

$$\omega_i > \omega_1, i = 2,3,....n.$$

Cunoscând cele n pulsaţii proprii ale sistemului dinamic se determină direct frecvenţa proprie fundamentală, f_1, perioada proprie fundamentală, T_1 şi celelate valori proprii de ordin superior, notate generic, f_i şi T_i.

Prin urmare, valorile proprii sunt caracteristici intrinseci ale sistemelor dinamice deoarece depind exclusiv de proprietăţile inerţiale şi elastice ale modelelor dinamice.

Fiecărei valori proprii îi corespunde o deformată a sistemului numită formă proprie de vibraţie (principală, naturală).

Forma proprie coincide cu deformata sistemului acţionată de amplitudinile forţelor de inerţie:

$$I_{j,i} = \omega_i^2 m_j y_{j,i} \qquad (4.16)$$

sau

$$\{I\}_i = \omega_i^2 [m] \{y\}_i \qquad (4.17)$$

unde: $I_{j,i}$ reprezintă amplitudinea forţei de inerţie corespunzătoare gradului de libertate j, în modul i de vibraţie;

$y_{j,i}$ - amplitudinea deplasării măsurată pe direcţia GLD în modul i de vibraţie;

$\{y\}_i$ - vectorul (matricea coloană) amplitudinilor, vectorul formei proprii i.

Ansamblulul format dintr-o formă proprie $\{y\}_i$ şi perioada proprie corespunzătoare T_i, formează un mod propriu de vibraţie, în acest caz, modul propriu i de vibraţie.

Configuraţia geometrică a formelor proprii (vectori proprii) se determină prin introducerea succesiă a valorilor proprii ω_i^2 în sistemul de ecuaţii (4.11). Se obţine ecuaţia următoare:

$$(\omega_i^2[\Delta][m]-[I])\{A\}_i=\{0\}, \tag{4.18}$$

numită ecuaţia generală a vectorilor proprii (dimensionali).

Ecuaţia j din sistemul de ecuaţii (4.18) are forma:

$$\omega_i^2\delta_{j1}m_1A_{1,i}+\omega_i^2\delta_{j2}m_2A_{2,i}+\ldots+(\omega_i^2\delta_{jj}m_j-1)A_{1,i}+\ldots+\omega_i^2\delta_{jn}m_nA_{n,i}=0\,. \tag{4.19}$$

Se împarte ecuaţia (4.19) prin $A_{1,i}$. Se notează:

$$\frac{A_{1,i}}{A_{1,i}}=1=y_{1,i},\ldots\frac{A_{j,i}}{A_{1,i}}=y_{j,i},\ldots\frac{A_{n,i}}{A_{1,i}}=y_{n,i} \tag{4.20}$$

Cu aceste notaţii ecuaţia (4.19.) devine:

$$\omega_i^2\delta_{j2}m_2y_{2,i}+\ldots+(\omega_i^2\delta_{jj}m_j-1)y_{1,i}+\ldots+\omega_i^2\delta_{jn}m_ny_{n,i}=-\omega_i^2\delta_{j1}m_1\,. \tag{4.21}$$

Dacă se împart toate ecuaţiile sistemului de ecuaţii (4.18) prin $A_{1,i}$, atunci aceast sistem, în formă matriceală, devine:

$$(\omega_i^2[\Delta][m]-[I])\{y\}_i=\{0\}, \tag{4.22}$$

care reprezintă ecuaţia generală a vectorilor proprii adimensionali.

Ecuaţia matriceală (4.22) are numai „n-1” necunoscute deoarece $y_{1,i}=1$ (v. relaţiile (4.20)) şi pentru aflarea soluţiei se vor utiliza numai primele „n-1” ecuaţii, ultima ecuaţie fiind folosită pentru verificarea rezultatelor.

Se defineşte matricea spectrală, notată $[\Omega]$, ca o matrice diagonală care cuprinde pe diagonala principală pătratele pulsaţiile proprii de vibraţie ale unui sistem dinamic cu n GLD, iar celelalte elemente fiind nule:

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & & & & & \\ & \omega_2^2 & & & & \\ & & . & & & \\ & & & \omega_i^2 & & \\ & & & & . & \\ & & & & & \omega_n^2\end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

De asemenea, definim matricea modală a unui sistem dinamic cu nGLD, ca o matrice alcătuită prin scrierea pe coloane a formelor proprii de vibraţie. Este notată $[Y]$:

$$[Y]=\begin{bmatrix}y_{1,1} & y_{1,2} & . & y_{1,i} & . & y_{1,n}\\ y_{2,1} & y_{2,2} & . & y_{2,i} & . & y_{2,n}\\ . & . & . & . & . & .\\ y_{j,1} & y_{j,2} & . & y_{j,i} & . & y_{j,n}\\ . & . & . & . & . & .\\ y_{n,1} & y_{n,2} & . & y_{n,i} & . & y_{n,n}\end{bmatrix} \tag{4.24}$$

sau

$$[y]=[\{y\}_2 \quad \{y\}_1 \quad . \quad \{y\}_i \quad . \quad \{y\}_n]. \tag{4.25}$$

4.2. Aplicaţie

Se cere să se determine modurile proprii de vibraţie pentru un sistem cu două grade de libertate dinamică pentru care se cunosc matricea maselor:

$$[m]=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}$$

şi matricea de flexibilitate:

$$[\Delta]=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}.$$

Ecuaţia generală a vibraţiilor proprii dimensionale, ecuaţia (4.18) devine:

$$(\omega^2\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix})\begin{Bmatrix}A_1\\ A_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Ecuaţia pulaţiilor proprii este:

$$\left|\omega^2\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

sau:

$$\begin{vmatrix}\omega^2\delta_{11}m_1 - 1 & \omega^2\delta_{12}m_2\\ \omega^2\delta_{21}m_1 & \omega^2\delta_{22}m_2 - 1\end{vmatrix} = 0$$

şi

$$\begin{vmatrix}\delta_{11}m_1 - \lambda & \delta_{12}m_2\\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \lambda\end{vmatrix} = 0,$$

unde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

Se dezvoltă determinantul de mai sus şi se obţine:

$$\lambda^2 - \lambda(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Se rezolvă ecuaţia anterioară şi se determină valorile proprii: λ_1 şi λ_2, respectiv (pulsaţiile proprii) ω_1^2 şi ω_2^2.

După aflarea valorilor proprii se calculează vectorii proprii (formele proprii de vibraţie). Aceştia se obţin prin rezolvarea următoarelor două sisteme de ecuaţii:

- primul sistem

$$\begin{cases}(\omega_1^2\delta_{11}m_1 - 1)y_{1,1} + \omega_1^2\delta_{12}m_2y_{2,1} = 0\\ \omega_1^2\delta_{21}m_1y_{1,1} + (\omega_1^2\delta_{12}m_2 - 1)y_{2,1} = 0\end{cases},$$

pentru $y_{1,1} = 1$ rezultă din prima ecuaţie de mai sus:

$$y_{2,1} = -\frac{\omega_1^2\delta_{11}m_1 - 1}{\omega_1^2\delta_{12}m_2};$$

- cel de al dolea sistem:

$$\begin{cases}(\omega_2^2\delta_{11}m_1 - 1)y_{1,2} + \omega_2^2\delta_{12}m_2y_{2,2} = 0\\ \omega_2^2\delta_{21}m_1y_{1,2} + (\omega_{21}^2\delta_{12}m_2 - 1)y_{2,2} = 0\end{cases},$$

pentru $y_{1,2} = 1$ rezultă din prima ecuaţie a sistemului anterior:

$$y_{2,2} = -\frac{\omega_2^2\delta_{11}m_1 - 1}{\omega_2^2\delta_{12}m_2}.$$

Cele două forme proprii de vibraţii sunt:

$$\{y\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,1} \end{Bmatrix} \text{ şi } \{y\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{2,2} \end{Bmatrix}$$

4.3. Determinarea matricei de flexibilitate

Matricea de flexibilitate a unei structuri, în coordonatele dinamice ale modelului vibrant, a fost definită în paragraful 4.1, relaţia (4.3).

Un element al matricei de flexibilitate δ_{jk}, conform celor expuse, reprezintă deplasarea produsă de direcţia GLDj când după direcţia GLDk,

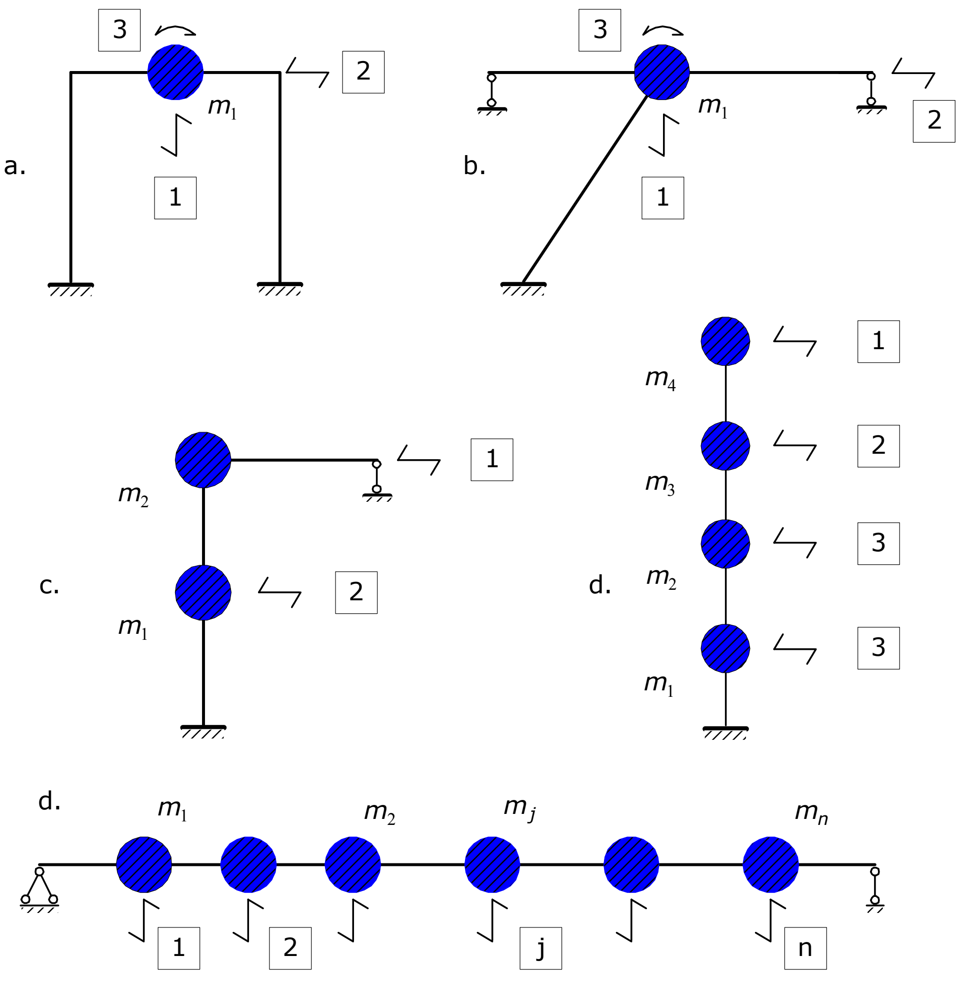

Fig. 4.2. Sisteme dinamice

structura considerată (sistemul vibrant) este acţionată de o forţă egală cu unitatea.

În figura 4.2 sunt prezentate cinci sisteme dinamice având nominalizate gradele de libertate dinamică acordate, iar în figurile 4.3 şi 4.4. situaţiile de încărcare, corespunzătoare gradelor de libertate dinamică, în vederea determinării elementelor matricei de flexibilitate.

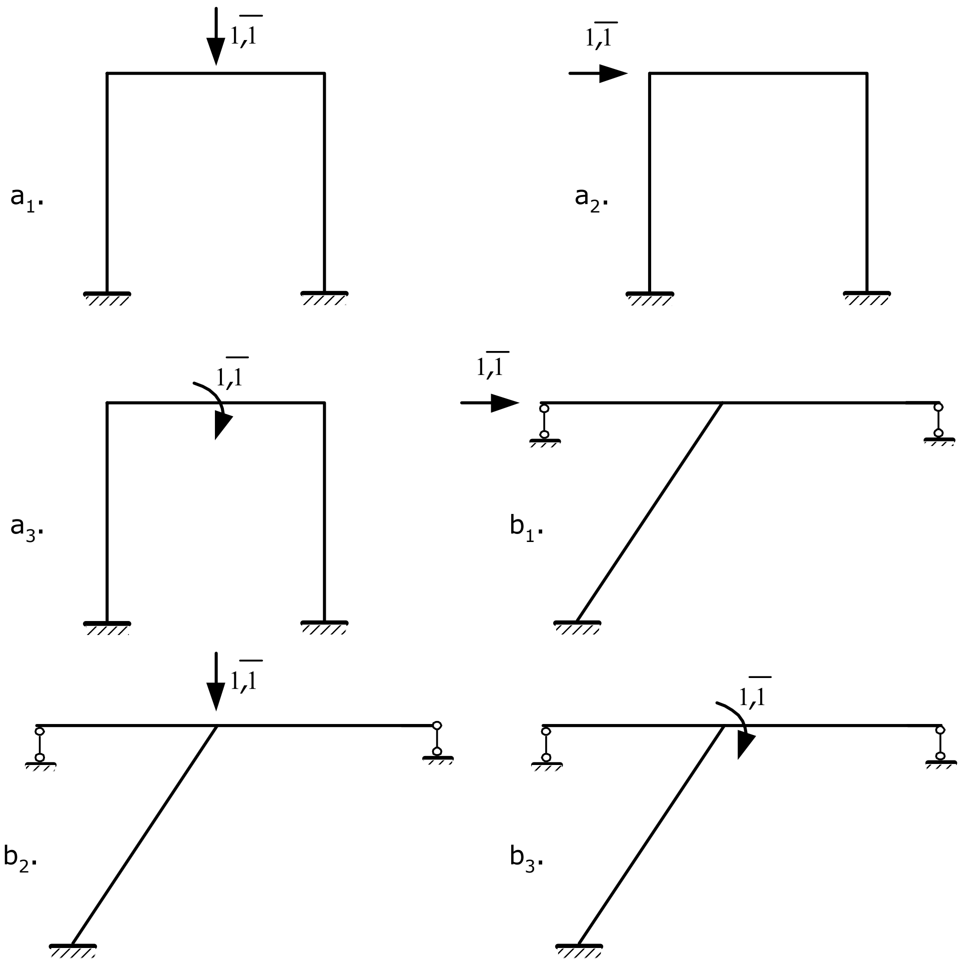

Fig. 4.3. Situaţii de încărcare pentru calculul matricelor de flexibilitate ale sistemelor din fig.4.2.a. şi b.

Pentru calculul elementelor matricei de flexibilitate se utilizează metoda Mohr-Maxwell, materializată prin relaţia:

$$\delta_{jk} = \sum \frac{\overline{M}_j(x) M_k(x)}{EI} dx \,, \tag{4.27}$$

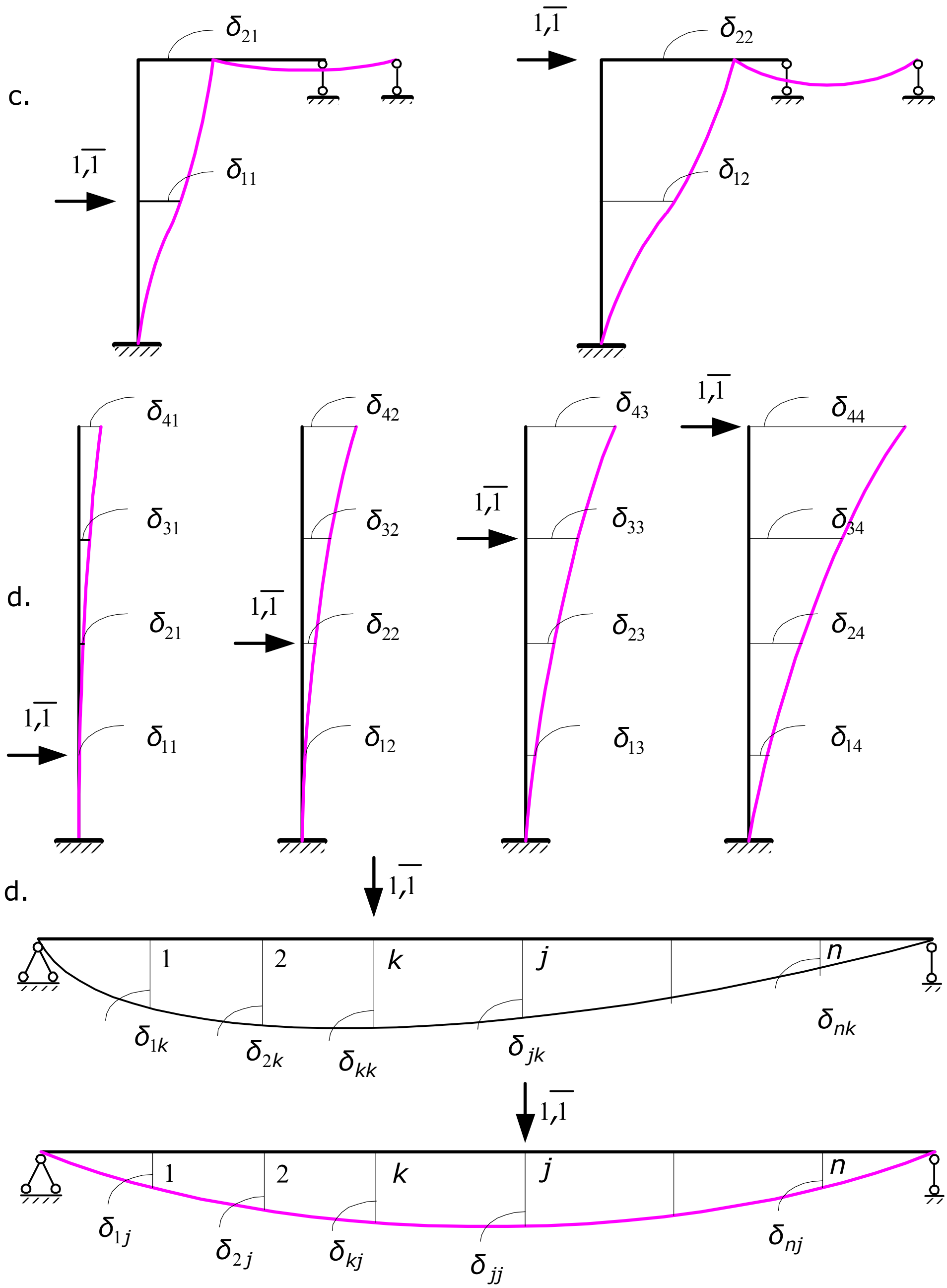

Fig. 4.4. Situaţii de încărcare pentru calculul matricelor de flexibilitate ale sistemelor din fig.4.2.c.,d.şi e

unde: $\overline{M}_j(x)$ reprezintă momentul încovoietor din secţiunea "x" măsurat în diagrama de moment încovoietor corespunzătoare situaţiei virtuale de încărcare "j" a sistemului vibrant;

$M_k(x)$ - momentul încovoietor din secţiunea "x" măsurat în diagrama de moment încovoietor corespunzătoare situaţiei reale de încărcare "k" a sistemului vibrant.

Obs. În cazul determinării elementului δ_{jk} al matricei de flexibilitate, se disting următoarele situaţii de încărcare:

a) situaţia reală de încărcare, constituită din structura dată (static nedeterminată sau determinată) acţionată în dreptul masei m_k, a sistemului dinamic, şi pe direcţia GLDk, cu o forţă egală cu unitatea (notată 1);
b) situaţia virtuală de încărcare, constituită din structura considerată înărcată, în dreptul masei m_j şi pe direcţia GLDj, cu o forţă egală cu unitatea (notată $\bar{1}$).

De asemenea, situaţia virtuală de încărcare poate fi constituită din orice structură static determinată, obţinută din structura dată încărată, în dreptul m_j şi pe direcţie GLDj, de o forţă egală cu unitatea.

În figura 4.5. sunt reprezentate situaţile de încărcare, virtuale şi reale ale sistemul dinamic desenat în figura 4.2.c., sistem cu două grade de libertate dinamică acordate, corespunzător GLD_1 (a se vedea figura 4.4.a.

Diagramele finale de moment încovoietor, în cele două situaţii de încărcare, reală şi virtuală: M_f^1 şi $\overline{M}_f^1$, care în cazul desfăsurării calculelor pe sistemul considerat sunt identice, sunt trasate în figura 4.5.c_3, folosind metoda forţelor.

Sistemul de bază este desenat în figura 4.5.b, diagrama de moment încovoietor, produsă de încărcarea exterioară (forţa egală cu unitatea), este arătată în figura 4.5.c_1 (M_p^1), iar diagrama unitară de moment încovoietor este schiţată în figura 4.5. c_2 (M_1).

Sistemul analizat este o dată static nedeterminat. Ecuaţie de echilibru elastic, corespunzătoare metodei forţelor, este:

$$\delta_{11}X_1 + X_{1P} = 0,$$

unde coeficientul δ_{11} se determină cu relaţia:

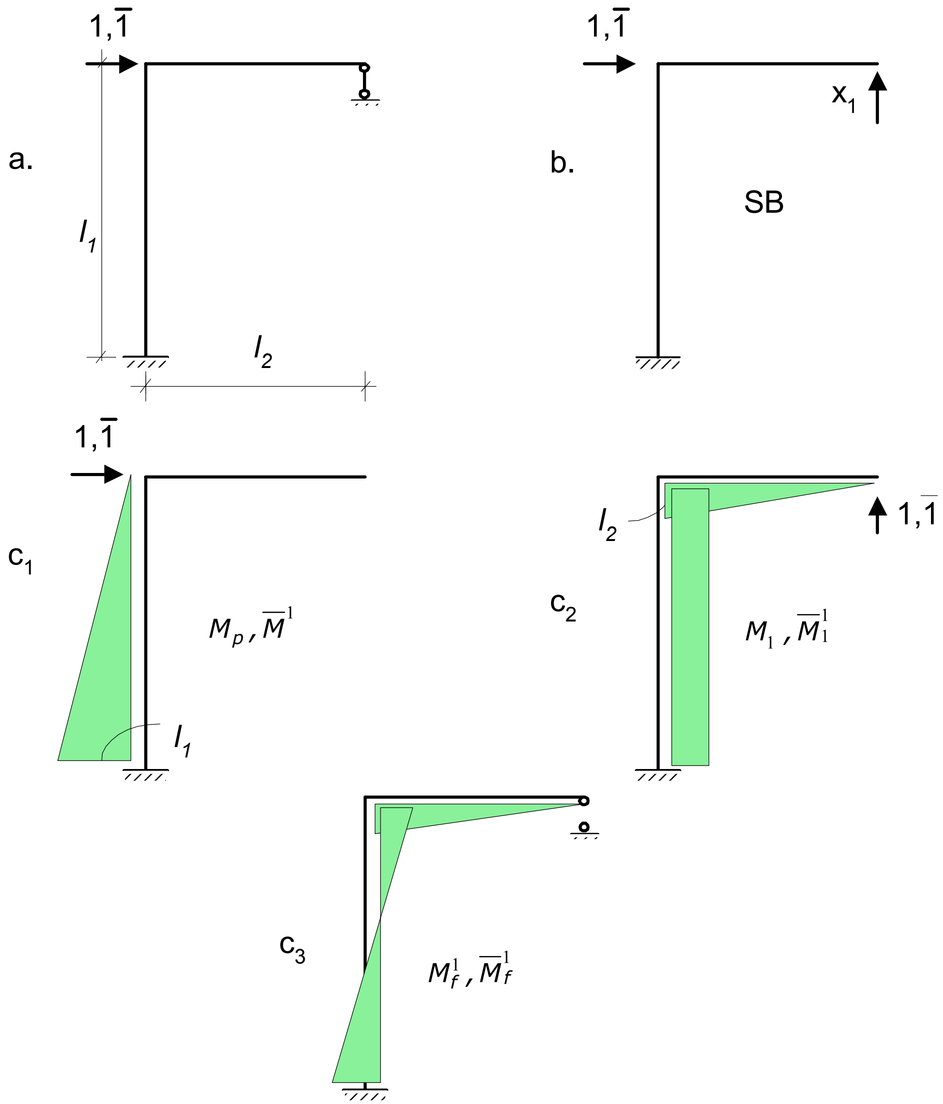

Fig. 4.5. Situaţii de încărcare şi diagrame de moment încovoietor pentru calculul elementelor matricei de flexibilitate

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{M}_1(x) M_1(x)}{EI} dx ,$$

iar termenul liber cu expresia:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\overline{M}_1(x) M_P^1(x)}{EI} dx .$$

Cele două integrale se rezolvă prin înmulţirea a câte două diagrame, în cazul coeficientului - δ_{11}, diagramele de moment încovoietor: $\overline{M}_1$ şi M_1, figura 4.5.c$_2$ şi diagramele: $\overline{M}_1$ şi M_P^1, figurile 4.5.c$_1$ şi c$_2$, în cazul termenului liber.

După rezolvarea ecuaţiei de echilibru şi aflarea soluţiei X_1 se trasează diagrama finală de moment încovoietor M_f^1 identică, în acest caz, cu cea virtuală $\overline{M}_f^1$, calculată pentru sistemul considerat.

Elemenul principal al matricei de flexibilitate, notat δ_{11} se determină cu relaţia:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{M}_f^1(x) M_f^1(x)}{EI} dx$$

sau

$$\delta_{11} = \sum \frac{\overline{M}_f^1(x) \overline{M}^1(x)}{EI} dx ,$$

dacă se utilizează diagrama de moment încovoietor $\overline{M}^1$ obţinută prin soluţionarea unei situaţii virtuale de încărcare constituite din sistemul de bază (structură static determinată) acţionată în dreptul masei şi pe direcţia GLD$_1$ a unei forţe virtuale egală cu unitatea (notată $\bar{1}$).