# CURSUL 6

## SISTEME VIBRANTE CU nGLD

### 6.Vibraţii forţate produse de acţiunea unor forţe perturbatoare armonice.

#### 6.1. Metoda matricei de rigiditate

#### 6.1.1. Aspecte teoretice

Se consideră un sistem vibrant cu n GLD acţionat de un sistem de forţe perturbatoare armonice, figura 6.1.a.

Se constituie vectorul forţelor perturbatoare, $\{F(t)\}$ , de forma:

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ . \\ F_k(t) \\ . \\ F_m(t) \end{Bmatrix}. \qquad (6.1)$$

Sub acţiunea forţelor perturbatoare la un moment dat t al vibraţiilor, pe direcţiile GLD se pot măsura deplasări dinamice, notate $y_j(t)$, ordonate în vectorul $\{y(t)\}$:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ y_j(t) \\ . \\ y_n(t) \end{Bmatrix}. \qquad (6.2)$$

Pentru a analiza vibraţiile forţate ale sistemelor cu n GLD se va utiliza un sistem de bază dinamic, figura 1.c, obţinut prin blocarea tuturor deplasărilor pe direcţiile GLD.

Sistemul de ecuaţii de echilibru dinamic instantaneu se deduce prin producerea, succesivă, de deplasări pe direcţiile GLD egale cu deplasările reale $y_j(t)$, aplicate ca cedări de reazeme, în „n" situaţii de încărcare, pe sistemul de bază dinamic.

Urmând raţionamentele de la vibraţiile libere ale sistemelor cu n GLD se constituie vectorul forţelor de inerţie, $\{F(t)\}$, de forma:

$$\{I(t)\} = \begin{Bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ . \\ I_j(t) \\ . \\ I_n(t) \end{Bmatrix} = -[m]\{\ddot{y}(t)\}. \qquad (6.3)$$

unde: $[m]$ reprezintă matricea diagonală a maselor sau matricea de inerţie;

$\{\ddot{y}(t)\}$ - vectorul acceleraţiilor

şi vectorul forţelor elastice, $\{F_e(t)\}$, calculat cu relaţia:

$$F_e(t) = [K]\{y(t)\}, \tag{6.4}$$

în care $[K]$ reprezintă matricea de rigiditate a sistemului vibrant, determinată în coordonatele dinamice ale sistemului.

Ecuaţiile de echilibru dinamic instantaneu, stabilite prin aplicarea principiului lui d'Alambret, au alura:

$$-\{I(t)\} + [K]\{y(t)\} + \{R_F(t)\} = \{0\}, \tag{6.5}$$

unde vectorul $\{R_F(t)\}$ are forma următoare:

$$\{R_F(t)\} = \begin{Bmatrix} R_{1,F}(t) \\ R_{2,F}(t) \\ . \\ R_{j,F}(t) \\ . \\ R_{n,F}(t) \end{Bmatrix}, \tag{6.6}$$

în care, $R_{j,F}(t)$ reprezină reacţiunea din blocajul „j" când sistemul de bază dinamic este acţionat simultan de forţe perturbatoare exterioare.

Deoarece forţele perturbatoare considerate, în studiu, sunt armonice, de tipul:

$$F_k(t) = F_{0,k} \sin\theta t, \tag{6.7}$$

rezultă:

$$\{R_F(t)\} = \{R_0\}\sin\theta t \tag{6.8}$$

şi

$$\{R_0\} = \begin{Bmatrix} R_{0,1} \\ R_{0,2} \\ . \\ R_{0,j} \\ . \\ R_{0,n} \end{Bmatrix}, \tag{6.9}$$

unde $R_{0,j}$ reprezintă reacţiunea din blocajul „j" când sistemul de bază dinamic este acţionat simultan de amplitudinile forţelor perturbatoare $F_{0,k}$.

Răspunsul permanent al sistemului, la acţiuni de tip armonic, are totdeauna o variaţie armonică de forma:

$$\{y(t)\} = \{y\}\sin\theta t, \tag{6.10}$$

în care s-a notat cu $\{y\}$ vectorul deplasărilor dinamice maxime (în regim forţat).

De asemenea, în aceste condiţii, forţele de inerţie sunt determinate cu relaţia:

$$\{I(t)\} = \theta^2[m]\{y\}\sin\theta t\,, \tag{6.11}$$

unde amplitudinile forţelor de inerţie formează vectorul:

$$\{I\} = \theta^2[m]\{y\}. \tag{6.12}$$

Introducând expresiile (6.8), (6.10), (6.11) în (6.5) se obţine sistemul de ecuaţii:

$$([K] - \theta^2[m])\{y\} + \{R_0\}) = \{0\}, \tag{6.13}$$

care reprezintă un sistem de ecuaţii algebrice.

Pentru ca sistemul, de mai sus, să admite soluţii finite este necesar ca determinantul principal al sistemului să fie diferit de zero. Deci:

$$[K] - \theta^2[m])] \neq 0\,. \tag{6.14}$$

Dacă determinantul este nul, atunci deplasările tind către infinit, situaţie în care $\theta = \omega$, deoarece

$$[K] - \theta^2[m])] = 0\,. \tag{6.15}$$

Rezultă că întâlnim mai multe situaţii de rezonanţă, şi anume:

$$\theta = \omega_i,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{6.16}$$

### 6.1.2. Ordinea de calcul

În vederea aflării răspunsului dinamic în deplasări şi în eforturi se parcurg următoarele etape de calcul:

a. Se determină matricea de rigiditate în coordonatele dinamice ale sistemului vibrant, $[K]$;

b. Se constituie matricea maselor, $[m]$;

c. Se calculează vectorul termenilor liberi, $\{R_0\}$.

În cazul în care forţele perturbatoare sunt aplicate în dreptul maselor şi pe direcţiile GLD se poate scrie egalitatea:

$$\{R_0\} = -\{F_0\}; \tag{6.17}$$

d. Se rezolvă sistemul de ecuaţii (6.13) şi se determină vectorul deplasărilor $\{y\}$, reprezentămd răspunsul dinamic în deplasări ale sistemului;

e. Se trasează diagramele de eforturi maxime şi minime prin acţionarea sistemului vibrant cu amplitudinile forţelor de inerţie, cu dublu sens, realaţia (6.12), vectorul forţelor perturbatoare, cu dublu sens şi vectorul forţelor gravitaţionale.

## 6.2. Metoda matricei de flexibilitate

### 6.2.1. Aspecte teoretice

În vederea rezolvării problemei se consideră un sistem vibrant cu n GLD, desenat în figura 6.2, acţionat de un sistem de forţe perturbatoare. La momentul „t” al vibraţiei, pe direcţiile GLD se măsoară deplasările dinamice instantanee, $y_j(t)$. Vectorul deplasărilor are forma:

$$\{y(t)\} = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ . \\ y_j(t) \\ . \\ y_n(t) \end{Bmatrix} \qquad (6.18)$$

Deplasările pe direcţiile GLD se obţin, prin suprapunerea efectelor, acţionând sistemul vibrant cu forţele de inerţie şi forţele perturbatoare, v. figura 6.2.b:

$$\{y(t)\} = [\Delta]\{I(t)\} + \{\Delta_F(t)\} \qquad (6.19)$$

sau

$$\{y(t)\} - [\Delta]\{I(t)\} + \{\Delta_F(t)\} = \{0\}, \qquad (6.20)$$

unde: $[\Delta]$ reprezintă matricea de flexibilitate a sistemului vibrant;

$\{I(t)\}$ - vectorul forţelor de inerţie, determinat cu relaţia:

$$\{I(t)\} = -[m]\{\ddot{y}(t)\}; \qquad (6.21)$$

$\{\Delta_F(t)\}$ - vectorul deplasărilor produse de forţele perturbatoare, care reprezintă termenul liber al ecuaţiei matriceale de echilibru dinamic instantaneu.

Ecuaţia matriceală (6.20), după introducerea relaţiei (6.21), devine:

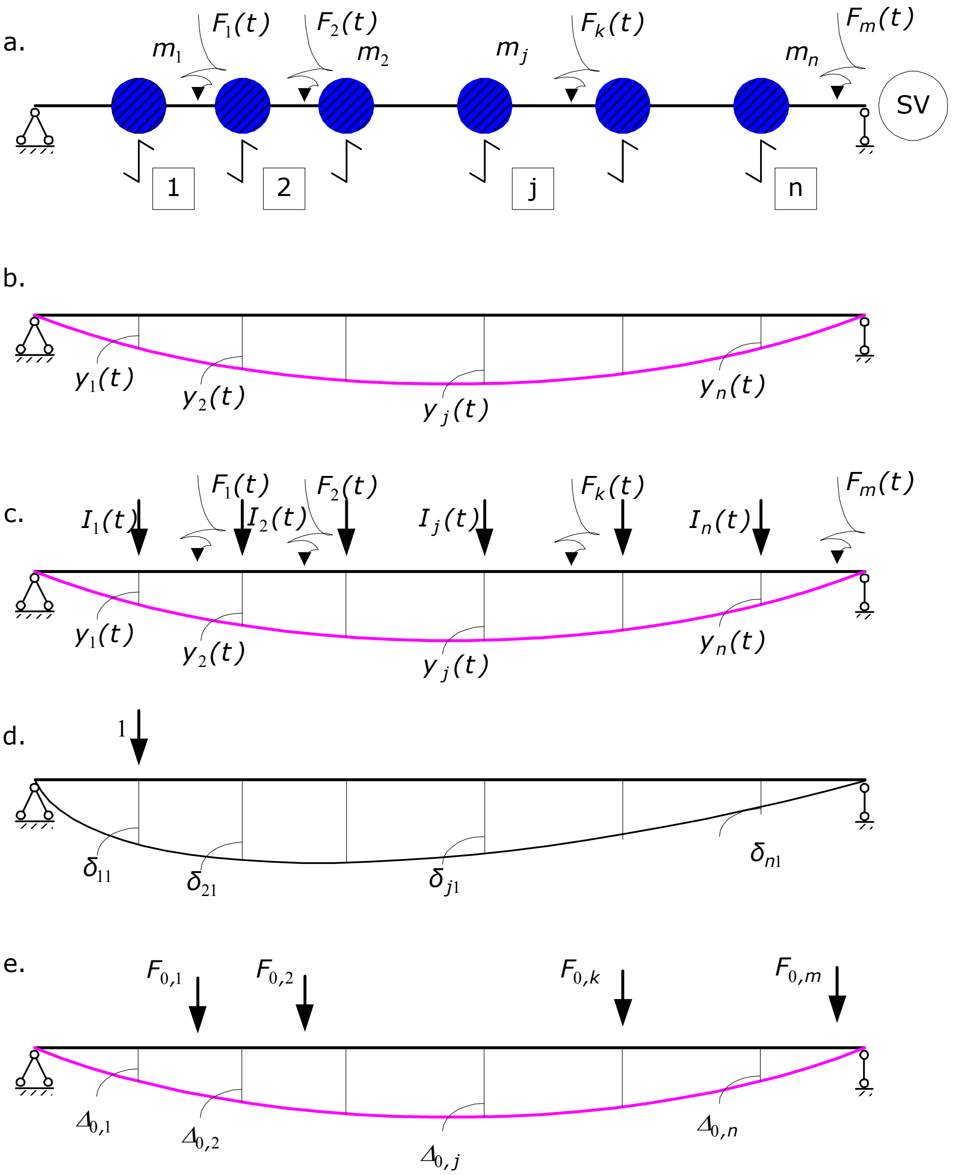


Fig. 6.2. Sistem vibrant cu n GLD:
a. sistemul acţionat de forţe perturbatoare; b. deformata sistemului sub acţiunea forţelor perturbatoare; c. şi d. deformatele sistemului vibrant produse de acţiuni egale cu unitatea aplicate succesiv în dreptul maselor şi pe direcţiile GLD; e. deformata sistemului produsă de amplitudinile forţelor perturbatoare.

$$[\Delta][m]\{\ddot{y}(t)\}+\{y(t)\}-\{\Delta_F(t)\}=\{0\}. \qquad (6.22)$$

Soluţia admisă de ecuaţia (6.22) este de tip armonic:

$$\{y(t)\} = \{y\}\sin\theta t\,, \tag{6.23}$$

în care: $\{y\}$ reprezintă vectorul amplitudinilor deplasărilor dinamice;

$\theta$ - pulsaţia proprie a forţei perturbatoare

Forţele perturbatoare se calulează cu relaţia:

$$F_m(t) = F_{0,m}\sin\theta t\,. \tag{6.24}$$

Introducând relaţia (6.23) în ecuaţia (6.22) se obţine:

$$(\theta^2[\Delta][m] - [I])\,\{y\} + \{\Delta_0\} = \{0\}, \tag{6.25}$$

deoarece:

$$\{\Delta_F(t)\} = \{\Delta_0\}\sin\theta t\,. \tag{6.26}$$

### 6.2.2. Etape de calcul

Pentru determinarea răspunsului dinamic în deplasări şi în eforturi se parcurg următoarele etape de calcul:

a. Se constituie matricea maselor:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & m_2 & & & & \\ & & . & & & \\ & & & m_j & & \\ & & & & . & \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}; \tag{6.27}$$

b. Se determină matricea de flexibilitate a sistemului vibrant:

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & . & . & . & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & . & . & . & \delta_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & . & . & . & \delta_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ \delta_{n1} & \delta_{n1} & . & . & . & \delta_{nn} \end{bmatrix}; \tag{6.28}$$

c. Se calculează vectorul termenilor liberi, $\{\Delta_0\}$. Pentru aceasta se încarcă sistemul vibrant cu amplitudinile forţelor perturbatoare şi se determină deplasările pe direcţiile GLD.

În cazul în care forţele perturbatoare sunt aplicate în dreptul maselor şi pe direcţiile GLD, atunci:

$$\{\Delta_0\} = [\Delta]\{F_0\}, \tag{6.29}$$

unde $\{F_0\}$ reprezintă vectorul amplitudinilor forţelor perturbatoare:

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{0,1} \\ F_{0,2} \\ . \\ F_{0,j} \\ . \\ F_{0,n} \end{Bmatrix}; \tag{6.30}$$

d. Răspunsul în deplasări se obţine prin rezolvarea sistemului de ecuaţii de echilibru (6.25);

e. Răspunsul în eforturi de calculează prin acţionarea sistemului vibrant cu amplitudinile forţelor de inerţie, $\{I\}$:

$$\{I\} = \theta^2[m]\{y\} \tag{6.31}$$

şi amplitudinile forţelor perturbatoare, $\{F_0\}$.