CURSUL 7

SISTEME VIBRANTE CU NGLD

7.1. Analiza modală a răspunsului dinamic al sistemelor cu nGLD

Se consideră un sistem cu nGLD. Analiza modală a răspunsului dinamic constă în exprimarea ecuaţiilor de mişcare, prin intermediul unui număr de „n” ecuaţii independente, obţinute prin decuplarea sistemului de ecuaţii de echilibru.

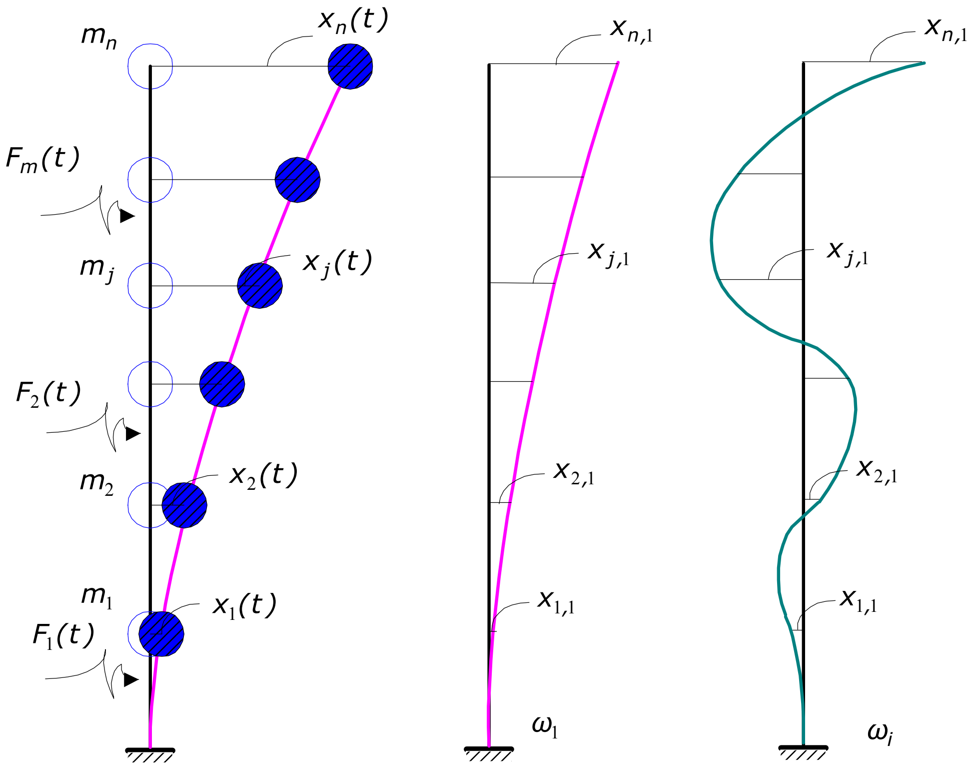

Fig. 7.1. Sistem vibrant cu nGLD acţionat de forţe perturbatoare

Ecuaţia matriceală de echilibru dinamic, prin analogie cu sistemul cu 1GLD, are forma:

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c][\dot{x}(t)] + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\}, \tag{7.1}$$

unde :

$[m]$ reprezintă matricea maselor sau de inerţie;

$[c]$ - matricea de amortizare;

$[K]$ - matricea de rigiditate a sistemului vibrant;

$\{x(t)\}$ - vectorul deplasărilor dinamice instantanee;

$\{F(t)\}$ - vectorul forţelor perturbatoare.

Obs. Alura ecuaţiei (7.1), referitor la termenul liber, este corectă numai dacă forţele perturbatoare sunt aplicate în dreptul maselor şi pe direcţia gradelor de libertate.

Pentru decuplarea sistemului de ecuaţii (7.1) se efectuează următoarea schimbare de variabilă:

$$\{x(t)\} = \left[\overline{X}\right]\{\Phi(t)\} \tag{7.2}$$

sau

$$x_j(t) = \sum_1^n \overline{X}_{j,i}\Phi_i(t)\,, \tag{7.3}$$

în care:

$\left[\overline{X}\right]$ reprezintă matricea modală normalizată;

$\Phi_i(t)$ - coordonata generalizată care precizează amplitudinea modului „i” de vibraţie pe direcţia gradului de libertate „j”.

Obs. O formă proprie de vibraţie normalizată se calculează cu relaţia:

$$\left\{\overline{X}\right\}_i = \frac{1}{\sqrt{M_i}}\{X\}_i\,, \tag{7.4}$$

unde M_i reprezintă masa generalizată corespunzătoare modului „i” de vibraţie şi se determină cu relaţia:

$$M_i = \{X\}_i^T[m]\{X\}_i\,. \tag{7.5}$$

Prin introducerea expresiei (7.2) în ecuaţia (7.1) se obţine:

$$[m]\left[\overline{X}\right]\{\ddot{\Phi}(t)\} + [c]\left[\overline{X}\right]\{\dot{\Phi}(t)\} + [K]\left[\overline{X}\right]\{\Phi(t)\} = \{F(t)\}\,. \tag{7.6}$$

Ecuaţia (7.6) se premultiplică cu matricea modală transpusă, care devine:

$$\left[\overline{X}\right]^T[m]\left[\overline{X}\right]\{\ddot{\Phi}(t)\} + \left[\overline{X}\right]^T[c]\left[\overline{X}\right]\{\dot{\Phi}(t)\} + \left[\overline{X}\right]^T[K]\left[\overline{X}\right]\{\Phi(t)\} = \left[\overline{X}\right]^T\{F(t)\}\,. \tag{7.7}$$

Se cunosc următoarele produse matriceale:

$$\left[\overline{X}\right]^T[m]\left[\overline{X}\right] = [I], \tag{7.8}$$

$$\left[\overline{X}\right]^T[c]\left[\overline{X}\right] = [2\nu\omega] \tag{7.9}$$

şi

$$\left[\overline{X}\right]^T[K]\left[\overline{X}\right] = \left[\omega^2\right], \tag{7.10}$$

unde ν reprezintă fracţiunea din amortizarea critică.

Luând în considerare relaţiile (7.8) – (7.10), ecuaţia (7.7) ia forma:

$$\left\{\ddot{\Phi}(t)\right\}+\left[2\nu\omega\right]\left\{\dot{\Phi}(t)\right\}+\left[\omega^2\right]\left\{\Phi(t)\right\}=\left[\overline{X}\right]^T\left\{F(t)\right\}. \tag{7.11}$$

Analizând ecuaţia matriceală (7.11) rezultă că sistemul este decuplat, s-a transformat în „n" ecuaţii independente de tipul:

$$\ddot{\Phi}_i(t)+2\nu_i\omega_i\dot{\Phi}_i(t)+\omega_i^2\Phi_i(t)=\sum_{j=1}^{n} F_j(t). \tag{7.12}$$

Soluţia ecuaţiei (7.12) este:

$$\Phi_i(t)=A_i e^{-\upsilon_i\omega_i t}\sin(\omega_i t+\varphi)+\frac{1}{\omega_i}\int_0^t\sum_{j=1}^{n}X_{j,i}F_j(\tau)e^{-\upsilon_i\omega_i t}\sin\omega_i(t-\tau)d\tau. \tag{7.13}$$

În cazul în care forţele perturbatoare sunt de tip armonic şi acţionează simultan, amplitudinea deplasării dinamice, corespunzătoare modului „j" de vibraţie, devine:

$$x_j=\sum_{i=1}^{n}X_{j,i}\frac{\sum_{j=1}^{n}X_{j,i}F_{0,j}}{\omega_i^2\sum_{j=1}^{n}X_{j,i}^2 m_j}\mu_i, \tag{7.14}$$

unde :

$F_{0,j}$ reprezintă amplitudinea forţei perturbatoare;

μ_i - factorul de amplificare dinamică, calculat cu relaţia:

$$\mu_i=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\theta^2}{\omega_i^2})^2+4\upsilon_i^2\frac{\theta_i^2}{\omega_i^2}}}. \tag{7.15}$$

7.2. Etape de calcul în analiza modală a răspunsului dinamic al sistemelor cu nGLD

a) Se constituie matricea maselor, $[m]$;

b) Se calculează matricea de rigiditate, $[K]$;

c) Se determină modurile principale de vibraţie:

a. pulsaţii proprii:

$$\left|[K]-\omega^2[m]\right|=0,$$

rezultă matricea spectrală: $[\Omega]$;

b. forme proprii de vibraţie:

$$\left([K] - \omega_i^2 [m]\right)\{X\}_i = \{0\},$$

rezultă formele proprii de vibraţie:

$$\{X\}_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

d) De calculează răspunsul dinamic în deplasări, prin aplicarea relaţiei (7.14);

e) Se determină amplitudinile forţelor de vibraţie:

$$\{I\} = \theta^2 [m]\{X\}; \tag{7.16}$$

f) Se trasează diagramele de eforturi, reprezentând răspunsul în eforturi, prin încărcarea sistemului vibrant cu amplitudinile forţelor de inerţie şi amplitudinile forţelor peturbatoare, cu dublu sens şi forţele gravitaţionale.