

CONSTANTIN IONESCU

**APLICAȚII – SISTEME CU UN GRAD DE
LIBERTATE DINAMICĂ**

IAȘI, 2004

CUPRINS **C**

Aplicația 1 -sisteme cu 1gld, Determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor folosind flexibilitate sistemului

Aplicația 2 -sisteme cu 1gld, Determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor folosind rigiditatea sistemului

B. Bibliografie

APLICAȚIA 1

SISTEME CU 1GLD

1. Determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor folosind flexibilitate sistemului

Pentru determinarea caracteristicilor proprii de vibrație ale unui sistem vibrant, cu un singur grad de libertate dinamică, se folosesc următoarele relații de calcul: (1.1), (1.2) și (1.3).

Pentru pulsația proprie de vibrație relația (1.1):

$$\omega = (m\delta)^{-0.5}, \quad (1.1)$$

funcție de flexibilitatea sistemului vibrant.

Pentru perioada proprie de vibrație expresia (1.2):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad [s] \quad (1.2)$$

Pentru frecvența proprie de vibrație formula (1.3):

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad [s^{-1}] \text{ sau } [Hz]. \quad (1.3)$$

Principalele etape de calcule sunt prezentate în continuare:

- a) Se stabilește sistemul vibrant. Se pleacă de la sistemul constructiv real, pentru care se construiește modelul static (schema statică a structurii), iar prin concentrarea masei într-o secțiune și acordarea gradului de libertate semnificativ se obține sistemul dinamic (modelul dinamic), cu un GLD.
- b) Se determină flexibilitatea sistemului vibrant, figura 1.1:
 - i. notații: δ sau f ;
 - ii. definiție – flexibilitatea reprezintă deplasarea măsurată pe direcția gradului de libertate dinamică a unui sistem vibrant, produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate;
 - iii. unitate de măsură – $[mN^{-1}]$;
 - iv. schema de calcul, figura 1.1;
 - v. relație de calcul:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx. \quad (1.4)$$

Aplicarea relației (1.4) presupune existența a două situații (stări) de încărcare: starea reală și starea virtuală (fictivă). *Starea reală* este definită ca în figura 1.1. Aceasta, este constituită din modelul static al construcției, încărcată în dreptul masei și pe direcția GLD cu o forță egală cu unitatea. *Starea virtuală* este realizată din structura dată (schema statică, modelul static) acționată, în dreptul masei și pe direcția pe care dorim să determinăm deplasarea, aici direcția este tot direcția GLD, de o forță egală cu unitatea. Rezultă faptul că, în cazul sistemelor cu 1GLD, cele două stări reală și virtuală, coincid;

- vi. Metode pentru trasarea diagramelor de eforturi. În cazul structurilor static nedeterminate, în vederea trasării diagramelor de eforturi – momente încovoietoare, se folosesc două metode: a eforturilor (a forțelor) și a deplasărilor (deformațiilor).

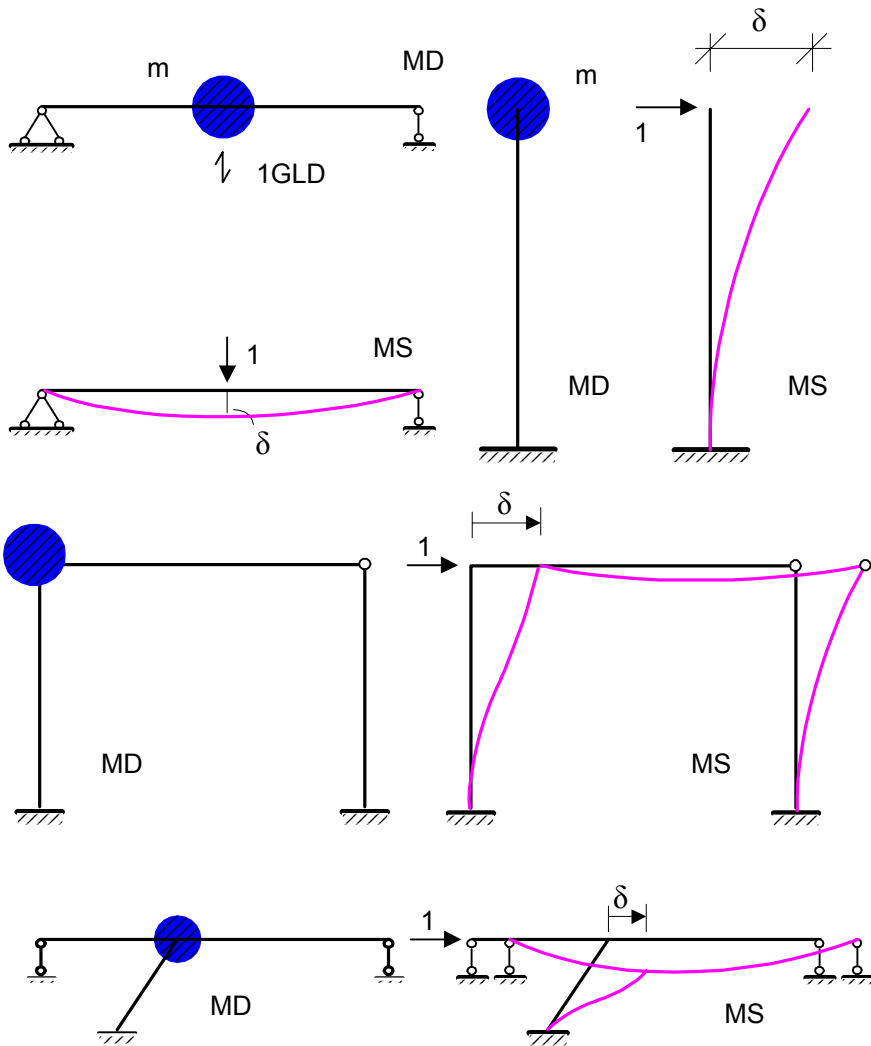


Fig. 1.1. Modele dinamice și situații de încărcare pentru calculul flexibilității

- c) Determinarea pulsației, frecvenței și perioadei proprii de vibrație, relațiile: (1.1), (1.2) și (1.3).

1.1. Grinzi drepte

1.1.1. Structura 1

Pentru structura din figura 1.2 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

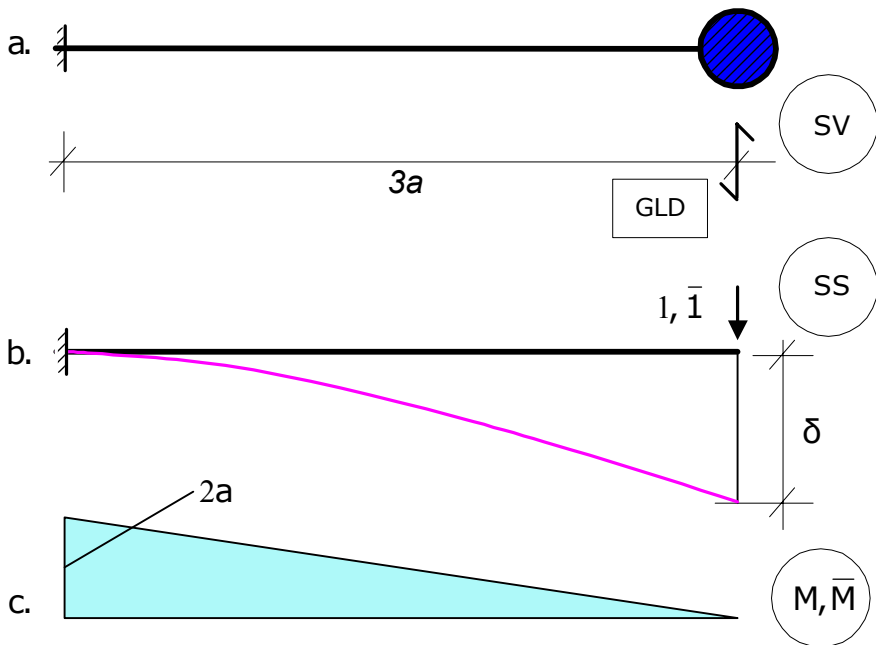


Fig.1.2. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. Situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. Diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M})

Calculul flexibilității

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare (figura 1.2.c.) rezultă:

$$\delta = \frac{a}{3} \cdot 3a \cdot 3a, \quad \delta = \frac{27a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{EI}{9ma^3}}, \quad \omega = 0.333 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 18.850 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}$$

1.1.2. Structura 2

Pentru structura din figura 1.3 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

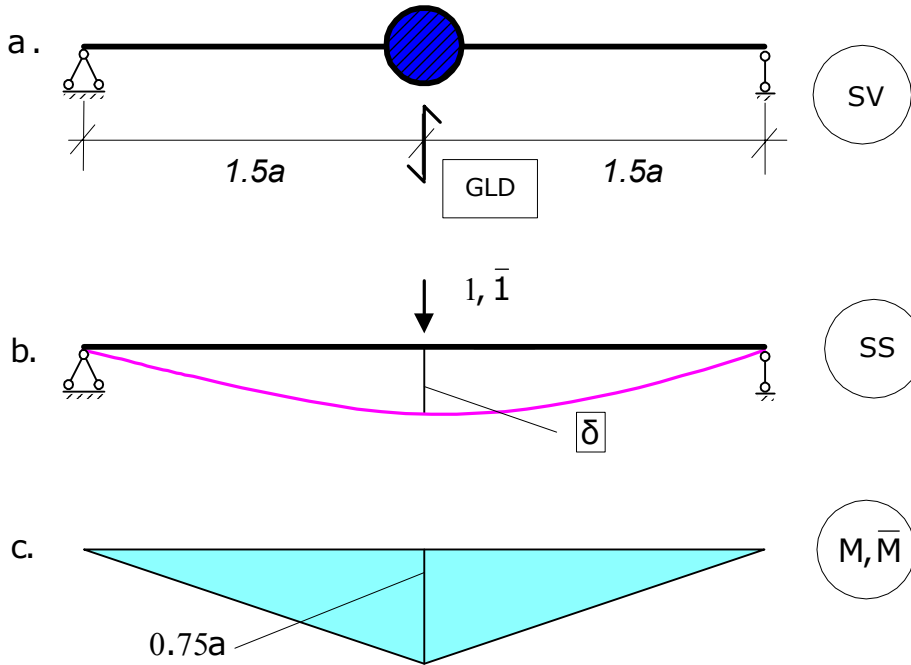


Fig.1.3. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. Situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. Diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M})

Calculul flexibilității

În figura 1.3. sunt trasate diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală. În acest caz situațiile de încărcare sunt identice.

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare rezultă:

$$\delta = 2 \cdot \frac{1.5a}{3EI} \cdot \frac{1.5a}{2} \cdot \frac{1.5a}{2}, \quad \delta = 1.688 \frac{a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{EI}{1.688ma^3}}, \quad \omega = 1.333 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 4.714 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.3. Structura 3

Pentru structura din figura 1.4 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

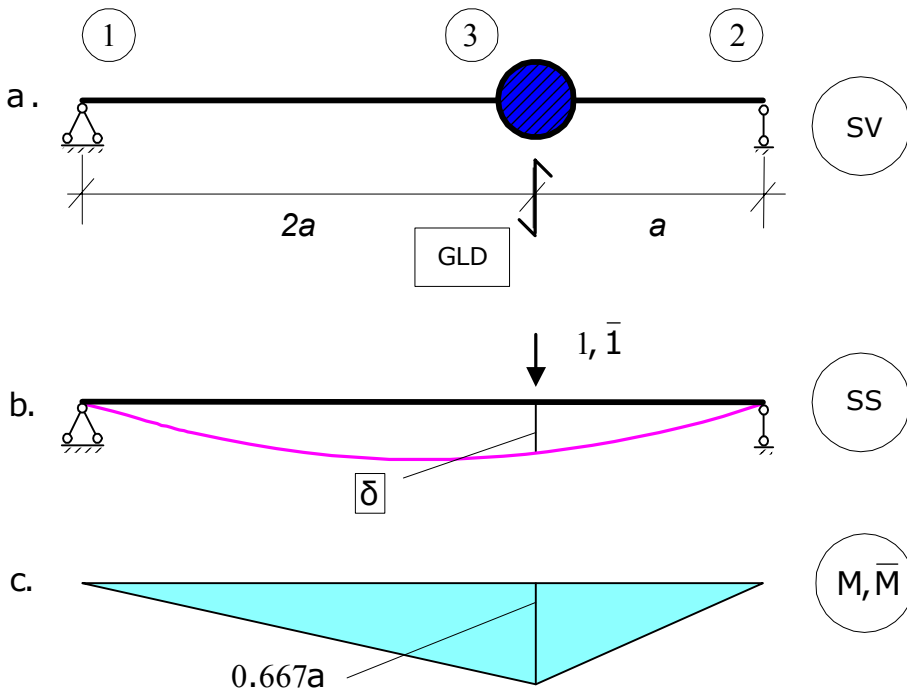


Fig.1.4. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. Situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M})

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală se vor parcurge câteva etape de calcul. Se vor determina reacțiunile grinzii simplu rezemată (sistemul

static, modelul static) încărcată cu o forță egală cu unitatea (cele două stări sunt identice, în cazul structurilor static determinate).

Calculul reacțiilor

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 3a - 1 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{1}{3}.$$

$$\sum M_1 = 0; \quad V_2 \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{2}{3}.$$

Verificare:

$$\sum Y = 0; \quad V_1 - 1 + V_2 = 0; \quad \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} = 0.$$

Concluzie – reacțiunile sunt corect calculate.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{31} = V_1 \cdot 2a = \frac{1}{3} \cdot 2a, \quad \Rightarrow \quad M_{31} = \frac{2}{3} a$$

$$M_{32} = V_2 \cdot a = \frac{2}{3} \cdot a, \quad \Rightarrow \quad M_{32} = \frac{2}{3} a.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.4.c.

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{a}{3EI} \cdot \frac{2}{3} a \cdot \frac{2}{3} a, \quad \delta = 1.333 \frac{a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{1.333ma^3}}, \quad \omega = 1.5 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 4.189 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.4. Structura 4

Pentru structura din figura 1.5 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

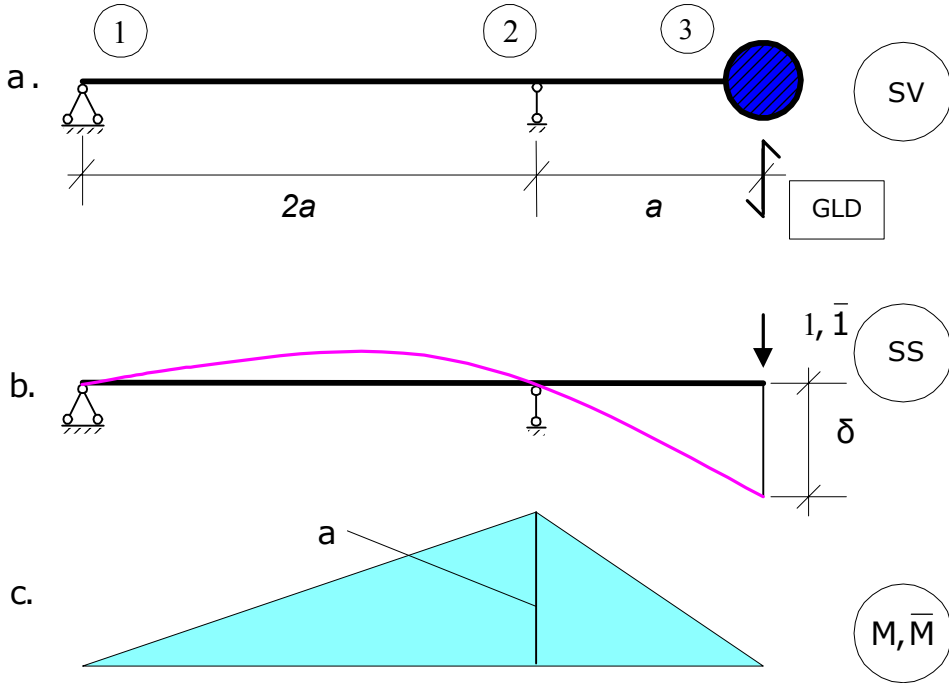


Fig.1.5. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. Situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M})

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală se vor parcurge câteva etape de calcul. Se vor determina reacțiunile grinzii simplu rezemată (sistemul static, modelul static) încărcată cu o forță egală cu unitatea (cele două stări sunt identice, în cazul structurilor static determinate).

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 2a + 1 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 1 \cdot 3a - V_2 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{3}{2}.$$

Verificare:

$$\sum Y = 0; \quad -V_1 - 1 + V_2 - 1 = 0; \quad -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 0.$$

Concluzie – reacțiunile sunt corect calculate.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{12} = 0,$$

$$M_{21} = -V_1 \cdot 2a = -\frac{1}{2} \cdot 2a, \quad \Rightarrow \quad M_{21} = -a,$$

$$M_{32} = 0,$$

$$M_{23} = -1 \cdot a, \quad \Rightarrow \quad M_{23} = -a$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.5.c.

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot a \cdot a + \frac{a}{3EI} \cdot a \cdot a, \quad \delta = 3 \frac{a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 6.283 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.5. Structura 5

Pentru structura din figura 1.6 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

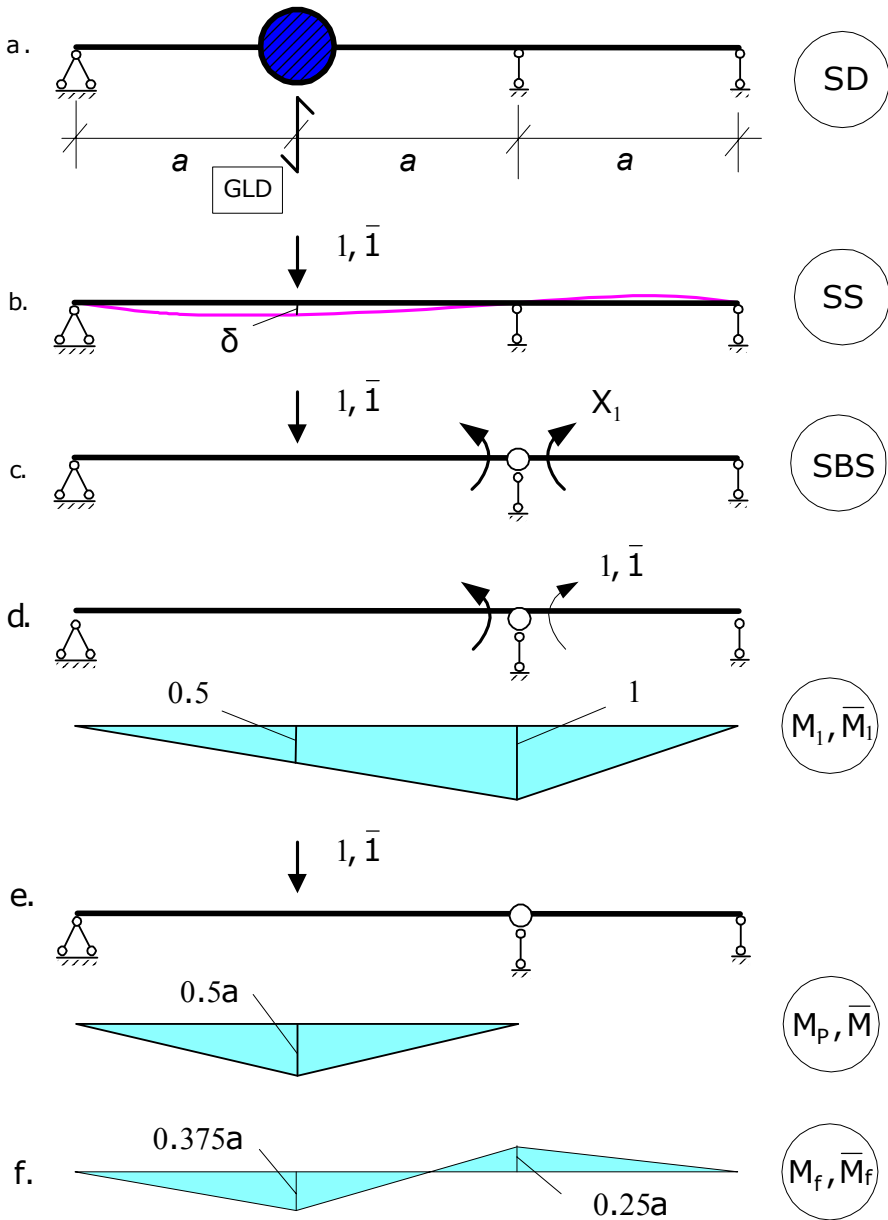


Fig.1.6. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. sistem de bază corespunzător metodei forțelor; d. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} și diagramă de momente încovoietoare corespunzătoare; e. situație de încărcare pentru calculul termenului liber Δ_{1P} și diagramă de momente corespunzătoare; f. diagramă de momente finale

$$GNS = (l + r) - 3c \quad (1.5)$$

unde: l reprezintă numărul de legături simple interioare,
 r – numărul de legături simple din reazeme;
 c – numărul de corpuri.

Din analiza structurii, se distinge un singur corp, $c = 1$ și trei reazeme: unul articulată, $r = 2$ și alte două simple, fiecare presupune $r = 1$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (0 + 4) - 3 \cdot 1 = 1,$$

prin urmare structura are o singură nedeterminare statică. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

În metoda deplasărilor numărul de necunoscute este dat gradul de nedeterminare cinematico-elastică a structurii, notat $GNCE$, care se calculează cu relațiile (1.6) și (1.7):

$$GNCE = N + g, \quad (1.6)$$

$$g = 3 * c - (l + r), \quad (1.7)$$

unde: N reprezintă numărul de noduri rigide,
 g – numărul de grade de libertate, care se determină pe o structură obținută din structura dată (static nedeterminată) prin introducerea de articulații în nodurile rigide și în reazemele încastrate;
 c, l, r – idem relația (1.5)

În primul rând, se determină gradul de libertate al structurii, structura determinată obținută din structura dată prin introducerea unei articulații în nodul notat 3, se identifică, în acest caz cu sistemul de bază desenat în figura 1.6.c Constatăm existența a două corpuri, notate 1-3 și 3-2, a unei articulații interioare în nodul 3, a unui reazem articulată și a două reazeme simple, deci:

$$c = 2, \quad l = 2, \quad r = 2 + 1 + 1,$$

$$g = 3 * 2 - (2 + 2 + 1 + 1) \Rightarrow g = 0.$$

Cum structura considerată are un singur nod rigid, nodul 3, conchidem:

$$N = 1 \quad \text{și} \quad GNCE = 1 + 0 \Rightarrow GNCE = 0.$$

În concluzie, structura este cu noduri fixe și are o singură necunoscută corespunzătoare metodei deplasărilor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, se vor utiliza, succesiv, cele două metode cunoscute din Statica Structurilor: metoda forțelor și metoda deplasărilor.

În figura 1.6 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi necesare aplicării metodei forțelor, iar în figura 1.7 situațiile de încărcare și deformatile specifice metodei deplasărilor.

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Ridicarea nedeterminării statice prin metoda forțelor

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

În figura 1.6.c. este prezentat sistemul de bază, iar în figura 1.6.d. sunt desenate diagramele unitare de momente încovoietoare, în cele două situații de încărcare: reală și virtuală, acestea sunt identice. Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = \frac{2a}{3EI} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{a}{3EI} \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \delta_{11} = \frac{a}{EI}.$$

Situația de încărcare pentru calculul termenului liber al ecuației de echilibru este prezentată în figura 1.6.e, de asemenea, și diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare. Se aplică relația de calcul:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{a}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{6EI} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} + 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{a}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta_{1P} = \frac{a^2}{4EI}.$$

Prin rezolvarea ecuației de echilibru rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{a^2}{4EI} \cdot \frac{EI}{a} \Rightarrow X_1 = -\frac{a}{4}.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^1 \cdot X_1 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{13}^f = 0,$$

$$M_{41}^f = \frac{1}{2} \cdot X_1 + \frac{a}{2} \Rightarrow M_{41}^f = \frac{3a}{8},$$

$$M_{34}^f = M_{32}^f = 1 \cdot X_1 + 0 \Rightarrow M_{34}^f = M_{32}^f = -\frac{a}{4},$$

$$M_{23}^f = 0.$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.6.f.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.6.d. și e., se obține:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = \frac{a}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{8} + \frac{a}{6EI} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{8} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} + 1 \cdot \frac{3a}{8} \right) - \frac{a}{3EI} \cdot 1 \cdot \frac{a}{4} = \frac{3a^2}{16EI} - \frac{9a^2}{48EI} = 0,$$

în concluzie diagrama a fost corect trasată.

Ridicarea nedeterminării statice prin metoda deplasărilor

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0.$$

În figura 1.7.c. este prezentat sistemul de bază, iar în figura 1.7.d. este prezentată deformată sistemului de bază pentru încărcarea, cedare de reazem, $Z_1 = 1$. Exprimând echilibrul nodului 3, se obține relația de calcul al coeficientului r_{11} :

$$\sum M_3 = 0, \quad r_{11} - K_{32} - K_{31} = 0,$$

se cunosc expresiile de calcul ale rigidităților:

$$K_{31} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{2a}, \quad K_{32} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{a}$$

și rezultă:

$$r_{11} = \frac{9EI}{2a}.$$

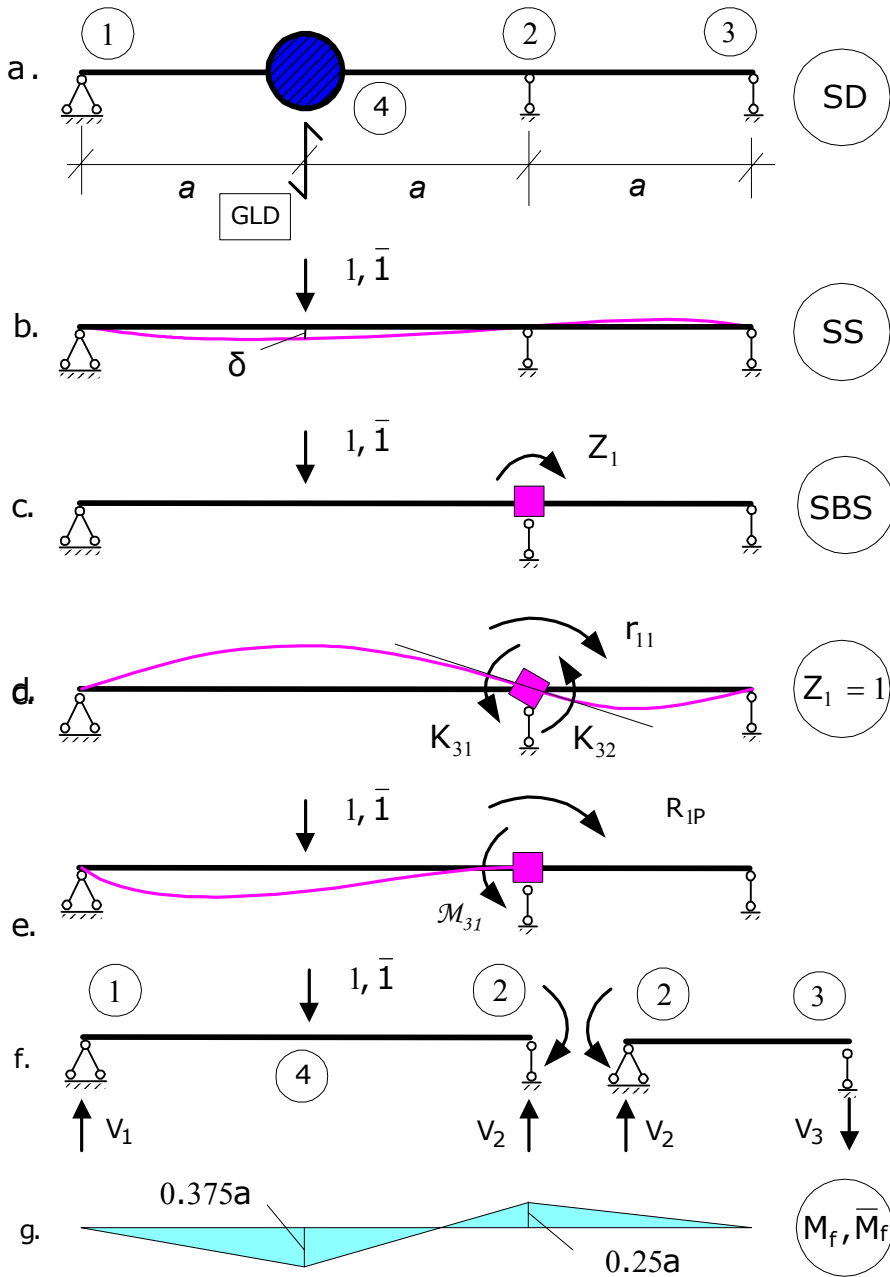


Fig.1.7. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, k ; c. sistem de bază corespunzător metodei deplasărilor; d. situație de încărcare pentru calculul coeficientului r_{11} ; e. situație de încărcare pentru calculul termenului liber R_{1P} ; f. diagramă de momente finale

În figura 1.7.e. este prezentată deformată sistemului de bază, pentru încărcarea exterioară, de intensitate egală cu unitatea, pentru calculul termenului liber R_{1P} . Exprimând echilibrul nodului 3, se obține relația de calcul al coeficientului:

$$\sum M_3 = 0, \quad R_{1P} - \mathcal{M}_{31} = 0,$$

unde

$$M_{31} = \frac{3PL}{16} = \frac{3 \cdot 2a}{16}, \quad M_{31} = \frac{6a}{16} \Rightarrow R_{1P} = \frac{3a}{8}.$$

Prin rezolvarea ecuației de echilibru rezultă:

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = -\frac{3a}{8} \cdot \frac{2a}{9EI} \Rightarrow Z_1 = -\frac{a}{12EI}.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = K_{ij} \cdot Z_1 + \mathcal{M}_{ij}^P,$$

$$M_{31}^f = -K_{31} \cdot Z_1 - \mathcal{M}_{31}, \quad M_{31}^f = -\frac{3EI}{2a} \cdot \left(-\frac{a}{12EI}\right) - \frac{3a}{8} \Rightarrow M_{31}^f = -\frac{a}{4}.$$

Pentru aflarea valorii momentului încovoietor, în secțiunea, notată 4, în care este aplicată forța concentrată, se descompune structura dată în două grinzi simplu rezemate încărcate cu forța exterioară și momentele din extremități, determinate anterior, $M_{31} = M_{32}$, figura 1.7.g.

Calculul reacțiunilor la grinda 1 – 4 – 2 :

$$\sum M_2 = 0, \quad V_1 \cdot 2a - 1 \cdot a + \frac{a}{4} = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{3}{8};$$

$$\sum M_1 = 0, \quad -V_2 \cdot 2a + \frac{a}{4} + 1 \cdot a = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{5}{8}.$$

Verificare:

$$\sum Y = 0, \quad V_1 + V_2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - 1 = 0,$$

rezultă că reacțiunile sunt calculate corect.

Calculul momentului încovoietor din secțiunea 4 :

$$M_{41} = V_1 \cdot a, \quad M_{41} = \frac{3a}{8}.$$

Diagramele de momente finale, corespunzătoare celor două stări: reală și virtuală, care sunt identice, sunt trasate în figura 1.7.g și sunt identice cu cele obținute prin metoda forțelor.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare, rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{a}{3EI} \cdot \frac{3a}{8} \frac{3a}{8} + \frac{a}{6EI} \left(2 \cdot \frac{3a}{8} \frac{3a}{8} + 2 \cdot \frac{a}{4} \frac{a}{4} - 2 \cdot \frac{3a}{8} \frac{a}{4} \right) \Rightarrow \delta = 0.313 \frac{a^3}{3EI}.$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.6.3. Prin urmare, se integrează diagramele:

\bar{M}_f și \bar{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{a}{3EI} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{8} + \frac{a}{6EI} \left(2 \cdot \frac{a}{2} \frac{3a}{8} - \frac{a}{2} \frac{a}{4} \right) \Rightarrow \delta = 0.313 \frac{a^3}{3EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{EI}{0.313 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 3.098 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 2.028 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.6. Structura 6

Pentru structura din figura 1.8 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

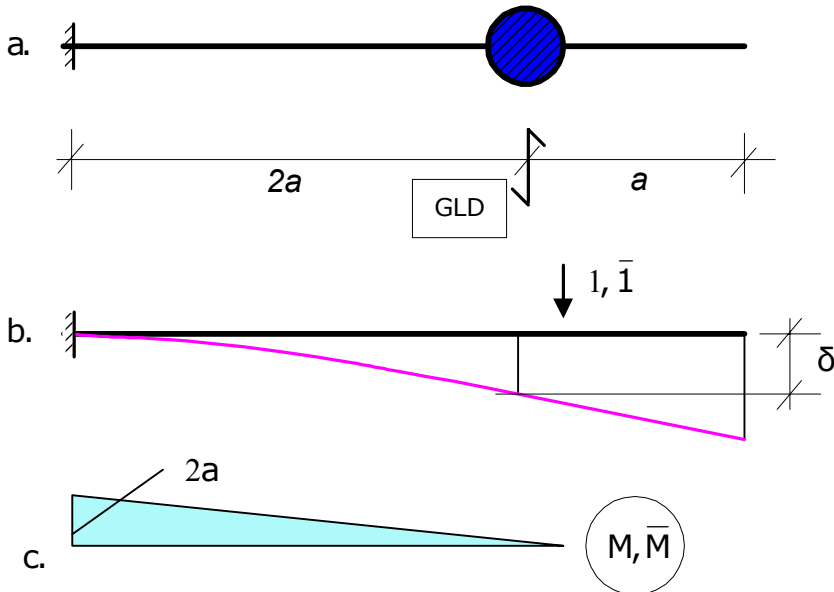


Fig.1.8. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. Situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. Diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M})

Calculul flexibilității

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare, trasate în (figura 1.8.c.) rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a, \quad \delta = \frac{8a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{8ma^3}}, \quad \omega = 0.612 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 10.260 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.7. Structura 7

Pentru structura din figura 1.9 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

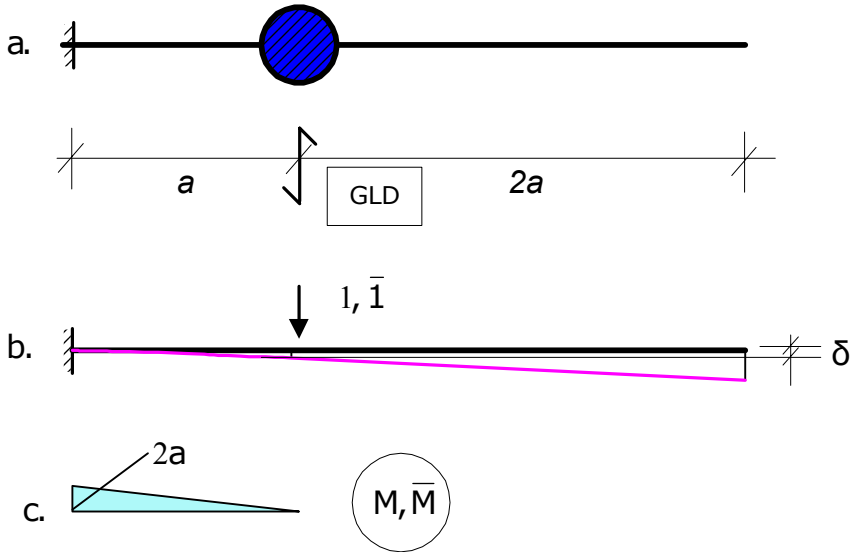


Fig.1.9. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. Situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. Diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M})

Calculul flexibilității

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare, trasate în (figura 1.9.c.) rezultă:

$$\delta = \frac{a}{3EI} \cdot a \cdot a, \quad \delta = \frac{a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{ma^3}}, \quad \omega = 1.732 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 3.628 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.8. Structura 8

Pentru structura din figura 1.10 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

$$GNS = (l + r) - 3c \quad (1.5)$$

unde: l reprezintă numărul de legături simple interioare,
 r – numărul de legături simple din reazeme;
 c – numărul de corpuri.

Din analiza structurii, se distinge un singur corp, $c = 1$ și două reazeme: unul încastrat, $r = 3$ și un altul simplu rezemat cu $r = 1$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (0 + 4) - 3 \cdot 1 = 1,$$

prin urmare structura are o singură nedeterminare statică. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, se utilizează metoda forțelor.

În figura 1.10 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Ridicarea nedeterminării statice prin metoda forțelor

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

În figura 1.10.c. este prezentat sistemul de bază, iar în figura 1.10.d. sunt desenate diagramele unitare de momente încovoietoare, în cele două situații de încărcare: reală și virtuală, acestea sunt identice. Integrând cele două diagrame rezultă:

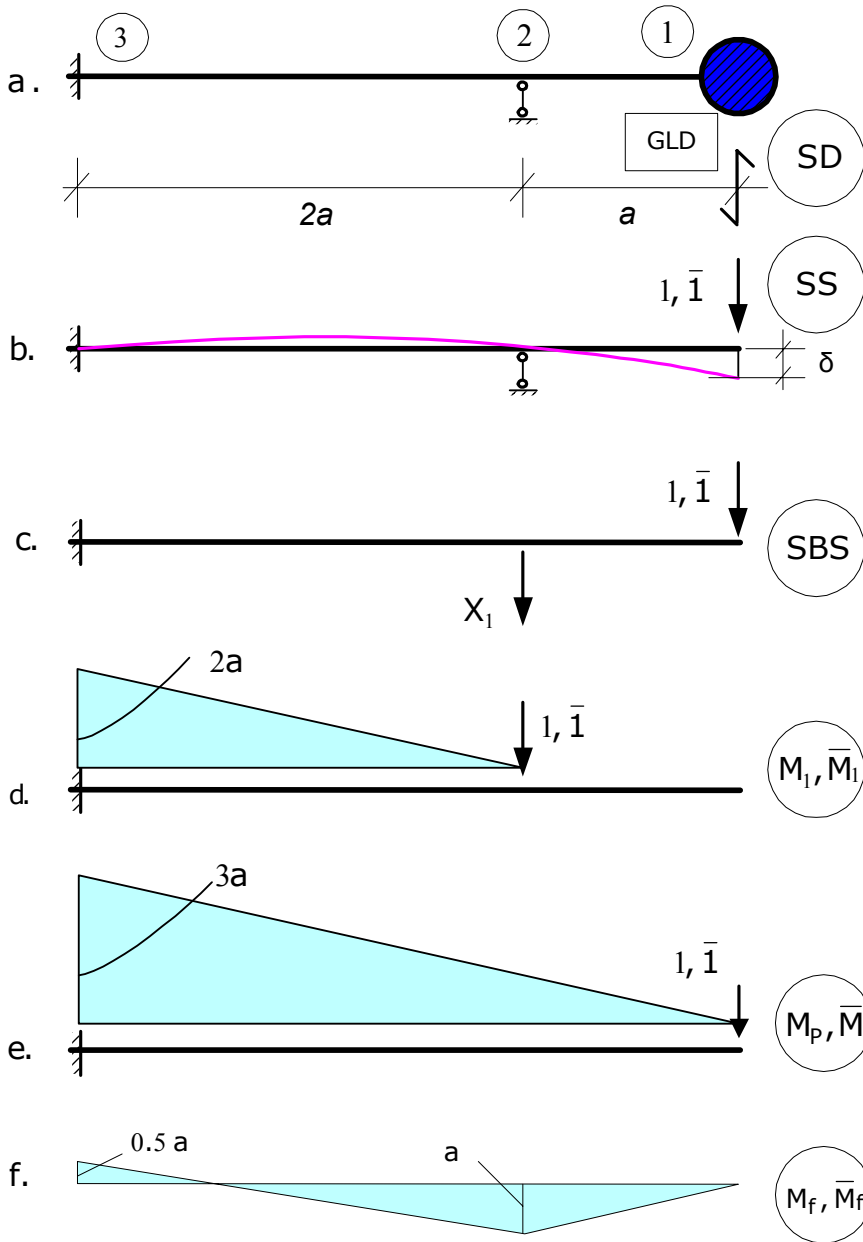


Fig.1.10. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. sistem de bază corespunzător metodei forțelor; d. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} și diagramă de momente încovoietoare corespunzătoare; e. situație de încărcare pentru calculul coeficientului Δ_{1p} și diagramă de momente corespunzătoare; f. diagramă de momente finale

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a \Rightarrow \delta_{11} = \frac{8a^3}{3EI}.$$

Situația de încărcare pentru calculul termenului liber al ecuației de echilibru este prezentată în figura 1.10.e, de asemenea, și diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare. Se aplică relația de calcul:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 0 \cdot a + 2 \cdot 2a \cdot 3a + 0 \cdot 3a + a \cdot 2a) \Rightarrow$$

$$\Delta_{1P} = \frac{14a^3}{3EI}.$$

Prin rezolvarea ecuației de echilibru rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{14a^3}{3EI} \cdot \frac{3EI}{8a^3} \Rightarrow X_1 = -\frac{7}{4}.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^1 \cdot X_1 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{12}^f = 0,$$

$$M_{21}^f = 1 \cdot a \Rightarrow M_{21}^f = a,$$

$$M_{32}^f = 2a \cdot X_1 + 3a \Rightarrow M_{32}^f = -\frac{a}{2}.$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.10.f.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.10.d și e, se obține:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 0 \cdot a - 2 \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} + 0 \cdot \frac{a}{2} + a \cdot 2a) = 0,$$

În concluzie diagrama a fost corect trasată.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{a}{3EI} \cdot a \cdot a + \frac{2a}{6EI} (2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2}) \Rightarrow \delta = \frac{5a^3}{6EI}.$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.10.c. Prin urmare, se integrează diagramele:

\bar{M}_f și \bar{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{a}{3EI} \cdot a \cdot a + \frac{a}{6EI} (2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot 3a \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} + 3a \cdot a) \Rightarrow \delta = \frac{5a^3}{6EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{6EI}{5 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 1.095 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 5.738 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.9. Structura 9

Pentru structura din figura 1.11 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

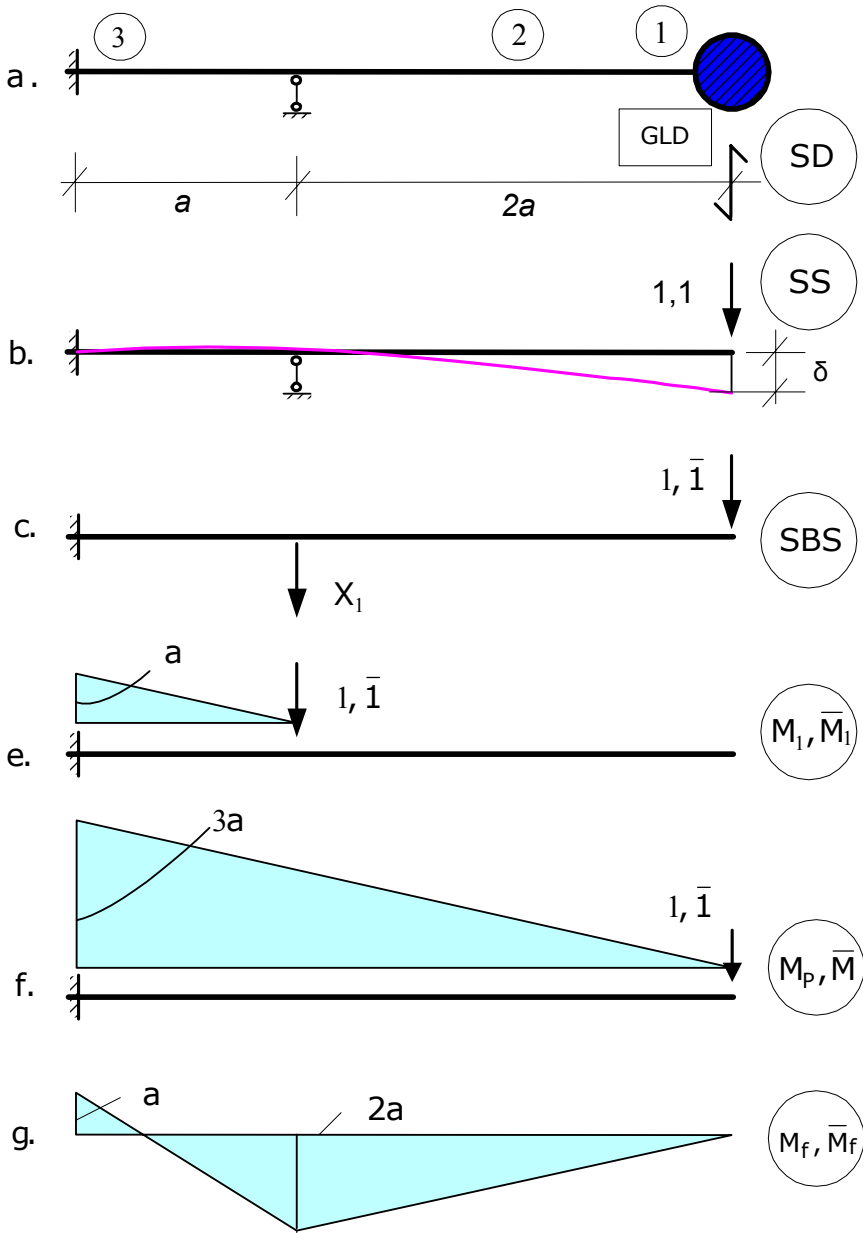


Fig.1.11. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. sistem de bază corespunzător metodei forțelor; d. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} și diagramă de momente încovoietoare corespunzătoare; e. situație de încărcare pentru calculul coeficientului Δ_{1P} și diagramă de momente corespunzătoare; f. diagramă de momente finale

$$GNS = (l + r) - 3c \quad (1.5)$$

unde: l reprezintă numărul de legături simple interioare,
 r – numărul de legături simple din reazeme;
 c – numărul de corpuri.

Din analiza structurii, se disting: un corp, $c = 1$ și două reazeme: unul încastrat, $r = 3$ și un altul simplu rezemat cu $r = 1$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (0 + 4) - 3 \cdot 1 = 1,$$

prin urmare structura are o singură nedeterminare statică. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, se utilizează metoda forțelor.

În figura 1.11 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Ridicarea nedeterminării statice prin metoda forțelor

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

În figura 1.11.c. este prezentat sistemul de bază, iar în figura 1.11.d sunt desenate diagramele unitare de momente încovoietoare, în cele două situații de încărcare: reală și virtuală, acestea sunt identice. Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = \frac{a}{3EI} \cdot a \cdot a \Rightarrow \delta_{11} = \frac{a^3}{3EI}.$$

Situația de încărcare pentru calculul termenului liber al ecuației de echilibru este prezentată în figura 1.11.e, de asemenea, și diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare. Se aplică relația de calcul:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{a}{6EI} (2 \cdot 0 \cdot a + 2 \cdot a \cdot 3a + a \cdot 2a + 0 \cdot 3a) \Rightarrow$$

$$\Delta_{1P} = \frac{4a^3}{3EI}.$$

Prin rezolvarea ecuației de echilibru rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{4a^3}{3EI} \cdot \frac{3EI}{a^3} \Rightarrow X_1 = -4.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^l \cdot X_1 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{12}^f = 0,$$

$$M_{21}^f = 1 \cdot 2a \Rightarrow M_{21}^f = 2a,$$

$$M_{32}^f = a \cdot X_1 + 3a \Rightarrow M_{32}^f = -a.$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.11.f.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.11.d și e, se obține:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = (2 \cdot 0 \cdot 2a - 2 \cdot a \cdot 0 + 0 \cdot a - 2a \cdot a) = 0,$$

în concluzie diagrama a fost corect trasată.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{3} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{a}{6EI} (2 \cdot 2a \cdot 2a + 2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot 2a \cdot a) \Rightarrow \delta = \frac{11a^3}{3EI}.$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.11.c. Prin urmare, se integrează diagramele:

$\textcircled{M_f}$ și \textcircled{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{a}{6EI} (2 \cdot 2a \cdot 2a - 2 \cdot 3a \cdot a - 2a \cdot a + 2a \cdot 3a) \Rightarrow \delta = \frac{11a^3}{3EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{11 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 0.522 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 12.032 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.10. Structura 10

Pentru structura din figura 1.12 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

Calculul flexibilității

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația o relație de calcul din tabelul ?????, corespunzătoare situației de încărcare arătată în figura 1.11.c:

$$\delta = \frac{a^3 \cdot b^3}{(a+b)^3 \cdot EI}, \quad \delta = \frac{(1.5a)^3 \cdot (1.5a)^3}{(3a)^3 \cdot EI} \Rightarrow \delta = 1.266 \frac{a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

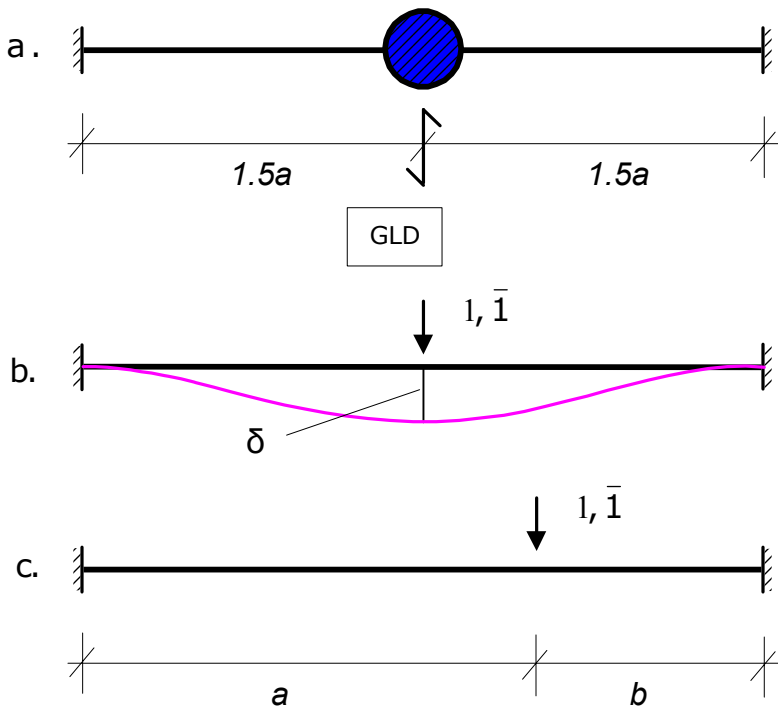


Fig.1.12. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. grinda dublu încadrată, caz general, acționată de o forță concentrată

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{1.266 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 1.539 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 4.083 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.11. Structura 11

Pentru structura din figura 1.13 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație.

Calculul flexibilității

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația de calcul din tabelul ?????, corespunzătoare situației de încărcare arătată în figura 1.12.c:

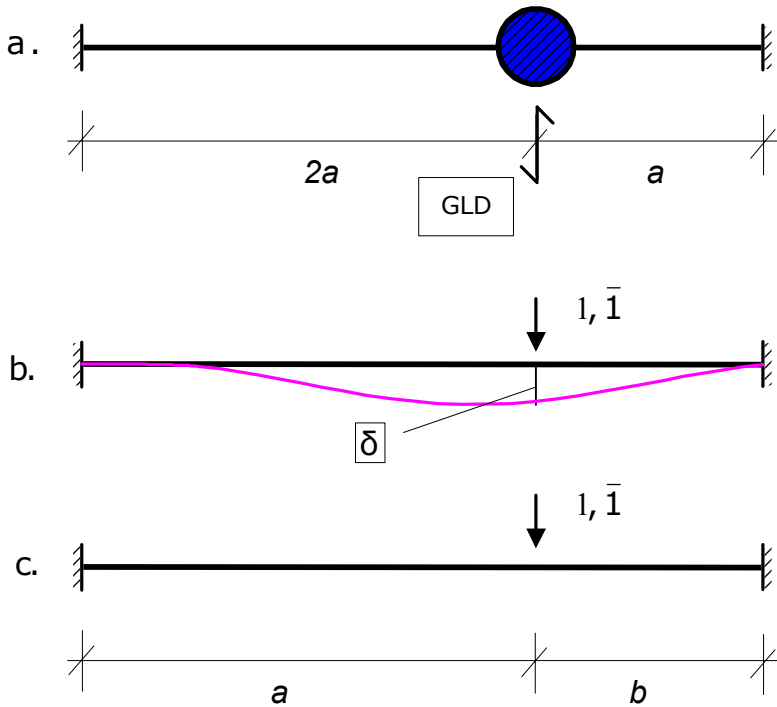


Fig.1.13. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. situații de încărcare pentru calculul flexibilității, $\bar{\delta}$; c. grinda dublu încadrată, caz general, acționată de o forță concentrată

$$\bar{\delta} = \frac{a^3 \cdot b^3}{(a+b)^3 \cdot EI}, \quad \bar{\delta} = \frac{(2a)^3 \cdot (a)^3}{(3a)^3 \cdot EI} \Rightarrow \bar{\delta} = 0.296 \frac{a^3}{EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \bar{\delta}}} = \sqrt{\frac{EI}{0.296 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 1.838 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 3.418 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}$$

1.2. Cadre

1.2.1. Structura 1

Pentru cadrul din figura 1.14 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

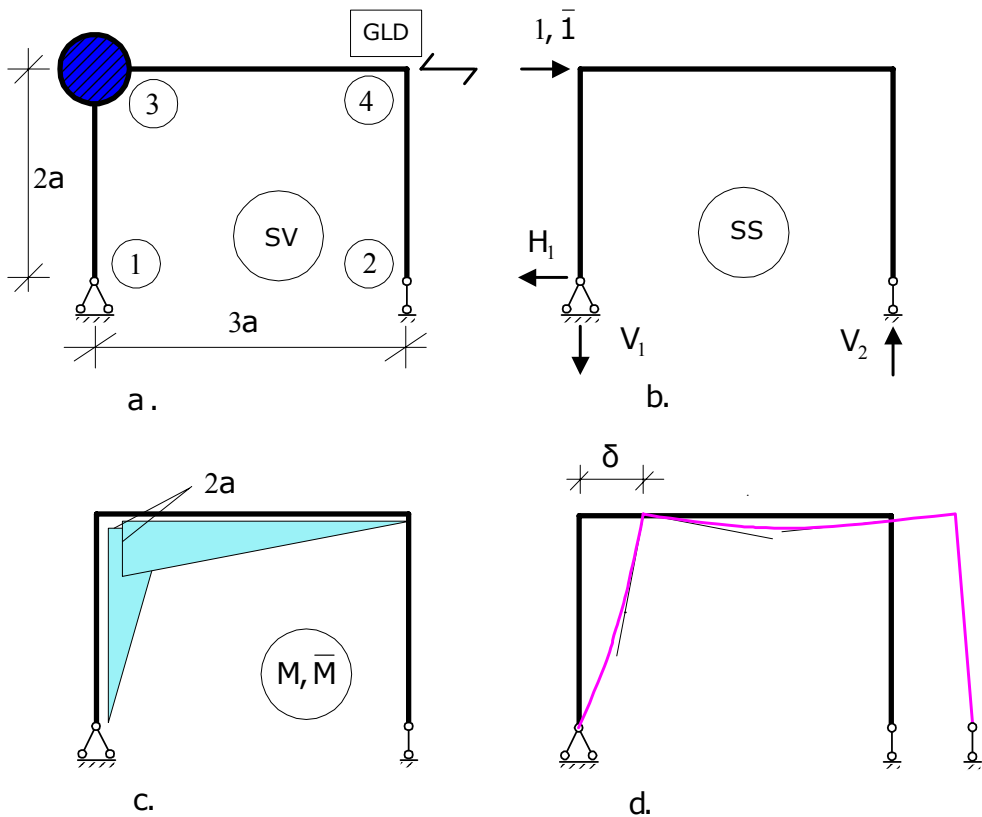


Fig.1.14. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M}) d. deformata sistemului datorită aplicării acțiunii egale cu unitatea

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală calcul se vor determina reacțiunile cadrului (sistemul static, modelul static) încărcat cu o forță egală cu unitatea (cele două stări sunt identice, în cazul structurilor static determinate).

Calculul reacțiunilor

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_1 = 0; \quad H_1 = 1.$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{2}{3}.$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 1 \cdot 2a - V_2 \cdot 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{2}{3}.$$

Verificare:

$$\sum Y = 0; \quad -V_1 + V_2 = 0; \quad -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Concluzie – reacțiunile sunt corect calculate.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{13} = 0$$

$$M_{31} = H_1 \cdot 2a, \quad \Rightarrow \quad M_{13} = 2a$$

$$M_{34} = M_{31},$$

$$M_{24} = M_{42} = 0.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.14.c.

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{3a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a, \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{20a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{20ma^3}}, \quad \omega = 0.387 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 16.223 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.2. Structura 2

Pentru cadrul din figura 1.15 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

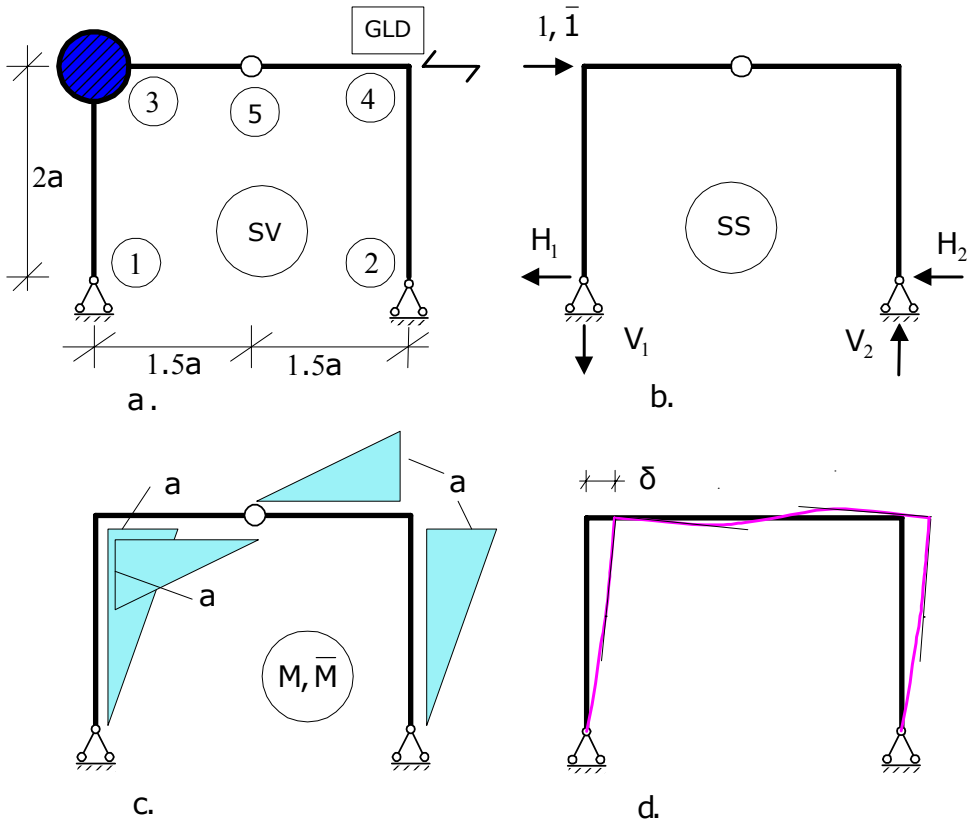


Fig.1.15. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M}) d. deformata sistemului datorită aplicării acțiunii egale cu unitatea

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală calcul se vor determina reacțiunile

cadrelui (sistemul static, modelul static) încărcat cu o forță egală cu unitatea (cele două stări sunt identice, în cazul structurilor static determinate).

Calculul reacțiunilor

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{2}{3},$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 1 \cdot 2a - V_2 \cdot 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{2}{3},$$

$$\sum M_4^{\text{stg}} = 0; \quad -V_1 \cdot 1.5a + H_1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = \frac{1}{2},$$

$$\sum M_4^{\text{dr}} = 0; \quad -V_2 \cdot 1.5a + H_2 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad H_2 = \frac{1}{2}.$$

Verificare:

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_1 - H_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 0.5 - 0.5 = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad -V_1 + V_2 = 0; \quad -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

Concluzie – reacțiunile sunt corect calculate.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{13} = 0,$$

$$M_{31} = H_1 \cdot 2a, \quad \Rightarrow \quad M_{13} = a$$

$$M_{43} = M_{45} = 0,$$

$$M_{54} = -V_1 \cdot 3a + H_1 \cdot 2a \quad \Rightarrow \quad M_{54} = -a,$$

$$M_{52} = 0.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.15.c.

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot a \cdot a + \frac{1.5a}{3EI} \cdot a \cdot a, \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{7a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{7ma^3}}, \quad \omega = 0.655 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 9.597 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.3. Structura 3

Pentru cadrul din figura 1.16 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Calculul flexibilității

În vederea trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală calcul se vor determina reacțiunile cadrului (sistemul static, modelul static) încărcat cu o forță egală cu unitatea (cele două stări sunt identice, în cazul structurilor static determinate).

Calculul reacțiunilor

Sistemul secundar 3-4-2, figura 1.16.c.

$$\sum X = 0; \quad -H_3 + 1 = 0 \Rightarrow H_3 = 1$$

$$\sum M_3 = 0; \quad -V_2 \cdot 3a = 0 \Rightarrow V_3 = 0,$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_3 \cdot 3a - H_3 \cdot 2a + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow V_2 = 0,$$

Verificare:

$$\sum Y = 0; \quad V_3 + V_2 = 0; \quad 0 + 0 = 0.$$

Concluzie – reacțiunile sunt corect calculate.

Sistemul principal 1-3- figura 1.16.c.

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + H_3 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 - V_3 = 0; \quad 0 + 0 = 0.$$

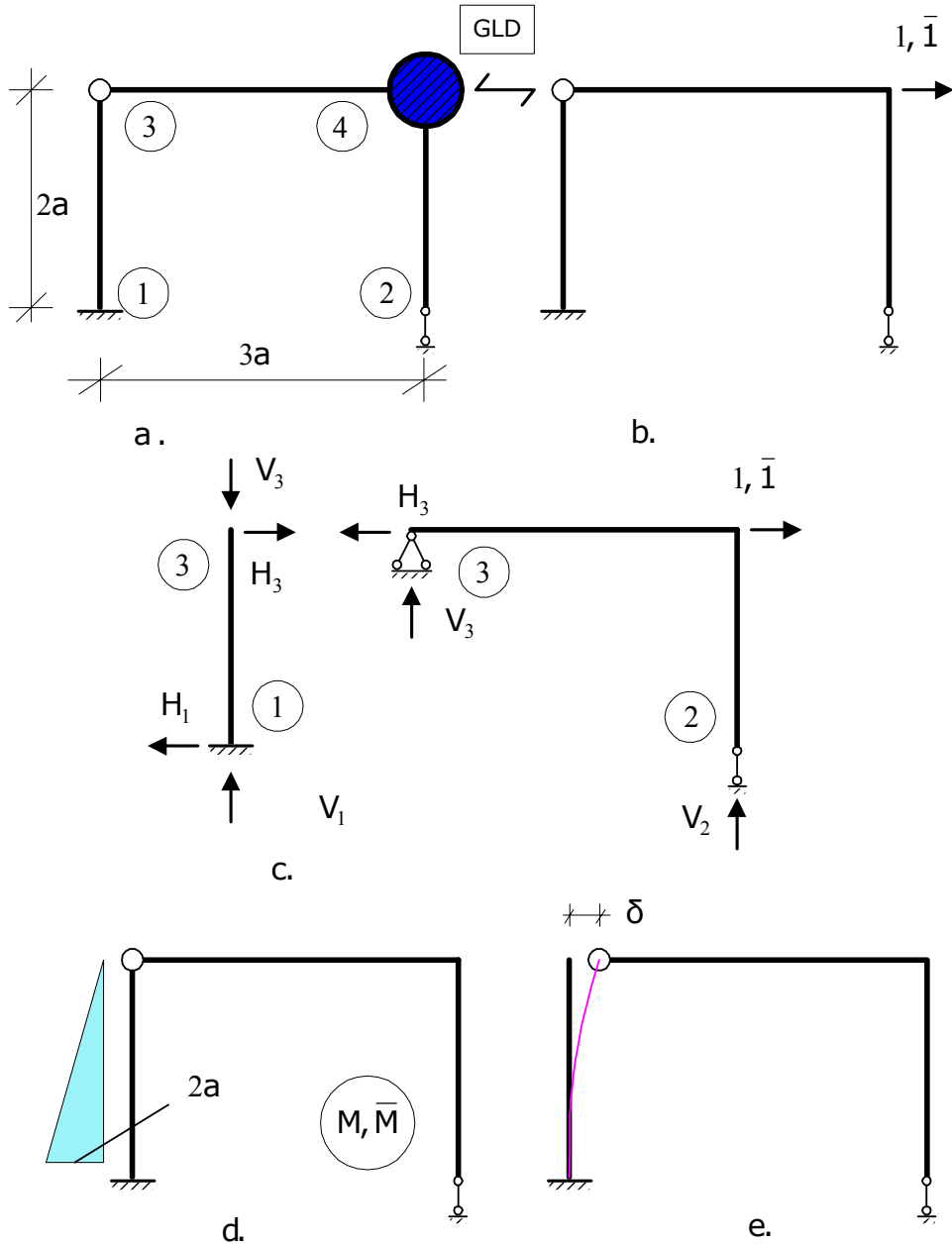


Fig.1.16. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. situații de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. sistemul secundar și sistemul principal utilizate pentru calculul reacțiilor; d. diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare celor două stări: reală, (M) și virtuală, (\bar{M})
 d. deformata sistemului datorită aplicării acțiunii egale cu unitatea

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{34} = M_{43} = M_{24} = M_{42} = M_{31} = 0,$$

$$M_{13} = -H_3 \cdot 2a, \Rightarrow M_{13} = -2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.16.d.

Pentru determinarea flexibilității se aplică relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a, \Rightarrow \delta = \frac{8a^3}{3EI}$$

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{8ma^3}}, \quad \omega = 0.612 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 1.260 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.4. Structura 4

Pentru cadrul din figura 1.17 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

$$GNS = (l + r) - 3c$$

Din analiza structurii, constatăm existență unui singur corp, $c = 1$ și a două reazeme articulate - $r = 4$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (0 + 4) - 3 \cdot 1 = 1,$$

prin urmare structura are o singură nedeterminare statică. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

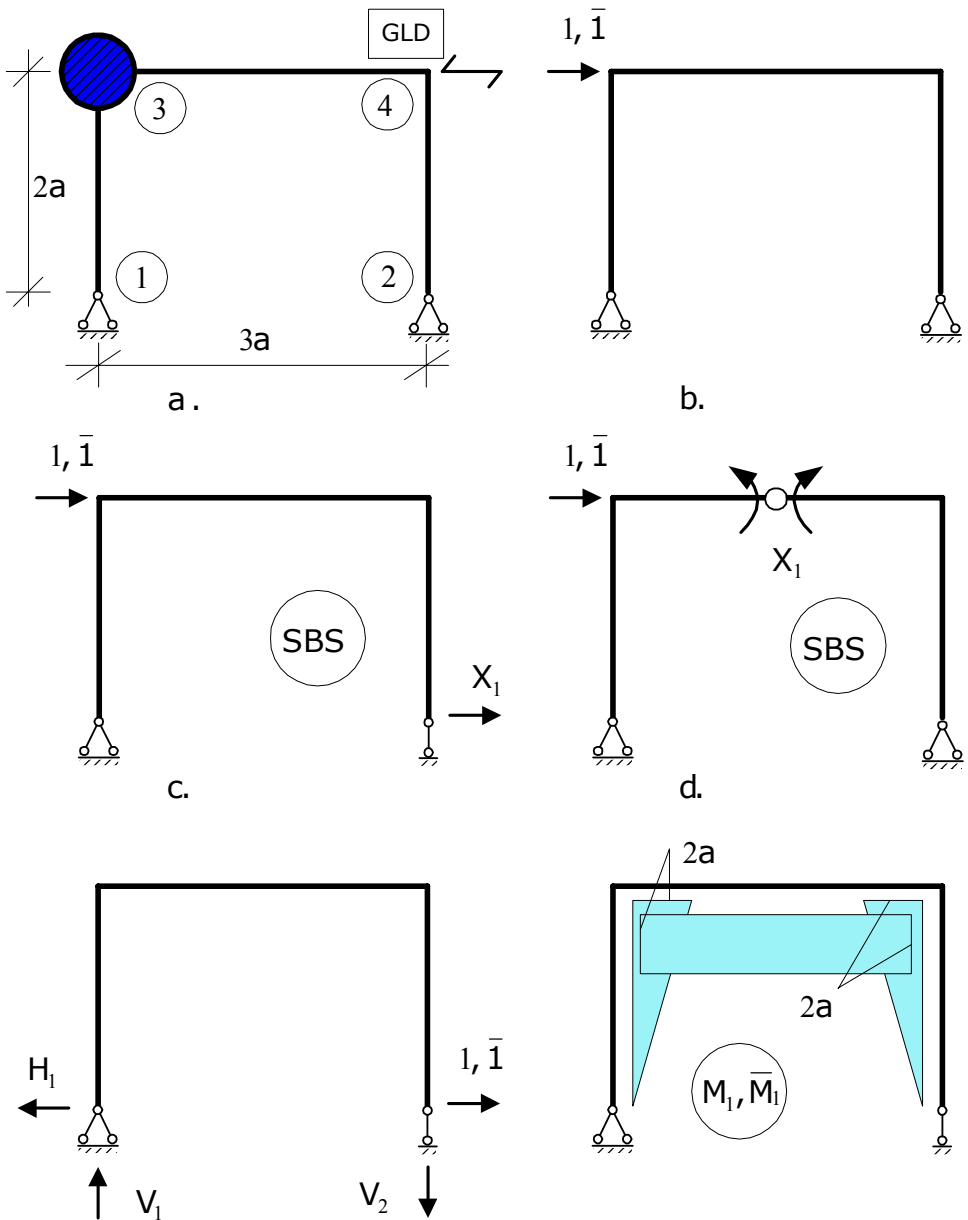


Fig.1.17. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. și d. sisteme de bază corespunzător metodei forțelor; e. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} ; f. diagramă de momente încovoietoare corespunzătoare acțiunii, de intensitate egală cu unitatea, aplicată pe direcția necunoscutei

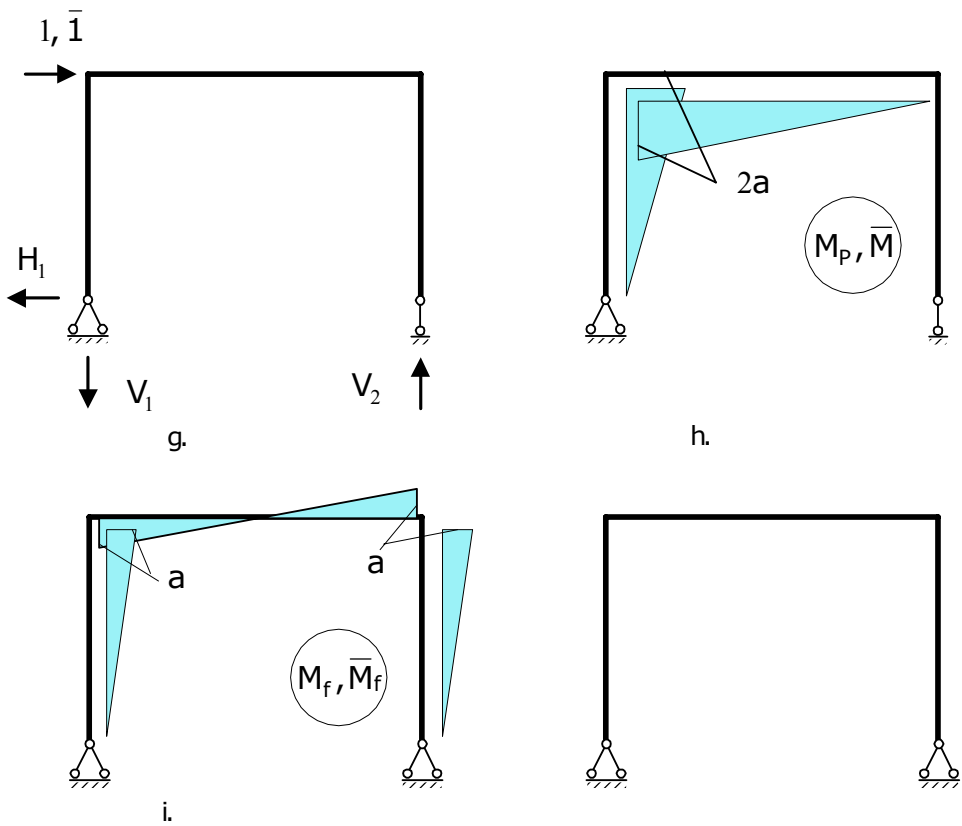


Fig.1.11. Sistem dinamic cu 1 GLD - continuare: g. situație de încărcare pentru calculul termenului liber Δ_{IP} h. diagramă de momente produsă de acțiunea exterioară aplicată pe sistemul de bază; i. diagramă de momente finale; j. deformata sistemului

Pentru ridicarea nedeterminării statice, vom utiliza metoda forțelor.

În figura 1.17 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

Calculul flexibilității

Pentru trasării diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 1.17.b. este prezentă structura încărcată cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului flexibilității, iar în figura 1.17.e, sistemul de bază corespunzător metodei forțelor.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.17.e.

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = 1$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0,$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 + V_2 = 0; \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{24} = M_{31} = 0,$$

$$M_{31} = H_1 \cdot 2a, \quad \Rightarrow \quad M_{31} = 2a,$$

$$M_{42} = 1 \cdot 2a, \quad \Rightarrow \quad M_{42} = 2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.17.f.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = 2 \cdot \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{3a \cdot 2a}{EI} \cdot 2a \quad \Rightarrow \quad \delta_{11} = \frac{52a^3}{3EI}.$$

Calculul termenului liber Δ_{1P}

În figura 1.17.g este prezentat sistemul de bază acționat, în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate dinamică, cu o forță de intensitate egală cu unitatea.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.17.g.

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = 1$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{2}{3},$$

$$\sum Y = 0; \quad -V_1 + V_2 = 0; \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{2}{3}.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{24} = M_{31} = 0,$$

$$M_{31} = H_1 \cdot 2a, \Rightarrow M_{31} = 2a,$$

$$M_{42} = -V_1 \cdot 3a + H_1 \cdot 2a, \Rightarrow M_{42} = 0.$$

Diagrama de momente încovoietoare este trasată în fig. 1.17.h.

Pentru determinarea termenului liber se aplică relația:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{2a \cdot 3a}{EI} \cdot 2a \Rightarrow \Delta_{1P} = \frac{26a^3}{3EI}.$$

Rezolvarea ecuației de echilibru

Prin rezolvarea ecuației de echilibru rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{26a^3}{3EI} \cdot \frac{3EI}{52a^3} \Rightarrow X_1 = -0.5.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^l \cdot X_1 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{13}^f = 0,$$

$$M_{31}^f = M_{34}^f = 2a \cdot X_1 + 2a \Rightarrow M_{31}^f = M_{34}^f = a$$

$$M_{43}^f = M_{42}^f = 2a \cdot X_1 + 0 \Rightarrow M_{43}^f = M_{42}^f = -a.$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.11.h.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.11.f și h, se obține:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0,$$

deoarece se integrează o diagramă simetrică cu alta antisimetrică, în concluzie diagrama a fost corect trasată.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{3} \cdot a \cdot a + 2 \cdot \frac{1.5a}{3EI} a \cdot a \Rightarrow \delta = \frac{7a^3}{3EI}.$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.17.h. Prin urmare, se integrează diagramele:

\textcircled{M}_f și \textcircled{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{3EI} \cdot a \cdot 2a + \frac{3a}{6EI} (2 \cdot 2a \cdot a + 2 \cdot 0 \cdot a - 2a \cdot a + 0 \cdot a) \Rightarrow \delta = \frac{7a^3}{3EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{7 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 0.655 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 9.597 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.5. Structura 5

Pentru cadrul din figura 1.18 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

$$GNS = (l + r) - 3c$$

Din analiza structurii, constatăm existența unui singur corp, $c = 1$ și a două reazeme unul încastrat și altul simplu rezemat - $r = 4$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (0 + 4) - 3 \cdot 1 = 1,$$

prin urmare structura are o singură nedeterminare statică. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, vom utiliza metoda forțelor.

În figura 1.18 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

Calculul flexibilității

Pentru trasarea diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 1.18.b. este prezentă structura încărcată cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului flexibilității, iar în figura 1.18.e, sistemul de bază corespunzător metodei forțelor.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.18.f.

$$\sum X = 0; \quad -H_1 = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0; \quad M_1 - 1 \cdot 3a = 0 \Rightarrow M_1 = 3a,$$

$$\sum Y = 0; \quad -V_1 + 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 1.$$

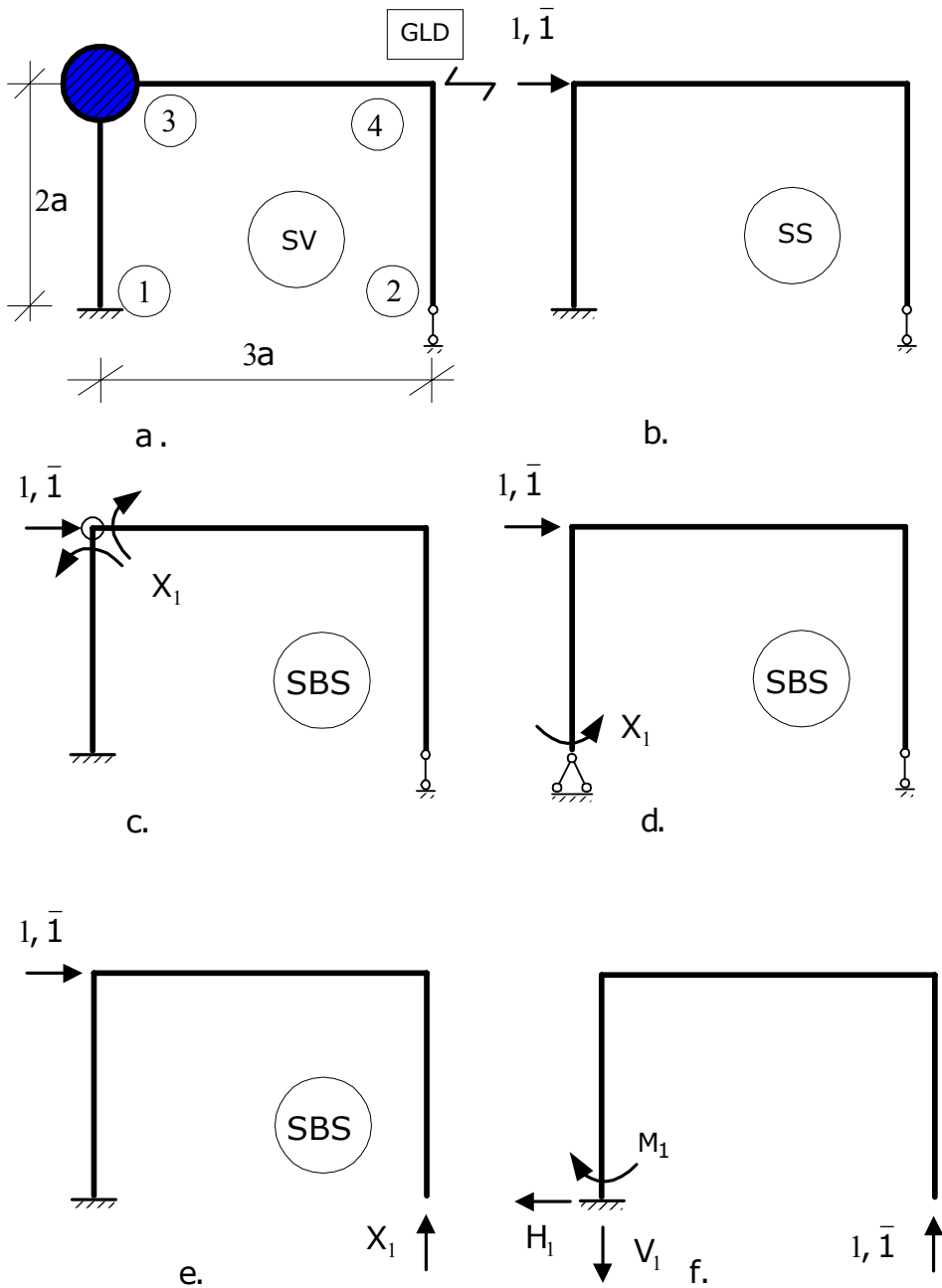


Fig.1.18. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c., d. și e. sisteme de bază corespunzător metodei forțelor; f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} ;

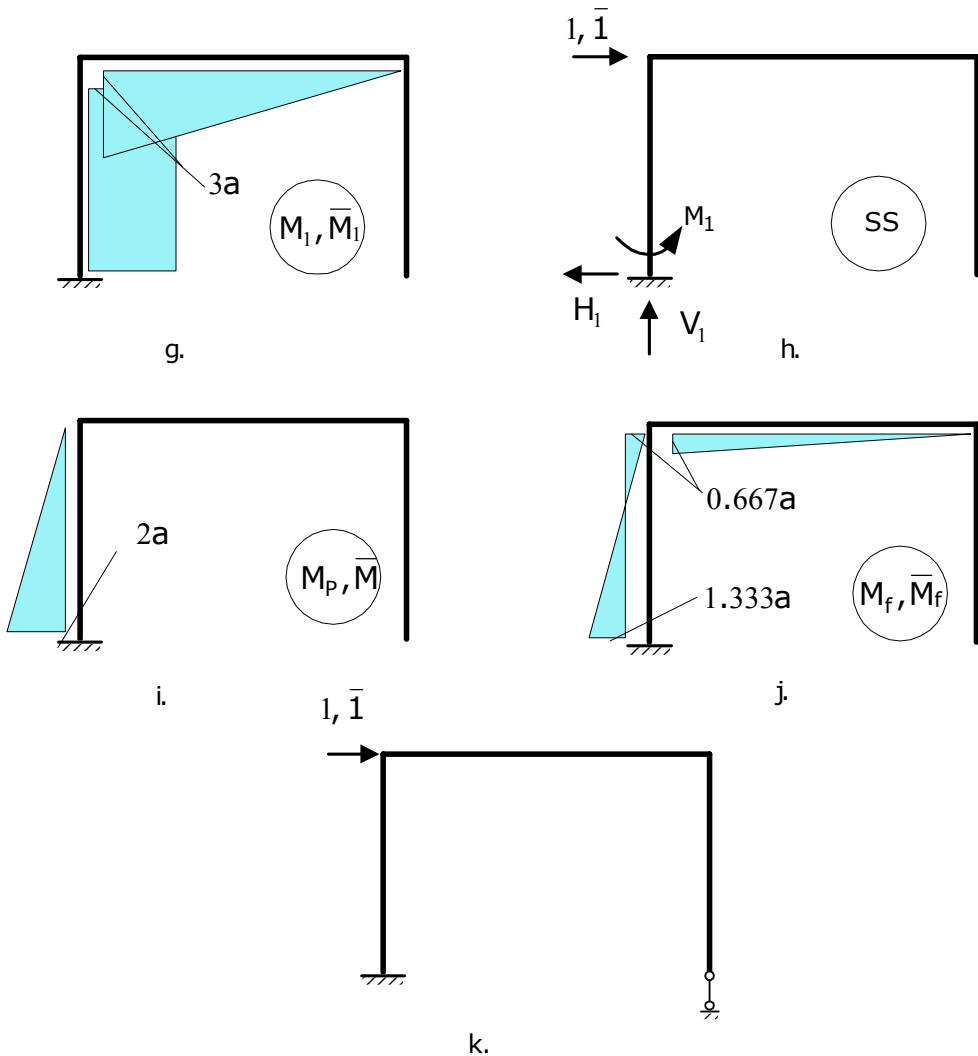


Fig.1.18. Sistem dinamic cu 1 GLD - continuare: g. diagramă unitară de momente corespunzătoare acțiunii, de intensitate egală cu unitatea, aplicată pe direcția necunoscutei; h. situație de încărcare pentru calculul termenului liber Δ_{1P} i. diagramă de momente produsă de acțiunea exterioară aplicată pe sistemul de bază; j. diagramă de momente finale; k. deformata sistemului

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{24} = M_{42} = M_{43} = 0,$$

$$M_{34} = M_{31} = 1 \cdot 3a \Rightarrow M_{34} = M_{31} = 3a,$$

$$M_{13} = M_1 \Rightarrow M_{42} = 3a.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.18.g.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = \frac{2a \cdot 3a \cdot 3a}{EI} + \frac{3a}{3EI} \cdot 3a \cdot 3a \Rightarrow \delta_{11} = \frac{27a^3}{3EI}.$$

Calculul termenului liber Δ_{1P}

În figura 1.18.h este prezentat sistemul de bază acționat, în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate dinamică, cu o forță de intensitate egală cu unitatea.

Calculul reacțiilor

Sistemul static determinat din figura 1.18.h.

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_1 = 2a,$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{24} = M_{42} = M_{43} = M_{31} = 0,$$

$$M_{13} = -1 \cdot 2a, \Rightarrow M_{13} = -2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare este trasată în fig. 1.18.i.

Pentru determinarea termenului liber se aplică relația:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = -\frac{2a \cdot 2a}{2EI} \cdot 3a \Rightarrow \Delta_{1P} = -\frac{6a^3}{EI}.$$

Rezolvarea ecuației de echilibru

Prin rezolvarea ecuației de echilibru rezultă:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{6a^3}{EI} \cdot \frac{3EI}{27a^3} \Rightarrow X_1 = \frac{2}{9}.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^l \cdot X_1 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{13}^f = 0,$$

$$M_{31}^f = M_{34}^f = 3a \cdot X_1 - 2a \Rightarrow M_{31}^f = M_{34}^f = \frac{4a}{3}$$

$$M_{31}^f = M_{34}^f = 3a \cdot X_1 \Rightarrow M_{31}^f = M_{34}^f = \frac{2a}{3}.$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.18.j.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.18.g și j, se obține:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx &= \frac{2a}{6EI} \left(-2 \cdot 3a \cdot \frac{4a}{3} + 2 \cdot 3a \cdot \frac{2a}{3} - \frac{4a}{3} \cdot 3a + 3a \cdot \frac{2a}{3} \right) + \\ &+ \frac{3a}{3} \cdot 3a \cdot \frac{2a}{3} = -\frac{4a^3}{EI} + \frac{4a^3}{EI} = 0 \end{aligned}$$

rezultă că diagrama finală a fost corect trasată.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, rezultă:

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx, \\ \delta &= \frac{2a}{6EI} \left(2 \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{4a}{3} + 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{3} - 2a \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{4a}{3} \right) + \frac{3a}{3EI} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \\ &\Rightarrow \delta = \frac{4a^3}{3EI}. \end{aligned}$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de

bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.17.h. Prin urmare, se integrează diagramele:

\textcircled{M}_f și \textcircled{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{6EI} \cdot \left(a \cdot 2a \frac{4a}{5} - \frac{2a}{3EI} \cdot 2a + 2 \cdot 0 \cdot \frac{2a}{3} + \frac{4a}{3} \cdot 0 \right) \Rightarrow \delta = \frac{4a^3}{3EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{4 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 0.866 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 7.255 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.6. Structura 6

Pentru cadrul din figura 1.19 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

$$GNS = (l + r) - 3c$$

Din analiza structurii, constatăm existență unui singur corp, $c = 1$ și a două rezeme unul încastrat și altul simplu rezemat - $r = 4$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (0 + 4) - 3 \cdot 1 = 1,$$

prin urmare structura are o singură nedeterminare statică. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, vom utiliza metoda forțelor.

În figura 1.19 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

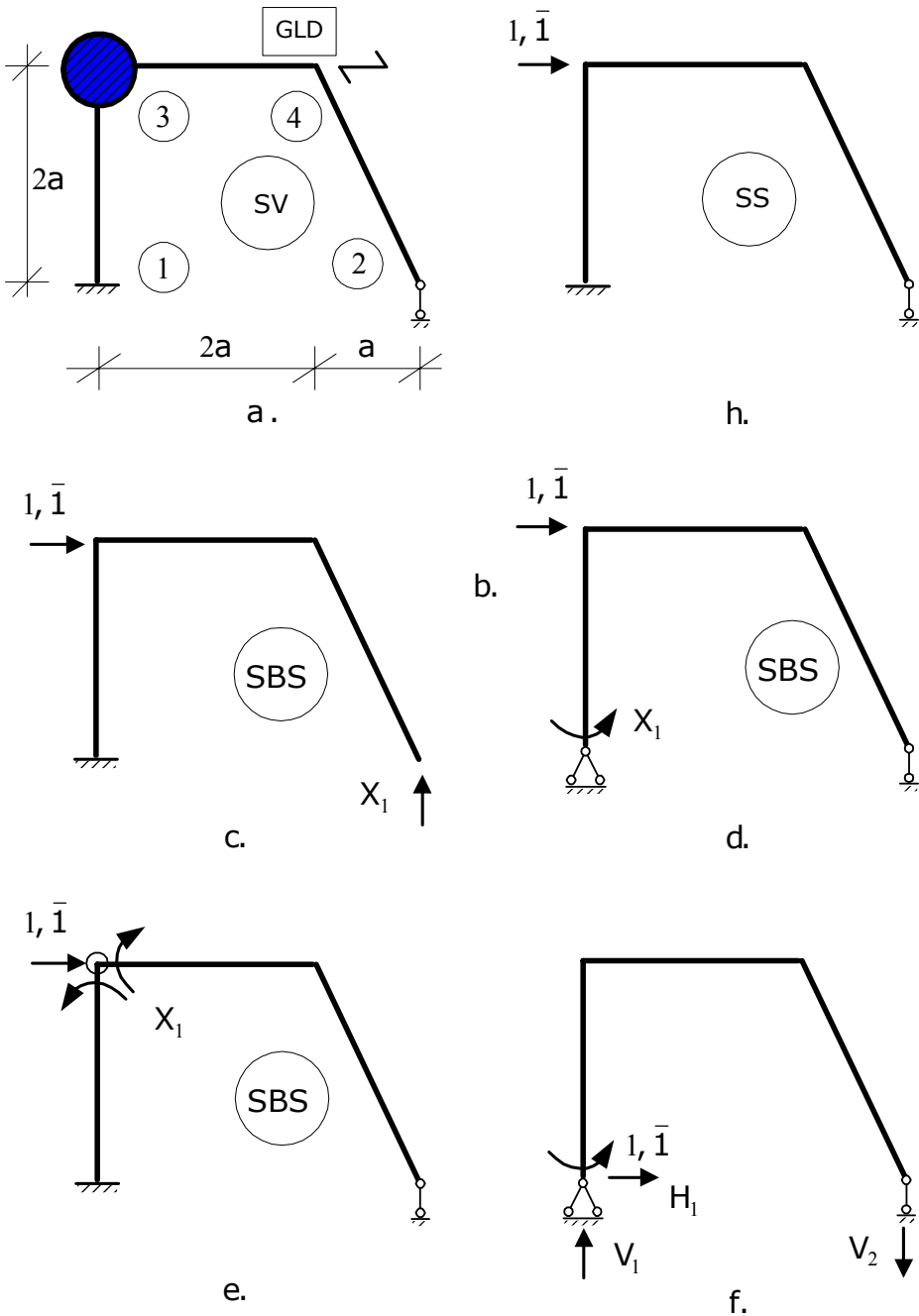


Fig.1.19. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c., d. și e. sisteme de bază corespunzător metodei forțelor; f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} ;

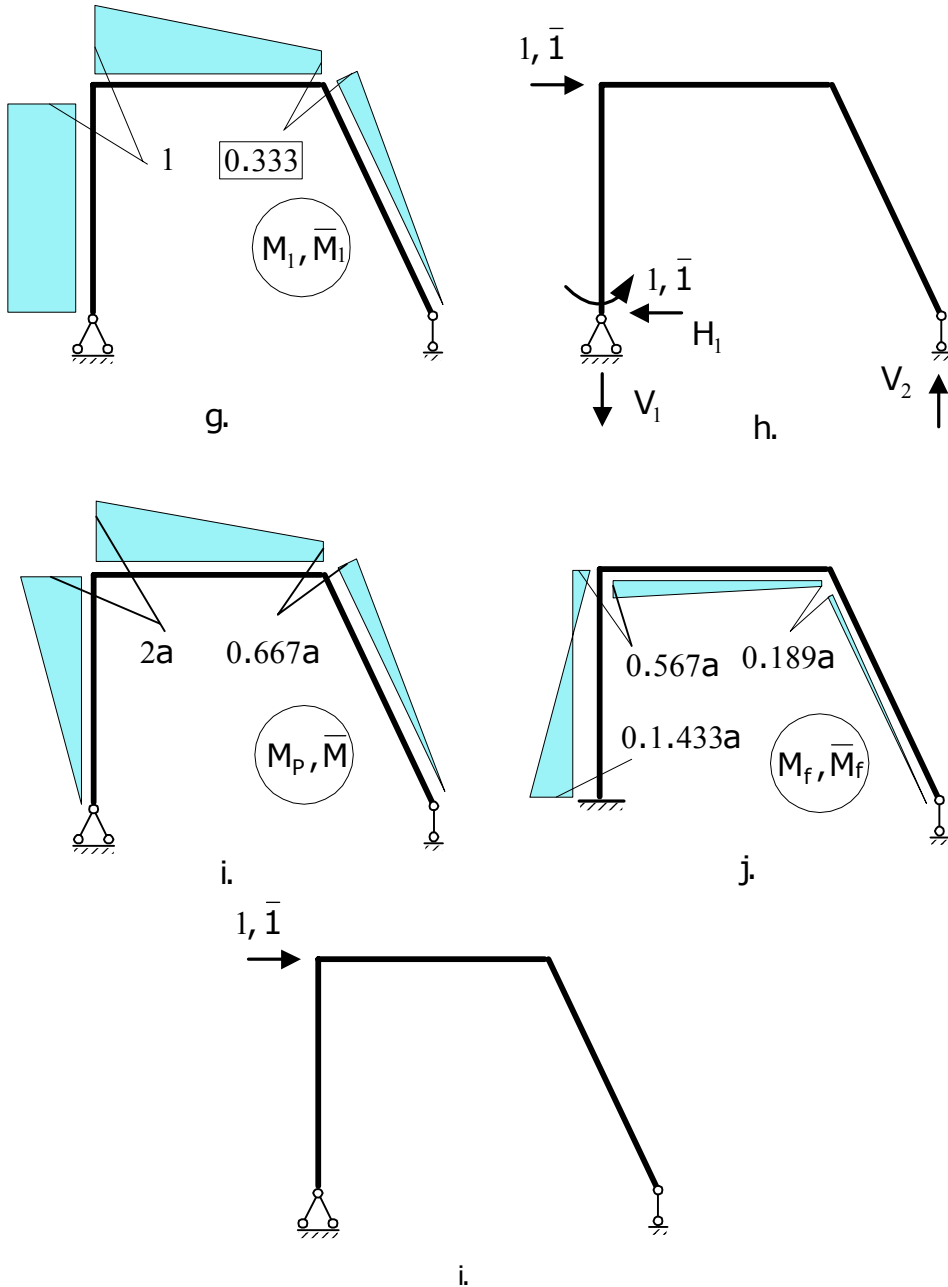


Fig.1.19. Sistem dinamic cu 1 GLD - continuare: g. diagramă unitară de momente corespunzătoare acțiunii, de intensitate egală cu unitatea, aplicată pe direcția necunoscutei; h. situație de încărcare pentru calculul termenului liber Δ_{1p} i. diagramă de momente produsă de acțiunea exterioară aplicată pe sistemul de bază; j. diagramă de momente finale; k. deformata sistemului

Calculul flexibilității

Pentru trasarea diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 1.19.b. este prezentă structura încărcată cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului flexibilității, iar în figura 1.18.e, sistemul de bază corespunzător metodei forțelor.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.19.f.

$$\sum X = 0; \quad H_1 = 0 \Rightarrow H_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -1 + V_2 \cdot 3a = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3a},$$

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 3a - 1 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3a},$$

Verificare:

$$\sum Y = 0; \quad V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,$$

rezultă că reacțiunile sunt corect calculate.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{13} = -1 \quad M_{24} = 0,$$

$$M_{34} = M_{31} = -1,$$

$$M_{42} = M_{43} = -V_2 \cdot 3a \Rightarrow M_{42} = -\frac{1}{3}.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.19.g.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = \frac{2a \cdot 1 \cdot 1}{EI} + \frac{3a}{6EI} (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1)$$

$$+ \frac{\sqrt{(2a)^2 + a^2}}{3EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \delta_{11} = \frac{3.527a}{EI}$$

Calculul termenului liber Δ_{1P}

În figura 1.19.h este prezentat sistemul de bază acționat, în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate dinamică, cu o forță de intensitate egală cu unitatea.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.19.h.

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_2 \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{2}{3},$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot 3a + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{2}{3},$$

verificare:

$$\sum Y = 0; \quad -V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0,$$

rezultă că reacțiunile sunt corect calculate.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{13} = 0 \quad M_{24} = 0,$$

$$M_{34} = M_{31} = H_1 \cdot 2a \Rightarrow M_{34} = M_{31} = 2a,$$

$$M_{42} = V_2 \cdot a \Rightarrow M_{42} = 2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare este trasată în fig. 1.18.i.

Pentru determinarea termenului liber se aplică relația:

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = -\frac{2a \cdot 2a}{2EI} \cdot 1 - \frac{3a}{6EI} (2 \cdot 1 \cdot 2a + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3} + \\ &1 \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2a) - \frac{\sqrt{(2a)^2 + a^2}}{3EI} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta_{1P} = -\frac{5.055a^2}{EI}. \end{aligned}$$

Rezolvarea ecuației de echilibru

Prin rezolvarea ecuației de echilibru se obține soluția:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5.055a^2}{EI} \cdot \frac{3EI}{3.527a^2} \Rightarrow X_1 = 1.433a.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^l \cdot X_1 + M_{ij}^p,$$

se obțin eforturile:

$$M_{13}^f = -1 \cdot X_1 \Rightarrow M_{13}^f = 1.433a$$

$$M_{31}^f = M_{34}^f = -1 \cdot X_1 + 2a \Rightarrow M_{31}^f = M_{34}^f = 0.567a$$

$$M_{43}^f = M_{42}^f = -\frac{1}{3} \cdot X_1 + \frac{2}{3}a \Rightarrow M_{43}^f = M_{42}^f = 0.189a,$$

$$M_{13}^f = M_{24}^f = 0.$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.19.j.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.18.g și j, se obține:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx &= \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 1 \cdot 1.433a - 2 \cdot 1 \cdot 0.567a - 1 \cdot 0.567a + \\ &1 \cdot 1.433a) + \frac{3a}{6EI} (-2 \cdot 1 \cdot 0.567a - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.189a - 1 \cdot 0.189a - \frac{1}{3} \cdot 0.567a) - \\ &- \frac{\sqrt{(2a)^2 + a^2}}{3EI} \frac{1}{3} \cdot 0.189a = \frac{1.433a^2}{EI} - \frac{1.433a^2}{EI} = 0 \end{aligned}$$

rezultă că diagrama finală a fost corect trasată.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot (-1.433a)^2 + 2 \cdot (0.567a)^2 - 2 \cdot (-1.433a) \cdot 0.567a) +$$

$$+ \frac{3a}{6EI} (2 \cdot (0.567a)^2 + 2 \cdot (0.189a)^2 + 2 \cdot 0.567a \cdot 0.189a) +$$

$$- \frac{\sqrt{(2a)^2 + a^2}}{3EI} \cdot (0.189a)^2 \Rightarrow \delta = \frac{1.533}{EI} a^3.$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.17.h. Prin urmare, se integrează diagramele:

\textcircled{M}_f și \textcircled{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 0 \cdot 1.433a + 2 \cdot 2a \cdot 0.567a - 2a \cdot 1.433a + 0 \cdot 0.567a) +$$

$$+ \frac{3a}{6EI} (2 \cdot 2a \cdot 0.567a + 2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot 0.189a + 2a \cdot 0.189a + \frac{2}{3} a \cdot 0.567a) +$$

$$- \frac{\sqrt{(2a)^2 + a^2}}{3EI} \cdot \frac{2}{3} a \cdot 0.189a \Rightarrow \delta = \frac{1.533}{EI} a^3,$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{EI}{1.533 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 0.808 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 7.779 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.7. Structura 7

Pentru cadrul din figura 1.20 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

$$GNS = (l + r) - 3c$$

Din analiza structurii, constatăm existența a două corpuri, $c = 2$, a unei articulații interioare, $l = 2$ și două reazeme încastrate - $r = 6$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (2 + 6) - 3 \cdot 2 = 2,$$

prin urmare, structura are două nedeterminare statice. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, vom utiliza metoda forțelor.

În figura 1.20 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

Calculul flexibilității

Pentru trasarea diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Sistemul de ecuații de echilibru corespunzător metodei forțelor este:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned}$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 1.20.b. este prezentat sistemul de bază încărcat cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului coeficientului δ_{11} , iar în figura 1.20.d, sistemul de bază corespunzător metodei forțelor.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.20.f. Subsistemul 1-3-4:

$$\sum X = 0; \quad H_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = 0$$

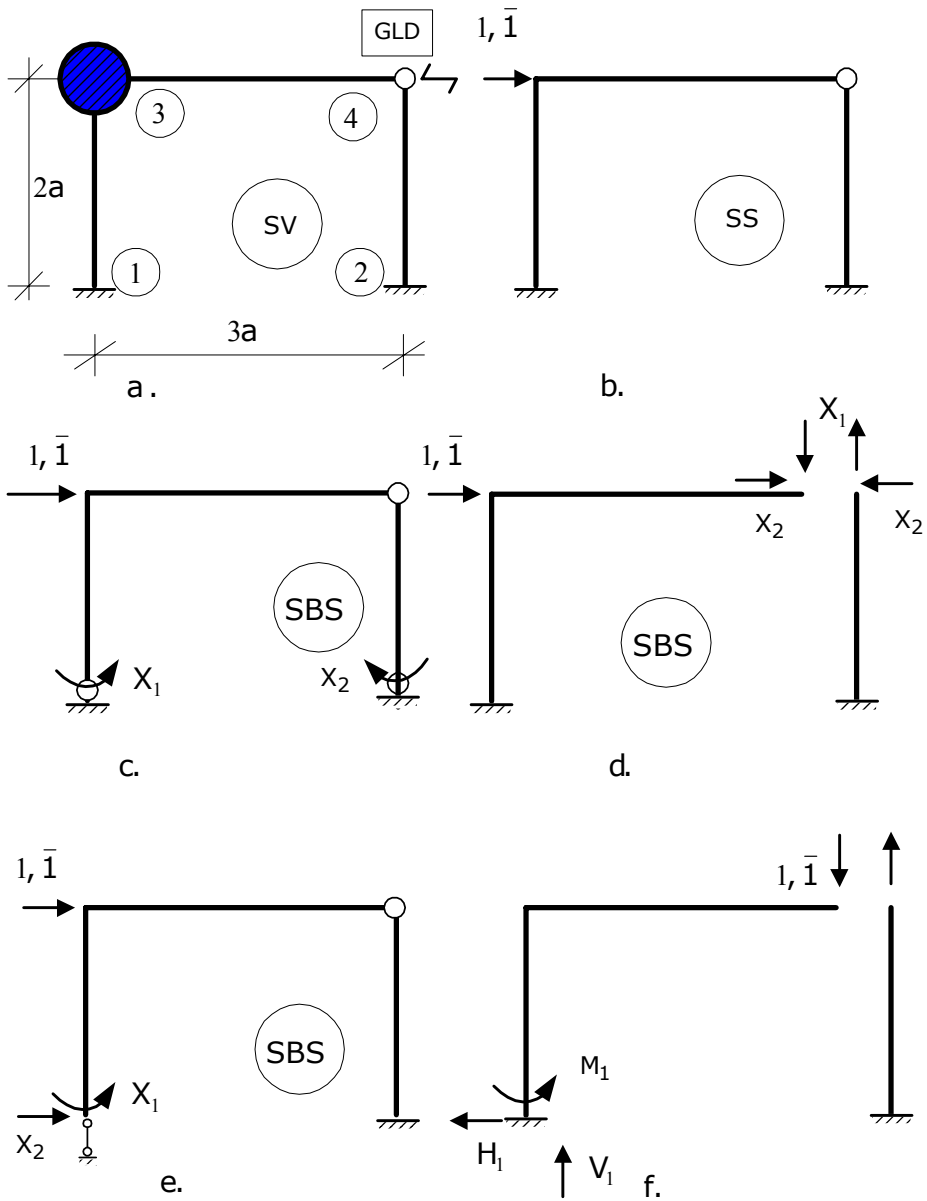


Fig.1.20. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c., d. și e. sisteme de bază corespunzător metodei forțelor; f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} ;

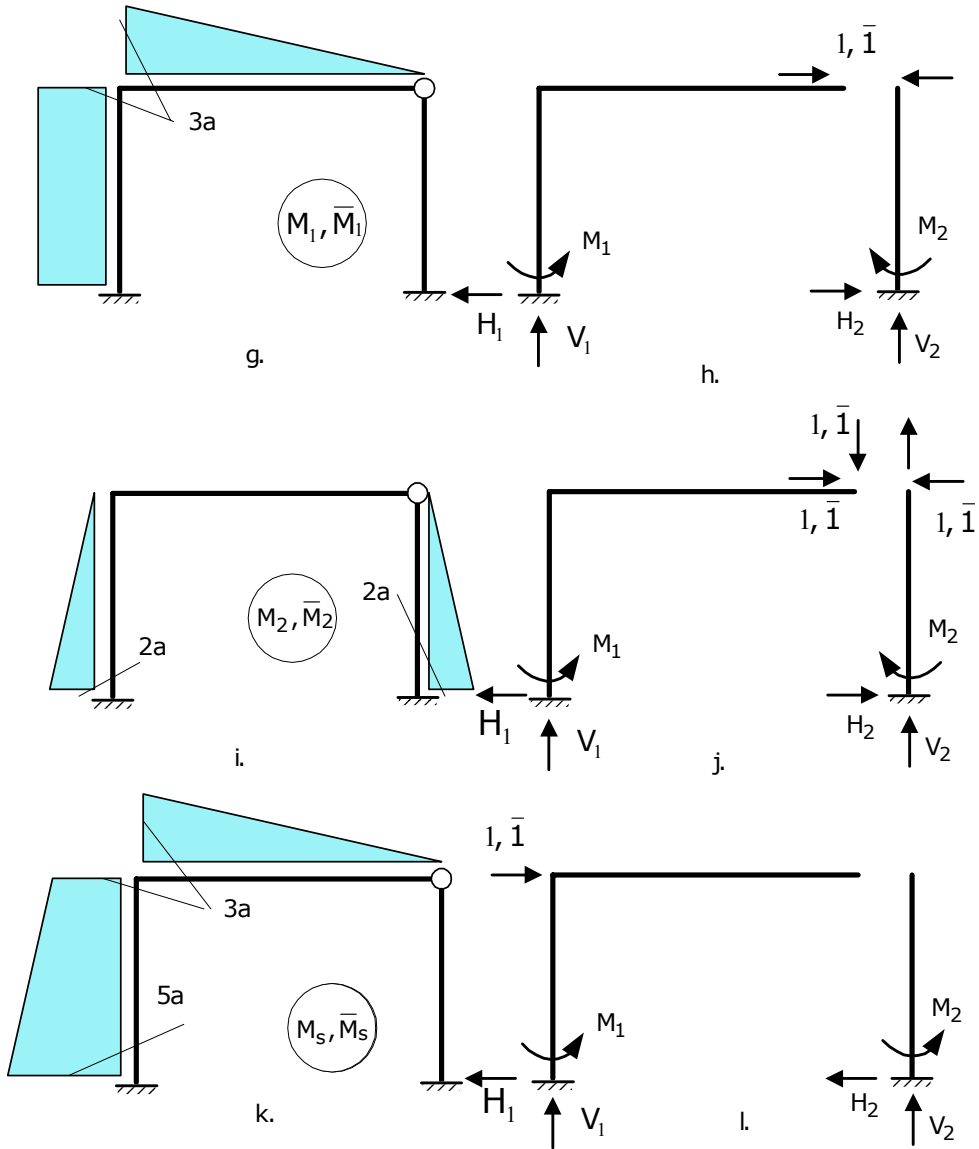


Fig.1.20.1. Sistem dinamic cu 1 GLD - continuare: g. diagramă unitară de momente corespunzătoare acțiunii, de intensitate egală cu unitatea, aplicată pe direcția necunoscutului X_1 ; h. situație de încărcare pentru calculul coeficientului D_{22} i. diagramă unitară de momente corespunzătoare acțiunii, de intensitate egală cu unitatea, aplicată pe direcția necunoscutului X_2 ; j. situație de încărcare pentru erificarea coeficienților; k. diagramă de momente unitară sumată; l. situație de încărcare pentru calculul termenilor liberi

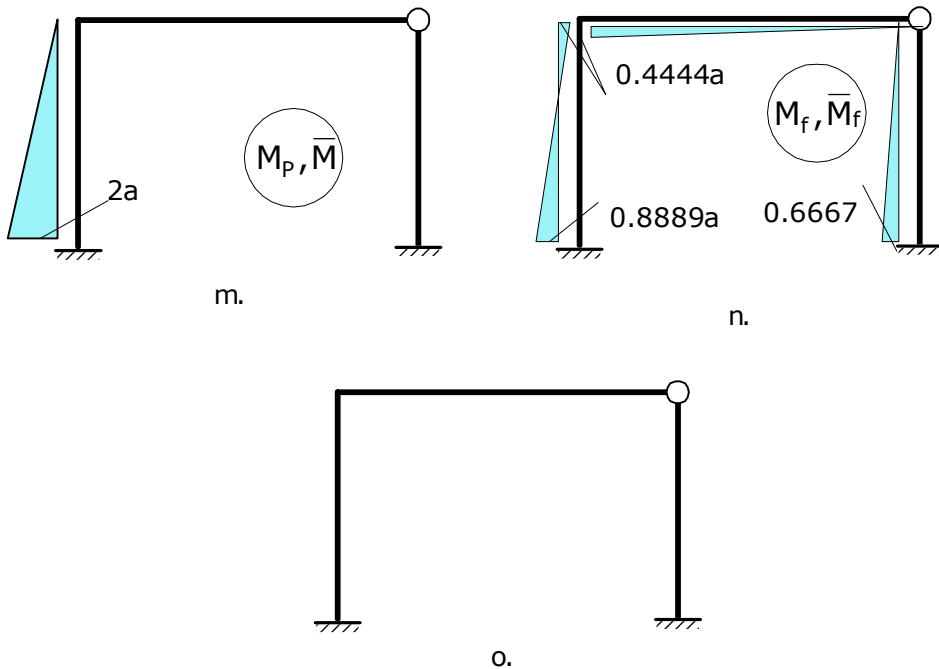


Fig.20.2. Sistem dinamic cu 1 GLD: m. diagramă de momente produsă de acțiunea exterioară aplicată pe sistemul de bază; j. diagramă de momente finale; k. deformata sistemului

$$\sum Y = 0; \quad V_1 - 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 1$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 3a = 0 \Rightarrow M_1 = -3a.$$

Subsistemul 4-2:

$$\sum X = 0; \quad H_2 = 0 \Rightarrow H_2 = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad 1 - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 1$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = 0.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{43} = M_{42} = M_{24} = 0,$$

$$M_{34} = M_{31} = -1 \cdot 3a \Rightarrow M_{34} = M_{31} = -3a$$

$$M_{13} = -M_1 = -3a \Rightarrow M_{13} = 3a.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.20.g.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = \frac{3a \cdot 2a}{EI} \cdot 3a + \frac{3a}{3EI} \cdot 3a \cdot 3a \Rightarrow \delta_{11} = \frac{3.527a}{EI}.$$

Calculul coeficientului δ_{22}

În figura 1.20.h. este prezentat sistemul de bază încărcat cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului coeficientului δ_{22} , iar în figura 1.20.i, sistemul de bază corespunzător metodei forțelor.

Calculul reacțiilor

Sistemul static determinat din figura 1.20.h. Subsistemul 1-3-4:

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_1 = 2a.$$

Subsistemul 4-2:

$$\sum X = 0; \quad H_2 - 1 = 0 \Rightarrow H_2 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad M_2 - 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_2 = 2a.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{43} = M_{42} = M_{34} = M_{31} = 0,$$

$$M_{24} = -M_2 \Rightarrow M_{24} = -2a$$

$$M_{13} = -M_1 \Rightarrow M_{13} = -2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.20.i.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2(x)M_2(x)}{EI} dx = 2 \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2EI} \cdot 3a \Rightarrow \delta_{22} = \frac{16a}{3EI}.$$

Calculul coeficientului δ_{12}

Pentru calculul coeficientului lateral (secundar) δ_{12} se integrează diagramele din figurile 1.21.g. și i. Rezultă:

$$\delta_{12} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_2(x)}{EI} dx = \frac{2a \cdot 2a}{2EI} \cdot 3a \Rightarrow \delta_{12} = \frac{6a^3}{EI}$$

Verificarea coeficienților

Se încarcă sistemul de bază cu forțe concentrate de intensități egale cu unitatea aplicate, simultan, pe direcția necunoscutelor (X_1 și X_2) și se determină o diagramă unitară (M_s), egală cu suma diagramelor unitare trasate pentru fiecare necunoscută (M_1, M_2). Integrând diagrama unitară M_s cu ea însăși, se obține δ_{ss} . Dacă valoarea δ_{ss} este egală cu suma tuturor coeficienților necunoscutelor sistemului de ecuații, rezultă că toți coeficienții au fost corect calculați.

În figura 1.21.j, sistemul de bază este acționat, pe direcțiile necunoscutelor de forțe cu intensități egale cu unitatea. Calculul reacțiunilor:

Subsistemul 1-3-4:

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 - 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 1$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 1.5a + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_1 = 3.5a.$$

Subsistemul 4-2:

$$\sum X = 0; \quad H_2 - 1 = 0 \Rightarrow H_2 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad -V_2 + 1 = 0 \Rightarrow V_2 = 1$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -M_2 + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_2 = 2a.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{43} = M_{42} = 0,$$

$$M_{34} = M_{31} = -1 \cdot 3a \Rightarrow M_{34} = M_{31} = -3a$$

$$M_{13} = -M_1 \Rightarrow M_{13} = -3.5a.$$

$$M_{24} = -M_2 \Rightarrow M_{24} = -2a$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări: reală și virtuală) este trasată în fig. 1.20.k.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\begin{aligned} \delta_{ss} = \int_0^l \frac{\bar{M}_s(x)M_s(x)}{EI} dx &= \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 5a \cdot 5a + 2 \cdot 3a \cdot 3a + 2 \cdot 3a \cdot 5a) + \\ &+ \frac{3a}{3EI} \cdot 3a \cdot 3a + \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a \Rightarrow \delta_{ss} = \frac{133a}{3EI}. \end{aligned}$$

Însumând coeficienții se obține:

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12} \Rightarrow \delta_{ss} = \frac{133a}{3EI},$$

rezultă că s-au calculat corect coeficienții.

Calculul termenului liber Δ_{1P}

În figura 1.20.l este prezentat sistemul de bază acționat, în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate dinamică, cu o forță de intensitate egală cu unitatea.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.20.l.

Subsistemul 1-3-4:

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_1 = 2a.$$

Subsistemul 4-2:

$$H_2 = 0, \quad V_2 = 0, \quad M_2 = 0,$$

sistemul nefiind încărcat.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{34} = M_{31} = M_{43} = M_{42} = M_{24} = 0,$$

$$M_{13} = -M_1 \Rightarrow M_{13} = -2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare este trasată în fig. 1.20.m. Pentru determinarea termenului liber se aplică relația:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = -\frac{2a \cdot 2a}{2EI} \cdot 1 - \frac{3a}{6EI} (2 \cdot 1 \cdot 2a + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2a}{3} + 1 \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2a) - \frac{\sqrt{(2a)^2 + a^2}}{3EI} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \Rightarrow \Delta_{1P} = -\frac{5.055a^2}{EI}.$$

Verificarea termenilor liberi

Integrând diagrama unitară M_s cu diagrama produsă prin încărcarea sistemului de bază cu acțiunile exterioare, M_p , se obține termenul Δ_{sP} . Dacă valoarea termenului Δ_{sP} este egală cu suma tuturor termenilor liberi din sistemului de ecuații, rezultă că toți coeficienții au fost corect calculați.

$$\Delta_{sP} = \int_0^l \frac{\bar{M}_s(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 5a \cdot 2a + 3a \cdot 2a) \Rightarrow \Delta_{sP} = \frac{26a^3}{3EI}.$$

Însumând termenii liberi se obține:

$$\Delta_{sP} = \Delta_{p1} + \Delta_{2P} \Rightarrow \Delta_{sP} = \frac{26a^3}{3EI},$$

rezultă că s-au calculat corect coeficienții.

Rezolvarea ecuației de echilibru

Prin rezolvarea ecuației de echilibru se găsește soluția:

$$X_1 = -0.1481 \Rightarrow X_2 = -\frac{1}{3}.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^1 \cdot X_1 + M_{ij}^2 \cdot X_2 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{13}^f = -3a \cdot X_1 - 2a \cdot X_2 - 2a \Rightarrow M_{13}^f = -0.8889 a$$

$$M_{31}^f = M_{34}^f = -3a \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \Rightarrow M_{31}^f = M_{34}^f = 0.4444 a$$

$$M_{24}^f = 0 \cdot X_1 - 2a \cdot X_2 + 0 \Rightarrow M_{24}^f = 0.6667a,$$

$$M_{43}^f = M_{42}^f = 0.$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.20.m.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.20.g și m, se obține:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx &= \frac{2a}{6EI} (2 \cdot (-3a) \cdot 0.4444a + 2 \cdot (-3a) \cdot (-0.8889a) + \\ &+ 3a \cdot 0.8889a + (-3a) \cdot 0.4444a) + \frac{3a}{3EI} \cdot (-3a) \cdot 0.4444a = \\ &= 2.6667 \frac{a^3}{EI} - 2.6664 \frac{a^3}{EI}, \\ \varepsilon_a &= 0.0003 \frac{a^3}{EI}, \\ \varepsilon_r \% &= \frac{\varepsilon_a}{2.6667 \frac{a^3}{EI}} \cdot 100 = 0.0112 < 0.1. \end{aligned}$$

rezultă că diagrama finală a fost corect trasată.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, rezultă:

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx, \\ \delta &= \frac{2a}{6EI} (2 \cdot (-0.8889a)^2 + 2 \cdot (0.4444a)^2 - 2 \cdot (-0.8889a) \cdot 0.4444a) + \\ &+ \frac{3a}{3EI} ((0.4444a)^2 + \frac{3a}{3EI} ((0.6667a)^2) \\ \Rightarrow \delta &= 0.8889 \frac{a}{EI}. \end{aligned}$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.20.h. Prin urmare, se integrează diagramele:

\textcircled{M}_f și \textcircled{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 0.8889a \cdot 2a - 2a \cdot 0.4444a)$$

$$\Rightarrow \delta = 0.8889 \frac{a}{EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{EI}{0.8889 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 1.061 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 5.922 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.8. Structura 8

Pentru cadrul din figura 1.21 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

$$GNS = (l + r) - 3c$$

Din analiza structurii, constatăm existență a două corpuri, $c = 2$, a unei articulații interioare, $l = 2$ și un reazem articulat și un reazem încastrate - $r = 5$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$GNS = (2 + 5) - 3 \cdot 2 = 1,$$

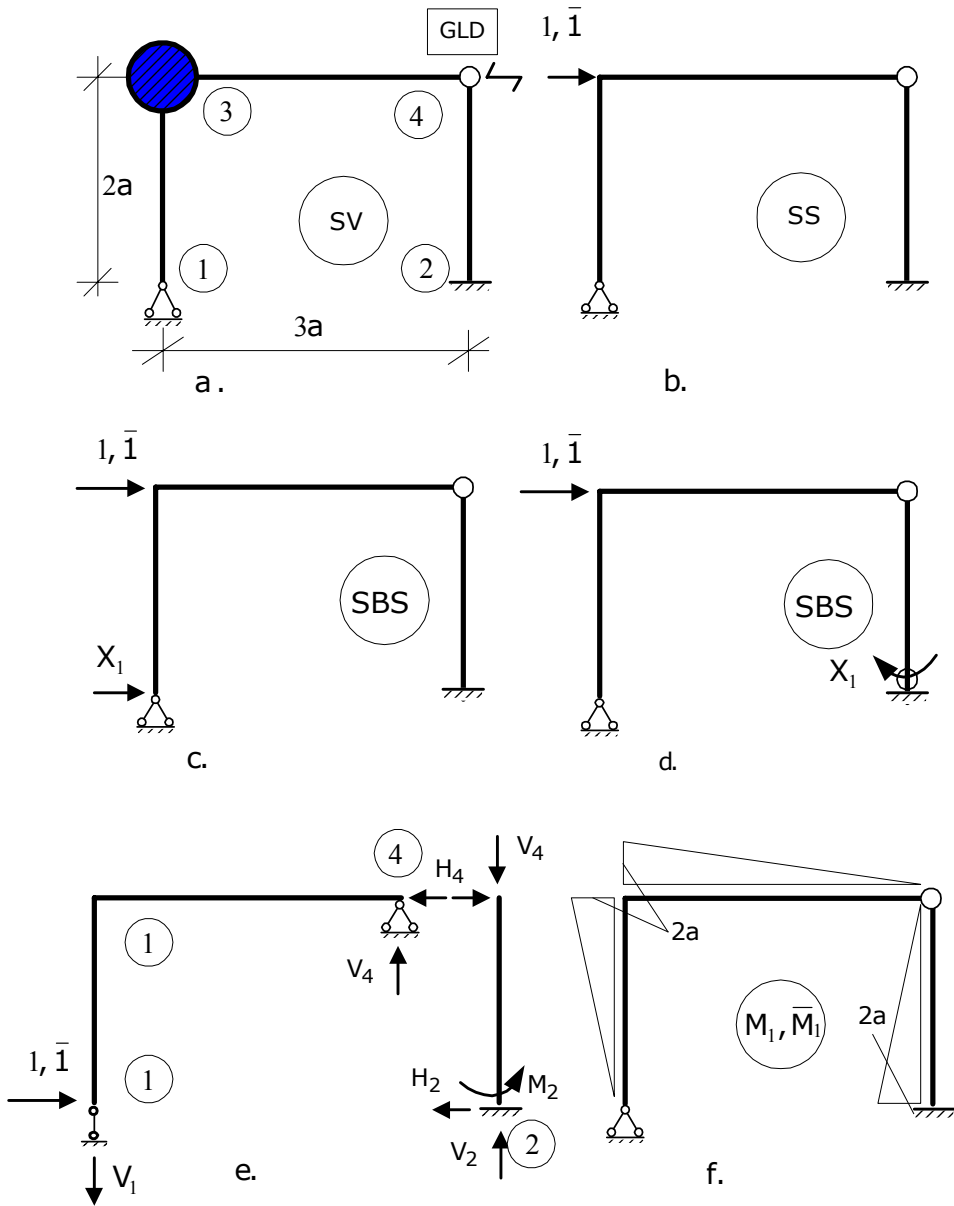


Fig.1.21. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c. și d. sisteme de bază corespunzătoare metodei forțelor; e. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} ; f. diagramă unitară de momente

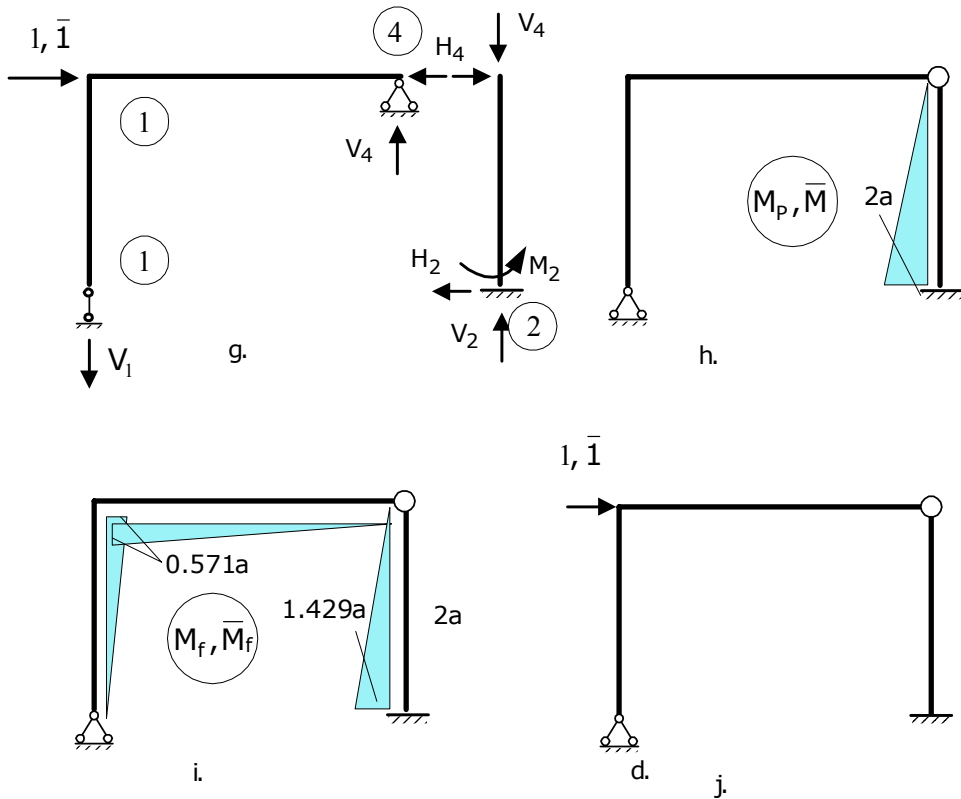


Fig.21.1. Sistem dinamic cu 1 GLD: g. situație de încărcare produsă de o forță exterioară de intensitate egală cu unitatea; h. diagramă de momente produsă de acțiunea exterioară aplicată pe sistemul de bază; i. diagramă de momente finale; j. deformata sistemului

prin urmare structura este o dată static nedeterminată. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, vom utiliza metoda forțelor.

În figura 1.21 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

Calculul flexibilității

Pentru trasarea diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Ecuția de echilibru corespunzătoare metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 .$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 1.21.b este prezentă structura încărcată cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului flexibilității, iar în figura 1.21.d, sistemul de bază corespunzător metodei forțelor.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.21.e. Subsistemul 1-3-4:

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_4 = 1$$

$$\sum M_4 = 0; \quad -V_1 \cdot 3a - 1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{2}{3}.$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_4 \cdot 3a - H_4 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_4 = \frac{2}{3}.$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 - V_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0,$$

în concluzie, reacțiunile au fost corect calculat.

Subsistemul 4-2:

$$\sum X = 0; \quad H_4 - H_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_2 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_2 - V_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -M_2 + H_4 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 2a.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{13} = M_{43} = M_{42} = 0,$$

$$M_{31} = M_{34} = -1 \cdot 2a \quad \Rightarrow \quad M_{31} = M_{34} = -2a$$

$$M_{24} = M_2 \quad \Rightarrow \quad M_{24} = 2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.20.f.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{3a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a + \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a \\ &\Rightarrow \delta_{11} = \frac{8a^3}{3EI} \end{aligned}$$

Calculul termenului liber Δ_{1p}

În figura 1.21.g este prezentat sistemul de bază acționat, în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate dinamică, cu o forță de intensitate egală cu unitatea.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.21.g.

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_4 = 1$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_4 \cdot 3a - H_4 \cdot 2aM_1 + 1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_4 = 0.$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 + V_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0$$

Subsistemul 4-2:

$$\sum X = 0; \quad H_4 - H_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_2 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_2 - V_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0$$

$$\sum M_2 = 0; \quad -M_2 + H_4 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = 2a.$$

Calculul momentelor încovoietoare

Subsistemul 1-3-4:

$$M_{13} = M_{31} = M_{34} = M_{42} = 0,$$

$$M_{24} = M_2 \quad \Rightarrow \quad M_{24} = 2a.$$

Diagrama de momente încovoietoare este trasată în fig. 1.21.h.

Pentru determinarea termenului liber se aplică relația:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{3a}{3EI} 2a \cdot 2a$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{1P} = -\frac{8a^2}{3EI}$$

Rezolvarea ecuației de echilibru

Prin rezolvarea ecuației de echilibru se obține soluția:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{8a^3}{3EI}}{\frac{28a^3}{3EI}} \quad \Rightarrow \quad X_1 = 0.286.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^1 \cdot X_1 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{13}^f = 0 \Rightarrow M_{13}^f = 1.433a$$

$$M_{31}^f = M_{34}^f = -2a \cdot X_1 + 0 \Rightarrow M_{31}^f = M_{34}^f = 0.5714a$$

$$M_{43}^f = M_{42}^f = 0,$$

$$M_{42}^f = 2a \cdot X_1 + 2a \Rightarrow M_{42}^f = 1.4286a$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.19.i.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.18.f și i, se obține:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = -\frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 0.5714a - \frac{3a}{3EI} \cdot 2a \cdot 0.5714a$$

$$+ \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 1.4286a = -\frac{1.9047a^3}{EI} + \frac{1.9048a^3}{EI},$$

$$\varepsilon_a = 0.0001 \frac{a^3}{EI},$$

$$\varepsilon_r \% = \frac{\varepsilon_a}{1.9048 \frac{a^3}{EI}} \cdot 100 = 0.0052 < 0.1.$$

rezultă că diagrama finală a fost corect trasată.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, se obține:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{3EI} (0.5741a)^2 + \frac{3a}{3EI} (0.5741a)^2 + \frac{2a}{3EI} (1.4286a)^2$$

$$\Rightarrow \delta = 1.9048 \frac{a^3}{EI}.$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.17.h. Prin urmare, se integrează diagramele:

\bar{M}_f și \bar{M} , rezultă:

$$\delta = \frac{2a}{3EI} 2a \cdot 1.4286a \Rightarrow \delta = 1.9048 \frac{a^3}{EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{EI}{1.9048 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 0.7246 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 8.6717 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.9. Structura 9

Pentru cadrul din figura 1.22 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Structura este static nedeterminată după cum rezultă din determinarea gradului de nedeterminare statică. Se aplică relația de calcul (1.5):

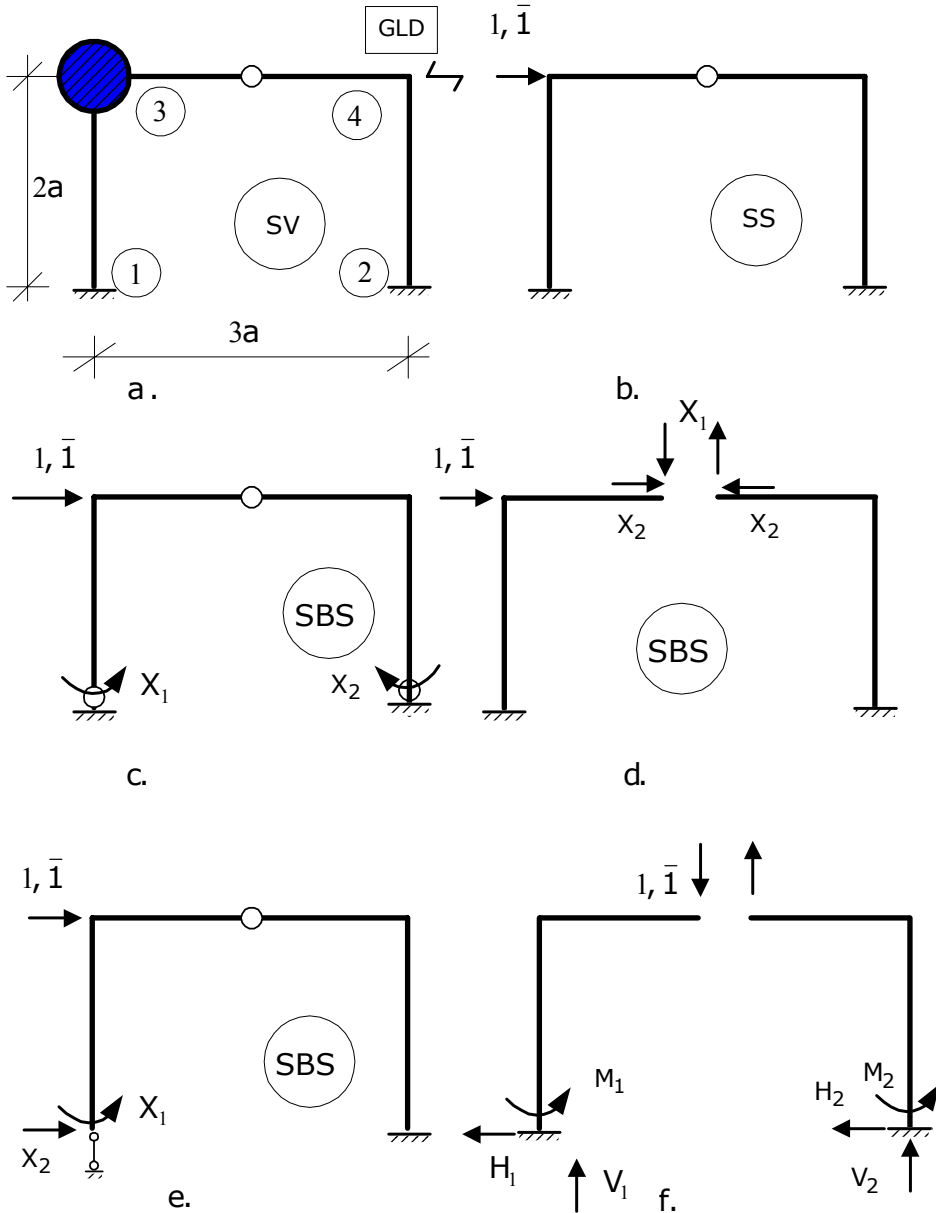


Fig.1.22. Sistem dinamic cu 1 GLD: a. sistem dinamic; b. sistem static și situație de încărcare pentru calculul flexibilității, δ ; c., d. și e. sisteme de bază corespunzător metodei forțelor; f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} ;

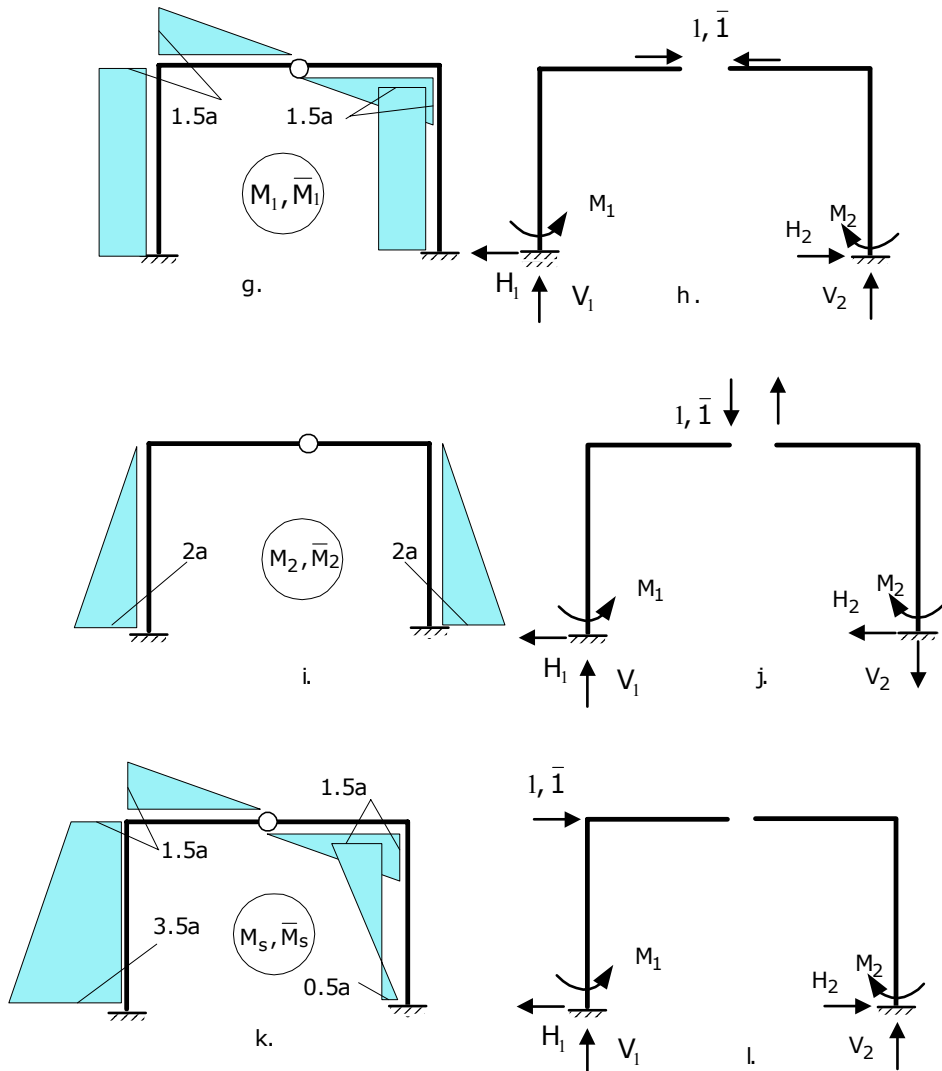


Fig.1.22.1. Sistem dinamic cu 1 GLD: g. diagramă unitară de momente corespunzătoare acțiunii, de intensitate egală cu unitatea, aplicată pe direcția necunoscutului X_1 ; h. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{22} i. diagramă unitară de momente corespunzătoare acțiunii, de intensitate egală cu unitatea, aplicată pe direcția necunoscutului X_2 ; j. situație de încărcare pentru erificarea coeficienților; k. diagramă de momente unitară sumată; l. situație de încărcare pentru calculul termenilor liberi

$$GNS = (l + r) - 3c$$

Din analiza structurii, constatăm existență a două corpuri, $c = 2$, a unei articulații interioare, $l = 2$ și a două reazeme încastrate - $r = 6$. Aplicând relația (1.5), rezultă:

$$\text{GNS} = (2 + 6) - 3 \cdot 2 = 2,$$

prin urmare, structura are două nedeterminare statice. Numărul de nedeterminări statice este egal cu numărul de necunoscute în metoda forțelor.

Pentru ridicarea nedeterminării statice, vom utiliza metoda forțelor.

În figura 1.22 sunt prezentate situațiile de încărcare și diagramele de eforturi corespunzătoare.

Calculul flexibilității

Pentru trasarea diagramele de momente corespunzătoare celor două stări de încărcare: reală și virtuală, necesare determinării flexibilității, se vor parcurge câteva etape de calcul, prezentate în continuare.

Sistemul de ecuații de echilibru corespunzător metodei forțelor este:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned}$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 1.22.f este prezentat sistemul de bază încărcat cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului coeficientului δ_{11} , iar în figura 1.22.g, sistemul de bază corespunzător metodei forțelor.

Calculul reacțiilor

Sistemul static determinat din figura 1.20.f. Subsistemul 1-3-5:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad H_1 = 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ \sum Y &= 0; \quad V_1 - 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 1 \\ \sum M_1 &= 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 1.5a = 0 \Rightarrow M_1 = 1.5a. \end{aligned}$$

Subsistemul 5-4-2:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad H_2 = 0 \Rightarrow H_2 = 0 \\ \sum Y &= 0; \quad 1 - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 1 \\ \sum M_2 &= 0; \quad 1 \cdot 1.5a - M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = 1.5a. \end{aligned}$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$\begin{aligned} M_{43} &= M_{42} = M_{24} = 0, \\ M_{35} &= M_{31} = -1 \cdot 1.5a \Rightarrow M_{35} = M_{31} = -1.5a, \end{aligned}$$

$$M_{53} = M_{54} = 0 ,$$

$$M_{45} = M_{42} = 1 \cdot 1.5a \Rightarrow M_{45} = M_{42} = 1.5a ,$$

$$M_{24} = M_2 \Rightarrow M_{24} = 1.5a .$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.22.g.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_1(x)}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1.5a \cdot 2a}{EI} \cdot 3a + 2 \cdot \frac{1.5a}{3EI} \cdot 1.5a \cdot 1.5a \\ &\Rightarrow \delta_{11} = \frac{11.25a}{EI} . \end{aligned}$$

Calculul coeficientului δ_{22}

În figura 1.20.l. este prezentat sistemul de bază încărcat cu o forță de intensitate egală cu unitatea, în vederea calculului coeficientului δ_{22} .

Calculul reacțiilor

Sistemul static determinat din figura 1.20.l. Subsistemul 1-3-5:

$$\sum X = 0 ; \quad -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum Y = 0 ; \quad V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 ; \quad -M_1 + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_1 = 2a .$$

Subsistemul 5-4-2:

$$\sum X = 0 ; \quad H_2 - 1 = 0 \Rightarrow H_2 = 1$$

$$\sum Y = 0 ; \quad V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 0$$

$$\sum M_2 = 0 ; \quad M_2 - 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_2 = 2a .$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{53} = M_{54} = M_{35} = M_{31} = M_{42} = 0 ,$$

$$M_{24} = -M_2 \Rightarrow M_{24} = -2a$$

$$M_{13} = -M_1 \Rightarrow M_{13} = -2a .$$

Diagrama de momente încovoietoare (identică în cele două stări) este trasată în fig. 1.20.i.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2(x)M_2(x)}{EI} dx = 2 \cdot \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a \Rightarrow \delta_{22} = \frac{16a}{3EI}.$$

Calculul coeficientului δ_{12}

Pentru calculul coeficientului lateral (secundar) δ_{12} se integrează diagramele din figurile 1.21.g. și i. Rezultă:

$$\delta_{12} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_2(x)}{EI} dx = 0 \Rightarrow \delta_{11} = 0.$$

deoarece am integrat o diagramă simetrică cu alta antisimetrică.

Verificarea coeficienților

Se încarcă sistemul de bază cu forțe concentrate de intensități egale cu unitatea aplicate, simultan, pe direcția necunoscutelor (X_1 și X_2) și se determină o diagramă unitară (M_s), egală cu suma diagramei unitare trasate pentru fiecare necunoscută (M_1 , M_2). Integrând diagrama unitară M_s cu ea însăși, se obține δ_{ss} . Dacă valoarea δ_{ss} este egală cu suma tuturor coeficienților necunoscutelor sistemului de ecuații, rezultă că toți coeficienții au fost corect calculați.

În figura 1.21.j, sistemul de bază este acționat, pe direcțiile necunoscutelor de forțe cu intensități egale cu unitatea.

Calculul reacțiilor

Subsistemul 1-3-5:

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 - 1 = 0 \Rightarrow V_1 = 1$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 1.5a + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_1 = 3.5a.$$

Subsistemul 5-4-2:

$$\sum X = 0; \quad H_2 - 1 = 0 \Rightarrow H_2 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad -V_2 + 1 = 0 \Rightarrow V_2 = 1$$

$$\sum M_2 = 0; \quad M_2 - 1 \cdot 2a + 1 \cdot 1.5a = 0 \Rightarrow M_2 = 0.5a.$$

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{53} = M_{54} = 0,$$

$$M_{35} = M_{31} = -1 \cdot 1.5a \Rightarrow M_{35} = M_{31} = -1.5a$$

$$M_{13} = -M_1 \Rightarrow M_{13} = -3.5a.$$

$$M_{24} = -M_2 \Rightarrow M_{24} = -0.5a$$

$$M_{45} = M_{42} = 1 \cdot 1.5a \Rightarrow M_{45} = M_{42} = 1.5a$$

Diagrama de momente încovoietoare, identică în cele două stări: reală și virtuală, este trasată în fig. 1.20.k.

Integrând cele două diagrame rezultă:

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_s(x)M_s(x)}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1.5a}{3EI} \cdot 1.5 \cdot 1.5a + \frac{2a}{6EI} (2 \cdot (1.5a)^2 + \\ &+ 2 \cdot (-3.5a)^2 + 2 \cdot (-1.5a) \cdot (-3.5a)) + \frac{2a}{6EI} (2 \cdot (1.5a)^2 + 2 \cdot (-0.5a)^2 + \\ &\Rightarrow = 2 \cdot (-0.5a)^2 + 2 \cdot (1.5a) \cdot (-0.5a) \quad \delta_{ss} = \frac{49.75a^3}{3EI}. \end{aligned}$$

Însumând coeficienții se obține:

$$\delta_{ss} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12} = \frac{11.25a^3}{EI} + \frac{16a^3}{3EI} + 2 \cdot 0 \Rightarrow \delta_{ss} = \frac{49.75a^3}{3EI},$$

rezultă că s-au calculat corect coeficienții.

Calculul termenului liber Δ_{1p}

În figura 1.20.l este prezentat sistemul de bază acționat, în dreptul masei și pe direcția gradului de libertate dinamică, cu o forță de intensitate egală cu unitatea.

Calculul reacțiunilor

Sistemul static determinat din figura 1.20.l.

Subsistemul 1-3-5:

$$\sum X = 0; \quad -H_1 + 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$$

$$\sum Y = 0; \quad V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -M_1 + 1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow M_1 = 2a.$$

Subsistemul 5-4-2:

$$H_2 = 0, \quad V_2 = 0, \quad M_2 = 0,$$

sistemul nefiind încărcat.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_{35} = M_{31} = M_{53} = M_{42} = M_{24} = 0,$$

$$M_{13} = -M_1 \Rightarrow M_{13} = -2a.$$

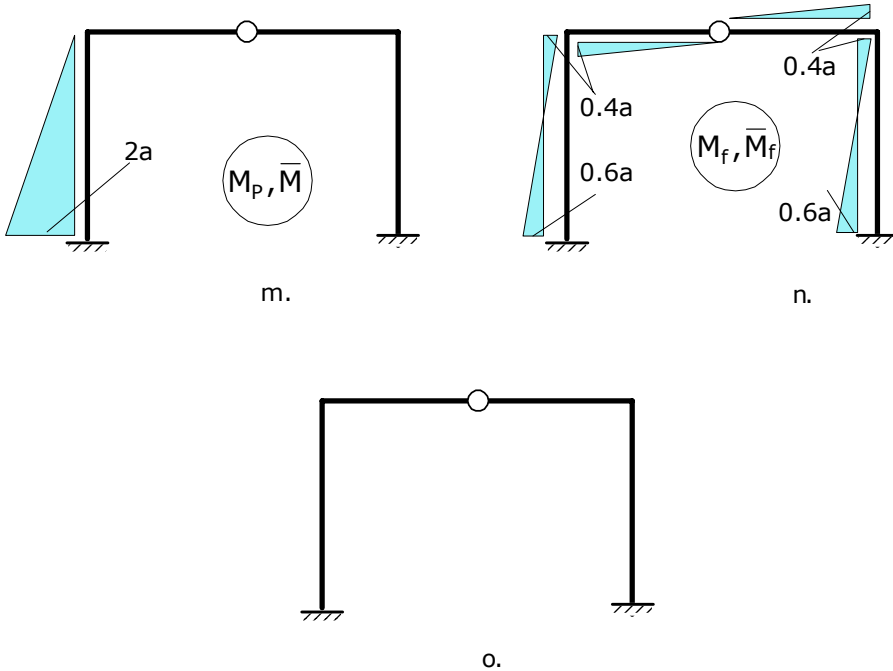


Fig.22.2. Sistem dinamic cu 1 GLD: h. diagramă de momente produsă de acțiunea exterioară aplicată pe sistemul de bază; i. diagramă de momente finale; j. deformata sistemului

Diagrama de momente încovoietoare este trasată în fig. 1.20.m. Pentru determinarea termenului liber se aplică relația:

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{2a \cdot 2a}{2EI} \cdot 1.5a \Rightarrow \Delta_{1P} = \frac{3a^2}{EI},$$

$$\Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_P(x)}{EI} dx = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a \Rightarrow \Delta_{1P} = \frac{8a^2}{EI}.$$

Verificarea termenilor liberi

Integrând diagrama unitară M_5 cu diagrama produsă prin încărcarea sistemului de bază cu acțiunile exterioare, M_P , se obține termenul Δ_{SP} . Dacă valoarea termenului Δ_{SP} este egală cu suma tuturor termenilor

liberi din sistemului de ecuații, rezultă că toți coeficienții au fost corect calculați.

$$\Delta_{SP} = \int_0^l \frac{\bar{M}_s(x)M_p(x)}{EI} dx = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot 2a \cdot 3.5 + 2.0 \cdot 1.5a + 1.5a \cdot 2a + 3.5a \cdot 0)$$

$$\Rightarrow \Delta_{SP} = \frac{17}{3EI} \cdot a^3.$$

Însumând termenii liberi se obține:

$$\Delta_{SP} = \Delta_{p1} + \Delta_{2P} \Rightarrow \Delta_{SP} = \frac{17}{3EI} \cdot a^3,$$

rezultă că s-au calculat corect coeficienții.

Rezolvarea ecuației de echilibru

Prin rezolvarea ecuației de echilibru se găsește soluția:

$$X_1 = -0.2667 \Rightarrow X_2 = -0.5.$$

Calculul eforturilor și trasarea diagramei finale

În vederea determinării eforturilor, se aplică principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul relației de calcul:

$$M_{ij}^f = M_{ij}^1 \cdot X_1 + M_{ij}^2 \cdot X_2 + M_{ij}^P,$$

se obțin eforturile:

$$M_{13}^f = -(-1.5a) \cdot X_1 + (-2a) \cdot X_2 + (-2a) \Rightarrow M_{13}^f = -0.6a$$

$$M_{31}^f = M_{35}^f = (-1.5a) \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \Rightarrow M_{31}^f = M_{34}^f = 0.4a$$

$$M_{42}^f = M_{45}^f = 1.5a \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \Rightarrow M_{24}^f = M_{45}^f = -0.4a,$$

$$M_{53}^f = M_{35}^f = 0,$$

$$M_{24}^f = (-2a) \cdot X_2 + 1.5a \cdot X_1 + 0 \Rightarrow M_{24}^f = -0.6a,$$

Diagrama de momente încovoietoare finală este desenată în figura 1.20.n.

Verificarea diagramei finale

Verificarea diagramei finale se face, conform celor cunoscute din Statica Structurilor, aplicând relația:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Prin urmare, se integrează diagramele din figurile 1.20.g și m, se obține:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_1(x)M_f(x)}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1.5a}{3EI} \cdot (-1.5a) \cdot 0.4a + 2 \cdot \frac{2a}{6EI} \cdot (2a \cdot 0.4a \cdot (-1.5a) + 2 \cdot (-0.6a) \cdot (-1.5a) + (-0.6a) \cdot (-1.5a) + 0.4a \cdot (-1.5a))$$

rezultă că diagrama finală a fost trasată corect.

Flexibilitatea δ se determină aplicând relația (1.4). Prin înmulțirea celor două diagrame de momente încovoietoare finale, se obține:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot (0.4a)^2 + 2 \cdot (0.6a)^2 - 2 \cdot (0.4a) \cdot (0.6a)) + 2 \frac{1.5a}{3EI} \cdot 0.4a \cdot 0.4a$$

$$\Rightarrow \delta = 1.6 \frac{a^3}{EI}.$$

De asemenea, flexibilitatea δ se poate determina și aplicând relația:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

deoarece starea virtuală se constituie și din orice structură static determinată obținută din structura dată. Aici, se consideră sistemul de bază, iar diagrama de momente încovoietoare este identică cu diagrama trasată pentru încărcarea exterioară, care este o forță de intensitate egală cu unitatea, figura 1.20.h. Prin urmare, se integrează diagramele:

\bar{M}_f și \bar{M} , rezultă:

$$\delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_f(x)M_f(x)}{EI} dx,$$

$$\delta = \frac{2a}{6EI} (2 \cdot (-2a) \cdot (-0.6a) + 2 \cdot 0 \cdot 0.4a + 0 \cdot (-0.6a) + 0.4a \cdot (-2a))$$

$$\Rightarrow \delta = 1.6 \frac{a^3}{EI},$$

se constată că s-a obținut aceeași valoare pentru flexibilitate.

Determinarea pulsației proprii de vibrație

Prin aplicarea relației (1.1) se deduce:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{3EI}{1.6 \cdot ma^3}}, \quad \omega = 1.369 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

Calculul perioadei proprii de vibrație

Aplicând expresia (1.2) se deduce perioada proprie de vibrație:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 4.590 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

APLICAȚIA 2

SISTEME CU 1GLD

1. Determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor utilizând rigiditatea sistemului

Caracteristicile proprii de vibrație ale unui sistem vibrant, cu un singur grad de libertate dinamică, de determină folosind următoarele relații de calcul:

- a) Pentru pulsația proprie de vibrație

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1)$$

funcție de rigiditatea sistemului vibrant;

- b) Pentru perioada proprie de vibrație

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad [s]; \quad (2)$$

c) Pentru frecvența proprie de vibrație

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad [s^{-1}] \text{ sau } [Hz]. \quad (3)$$

Principalele etape de calcule sunt prezentate în continuare:

- a) Se stabilește sistemul vibrant. Se pleacă de la sistemul constructiv real, pentru care se construiește modelul static (schema statică a structurii), iar prin concentrarea masei într-o secțiune și acordarea gradului de libertate semnificativ se obține sistemul vibrant (modelul dinamic), cu un GLD.
- b) Se determină rigiditatea sistemului vibrant, figura 1:
 - i. notație: k ;
 - ii. definiție – rigiditatea reprezintă forța care aplicată în dreptul masei și pe direcția GLD, produce pe această direcție o deplasare egală cu unitatea;
 - iii. unitate de măsură – $[m^{-1}N]$;
 - iv. scheme de calcul, figura 1.

Există mai multe posibilități pentru a afla valoarea unei rigidități. *Prima* metodă constă în stabilirea unui model static în conformitate cu definiția rigidității. Astfel, rigiditatea este egală cu forța aplicată pe structură, figurile 1.a sau 1.b, notată k , necunoscută, determină pe direcția GLD o deplasare egală cu unitatea. Se aplică metoda Mohr-Maxwell și se calculează expresia deplasării produse de forța k , care prin egalare cu unitatea evidențiază o ecuație, în care necunoscuta este forța k . Prin soluționarea ecuației se obține valoarea rigidității.

A doua cale pentru găsirea valorii rigidității constă în blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 1.c sau d, printr-un blocaj de tip reazem simplu, pentru deplasarea liniară sau un blocaj de nod, pentru deplasarea unghiulară. Reacțiunea din blocaj (blocaj de nod sau reazem simplu), în cazul în care sistemul este acționat cu o cedare de reazem egală cu unitatea, în blocajul introdus fictiv, pe direcția GLD, reprezintă rigiditatea sistemului.

Prin introducerea blocajelor (reazeme simple și/sau blocaje de nod), sistemul vibrant se transformă într-un sistem de bază dinamic pentru calculul rigidității, și își mărește nedeterminarea statică, în cazul unei structuri static nedeterminată și devine static nedeterminat, în cazul unei structuri static determinată.

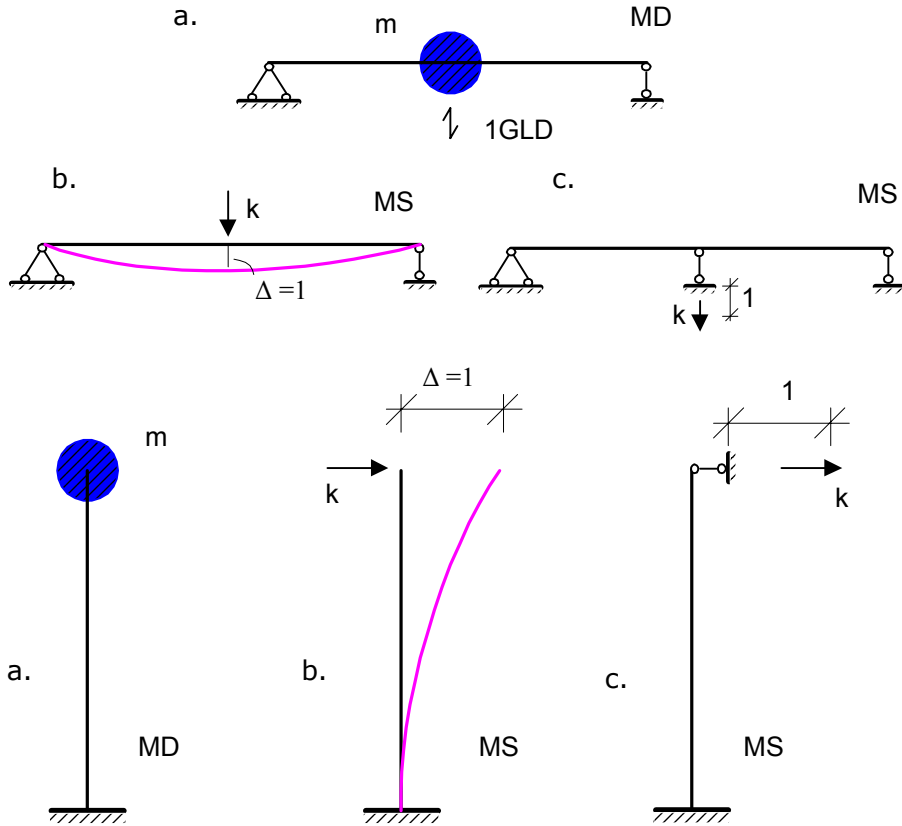


Fig. 1.2. Modele dinamice și situații de încărcare pentru aflarea rigidității: a. model dinamic. b. schemă de calcul cu rigiditatea aplicată ca acțiune; c. schemă de calcul pentru determinarea rigidității ca reacțiune

Reacțiunea din blocajul GLD introdus pe sistemul dinamic reprezintă rigiditatea sistemului dinamic. Pentru calculul rigidității se va utiliza una din metodele Staticii Construcțiilor, metoda forțelor sau metoda deplasărilor. Încărcarea aplicată sistemului de bază dinamic constă dintr-o cedare de reazem (blocaje de GLD).

O a *treia cale*, poate fi evidențiată plecând de la matricea coeficienților corespunzătoare metodei deplasărilor, care reprezintă matricea de rigiditate a sistemului determinată în coordonatele statice ale acestuia (coordonate fixate de numărul gradelor de nedeterminare cinematico-elastic ale sistemului de bază dinamic). Rigiditatea se obține

prin condensarea matricei coeficienților. Astfel, se consideră echilibrul static exprimat, conform metodei deplasărilor, prin relația:

$$[r_{ij}] \{z_j\} = \{P\} \quad (4)$$

sau

$$[r_{ij}] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M \end{Bmatrix} \quad , \quad (5)$$

unde: X reprezintă necunoscuta - deplasare liniară a secțiunii structurii, în care este concentrată masa sistemului dinamic, pe direcția axei OX;

$\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix}$ - vectorul necunoscutelor: deplasări liniare pe direcția axei

OY și deplasări unghiulare în raport cu axa OZ, ale nodurilor structurii;

$\{P\}$ - vectorul termenilor liberi, în cazul forțelor exterioare aplicate în noduri. Elementele fiind acțiuni, vectorul termenilor liberi este scris, în ecuațiile de condiție, în dreapta semnelui de egalitate.

Dacă se partiționează corespunzător și matricea coeficienților, în relația (5), aceasta devine:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & [k_{12}] \\ \{k_{21}\} & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M \end{Bmatrix} \quad . \quad (6)$$

Cum $P_x \neq 0$, iar $\begin{Bmatrix} P_y \\ M \end{Bmatrix} = \{0\}$, se va elimina vectorul $\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix}$ din relația (6), rezultă:

$$k_{11} X + [k_{12}] \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix} = P_x \quad , \quad (7)$$

$$\{k_{21}\} X + [k_{22}] \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \quad . \quad (8)$$

Din relația (8) se determină vectorul $\begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix}$:

$$[k_{22}]^{-1} \{k_{21}\} = - \begin{Bmatrix} Y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad . \quad (9)$$

Se substituie (9) în (7):

$$(k_{11} - [k_{12}][k_{22}]^{-1}\{k_{21}\})X = P_x \quad . \quad (10)$$

În concluzie: rigiditate în coordonata dinamică a sistemului vibrant, notată - k , se determină cu relația:

$$k = k_{11} - [k_{12}][k_{22}]^{-1}\{k_{21}\}. \quad (11)$$

- c) Determinarea pulsației, frecvenței și perioadei proprii de vibrație, relațiile: (1), (2) și (3).

1.1. Grinzi drepte

1.1.1. Structura 1

Pentru structura din figura 2 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se respecta etapele de calcul expuse în preambulului capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 2.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 2.b și se precizează situația de încărcare, figura 2.c. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat având o singură nedeterminare statică. Calculele se vor efectua prin metoda forțelor. Sistemul de bază este desenat în figura 2.d.

Ecuția de echilibru elastic este

$$\delta_{11} \cdot X_1 = \Delta_{1c}.$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 2.e este arătată situația de încărcare pentru trasarea diagramei unitare de moment încovoietor. Pentru început se determină reacțiunile:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & H_2 &= 0, \\ \sum Y &= 0; & V_2 - 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 1, \\ \sum M_2 &= 0; & -M_2 + 1 \cdot 3a &= 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = -3a. \end{aligned}$$

Calculul eforturilor:

$$M_{21} = -M_2 \Rightarrow M_{21} = -3a,$$

$$M_{12} = 0 \Rightarrow M_{12} = 0,$$

diagrama unitară de moment încovoiator este trasată în figura 2.f.

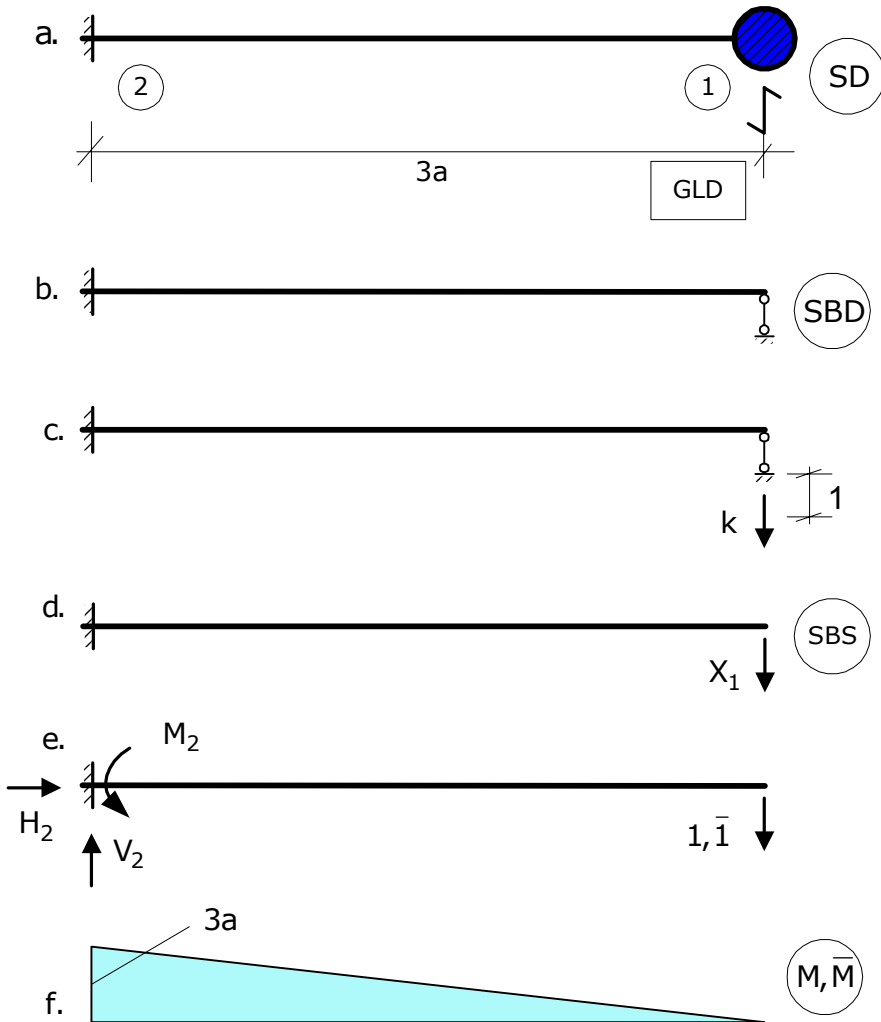


Fig.1. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda forțelor; e. și f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} și diagrama de moment încovoiator

Coeficientul δ_{11} se determină cu relația Mohr-Maxwell

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_1(x)}{EI} dx ,$$

rezultă

$$\delta_{11} = \frac{3a}{3EI} \cdot (-3a) \cdot (-3a) \Rightarrow \delta_{11} = \frac{9a^3}{EI} .$$

Termenul liber Δ_{1C} se calculează cu relația

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 + \sum R_k^1 \cdot \Delta_k ,$$

reacțiunile din figura 2.e au fost calculate anterior, iar Δ_1 , cedarea de reazem este:

$$\Delta_1 = 1 .$$

Rezultă:

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 + V_2 \cdot 0 + H_2 \cdot 0 + M_2 \cdot 0 \Rightarrow \Delta_{1C} = 1 .$$

Soluția ecuației de echilibru elastic este

$$X_1 = \frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}} , \quad X_1 = \frac{1}{\frac{9a^3}{EI}} \Rightarrow X_1 = \frac{EI}{9a^3} .$$

Conform figurilor 2.c și 2.e rezultă

$$k = X_1 \Rightarrow k = \frac{EI}{9a^3} .$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{9ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.3333 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}} ;$$

$$T = 18.850 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}} .$$

1.1.2. Structura 2

Pentru structura din figura 3 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor respecta etapele de calcul expuse la începutul capitolului.

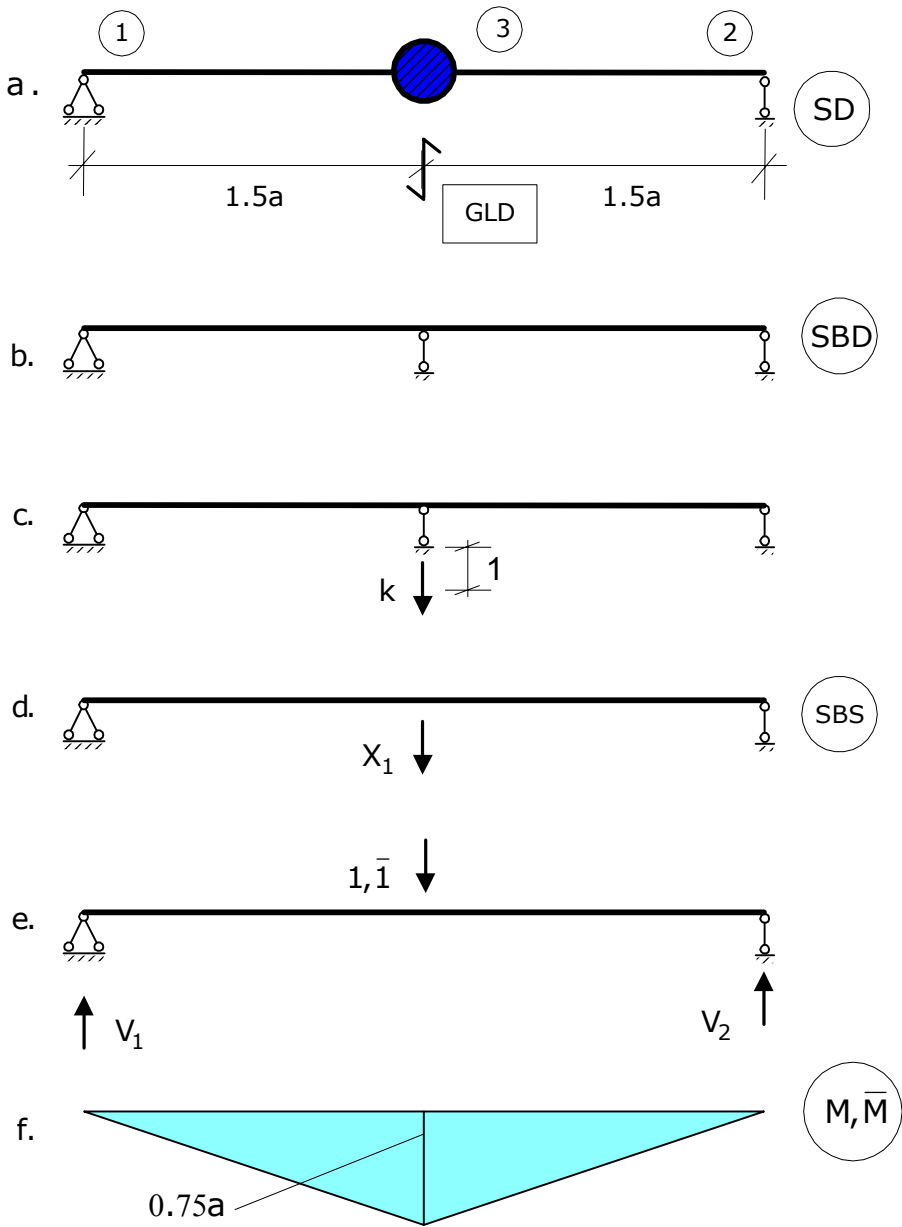


Fig.3. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda forțelor; e. și f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} și diagrama de moment încovoietor

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 3.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 3.b și se precizează situația de încărcare, figura 3.c. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat având o singură nedeterminare statică. Calculele se vor efectua prin metoda forțelor. Sistemul de bază este desenat în figura 3.d.

Ecuția de echilibru elastic este

$$\delta_{11} \cdot X_1 = \Delta_{1C}.$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 3.e este arătată situația de încărcare pentru trasarea diagramei unitare de moment încovoietor. Pentru început se determină reacțiunile:

$$\sum M_2 = 0; \quad V_1 \cdot 3a - 1 \cdot 1.5a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0.5,$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_2 \cdot 3a + 1 \cdot 1.5a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 0.5.$$

Calculul eforturilor:

$$M_{13} = M_{23} = 0,$$

$$M_{31} = M_{32} = V_1 \cdot 1.5a \quad \Rightarrow \quad M_{31} = M_{32} = 0.75a,$$

diagrama unitară de moment încovoietor este trasată în figura 2.f.

Coeficientul δ_{11} se determină cu relația Mohr-Maxwell

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_1(x)}{EI} dx,$$

rezultă

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1.5a}{3EI} \cdot 0.75a \cdot 0.75a \quad \Rightarrow \quad \delta_{11} = \frac{0.563a^3}{EI}.$$

Termenul liber Δ_{1C} se calculează cu relația

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_3 + \sum R_k^3 \cdot \Delta_k,$$

reacțiunile din figura 2.e au fost calculate anterior, iar Δ_3 , cedarea de reazem este:

$$\Delta_3 = 1.$$

Rezultă:

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_3 + V_1 \cdot 0 + V_2 \cdot 0 \Rightarrow \Delta_{1C} = 1.$$

Soluția ecuației de echilibru elastic este

$$X_1 = \frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}}, \quad X_1 = \frac{1}{\frac{0.5625a^3}{EI}} \Rightarrow X_1 = 1.7778 \frac{EI}{a^3}.$$

Conform figurilor 3.c și 3.d rezultă

$$k = X_1 \Rightarrow k = 1.7778 \frac{EI}{a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{1.7778 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 1.3333 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}};$$

$$T = 4.7125 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.3. Structura 3

Pentru structura din figura 4 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Etapele de calcul au fost detaliate în partea de început a capitoului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 4.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 4.b și se precizează situația de încărcare, figura 4.c. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat având o singură nedeterminare statică. Calculele se vor efectua prin metoda forțelor. Sistemul de bază este desenat în figura 4.d.

Ecuția de echilibru elastic este

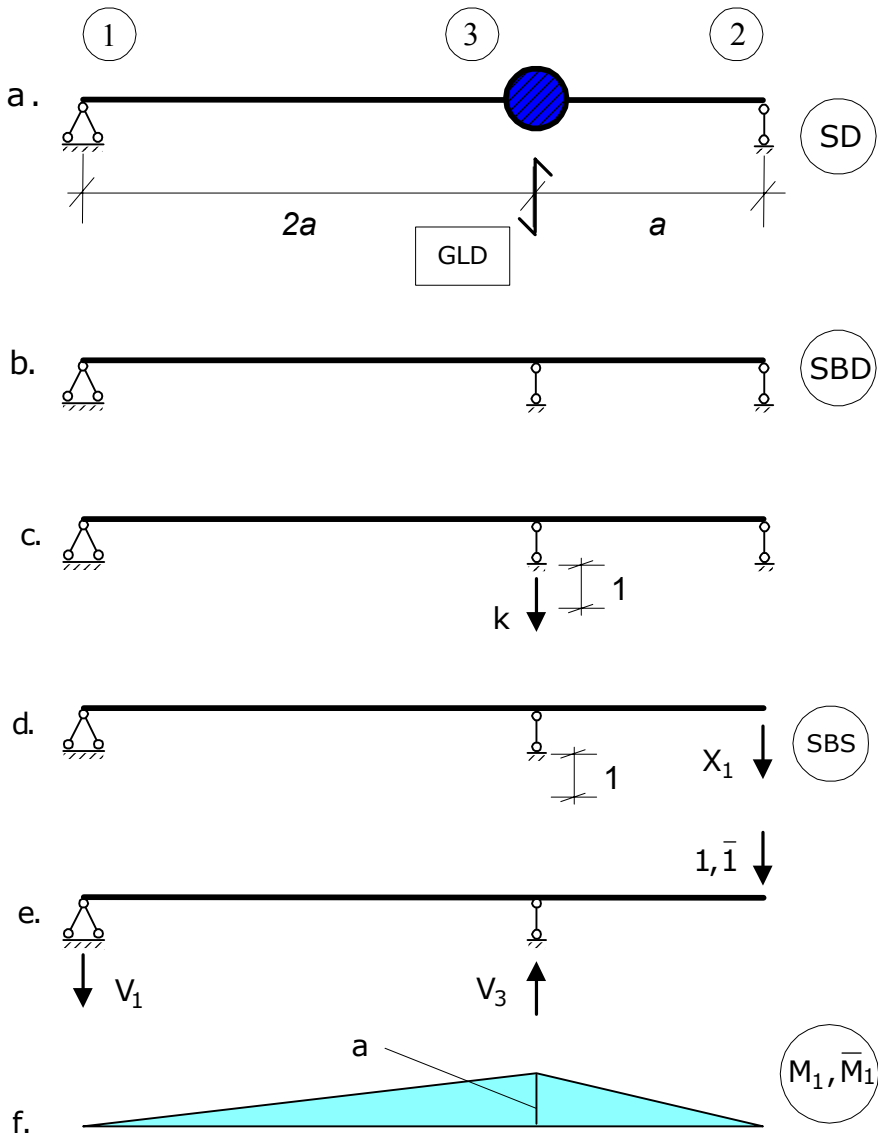


Fig.4. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda forțelor; e. și f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} și diagrama de moment încovoietor

$$\delta_{11} \cdot X_1 = \Delta_{1c}.$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 4.e este arătată situația de încărcare pentru trasarea diagramei unitare de moment încovoietor. Pentru început se determină reacțiunile:

$$\sum M_2 = 0; \quad 1 \cdot 3a - V_3 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_3 = 1.5,$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_1 \cdot 2a + 1 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0.5,$$

verificare

$$\sum Y = 0; \quad -V_1 + V_3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -0.5 + 1.5 - 1 = 0,$$

ceea ce înseamnă că reacțiunile sunt corect determinate.

Calculul eforturilor:

$$M_{13} = M_{23} = 0,$$

$$M_{31} = M_{32} = -V_1 \cdot 2a \quad \Rightarrow \quad M_{31} = M_{32} = -a,$$

diagrama unitară de moment încovoietor este trasată în figura 4.f.

Coeficientul δ_{11} se determină cu relația Mohr-Maxwell

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_1(x)}{EI} dx,$$

rezultă

$$\delta_{11} = \frac{2a}{3EI} \cdot a \cdot a + \frac{a}{3EI} \cdot a \cdot a \quad \Rightarrow \quad \delta_{11} = \frac{a^3}{EI}.$$

Termenul liber Δ_{1C} se calculează cu relația

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 + \sum R_k^1 \cdot \Delta_k, ???$$

reacțiunile din figura 4.e au fost calculate anterior, iar Δ_3 , cedarea de reazem este:

$$\Delta_1 = 1.$$

Rezultă:

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot 0 + V_1 \cdot 0 - V_3 \cdot \Delta_3 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{1C} = -1.5.$$

Soluția ecuației de echilibru elastic este

$$X_1 = \frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}}, \quad X_1 = \frac{-1.51}{\frac{a^3}{EI}} \Rightarrow X_1 = -1.5 \frac{EI}{a^3}.$$

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoiator se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot X_1,$$

$$M_{13}^f = M_{23}^f = 0;$$

$$M_{31}^f = M_{32}^f = -a \cdot X_1 \Rightarrow M_{31}^f = M_{32}^f = \frac{3EI}{2a^2},$$

diagrama finală de moment încovoiator este trasată în figura 4.g.

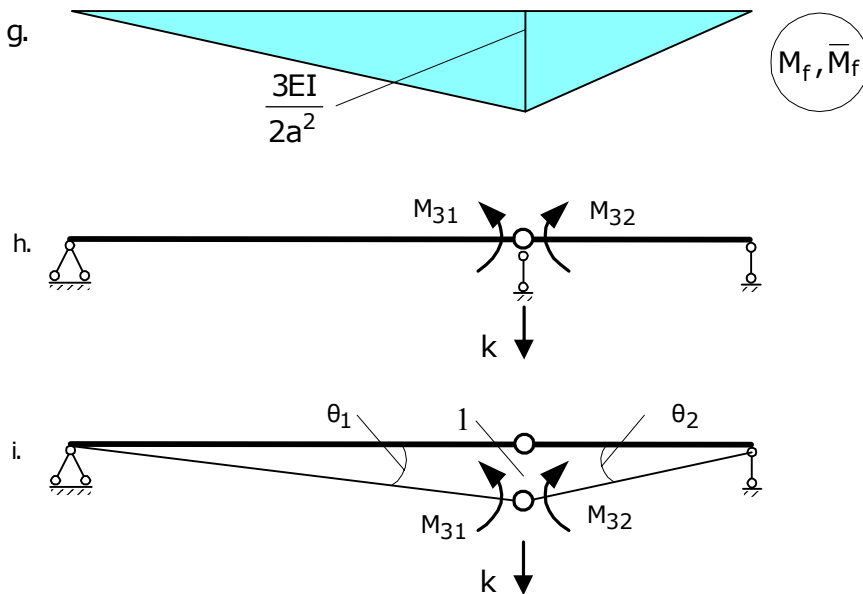


Fig.4. continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. diagrama finală de moment încovoiator; h și i. mecanism și deplasata corespunzătoare pentru determinarea rigidității

Diagrama finală de moment încovoiator se verifică cu relația

$$\sum \frac{M_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \Delta_{1C},$$

rezultă

$$\sum \frac{M_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \frac{2a}{3EI} \cdot \frac{3EI}{2a^2} - \frac{a}{3EI} \cdot \frac{3EI}{2a^2} = -1 - 0.5 = -1.5.$$

Dar cum $\Delta_{1C} = -1.5$, rezultă că s-a calculat corect diagrama de moment încovoietor.

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 4, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 4.h. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în dreptul reazemului 3 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 4.i:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{31}^f \cdot \theta_1 - M_{32}^f \cdot \theta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = M_{31}^f \cdot \theta_1 + M_{32}^f \cdot \theta_2$$

Cunoscând

$$\theta_1 = \frac{1}{2a}, \quad \theta_2 = \frac{1}{a},$$

rezultă

$$k = \frac{3EI}{2a^2} \cdot \frac{1}{2a} + \frac{3EI}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{9EI}{4a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = 1.5 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}},$$

$$T = 4.189 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.4. Structura 4

Pentru structura din figura 5 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Calculul practic se conduce conform celor expuse în preambulul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 5.a, se construiește sistemul de bază

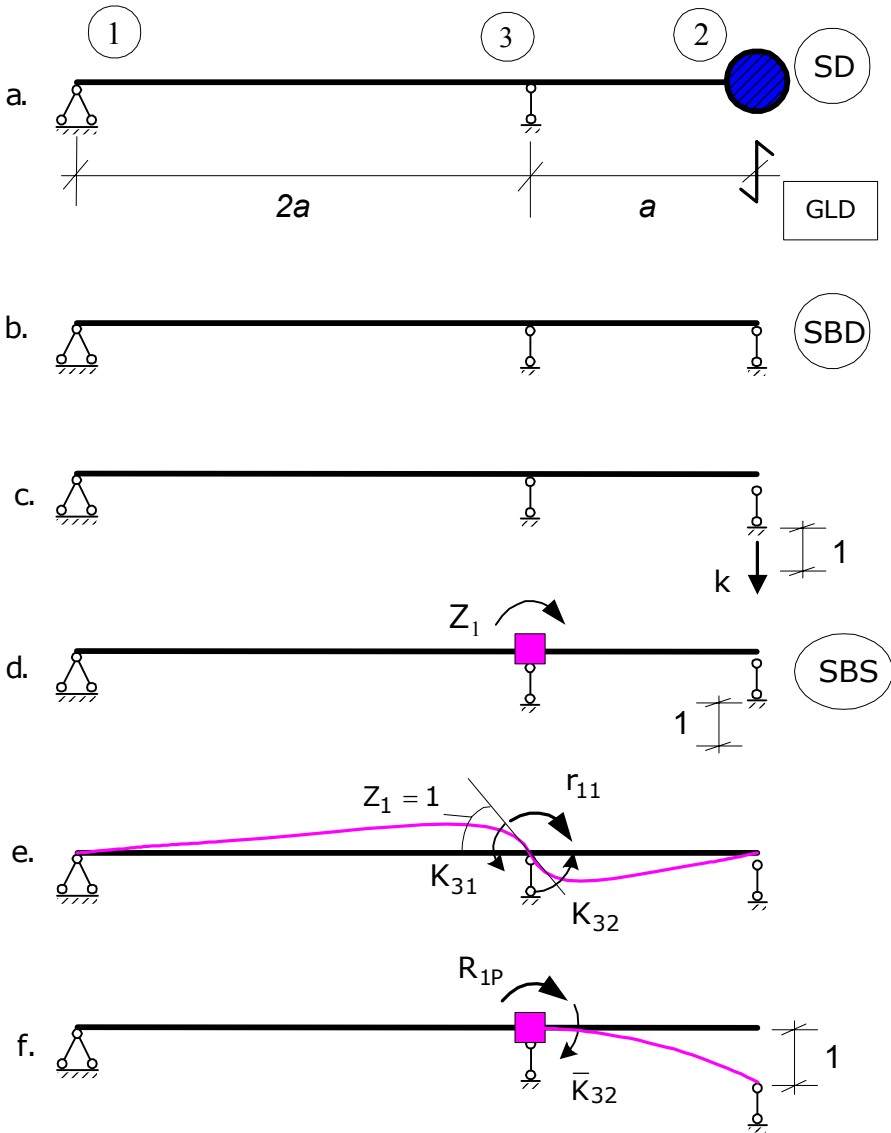


Fig.5. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$; f. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea

dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 5.b și se precizează situația de încărcare, figura 5.c. Sistemul de bază dinamic

este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat având o singură nedeterminare statică. Calculele se vor efectua prin metoda deplasărilor. Sistemul de bază este desenat în figura 5.d.

Ecuția de echilibru static este

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0.$$

Coeficientul r_{11} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 5.e. Se scrie o ecuație de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{11} - K_{32} - K_{31} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară

$$K_{31} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{2a},$$

$$K_{32} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{a},$$

rezultă

$$r_{11} = \frac{3EI}{2a} + \frac{3EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{9EI}{2a}.$$

Termenul liber R_{1P} se calculează prin exprimarea echilibrului static al forțelor de pe deformată sistemului de bază dinamic produsă de o cedare de reazem, egală cu unitatea produsă pe direcția GLD. În blocajul introdus pe sistemul static al modelului dinamic. Se obține

$$\sum M_3 = 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{32} = 0,$$

dar

$$\bar{K}_{32} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{a^2}.$$

Rezultă

$$R_{1P} = -\bar{K}_{32} \Rightarrow R_{1P} = -\frac{3EI}{a^2}.$$

Soluția ecuației de echilibru este

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = -\frac{\frac{3EI}{a^2}}{\frac{9EI}{2a}} \Rightarrow Z_1 = \frac{2}{3a}.$$

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^P,$$

$$M_{13}^f = M_{23}^f = 0;$$

$$M_{31}^f = M_{32}^f = K_{32} \cdot Z_1 - \bar{K}_{32} \Rightarrow M_{31}^f = M_{32}^f = -\frac{EI}{a^2},$$

diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 5.g.

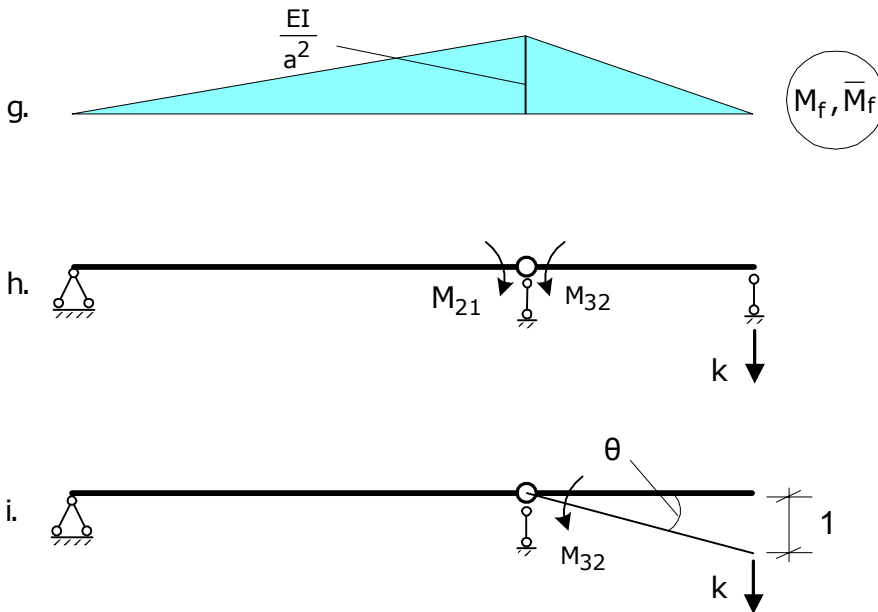


Fig.5. continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 g. diagrama finală de moment încovoietor; h și i. mecanism și
 deplasata corespunzătoare pentru determinarea rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 2, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 5.h. acționat de momentele

Încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în dreptul reazemului 3 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 4.i:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{32}^f \cdot \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad k = M_{32}^f \cdot \theta$$

Cunoscând

$$\theta = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{EI}{a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{EI}{ma^3}},$$

$$T = 6.2832 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.5. Structura 5

Pentru structura din figura 6 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor respecta etapele de calcul expuse la începutul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 6.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 6.b și se precizează situația de încărcare, figura 6.c. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat având o singură nedeterminare statică. Calculele se vor efectua prin metoda deplasărilor. Numărul de necunoscute, în această metodă, este dat de gradul de nedeterminare cinematico-elastic al sistemului de bază dinamic. Rezultă $GNCE = 2$, deoarece structura are două noduri, secțiunile din dreptul reazemelor 2 și 3. Sistemul de bază este desenat în figura 6.d.

Sistemul de ecuații de echilibru elastic este

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

În continuare se vor calcula coeficienții r_{11} și r_{21}

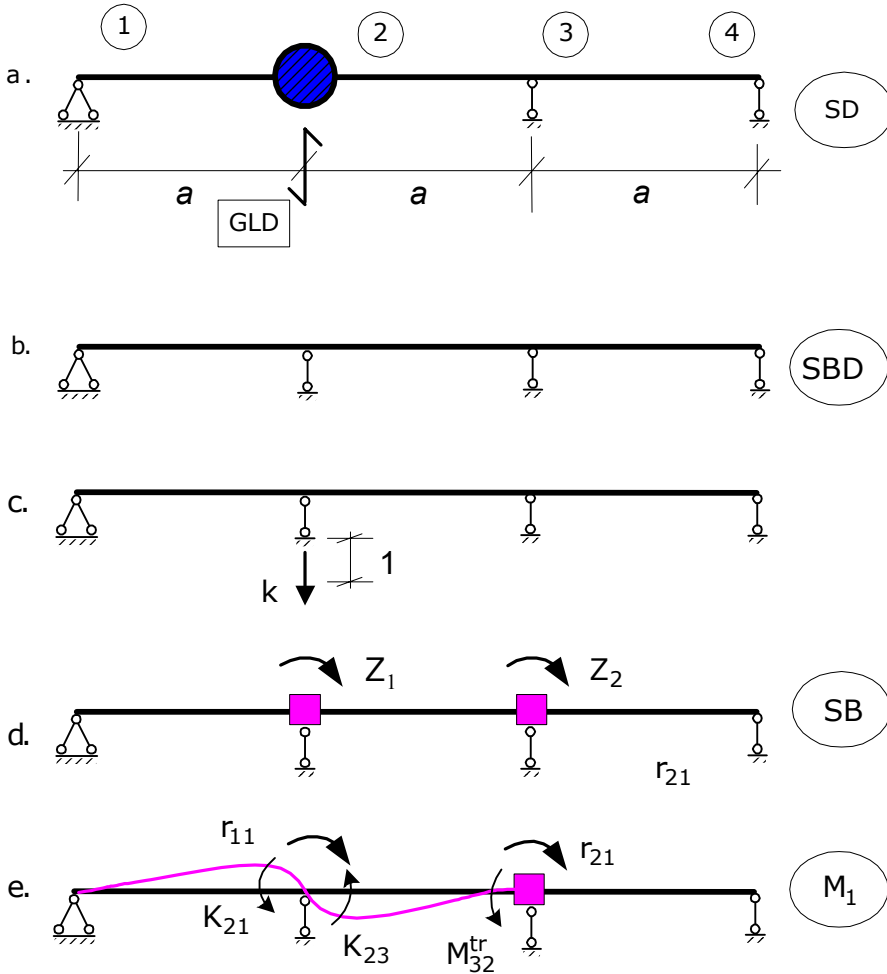


Fig.6. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$

Cei doi coeficienți se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 6.e. Se scriu două ecuații de echilibru static:

$$\sum M_2 = 0; \quad r_{11} - K_{32} - K_{31} = 0$$

și

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{21} - M_{32}^{\text{tr}} = 0$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire și a momentului transmis a extremităților de bară

$$K_{21} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{a},$$

$$K_{23} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{a}, \quad M_{32}^{\text{tr}} = \frac{2EI}{l} = \frac{2EI}{a}.$$

rezultă

$$r_{11} = K_{21} + K_{23}, \quad r_{11} = \frac{3EI}{a} + \frac{4EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{7EI}{a}$$

și

$$r_{21} = M_{32}^{\text{tr}} \Rightarrow r_{21} = \frac{2EI}{a}.$$

Se continuă cu calculul coeficienților r_{12} și r_{22} . Coeficienți se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod egală cu unitatea, $Z_2 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 6.f. Se scriu două ecuații de echilibru static:

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{22} - K_{34} - K_{32} = 0$$

și

$$\sum M_2 = 0; \quad r_{12} - M_{23}^{\text{tr}} = 0$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire și a momentului transmis a extremităților de bară

$$K_{32} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{a}, \quad M_{23}^{\text{tr}} = \frac{2EI}{l} = \frac{2EI}{a}$$

$$K_{34} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{a}.$$

rezultă

$$r_{22} = K_{34} + K_{32}, \quad r_{22} = \frac{3EI}{a} + \frac{4EI}{a} \Rightarrow r_{22} = \frac{7EI}{a}$$

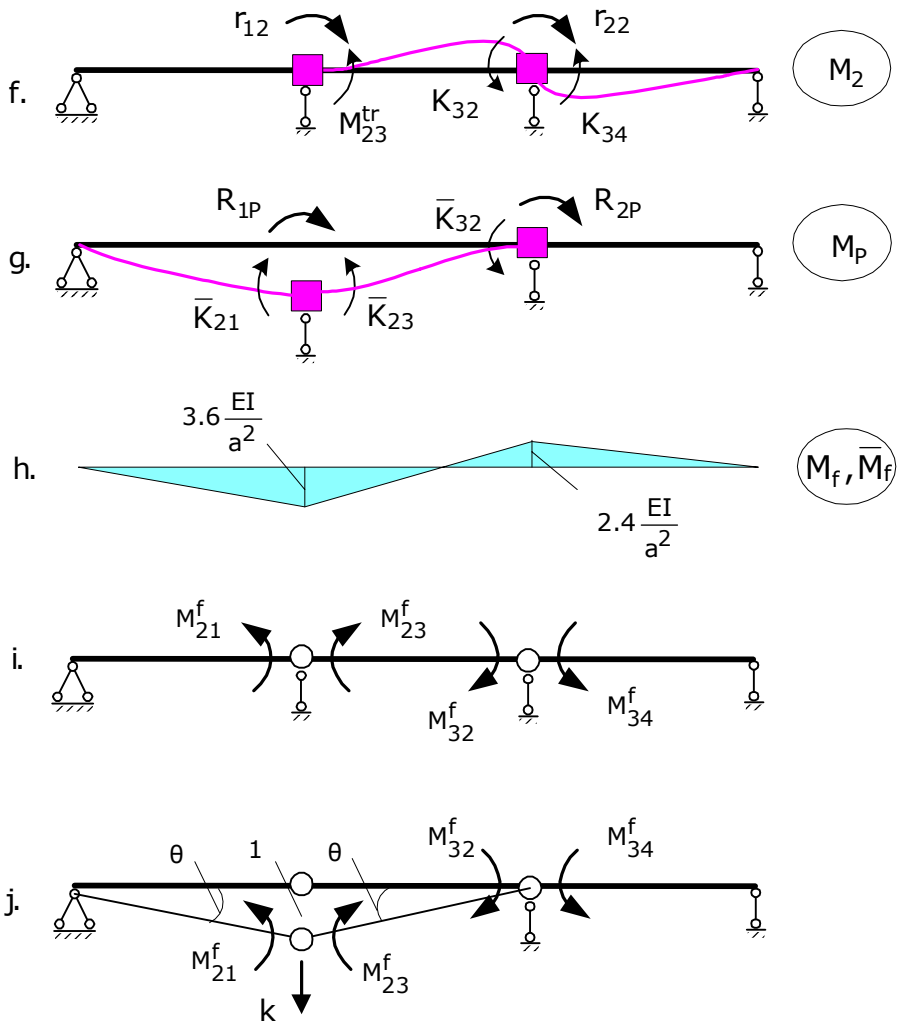


Fig. 6. continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_2 = 1$; g. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea; h. diagrama finală de moment încovoietor; i și j. mecanism și deplasata corespunzătoare pentru determinarea rigidității

și

$$r_{12} = M_{23}^{tr} \Rightarrow r_{12} = \frac{2EI}{a} .$$

Termenii liberi R_{1P} și R_{2P} se calculează prin exprimarea echilibrului static al forțelor de pe deformata sistemului de bază dinamic produsă de o cedare de reazem, egală cu unitatea produsă pe direcția GLD, în blocajul introdus pe sistemul static al sistemului de bază dinamic, figura 6.g. Se obține

$$\sum M_2 = 0; \quad \bar{K}_{21} + R_{1P} - \bar{K}_{23} = 0,$$

$$\sum M_3 = 0; \quad -\bar{K}_{32} + R_{1P} = 0,$$

dar

$$\bar{K}_{32} = \bar{K}_{23} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6EI}{a^2},$$

$$\bar{K}_{21} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{a^2}.$$

Rezultă

$$R_{1P} = \bar{K}_{23} - \bar{K}_{21} \Rightarrow R_{1P} = \frac{3EI}{a^2},$$

$$R_{2P} = \bar{K}_{32} \Rightarrow R_{2P} = \frac{6EI}{a^2}.$$

Soluția sistemului de ecuații de echilibru este

$$Z_1 = -\frac{0.2}{a}, \quad Z_2 = -\frac{0.8}{a}.$$

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^2(x) \cdot Z_2 + M_{ij}^P(x),$$

$$M_{12}^f = M_{43}^f = 0;$$

$$M_{21}^f = -K_{21} \cdot Z_1 + \bar{K}_{21} = -\frac{3EI}{a} \cdot \left(-\frac{0.2}{a}\right) + \frac{3EI}{a} \Rightarrow M_{21}^f = \frac{3.6EI}{a^2},$$

$$M_{23}^f = -K_{23} \cdot Z_1 - M_{23}^{tr} \cdot Z_2 - \bar{K}_{23} = -\frac{4EI}{a} \cdot \left(-\frac{0.2}{a}\right) - \frac{2EI}{a} \cdot \left(-\frac{0.8}{a}\right) - \frac{6EI}{a^2}$$

$$\Rightarrow M_{23}^f = -\frac{3.6EI}{a^2},$$

$$M_{32}^f = -M_{32}^{tr} \cdot Z_1 - K_{32} \cdot Z_2 - \bar{K}_{32} = -\frac{2EI}{a} \cdot \left(-\frac{0.2}{a}\right) - \frac{4EI}{a} \cdot \left(-\frac{0.8}{a}\right) - \frac{6EI}{a^2}$$

$$\Rightarrow M_{32}^f = \frac{2.4EI}{a^2},$$

$$M_{43}^f = 0 - K_{34} \cdot Z_2 + 0 = -\frac{3EI}{a} \cdot \left(-\frac{0.8}{a}\right) \Rightarrow M_{34}^f = -\frac{2.4EI}{a^2},$$

diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 6.h.

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 2, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 6.i. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în dreptul reazemului 2 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 6.j:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{21}^f \cdot \theta - M_{23}^f \cdot \theta - M_{32}^f \cdot \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad k = M_{32}^f \cdot \theta$$

Cunoscând

$$\theta = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow k = 2 \cdot \frac{3.6EI}{a^2} \cdot \frac{1}{a} + \frac{2.4EI}{a^2} \cdot \frac{1}{a}, \quad k = \frac{9.6EI}{a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{9.6EI}{ma^3}}, \quad \omega = 3.0984 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 2.0279 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.6. Structura 6

Pentru structura din figura 7 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor respecta etapele de calcul expuse în partea introductivă a capitolului.

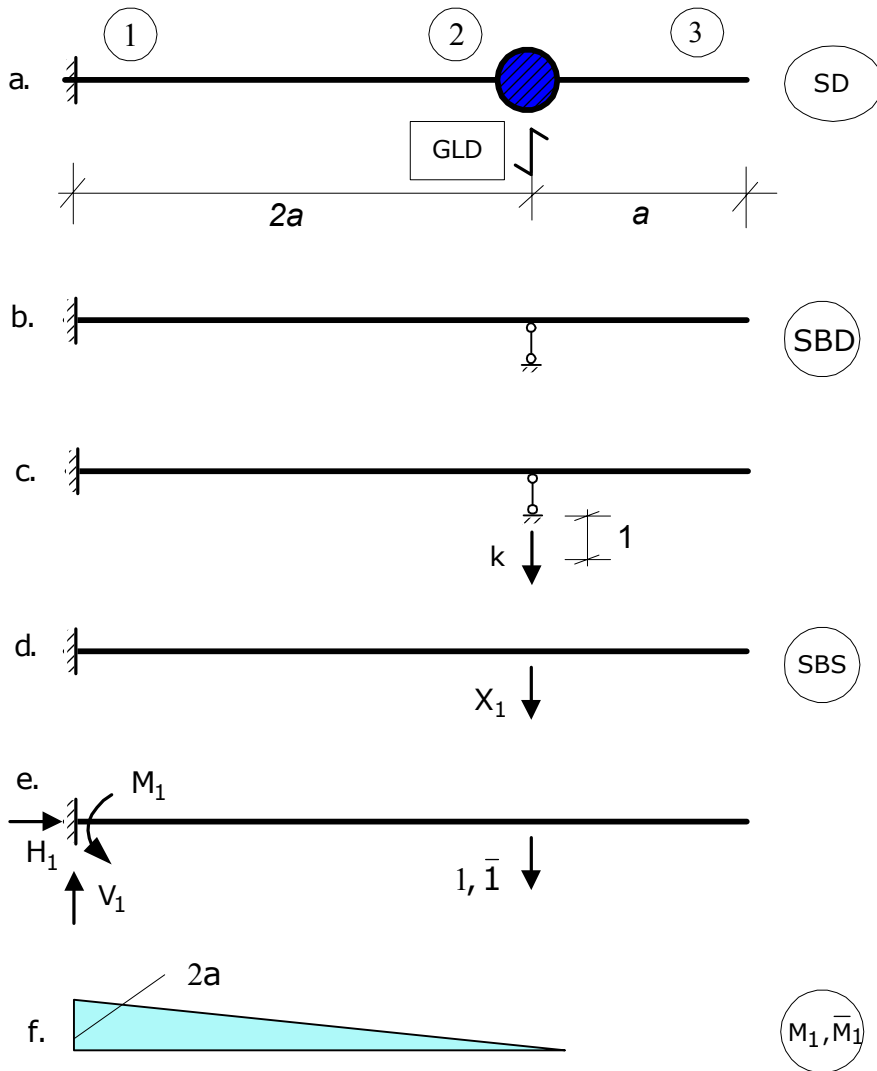


Fig. 7. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda forțelor; e. și f. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11} și diagrama de moment încovoietor

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 7.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 7.b și se

precizează situația de încărcare, figura 7.c. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat având o singură nedeterminare statică. Calculele se vor efectua folosind metoda forțelor. Sistemul de bază este desenat în figura 7.d.

Ecuția de echilibru elastic este

$$\delta_{11} \cdot X_1 = \Delta_{1C}.$$

Calculul coeficientului δ_{11}

În figura 7.e este arătată situația de încărcare pentru trasarea diagramei unitare de moment încovoietor. Pentru început se determină reacțiunile:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & H_1 &= 0 \\ \sum Y &= 0; & -V_1 + 1 &= 0 \Rightarrow V_1 = 1, \\ \sum M_1 &= 0; & -M_1 + 1 \cdot 2a &= 0 \Rightarrow M_1 = 2a. \end{aligned}$$

Calculul eforturilor:

$$\begin{aligned} M_{32} = M_{23} = M_{21} &= 0, \\ M_{12} &= -M_1. \end{aligned}$$

diagrama unitară de moment încovoietor este trasată în figura 7.f.

Coeficientul δ_{11} se determină cu relația Mohr-Maxwell

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_1(x)}{EI} dx,$$

rezultă

$$\delta_{11} = \frac{2a}{3EI} \cdot 2a \cdot 2a \Rightarrow \delta_{11} = \frac{8a^3}{3EI}.$$

Termenul liber Δ_{1C} se calculează cu relația

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 + \sum R_k^1 \cdot \Delta_k,$$

reacțiunile din figura 7.e au fost calculate anterior, iar Δ_1 , cedarea de reazem este:

$$\Delta_1 = 1.$$

Rezultă:

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot 1 + V_1 \cdot 0 + H_1 \cdot \Delta_H + V_1 \cdot \Delta_V \Rightarrow \Delta_{1C} = 1.$$

Soluția ecuației de echilibru elastic este

$$X_1 = \frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}}, \quad X_1 = \frac{1}{\frac{8a^3}{3EI}} \Rightarrow X_1 = \frac{3EI}{8a^3}.$$

Conform figurilor 3.c și 3.d rezultă

$$k = X_1 \Rightarrow k = \frac{3EI}{8a^3}.$$

O altă cale pentru determinarea rigidității constă în trasarea diagramei finale de moment încovoietor și aflarea reacțiunii din blocajul GLD prin lucru mecanic virtual.

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot X_1,$$

$$M_{32}^f = M_{23}^f = M_{21}^f = 0;$$

$$M_{12}^f = M_{21}^1 \cdot X_1 = -2a \cdot \frac{3EI}{8a^3} \Rightarrow M_{12}^f = -\frac{3EI}{4a^2},$$

diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 7.g.

Diagrama finală de moment încovoietor se verifică cu relația

$$\sum \frac{M_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \Delta_{1C},$$

rezultă

$$\sum \frac{M_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \frac{2a}{3EI} \cdot \frac{3EI}{4a^2} \cdot 2a = 1.$$

Dar cum $\Delta_{1C} = 1$, rezultă că s-a calculat corect diagrama de moment încovoietor.

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 2, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază

dinamic într-un mecanism, figura 7.h. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în dreptul reazemului 2 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 7.h:

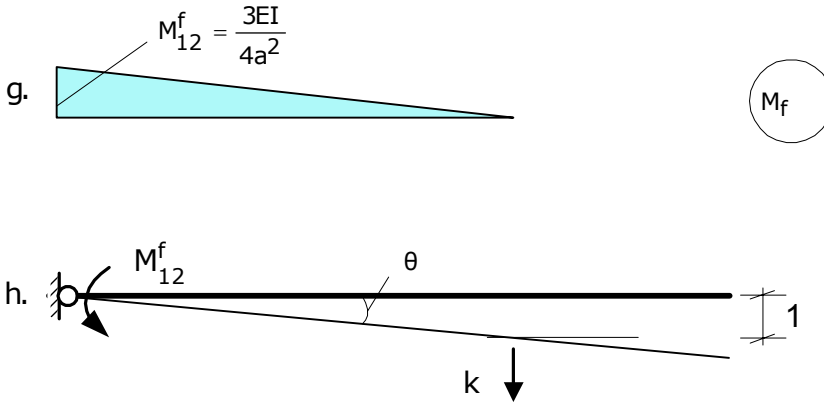


Fig. 7. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
g. diagrama finală de moment încovoietor; h. deplasata pentru determinarea rigidității

$$\text{LMV} = 0; \quad k \cdot 1 - M_{12}^f \cdot \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad k = M_{31}^f \cdot \theta_1 + M_{32}^f \cdot \theta_2$$

Cunoscând

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

rezultă

$$k = \frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3EI}{8a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3EI}{8ma^3}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 0.6124 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 10.2604 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.7. Structura 7

Pentru structura din figura 8 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor respecta etapele de calcul expuse în partea introductivă a capitolului.

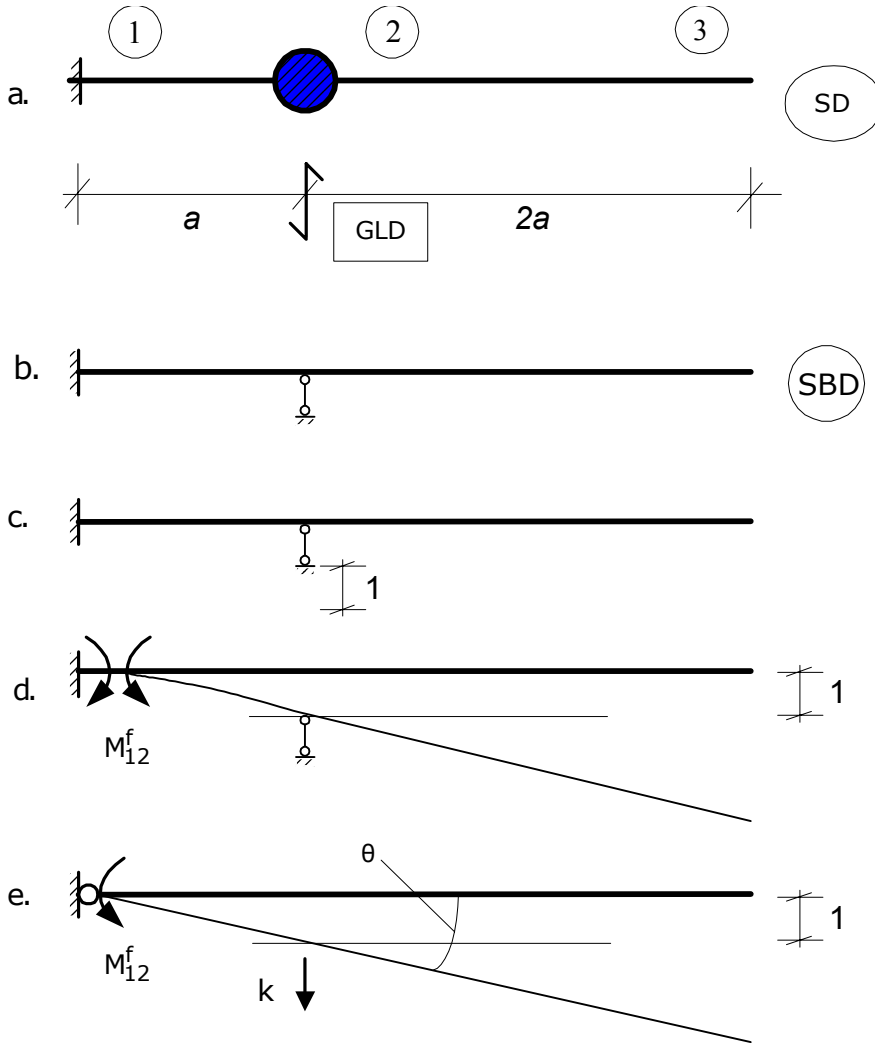


Fig. 8. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. deformata sistemului sub acțiunea unei cedări de reazem egală cu unitatea; e. deplasata pentru determinarea rigidității

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 8.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 8.b și se precizează situația de încărcare, figura 8.c. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul poate fi analizat ca o grindă încastrată în secțiunea 1 și simplu rezemată în secțiunea 2, făcând abstracție de consola 23, neîncărcată, figura 8.d. În această situație, momentul din secțiunea 1, notat M_{12}^f , reprezintă rigiditatea la deplasare, \bar{K}_{12} , deci

$$M_{12}^f = \bar{K}_{12} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{a^2}.$$

În figura 8.e s-a prezentat deplasata sistemului pentru calculul rigidității prin aplicarea principiului lucrului mecanic virtual. Ecuația de echilibru este

$$LNV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{12}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{a} \Rightarrow k = \frac{3EI}{a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 1.7321 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 3.6275 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.8. Structura 8

Pentru structura din figura 9 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse la începutul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 9.a, se construiește sistemul de bază

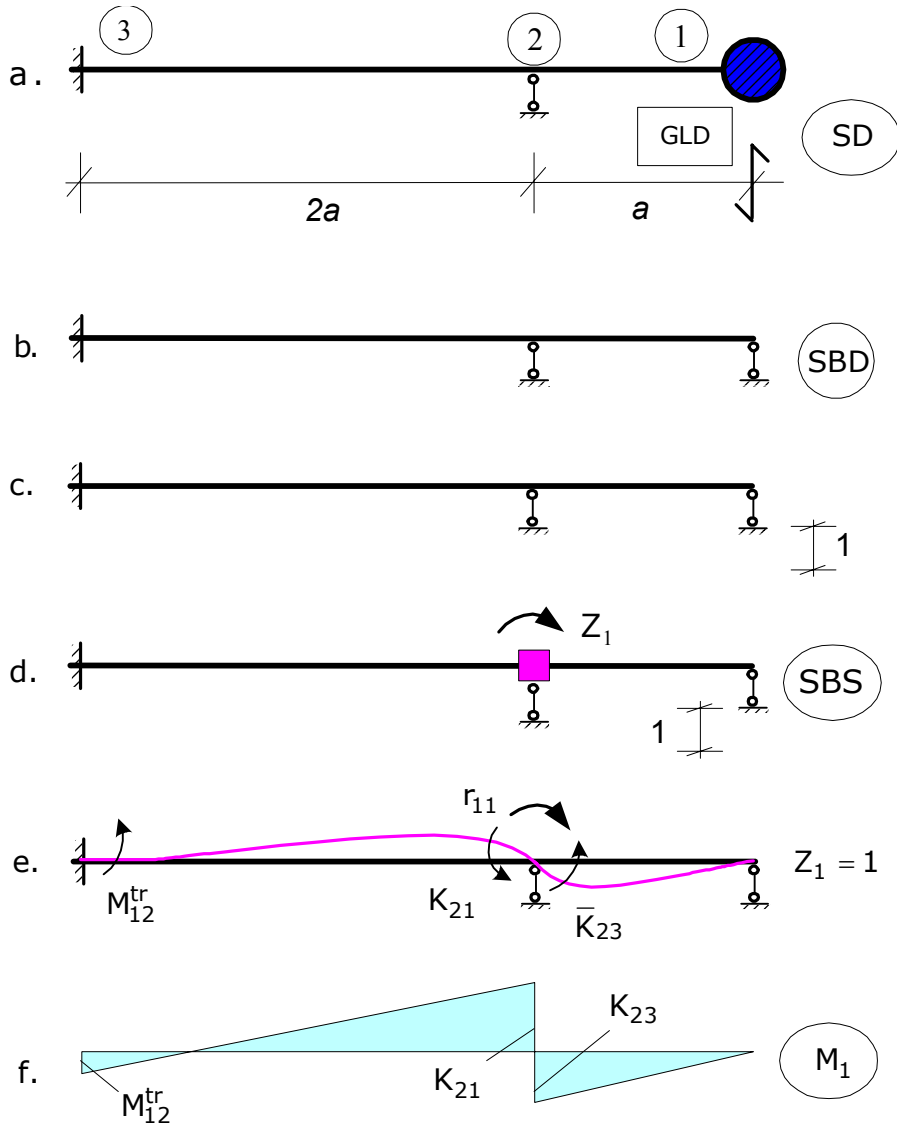


Fig. 9. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. și f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama unitară de moment încovoietor

dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 9.b și se precizează situația de încărcare, figura 9.c. Sistemul de bază dinamic

este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat având o singură nedeterminare statică. Calculele se vor efectua prin metoda deplasărilor. Sistemul de bază este desenat în figura 9.d.

Ecuția de echilibru elastic este

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0.$$

Coeficientul r_{11} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 9.e. Se scrie o ecuație de echilibru static

$$\sum M_2 = 0; \quad r_{11} - K_{23} - K_{21} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară

$$K_{23} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{a},$$

$$K_{21} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{2a} = \frac{2EI}{a},$$

rezultă

$$r_{11} = \frac{3EI}{a} + \frac{2EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{5EI}{a}.$$

Termenul liber R_{1P} se calculează prin exprimarea echilibrului static al forțelor de pe deformată sistemului de bază dinamic, produsă de o cedare de reazem, egală cu unitatea produsă pe direcția GLD, în blocajul introdus pe sistemul static al modelului dinamic, figura 9.g. Se obține

$$\sum M_2 = 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{23} = 0,$$

unde

$$\bar{K}_{23} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{a^2}.$$

Rezultă

$$R_{1P} = -\bar{K}_{23} \Rightarrow R_{1P} = -\frac{3EI}{a^2}.$$

Soluția ecuației de echilibru este

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = -\frac{\frac{3EI}{a^2}}{\frac{5EI}{a}} \Rightarrow Z_1 = \frac{3}{5a}.$$

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^P,$$

$$M_{32}^f = 0;$$

$$M_{12}^f = M_{12}^{tr} \cdot Z_1 + 0$$

unde

$$M_{12}^{tr} = K_{21} \cdot t_{21} = \frac{4EI}{2a} \cdot 0.5 \Rightarrow M_{12}^{tr} = \frac{2EI}{a},$$

rezultă

$$M_{12}^f = \frac{3EI}{5a^2},$$

$$M_{21}^f = -K_{21} \cdot Z_1 + 0 = -\frac{2EI}{a} \cdot \frac{3}{5a} \Rightarrow M_{21}^f = -\frac{6EI}{5a^2},$$

$$M_{23}^f = K_{23} \cdot Z_1 - \bar{K}_{23} = \frac{3EI}{a} \cdot \frac{3}{5a} - \frac{3EI}{5a^2} \Rightarrow M_{23}^f = -\frac{6EI}{5a^2},$$

diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 9.i.

Diagrama finală de moment încovoietor se verifică cu relația

$$\sum \frac{M_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = 0.$$

Situația de încărcare și diagrama unitară virtuală de moment încovoietor sunt prezentate în figurile 9.j și k.

Aplicând relația de mai sus rezultă

$$\begin{aligned} \sum \frac{M_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx &= \frac{2a}{3EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{3EI}{5a^2} + 2 \cdot \frac{6EI}{5a^2} \cdot 0 + \frac{6EI}{5a^2} \cdot 2a \right) = . \\ &= -\frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 0, \end{aligned}$$

deci s-a calculat corect diagrama de moment încovoietor.

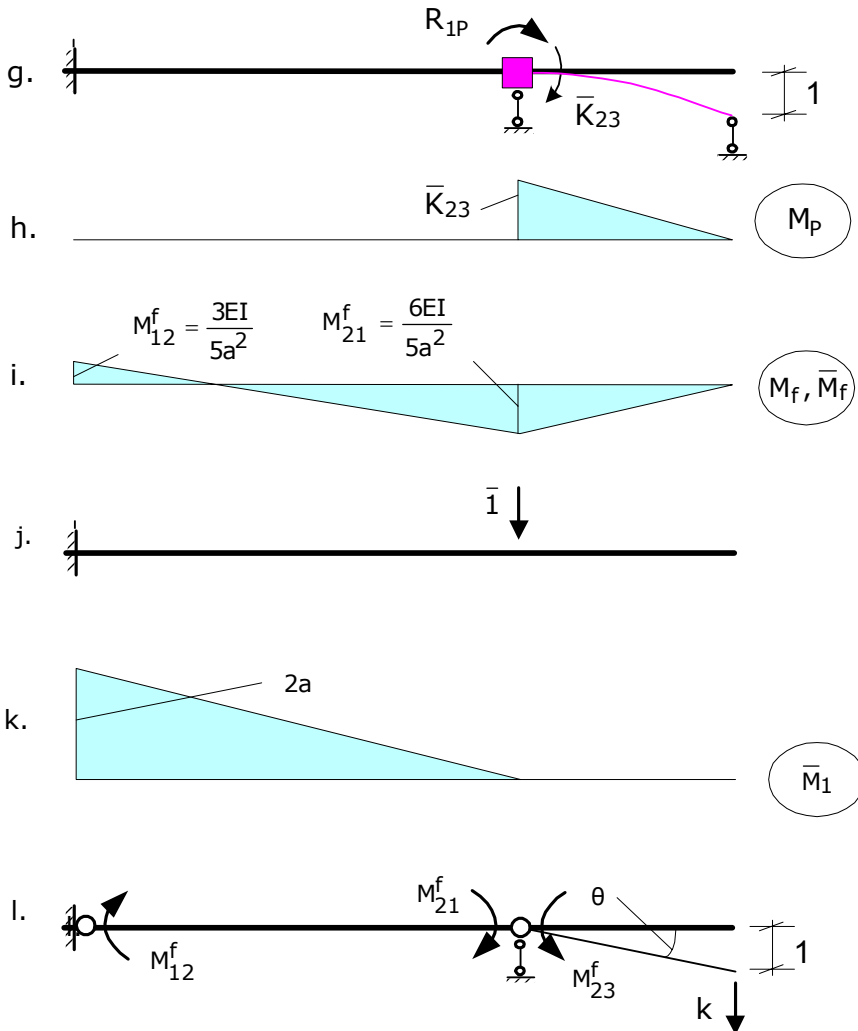


Fig. 8. continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. și h. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor; i. diagrama finală de moment încovoietor; j. și k. situație de încărcare pentru verificarea diagramei finale de moment încovoietor și diagrama corespunzătoare; l. deplasata specifică pentru determinarea rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 2, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 9.l. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în

dreptul reazemului 3 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 9.1:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{32}^f \cdot \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad k = M_{32}^f \cdot \theta$$

Cunoscând

$$\theta = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6EI}{5a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{6EI}{5ma^3}} \quad \Rightarrow \quad \omega = 1.0954 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 5.736 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.9. Structura 9

Pentru structura din figura 10 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în introducerea capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 10.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 10.b și se precizează situația de încărcare, figura 10.c. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Sistemul de bază dinamic este de două ori static nedeterminat. Calculele se vor efectua prin metoda forțelor. Sistemul de bază este desenat în figura 10.d.

Sistemul de ecuații de echilibru elastic este

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = \Delta_{1C} \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = \Delta_{2C} \end{cases}.$$

Calculul coeficienților δ_{11} , δ_{21} , δ_{12} și δ_{22}

În figura 10.e este arătată situația de încărcare pentru trasarea diagramei unitare de moment încovoietor, sistemul de bază acționat de o forță $X_1 = 1$. Pentru început se determină reacțiunile:

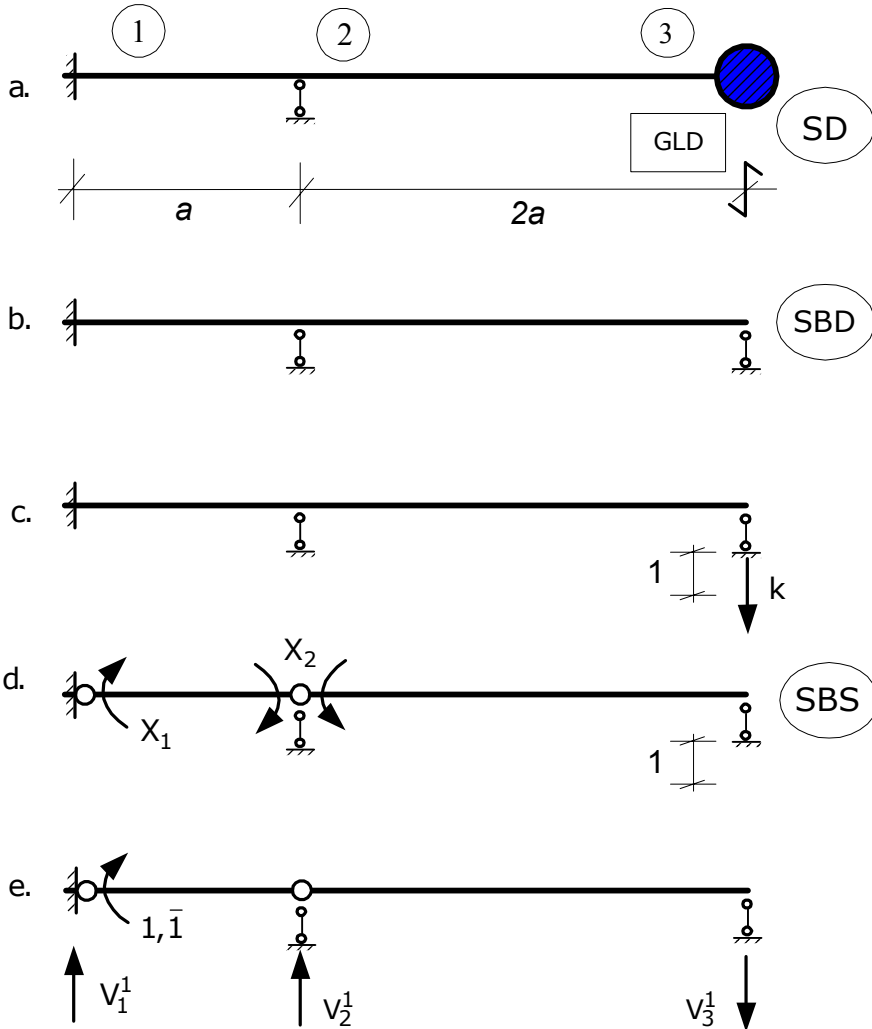


Fig. 10. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda forțelor; e. situație de încărcare pentru calculul coeficientului δ_{11}

$$\sum M_2 = 0; \quad -V_1 \cdot a + 1 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{a}$$

$$\sum M_1 = 0; \quad 1 - V_2 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{1}{a},$$

$$V_3 = 0,$$

deoarece grinda 23 este nesolicitată.

Calculul eforturilor:

$$M_{12} = -1, \quad M_{21} = M_{23} = M_{32} = 0$$

diagrama unitară de moment încovoietor este trasată în figura 10.f.

Cea de a doua situație de încărcare a sistemului de bază static cu o forță $X_2 = 1$, figura 10.g. Se determină reacțiunile prin considerarea a două grinzi simplu rezemate - grinda 1-2 și grinda 2-3:

$$\sum M_2^{\text{st}} = 0; \quad 1 - V_1^2 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1^2 = \frac{1}{a},$$

$$\sum M_1 = 0; \quad -V_{21}^2 \cdot a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{21}^2 = \frac{1}{a},$$

$$\sum M_2^{\text{dr}} = 0; \quad -1 + V_3^2 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad V_3^2 = \frac{1}{2a},$$

$$\sum M_3 = 0; \quad V_{23}^2 \cdot 2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{23}^2 = \frac{1}{2a},$$

rezultă evident că reacțiunea V_2^2 se obține prin însumarea următoarelor două reacțiuni V_{21}^2 și V_{23}^2 :

$$V_2^2 = V_{21}^2 + V_{23}^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad V_2^2 = \frac{3}{2a}.$$

Calculul eforturilor:

$$M_{12} = M_{32} = 0, \quad M_{21} = M_{23} = -1,$$

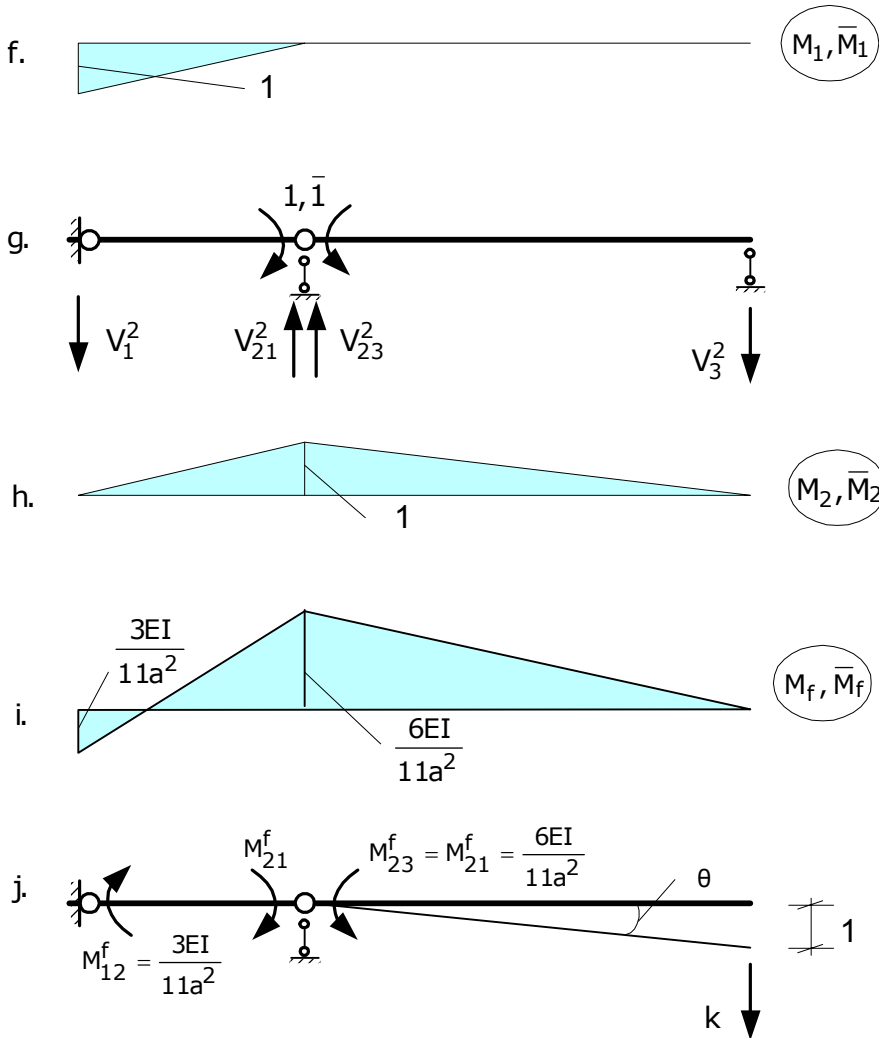
diagrama unitară de moment încovoietor este trasată în figura 10.h.

Coeficienții se determină aplicând relația Mohr-Maxwell, astfel

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_1(x)}{EI} dx,$$

rezultă

$$\delta_{11} = \frac{a}{3EI} \cdot 1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_{11} = \frac{a}{3EI},$$



$$\delta_{22} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_2(x) \cdot M_2(x)}{EI} dx = \frac{a}{3EI} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2a}{3EI} \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \delta_{22} = \frac{a}{EI},$$

$$\delta_{12} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_2(x)}{EI} dx = -\frac{a}{6EI} \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \delta_{12} = -\frac{a}{6EI}.$$

Termenii liberi se calculează cu relația

$$\Delta_{iC} = 1 \cdot \Delta_i + \sum R_k^i \cdot \Delta_k.$$

Astfel, vom obține

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 + \sum R_k^1 \cdot \Delta_k$$

sau

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 + V_1^1 \cdot 0 + V_2^1 \cdot 0 + V_3^1 \cdot 1 \Rightarrow \Delta_{1C} = 0,$$

deoarece $V_3^1 = 0$ și $\Delta_3 = 1$

și

$$\Delta_{2C} = 1 \cdot \Delta_2 + \sum R_k^2 \cdot \Delta_k$$

sau

$$\Delta_{2C} = 1 \cdot \Delta_2 + V_1^2 \cdot 0 + V_2^2 \cdot 0 + V_3^2 \cdot 1 \Rightarrow \Delta_{1C} = \frac{1}{2a},$$

deoarece $V_3^2 = \frac{1}{2a}$ și $\Delta_3 = 1$.

Soluția sistemului de ecuații de echilibru elastic este

$$X_1 = \frac{6EI}{11a^2}, \quad X_2 = \frac{3EI}{11a^2}.$$

Eforturile diagramei finale de moment încovoietor se determină cu relația

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot X_1 + M_{ij}^2(x) \cdot X_2,$$

iar prin aplicarea acestei relații se obțin eforturile

$$M_{12}^f(x) = M_{12}^1(x) \cdot X_1 + M_{12}^2(x) \cdot X_2 = 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 \Rightarrow M_{12}^f(x) = \frac{3EI}{11a^2},$$

$$M_{21}^f(x) = M_{21}^1(x) \cdot X_1 + M_{21}^2(x) \cdot X_2 = 0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 \Rightarrow M_{21}^f(x) = -\frac{6EI}{11a^2},$$

$$M_{23}^f = M_{21}^f, \quad M_{32}^f = 0,$$

diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 10.i.

Diagrama finală de moment încovoietor se verifică cu relațiile

$$\sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \Delta_{1C}$$

și

$$\sum \int_0^l \frac{\bar{M}_2(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \Delta_{2C}.$$

Folosind prima relație de mai sus și diagramele desenate în figurile 10.f și i, rezultă

$$\begin{aligned} \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx &= \frac{a}{6EI} \cdot \left(2 \cdot \frac{3EI}{11a^2} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{6EI}{11a^2} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{3EI}{11a^2} - \right. \\ &\quad \left. - 1 \cdot \frac{6EI}{11a^2} \right) = \frac{1}{11a} - \frac{1}{11a} = 0, \end{aligned}$$

rezultatul este corect deoarece $\Delta_{1C} = 0$.

Utilizând cea de a doua relație de verificare se obține

$$\begin{aligned} \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_2(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx &= \frac{a}{6EI} \cdot \left(\frac{3EI}{11a^2} \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{6EI}{11a^2} - 1 \cdot \frac{3EI}{11a^2} + \right. \\ &\quad \left. + 0 \cdot \frac{6EI}{11a^2} \right) + \frac{2a}{3EI} \cdot 1 \cdot \frac{6EI}{11a^2} = \frac{1}{2a}, \end{aligned}$$

rezultatul este corect deoarece $\Delta_{2C} = \frac{1}{2a}$. În concluzie, constatăm că diagrama finală de moment încovoietor este bine calculată.

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 3, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 10.j. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în dreptul reazemului 2 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 10.j:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{23}^f \cdot \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad k = M_{32}^f \cdot \theta$$

Cunoscând

$$\theta = \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3EI}{11a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{3EI}{11ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.5222\sqrt{\frac{EI}{ma^3}};$$

$$T = 12.0315\sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.10. Structura 10

Pentru structura din figura 11 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se respecta etapele de calcul expuse în preambulului capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 11.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 11.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Deoarece sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat, fiind de patru ori static nedeterminat, calculele se vor efectua prin metoda deplasărilor. Sistemul de bază este desenat în figura 11.c, care presupune o singură necunoscută.

Ecuția de echilibru static are forma

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0.$$

Coeficientul r_{11} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 11.d. Se scrie o ecuație de echilibru static

$$\sum M_2 = 0; \quad r_{11} - K_{23} - K_{21} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară

$$K_{21} = K_{23} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{1.5a},$$

$$M_{12}^{tr} = K_{21} \cdot t_{21} = \frac{4EI}{1.5a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{1.5a}, \quad M_{32}^{tr} = M_{12}^{tr}$$

rezultă

$$r_{11} = \frac{4EI}{1.5a} + \frac{4EI}{1.5a} \Rightarrow r_{11} = \frac{8EI}{1.5a}.$$

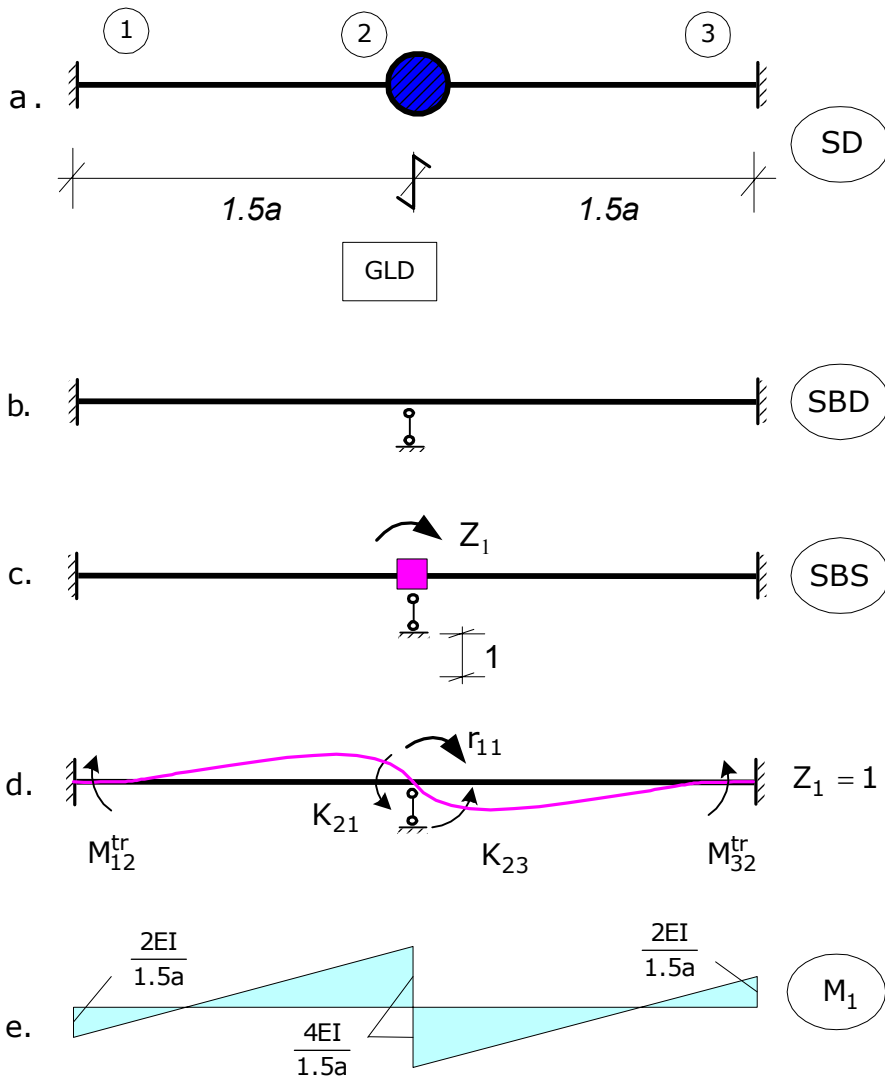


Fig.11. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. sistem de bază în metoda deplasărilor și situație de încărcare; d. și e. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama unitară de moment încovoietor

Termenul liber R_{1P} se calculează prin exprimarea echilibrului static al forțelor de pe deformata sistemului de bază dinamic produsă de o cedare de reazem, egală cu unitatea produsă pe direcția GLD în blocajul introdus pe sistemul static al modelului dinamic, figura 11.f. Se obține

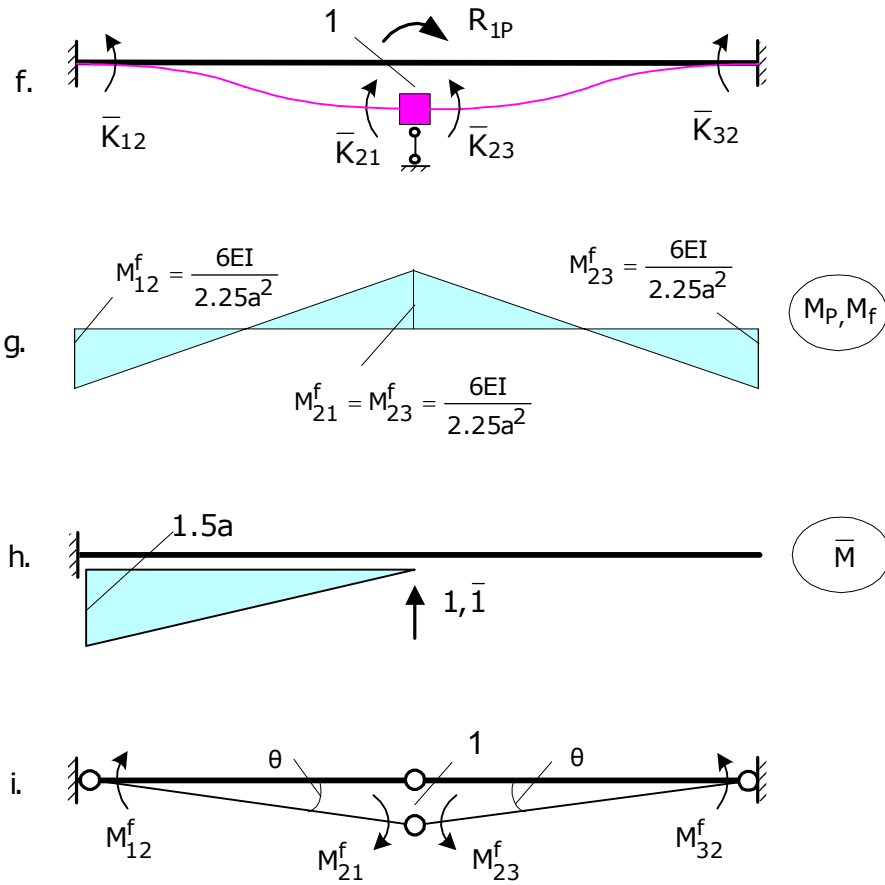


Fig.11. continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 f. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea; g. diagrama de moment încovoietor pentru încărcarea exterioară și diagrama finală de moment încovoietor (identice); h. diagramă unitară pentru verificarea diagramei finale; i. deplasata specifică pentru determinarea rigidității

$$\sum M_2 = 0; \quad R_{1P} - \bar{K}_{23} + \bar{K}_{21} = 0,$$

dar

$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = \bar{K}_{23} = \bar{K}_{32} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6EI}{2.25a^2}.$$

Rezultă

$$R_{1P} = \bar{K}_{23} - \bar{K}_{21} \Rightarrow R_{1P} = 0.$$

Soluția ecuației de echilibru static este

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} \Rightarrow Z_1 = 0.$$

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^P(x) \Rightarrow M_{ij}^f(x) = M_{ij}^P(x)$$

$$M_{12}^f = M_{21}^f = M_{23}^f = M_{32}^f = \frac{6EI}{2.25a^2},$$

diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 11.g.

Corectitudinea trasării diagramei de moment încovoietor se verifică cu relația

$$\sum \int_0^l \frac{\bar{M}(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \Delta_C,$$

cele două diagrame de moment încovoietor care se înmulțesc sunt trasate în figurile 11.g (diagrama reală) și 11.i (diagrama virtuală trasată pe un sistem static determinat obținut din structura considerată), rezultă

$$\begin{aligned} \sum \int_0^l \frac{\bar{M}(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx &= \frac{1.5a}{6EI} \cdot (2 \cdot 1.5a \cdot (-\frac{6EI}{2.25a^2}) + \frac{6EI}{2.25a^2} \cdot 1.5a = \\ &= -2 + 1 = -1. \end{aligned}$$

Dar cum,

$$\Delta_C = 1 \cdot \Delta + \sum R_k \cdot \Delta_k = -1 \cdot 1 + \sum R_k \cdot 0 = -1,$$

deoarece deplasările pe direcția reacțiunilor sunt nule, singura deplasare fiind după direcția forței egală cu unitatea, corespunzătoare situației virtuale de încărcare, rezultă că s-a trasat corect diagrama de moment încovoietor.

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 2, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 11.i. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în dreptul reazemului 2 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 11.i:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - 4 \cdot \sum M_{ij}^f \cdot \theta_j = 0,$$

$$k = 4 \cdot \frac{6EI}{2.25a^2} \cdot \frac{1}{1.5a} \Rightarrow k = 7.1111 \frac{EI}{a^3}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{7.1111 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 2.6667 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 2.3562 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.1.11. Structura 11

Pentru structura din figura 12 se cere să se determine pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor urmări etapele de calcul expuse în preambulului capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 12.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 12.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată pe direcția blocajului introdus pe direcția GLD.

Deoarece sistemul de bază dinamic este un sistem static nedeterminat, având patru nedeterminări statice, calculele se vor efectua prin metoda deplasărilor. Sistemul de bază desenat în figura 12.c presupune o singură necunoscută.

Ecuția de echilibru static are forma

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0.$$

Coeficientul r_{11} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 12.d. Se scrie o ecuație de echilibru static

$$\sum M_2 = 0; \quad r_{11} - K_{23} - K_{21} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară

$$K_{21} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{2a} = \frac{2EI}{a},$$

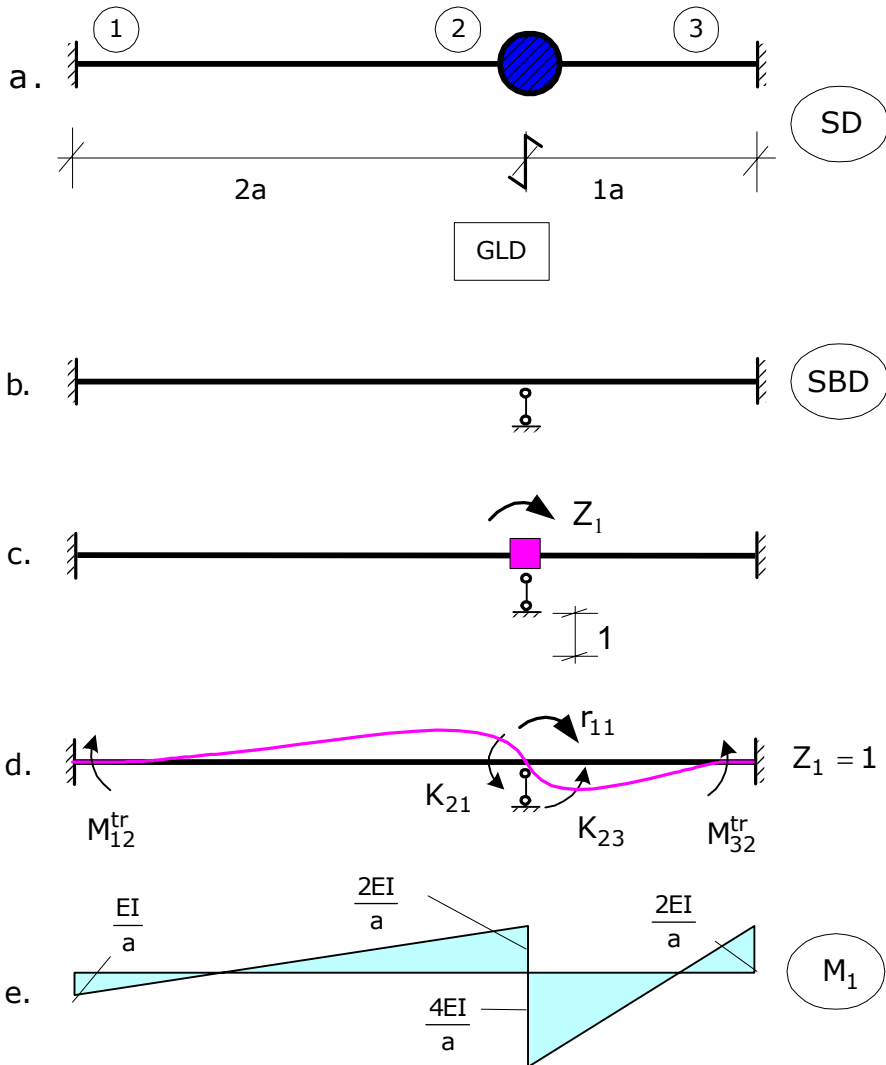


Fig.12. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. sistem de bază în metoda deplasărilor și situație de încărcare; d. și e. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama unitară de moment încovoietor

$$K_{23} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{a}$$

$$M_{12}^{tr} = K_{21} \cdot t_{21} = \frac{2EI}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{EI}{a},$$

$$M_{32}^{\text{tr}} = K_{23} \cdot t_{23} = \frac{4EI}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{a}$$

rezultă

$$r_{11} = \frac{4EI}{a} + \frac{2EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{6EI}{a}.$$

Termenul liber R_{1P} se calculează prin exprimarea echilibrului static al forțelor de pe deformata sistemului de bază dinamic produsă de o cedare de reazem, egală cu unitatea produsă pe direcția GLD în blocajul introdus pe sistemul static al modelului dinamic, figura 12. f. Se obține

$$\sum M_2 = 0; \quad R_{1P} - \bar{K}_{23} + \bar{K}_{21} = 0,$$

dar cum

$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6EI}{4a^2} = \frac{3EI}{2a},$$

$$\bar{K}_{23} = \bar{K}_{32} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6EI}{a^2},$$

rezultă

$$R_{1P} = \bar{K}_{23} - \bar{K}_{21} = \frac{6EI}{a^2} - \frac{3EI}{2a^2} \Rightarrow R_{1P} = \frac{9EI}{2a^2}.$$

Soluția ecuației de echilibru static este

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} \Rightarrow Z_1 = -\frac{3}{4a}.$$

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^p(x),$$

și se obțin următoarele momente încovoietoare

$$M_{12}^f = M_{12}^1 \cdot Z_1 + M_{12}^p = \frac{EI}{a} \cdot \left(-\frac{3}{4a}\right) - \frac{3EI}{2a^2} \Rightarrow M_{12}^f = -\frac{9EI}{4a^2},$$

$$M_{21}^f = M_{21}^1 \cdot Z_1 + M_{21}^p = \left(-\frac{2EI}{a}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4a}\right) + \frac{3EI}{2a^2} \Rightarrow M_{21}^f = \frac{3EI}{a^2},$$

$$M_{32}^f = M_{32}^1 \cdot Z_1 + M_{32}^p = \left(-\frac{2EI}{a}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4a}\right) - \frac{6EI}{a^2} \Rightarrow M_{32}^f = -\frac{9EI}{2a^2},$$

diagrama finală de moment încovoietor este trasată în figura 12.g.

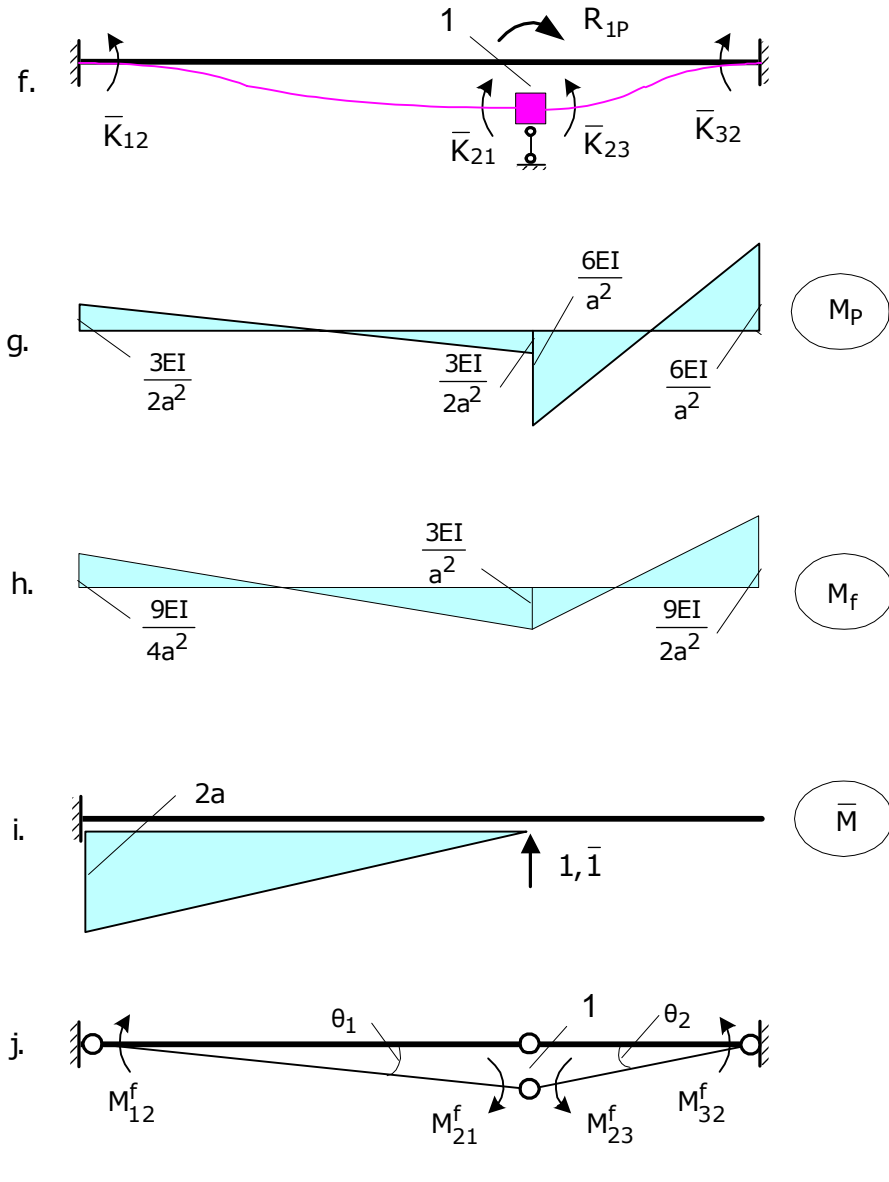


Fig. 12 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 f. și g. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor;
 h. diagrama finală de moment încovoietor; i. diagramă unitară pentru verificarea diagramei finale; j. deplasata specifică pentru determinarea rigidității

Corectitudinea trasării diagramei de moment încovoietor se verifică cu relația

$$\sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \Delta_{1C},$$

cele două diagrame de moment încovoietor care se înmulțesc sunt trasate în figurile 12.h (diagrama reală) și 12.i (diagrama virtuală trasată pe un sistem static determinat obținut din structura considerată prin suprimarea legăturilor suplimentare), rezultă

$$\sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_f(x)}{EI} dx = \frac{2a}{6EI} \cdot (2 \cdot 2a \cdot (-\frac{9EI}{4a^2})) + \frac{3EI}{a^2} \cdot 2a = -1$$

Se calculează scalarul Δ_{1C} care reprezintă deplasarea măsurată pe direcția forței virtuale egală cu unitatea. Pentru aceasta se folosește relația

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 + \sum R_k^1 \cdot \Delta_k = -1 \cdot 1 + \sum R_k \cdot 0 = -1.$$

Rezultatul a apărut deoarece deplasările pe direcția reacțiunilor sunt nule, singura deplasare fiind după direcția forței egală cu unitatea, corespunzătoare situației virtuale de încărcare și indică faptul că s-a trasat corect diagrama de moment încovoietor.

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul 2, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 12.j. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legătura suprimată din bara 123, în dreptul reazemului 2 și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 11.j:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - (M_{12}^f + M_{21}^f) \cdot \theta_1 - (M_{23}^f + M_{32}^f) \cdot \theta_2 = 0,$$

unde

$$\theta_1 = \frac{1}{2a}, \quad \theta_2 = \frac{1}{a}$$

și

$$k = \left(\frac{9EI}{4a^2} + \frac{3EI}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{2a} + \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{9EI}{2a^2}\right) \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow k = 10.1250 \frac{EI}{a^3}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{10.1250 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 3.1820 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 1.9746 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2. Cadre

1.2.1. Structura 1

Pentru cadrul din figura 1.13 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 13.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 13.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului introdus pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 13.c.

Pentru calculul rigidității k , reacțiunea din blocajul GLD, se va folosi metoda deplasărilor. Sistemul de bază este constituit în figura 13.d, prin introducerea unui număr de blocaje egal cu gradul de nedeterminare cinematico-elastică al sistemului de bază dinamic.

Sistemul de ecuații de echilibru static are forma

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2P} = 0. \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3P} = 0 \end{cases}$$

Determinarea coeficienților r_{11} și r_{21}

Coeficientul r_{11} și r_{21} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 3, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 13.d. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{11} - K_{34} - K_{31} = 0,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{21} - M_{43}^{tr} = 0.$$

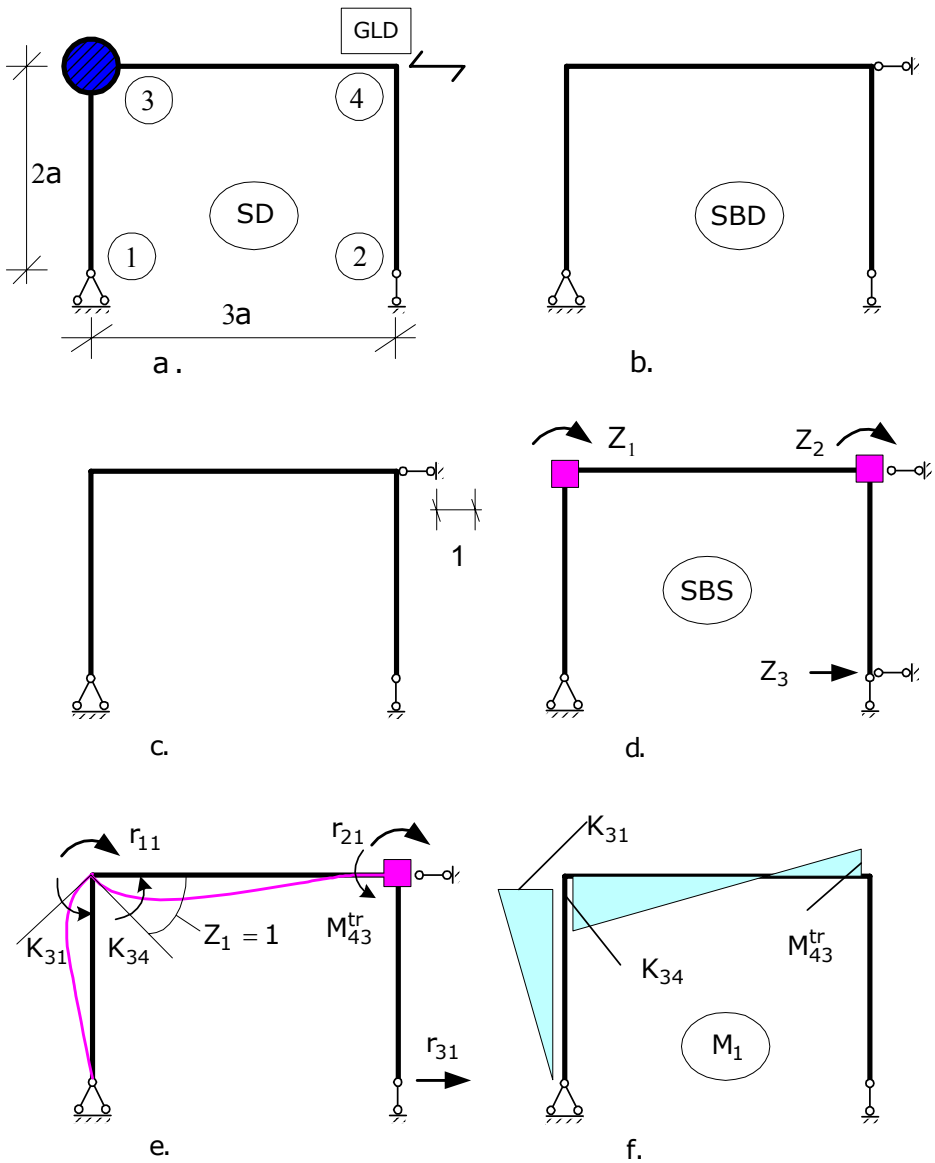


Fig.13. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. și f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama de moment încovoietor

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 3

$$K_{31} = \frac{3EI}{l} = \frac{EI}{2a}, \quad K_{34} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{3a}$$

$$M_{43}^{tr} = K_{34} \cdot t_{34} = \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{3a},$$

rezultă

$$r_{11} = K_{34} + K_{31}, \quad r_{11} = \frac{3EI}{2a} + \frac{4EI}{3a} \Rightarrow r_{11} = \frac{17EI}{6a},$$

$$r_{21} = M_{43}^{tr}, \quad r_{21} = \frac{2EI}{3a}.$$

Determinarea coeficienților r_{12} și r_{22}

Coeficientul r_{12} și r_{22} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 4, egală cu unitatea, $Z_2 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 13.g. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{12} - M_{34}^{tr} = 0,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{22} - K_{43} - K_{42} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 4

$$K_{42} = \frac{3EI}{l} = \frac{EI}{2a}, \quad K_{43} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{3a}$$

$$M_{34}^{tr} = K_{43} \cdot t_{43} = \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{3a},$$

rezultă

$$r_{21} = M_{34}^{tr} \Rightarrow r_{21} = \frac{2EI}{3a},$$

$$r_{22} = K_{43} + K_{42}, \quad r_{22} = \frac{4EI}{3a} + \frac{3EI}{2a}, \quad r_{22} = \frac{17EI}{6a}.$$

Determinarea coeficienților r_{13} și r_{23}

Coeficientul r_{13} și r_{23} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem, nodul 2, egală cu unitatea, $Z_3 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 13.i. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

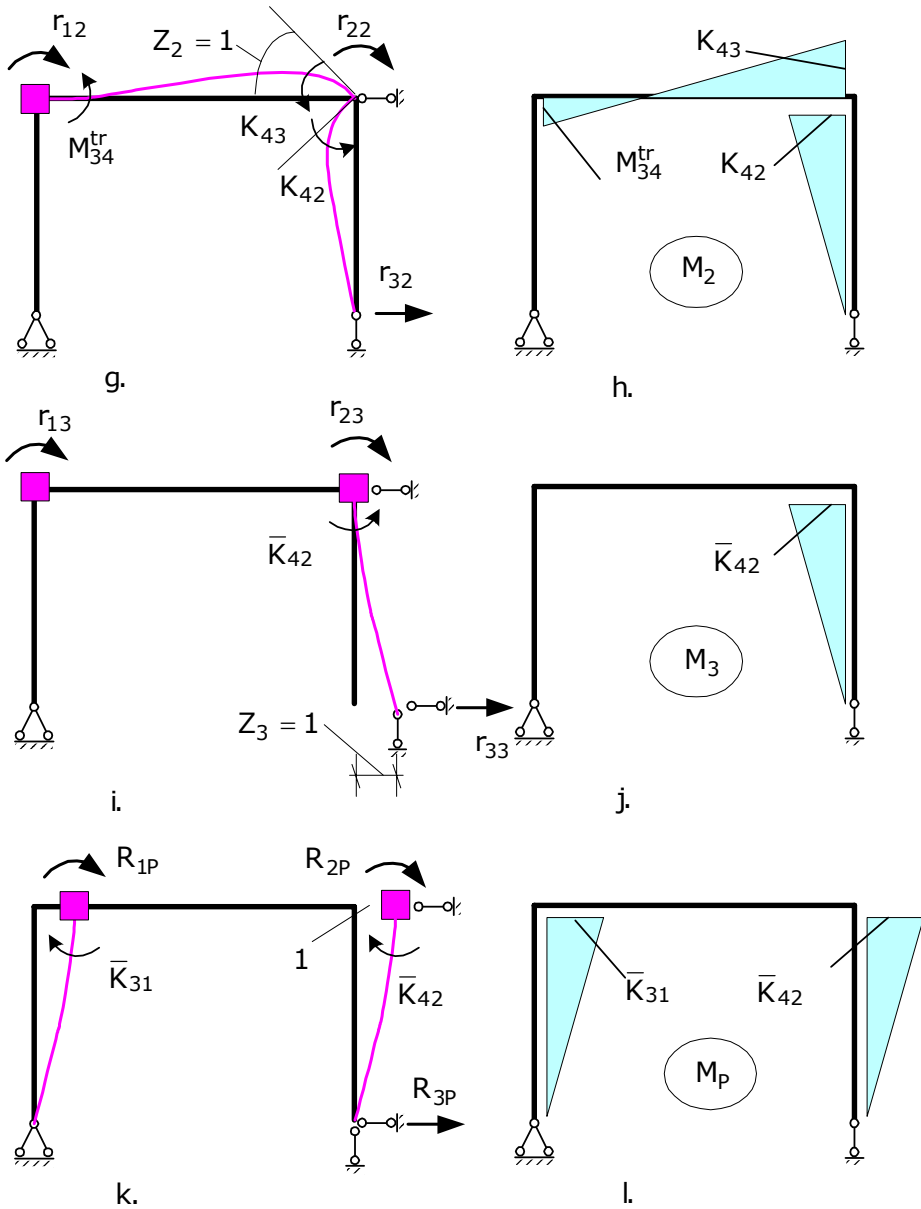


Fig.13 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. și h. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_2 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; i. și j. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj grad de libertate, $Z_3 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; k. și l. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor

$$\begin{aligned}\sum M_3 &= 0; \quad r_{13} = 0, \\ \sum M_4 &= 0; \quad r_{23} - \bar{K}_{42} = 0.\end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară ce concură în nodul 4

$$\bar{K}_{42} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{4a^2},$$

rezultă

$$r_{13} = 0 \quad r_{23} = \frac{3EI}{4a^2}.$$

Calculul termenilor liberi R_{1P} și R_{2P}

Termenii liberi R_{1P} și R_{2P} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem de GLD, egală cu unitatea, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 13.k. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned}\sum M_3 &= 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{31} = 0, \\ \sum M_4 &= 0; \quad R_{2P} + \bar{K}_{42} = 0.\end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară ce concură în nodul 4, respectiv în nodul 3

$$\bar{K}_{42} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{2a^2}, \quad \bar{K}_{31} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{2a^2}$$

rezultă

$$\begin{aligned}R_{1P} &= \bar{K}_{31}, \quad R_{1P} = -\frac{3EI}{2a^2}, \\ R_{2P} &= \bar{K}_{42}, \quad R_{2P} = -\frac{3EI}{2a^2}.\end{aligned}$$

Determinarea coeficienților r_{31} , r_{32} și r_{33}

Având calculate diagramele de moment încovoietor corespunzătoare deformatelor sistemului de bază acționat, succesiv, cu cedările de reazem: $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ și $Z_3 = 1$, prezentate în figurile 13.f., h., j., coeficienții r_{31} , r_{32} și r_{33} se pot determina folosind principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat, succesiv, de momentele încovoietoare introduse în

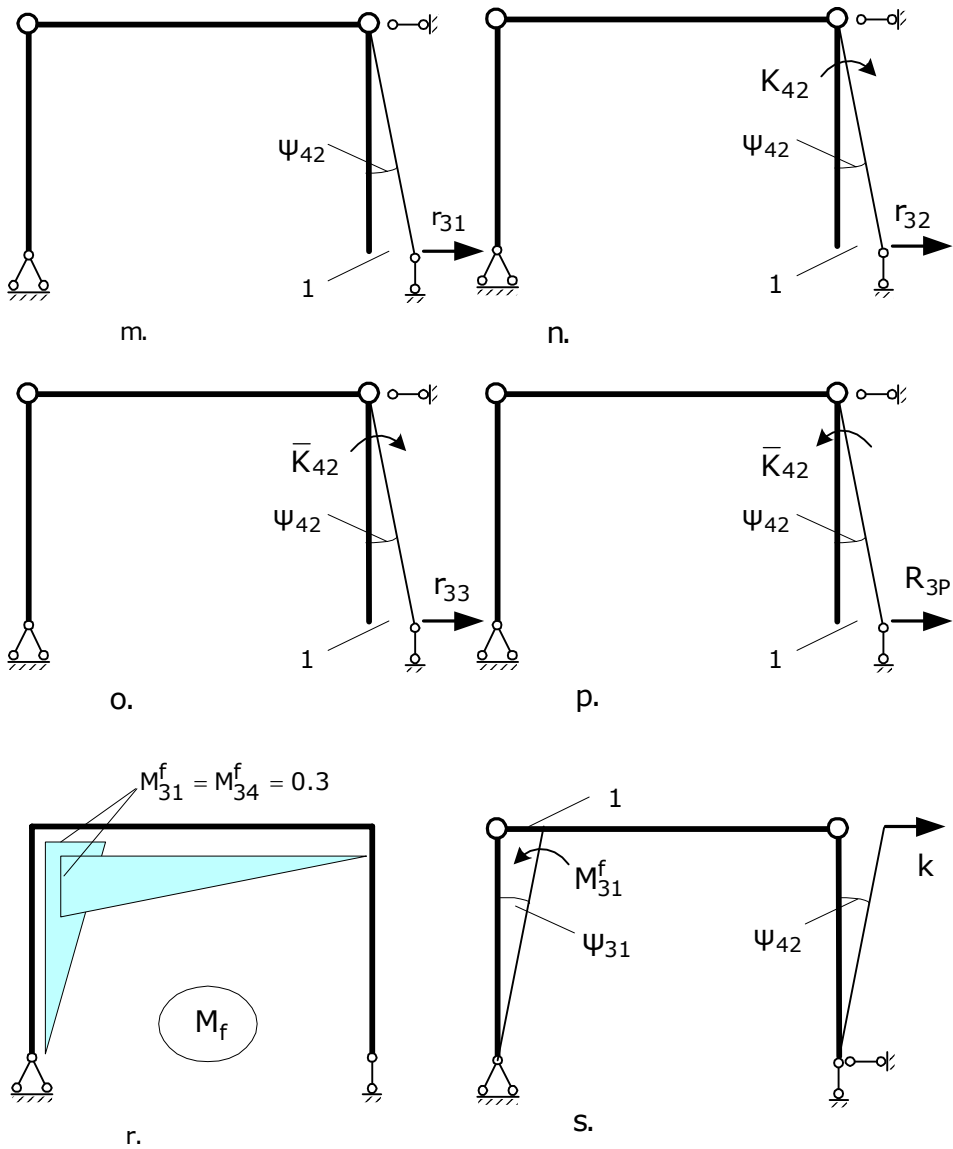


Fig.13 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: m., n., o. și p. deplasate specifice pentru calculul coeficienților - r_{31} , r_{32} , r_{33} și termenului liber - R_{3p} ; r. diagrama finală de moment încovoietor; s. deplasată specifică pentru calculul rigidității - k

locul legăturile suprimate, figurile 13.m., n. și o.

În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figurile 13.m., n. și o.:

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{31} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{31} = 0$$

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{32} \cdot 1 - K_{42} \cdot \theta = 0,$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad r_{32} = \frac{3EI}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad r_{32} = \frac{3EI}{4a^2}$$

și

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{33} \cdot 1 - \bar{K}_{42} \cdot \theta = 0,$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad r_{33} = \frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad r_{33} = \frac{3EI}{8a^3}.$$

Calculul termenului liber R_{3p}

Se folosește diagrama de moment încovoietor, figura 13.l, corespunzătoare deformatelor sistemului de bază acționat cu cedarea de blocaj de GLD, egală cu unitatea figura 13.k. Pentru calculul termenului liber R_{3p} se utilizează principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat de momentele încovoietoare introduse în locul legăturile suprimate, figura 13.p.

În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 13.p

$$\text{LMV} = 0; \quad R_{3p} \cdot 1 + \bar{K}_{42} \cdot \theta = 0$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad R_{3p} = -\frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad R_{3p} = -\frac{3EI}{8a^3}.$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru

Sistemul de ecuații de echilibru static, după înlocuirea coeficienților și a termenilor liberi, are forma

$$\begin{cases} \frac{17EI}{6a} \cdot Z_1 + \frac{2EI}{3a} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 - \frac{3EI}{4a^2} = 0 \\ \frac{2EI}{3a} \cdot Z_1 + \frac{17EI}{6a} \cdot Z_2 + \frac{3EI}{4a^2} \cdot Z_3 - \frac{3EI}{4a^2} = 0 \\ 0 \cdot Z_1 + \frac{3EI}{4a^2} \cdot Z_2 + \frac{3EI}{8a^3} \cdot Z_3 - \frac{3EI}{8a^3} = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$Z_1 = \frac{0.3}{a}, \quad Z_2 = 1.3, \quad Z_3 = -\frac{0.15}{a}.$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^2(x) \cdot Z_2 + M_{ij}^3(x) \cdot Z_3 + M_{ij}^P(x),$$

și se obțin următoarele momente încovoietoare

$$M_{13}^f = M_{24}^f = 0$$

$$\begin{aligned} M_{31}^f &= -K_{31} \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + \bar{K}_{31} = \\ &= \frac{3EI}{2a} \cdot \frac{0.3}{a} + \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{31}^f = \frac{0.3EI}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{34}^f &= K_{34} \cdot Z_1 + M_{34} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + 0 = \\ &= \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{0.3}{a} + \frac{2EI}{3a} \cdot \left(-\frac{0.15}{a}\right) \Rightarrow M_{34}^f = \frac{0.3EI}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{43}^f &= -M_{43}^{tr} \cdot Z_1 - K_{43} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + 0 = \\ &= -\frac{2EI}{3a} \cdot \frac{0.3}{a} - \frac{4EI}{3a} \cdot \left(-\frac{0.15}{a}\right) \Rightarrow M_{43}^f = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{42}^f &= 0 \cdot Z_1 + K_{42} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 - \bar{K}_{42} = \\ &= \frac{3EI}{2a} \cdot \left(-\frac{0.15}{a}\right) + \frac{3EI}{4a^2} \cdot 1.3 - \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{42}^f = 0. \end{aligned}$$

Diagrama final de moment încovoietor este trasată în figura 13.r.

Calculul rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul simplu, blocajul GLD, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 13.s. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legăturile suprimate și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 13.s:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{31}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

și

$$k = M_{31}^f \cdot \theta = \frac{0.3}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow k = 0.15 \cdot \frac{EI}{a^2}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{0.15 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.3873 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 16.223 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.2. Structura 2

Pentru cadrul din figura 1.14 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 14.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 14.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului de pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 14.c.

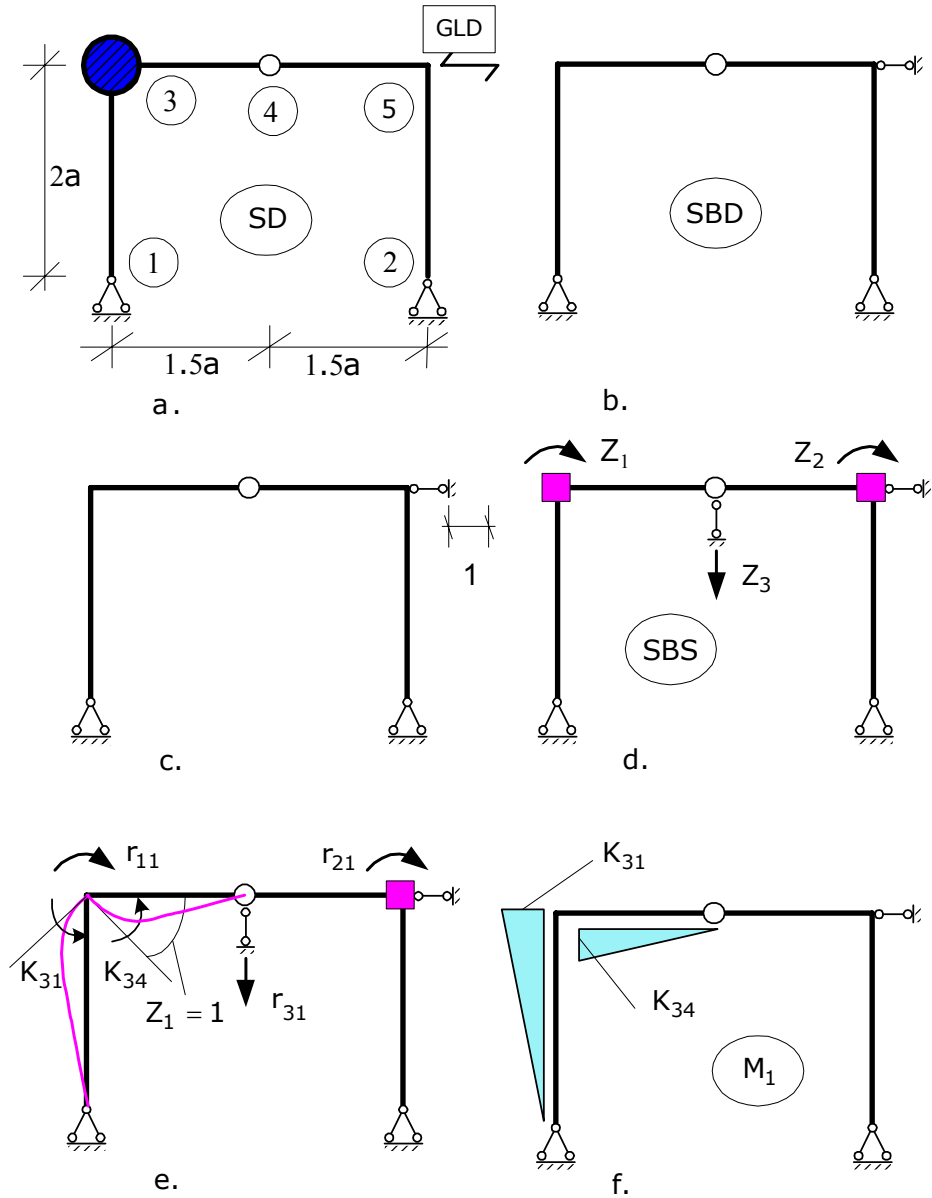


Fig.14. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. și f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama de moment încovoietor

În vederea determinării rigidității k , reacțiunea din blocajul GLD, se va folosi metoda deplasărilor. Sistemul de bază este constituit în figura 14.d, prin introducerea unui număr de blocaje egal cu gradul de nedeterminare cinematico-elastică al sistemului de bază dinamic.

Sistemul de ecuații de echilibru static are forma

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2P} = 0. \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3P} = 0 \end{cases}$$

Determinarea coeficienților r_{11} și r_{21}

Coeficientul r_{11} și r_{21} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 3, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 14.d. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0; \quad r_{11} - K_{34} - K_{31} = 0, \\ \sum M_5 = 0; \quad r_{21} = 0. \end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 3

$$K_{31} = \frac{3EI}{l} = \frac{EI}{2a}, \quad K_{34} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{1.5a},$$

rezultă

$$\begin{aligned} r_{11} = K_{34} + K_{31}, \quad r_{11} = \frac{3EI}{2a} + \frac{2EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{7EI}{2a}, \\ r_{21} = 0. \end{aligned}$$

Determinarea coeficienților r_{12} și r_{22}

Coeficientul r_{12} și r_{22} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 5, egală cu unitatea, $Z_2 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 14.g. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned} \sum M_4 = 0; \quad r_{12} = 0, \\ \sum M_5 = 0; \quad r_{22} - K_{52} - K_{54} = 0. \end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 4

$$K_{54} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{1.5a}, \quad K_{52} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{2a}$$

rezultă

$$r_{12} = 0$$

$$r_{22} = K_{52} + K_{54}, \quad r_{22} = \frac{3EI}{2a} + \frac{2EI}{a}, \quad r_{22} = \frac{7EI}{2a}.$$

Determinarea coeficienților r_{13} și r_{23}

Coeficientul r_{13} și r_{23} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem, nodul 4, egală cu unitatea, $Z_3 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 14.i. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= 0; \quad r_{13} + \bar{K}_{34} = 0, \\ \sum M_5 &= 0; \quad r_{23} - \bar{K}_{54} = 0. \end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară ce concură în nodurile 3 și 5

$$\begin{aligned} \bar{K}_{54} &= \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{(1.5a)^2} = \frac{3EI}{2.25a^2}, \\ \bar{K}_{34} &= \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{(1.5a)^2} = \frac{3EI}{2.25a^2} \end{aligned}$$

rezultă

$$r_{13} = -\frac{3EI}{2.25a^2}, \quad r_{23} = \frac{3EI}{2.25a^2}.$$

Calculul termenilor liberi R_{1P} și R_{2P}

Termenii liberi R_{1P} și R_{2P} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem de GLD, egală cu unitatea, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 14.k. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{31} = 0, \\ \sum M_5 &= 0; \quad R_{2P} + \bar{K}_{52} = 0. \end{aligned}$$

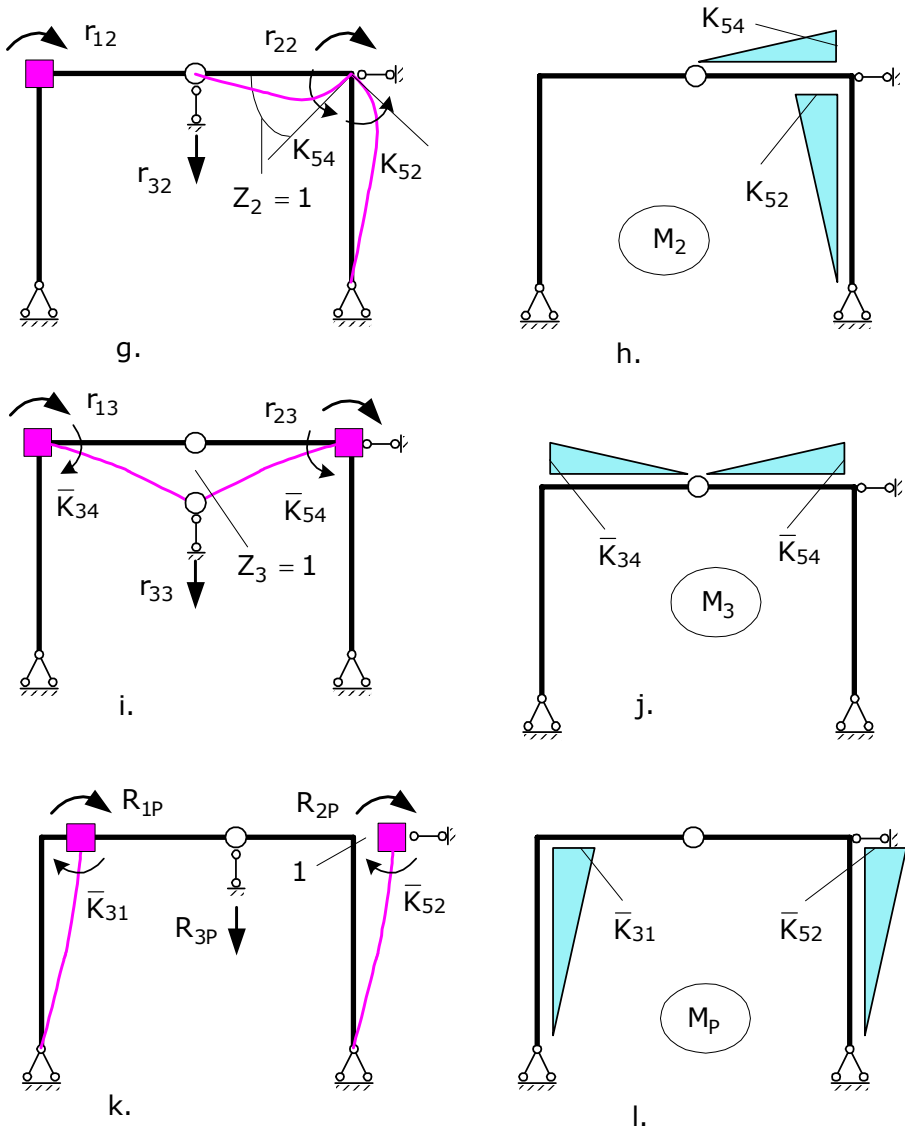


Fig.14 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. și h. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_2 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; i. și j. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj grad de libertate, $Z_3 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; k. și l. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor

Determinarea coeficienților r_{31} , r_{32} și r_{33}

Având calculate diagramele de moment încovoietor corespunzătoare deformatelor sistemului de bază acționat, succesiv, cu cedările de reazem: $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ și $Z_3 = 1$, prezentate în figurile 14.f, h, j, coeficienții r_{31} , r_{32} și r_{33} se pot determina folosind principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat, succesiv, de momentele încovoietoare introduse în locul legăturile suprimate, figurile 14.m, n și o.

În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figurile 14.m, n. și o:

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{31} \cdot 1 + K_{24} \cdot \theta = 0$$

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{32} \cdot 1 - K_{54} \cdot \theta = 0,$$

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{33} \cdot 1 - \bar{K}_{34} \cdot \theta - \bar{K}_{54} \cdot \theta = 0,$$

dar

$$\theta = \frac{1}{1.5a},$$

$$r_{31} = -K_{34} \cdot \theta = -\frac{3EI}{1.5a} \cdot \frac{1}{1.5a} \Rightarrow r_{32} = -\frac{3EI}{2.25a^2}$$

$$r_{32} = K_{54} \cdot \theta = \frac{3EI}{1.5a} \cdot \frac{1}{1.5a} \Rightarrow r_{32} = \frac{3EI}{2.25a^2}$$

și

$$r_{33} = K_{54} \cdot \theta + K_{34} \cdot \theta = \frac{3EI}{2.25a^2} \cdot \frac{1}{1.5a} + \frac{3EI}{2.25a^2} \cdot \frac{1}{1.5a}$$

$$\Rightarrow r_{32} = \frac{6EI}{3.375a^3}.$$

Calculul termenului liber R_{3p}

Se folosește diagrama de moment încovoietor, figura 14.l, corespunzătoare deformatei sistemului de bază acționat cu cedarea de blocaj de GLD, egală cu unitatea figura 14.k. Pentru calculul termenului liber R_{3p} se utilizează principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat de momentele încovoietoare introduse în locul legăturile suprimate, figura 14.p.

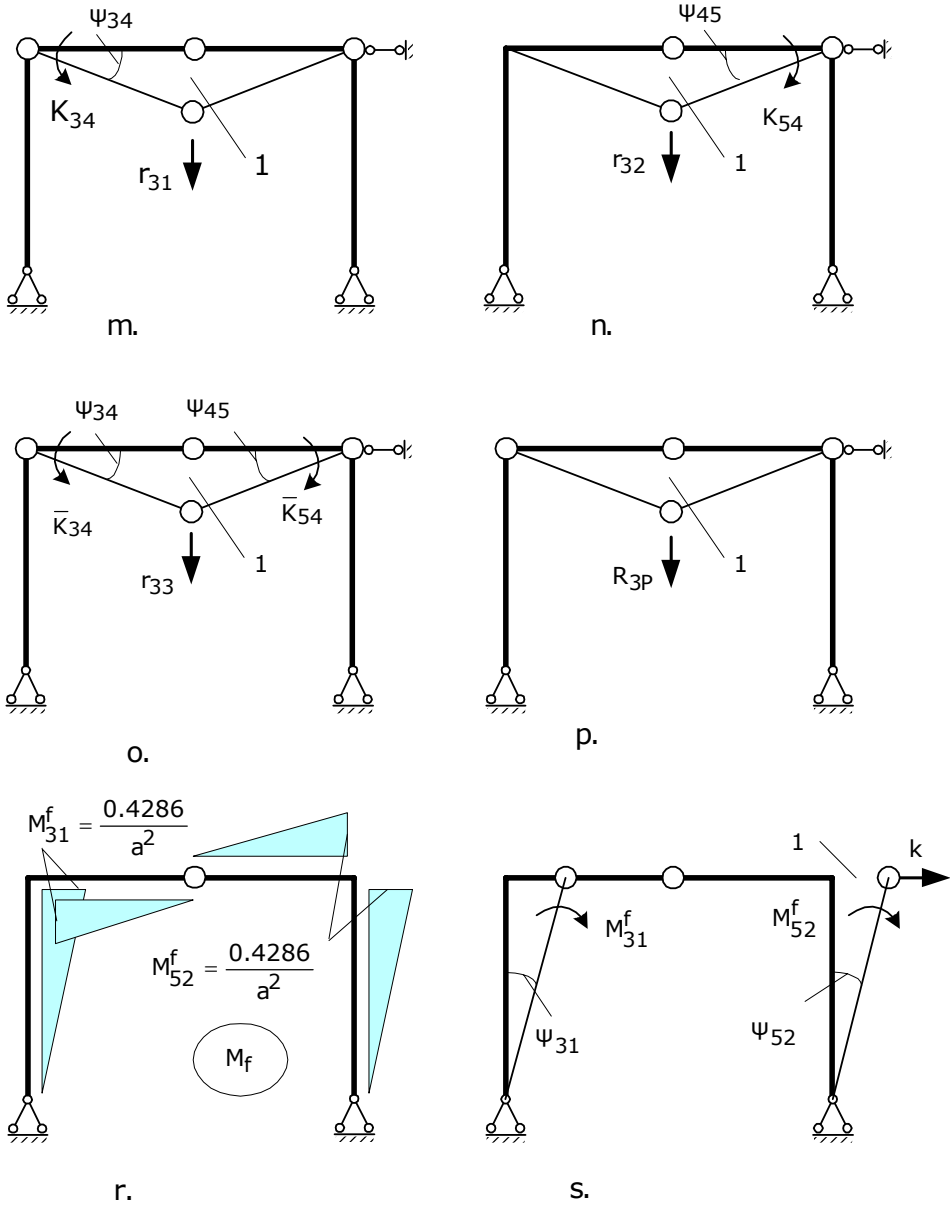


Fig.14 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: m., n., o. și p. deplasate specifice pentru calculul coeficienților - r_{31} , r_{32} , r_{33} și termenului liber - R_{3P} ; r. diagrama finală de moment încovoietor; s. deplasată specifică pentru calculul rigidității - k

Pentru scrierea ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 14.p

$$\text{LMV} = 0; \quad R_{3p} \cdot 1 + \bar{K}_{42} \cdot \theta = 0$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad R_{3p} = -\frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow R_{3p} = -\frac{3EI}{8a^3}.$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru

Sistemul de ecuații de echilibru static, după înlocuirea coeficienților și a termenilor liberi, are forma

$$\begin{cases} 3.5a \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 - 1.3333 \cdot Z_3 - 0.75 = 0 \\ 0 \cdot Z_1 + 3.5a \cdot Z_2 + 1.3333 \cdot Z_3 - 0.75 = 0 \\ -1.3333 \cdot Z_1 + 1.3333 \cdot Z_2 + 1.7778 \cdot Z_3 - 0 = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$Z_1 = \frac{0.2143}{a}, \quad Z_2 = \frac{0.2143}{a}, \quad Z_3 = 0.$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

Ordonatele din diagrama unitară finală de moment încovoietor se determină folosind relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^2(x) \cdot Z_2 + M_{ij}^3(x) \cdot Z_3 + M_{ij}^P(x),$$

se obțin următoarele momente încovoietoare

$$\begin{aligned} M_{13}^f &= M_{43}^f = M_{45}^f = M_{25}^f = 0 \\ M_{31}^f &= -K_{31} \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + \bar{K}_{31} = \\ &= \left(-\frac{3EI}{2a} \cdot \frac{0.2143}{a} + \frac{3EI}{4a^2}\right) \Rightarrow M_{31}^f = \frac{0.4286EI}{a^2}, \\ M_{34}^f &= K_{34} \cdot Z_1 + M_{34} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + 0 = \\ &= \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{0.3}{a} + \frac{2EI}{3a} \cdot \left(-\frac{0.15}{a}\right) \Rightarrow M_{34}^f = \frac{0.3EI}{a^2}, \\ M_{34}^f &= K_{34} \cdot Z_1 - 0 \cdot Z_2 + \bar{K}_{34} \cdot Z_3 + 0 = \end{aligned}$$

$$= \frac{3EI}{1.5a} \cdot \frac{0.2143}{a} \Rightarrow M_{43}^f = \frac{0.4286EI}{a^2},$$

$$M_{54}^f = 0 \cdot Z_1 - K_{54} \cdot Z_2 - \bar{K}_{54} \cdot Z_3 + 0 =$$

$$= -\frac{3EI}{2a} \cdot \frac{0.2143}{a} \Rightarrow M_{54}^f = -\frac{0.4286EI}{a^2}.$$

$$M_{52}^f = 0 \cdot Z_1 + K_{52} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 - \bar{K}_{52} =$$

$$= \frac{3EI}{2a} \cdot \frac{0.2143}{a} - \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{54}^f = -\frac{0.4286EI}{a^2}.$$

Diagrama final de moment încovoietor este trasată în figura 14.r.

Calculul rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul simplu, blocajul GLD, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 14.s. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legăturile suprimate și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 14.s:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{31}^f \cdot \theta - M_{52}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

și

$$k = M_{31}^f \cdot \theta + M_{52}^f \cdot \theta = 2 \cdot 0.4286 \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow k = 0.4286 \cdot \frac{EI}{a^3}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{0.4286 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.6547 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 9.5973 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.3. Structura 3

Pentru cadrul din figura 1.15 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 15.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 15.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului de pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 14.c.

În vederea determinării rigidității k , reacțiunea din blocajul GLD, se va folosi metoda deplasărilor. Sistemul de bază este constituit în figura 14.d, prin introducerea unui număr de blocaje egal cu gradul de nedeterminare cinematico-elastică al sistemului de bază dinamic.

Sistemul de ecuații de echilibru static are forma

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

Determinarea coeficientului r_{11}

Coeficientul r_{11} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 4, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 15.e. Se scrie următoarea ecuație de echilibru static

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{11} - K_{43} - K_{42} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 3

$$K_{43} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{3a} = \frac{EI}{a}, \quad K_{42} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{2a} = \frac{1.5EI}{a},$$

rezultă

$$r_{11} = K_{43} + K_{42}, \quad r_{11} \frac{EI}{a} + \frac{1.5EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{2.5EI}{a}.$$

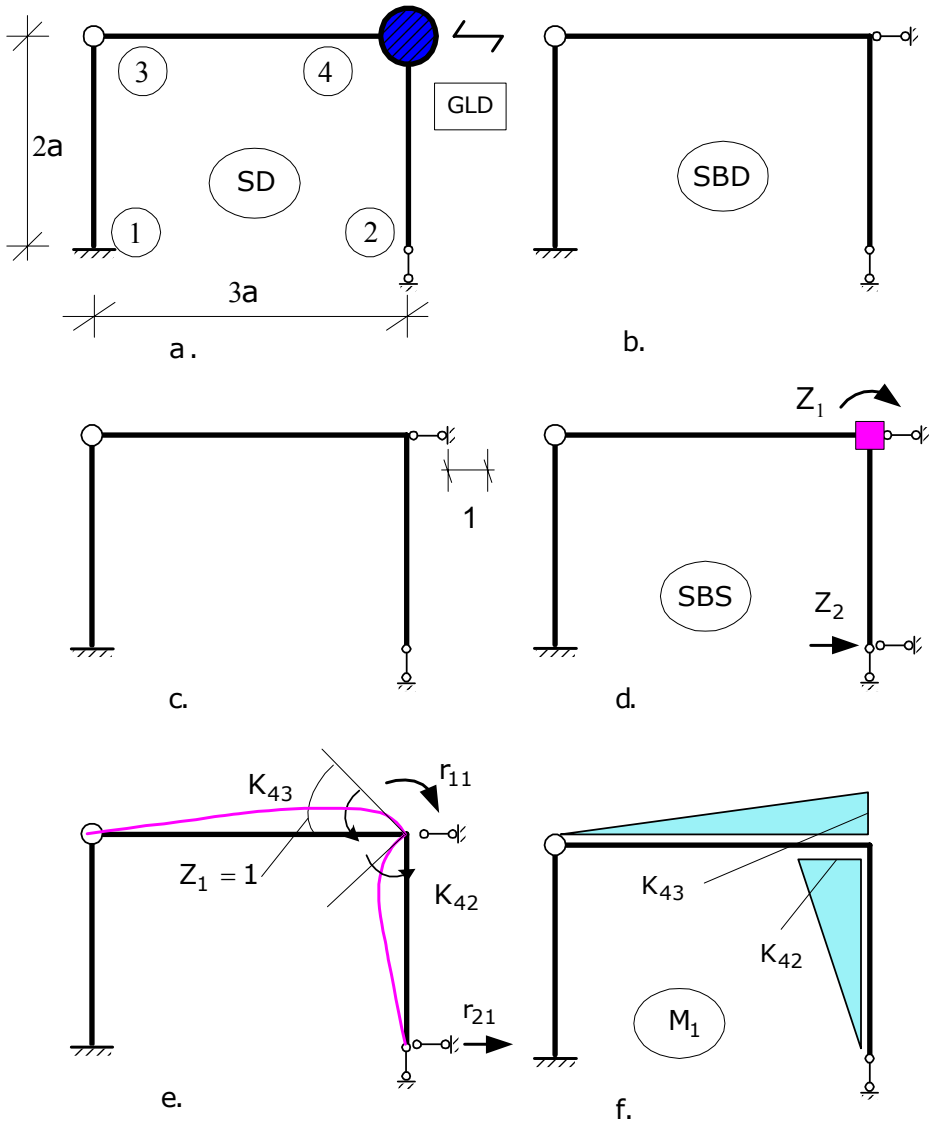


Fig.15. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. și f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama de moment încovoietor

Determinarea coeficientului r_{12}

Coeficientul r_{12} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de grad de libertate, nodul 2, egală cu unitatea, $Z_2 = 1$,

deformata corespunzătoare este prezentată în figura 15.g. Se scrie următoarea ecuație de echilibru static

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{12} - \bar{K}_{42} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidității la rotire a extremității barei ce concură în nodul 4

$$\bar{K}_{42} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{(2a)^2} = \frac{3EI}{4a^2}.$$

rezultă

$$r_{12} = \bar{K}_{24} \Rightarrow r_{12} = \frac{0.75EI}{a^2}.$$

Calculul termenului liber R_{1P}

Termenul liber R_{1P} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem de GLD, egală cu unitatea, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 14.i. Se scrie următoarea ecuație de echilibru static

$$\sum M_4 = 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{42} = 0,$$

$$\sum M_5 = 0; \quad R_{2P} + \bar{K}_{52} = 0.$$

Cunoscând expresia rigidităților la deplasare a extremității de bară ce concură în nodul 4

$$\bar{K}_{42} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{(2a)^2} = \frac{0.75EI}{a^2}.$$

Determinarea coeficienților r_{21} și r_{22}

Având calculate diagramele de moment încovoietor corespunzătoare deformatelor sistemului de bază acționat, succesiv, cu cedările de reazem: $Z_1 = 1$ și $Z_2 = 1$, prezentate în figurile 15.f și h, coeficienții r_{21} și r_{22} se pot determina folosind principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat, succesiv, de momentele încovoietoare introduse în locul legăturile suprimate, figurile 15.k și l.

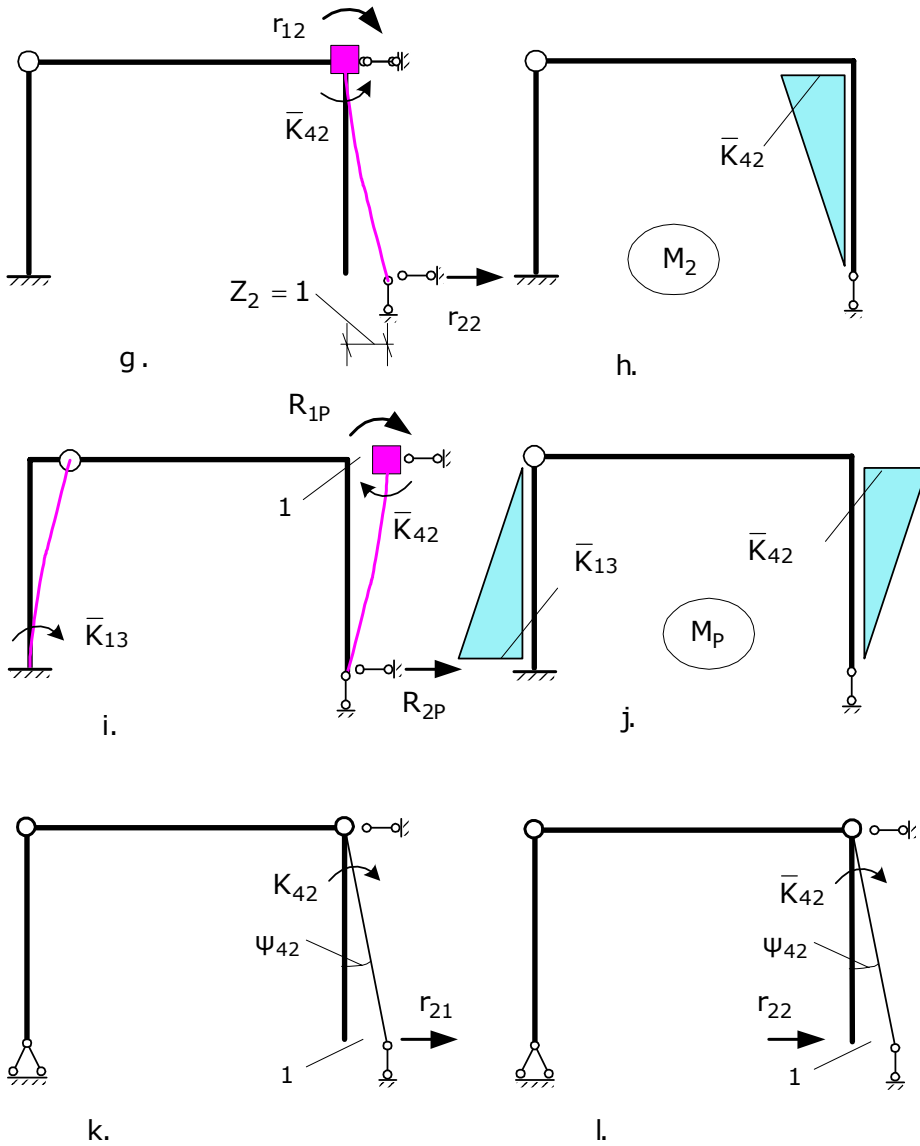


Fig.15 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. și h. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_2 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; i. și j. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor; k., l. deplasate specifice pentru calculul coeficienților - r_{21} și r_{22}

În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figurile 14.k, și l.:

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{21} \cdot 1 + K_{42} \cdot \theta = 0$$

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{22} \cdot 1 - \bar{K}_{42} \cdot \theta = 0,$$

dar

$$\theta = \frac{1}{1.5a},$$

$$r_{21} = K_{42} \cdot \theta = \frac{1.5EI}{a} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow r_{21} = \frac{0.75EI}{a^2},$$

$$r_{22} = K_{42} \cdot \theta = \frac{3EI}{4a} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow r_{22} = \frac{0.375EI}{a^3}.$$

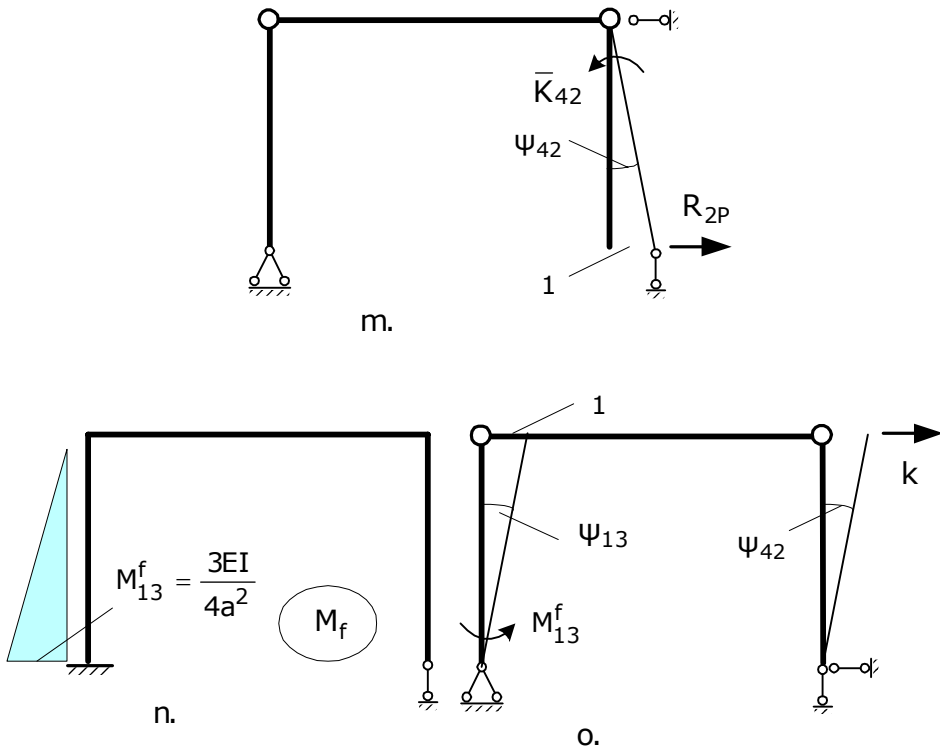


Fig.15 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: m., deplasată specifică pentru calculul termenului liber - R_{3P} ; n. diagrama finală de moment încovoietor; o. deplasată specifică pentru calculul rigidității - k

Calculul termenului liber R_{2P}

Se folosește diagrama de moment încovoietor, figura 15.j, corespunzătoare deformatelor sistemului de bază acționat cu cedarea de blocaj de GLD, egală cu unitatea figura 14.m. Pentru calculul termenului liber R_{2P} se utilizează principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat de momentele încovoietoare introduse în locul legăturilor suprimate, figura 14.m.

În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 14.m

$$LMV = 0; \quad R_{2P} \cdot 1 + \bar{K}_{42} \cdot \theta = 0$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad R_{2P} = -\frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow R_{3P} = -\frac{0.375EI}{a^3}.$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru

Sistemul de ecuații de echilibru static, după înlocuirea coeficienților și a termenilor liberi, are forma

$$\begin{cases} \frac{2.5EI}{a} \cdot Z_1 + \frac{0.75EI}{a^2} \cdot Z_2 - \frac{0.75EI}{a^2} = 0 \\ \frac{0.75EI}{a^2} \cdot Z_1 + \frac{0.375EI}{a^3} \cdot Z_2 - \frac{0.375EI}{a^3} = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = 1.$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^2(x) \cdot Z_2 + M_{ij}^P(x),$$

și se obțin următoarele momente încovoietoare

$$M_{31}^f = M_{34}^f = M_{24}^f = 0$$

$$M_{13}^f = 0 \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 - \bar{K}_{13} \Rightarrow M_{13}^f = -\frac{3EI}{4a^2},$$

$$M_{43}^f = -K_{43} \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 + 0 \Rightarrow M_{43}^f = 0$$

$$M_{42}^f = K_{42} \cdot Z_1 + \bar{K}_{24} \cdot Z_2 - \bar{K}_{24} = \frac{1.5EI}{a} \cdot 0 + \frac{3EI}{4a^2} \cdot 1 - \frac{3EI}{4a^2}$$

$$\Rightarrow M_{42}^f = 0.$$

Diagrama final de moment încovoietor este trasată în figura 15.n.

Calculul rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul simplu, blocajul GLD, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 15.o. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legăturile suprimate și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 15.o:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{13}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

și

$$k = M_{13}^f \cdot \theta = \frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow k = 0.375 \cdot \frac{EI}{a^3}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{0.75 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.6124 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 10.2604 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.4. Structura 4

Pentru cadrul din figura 1.16 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

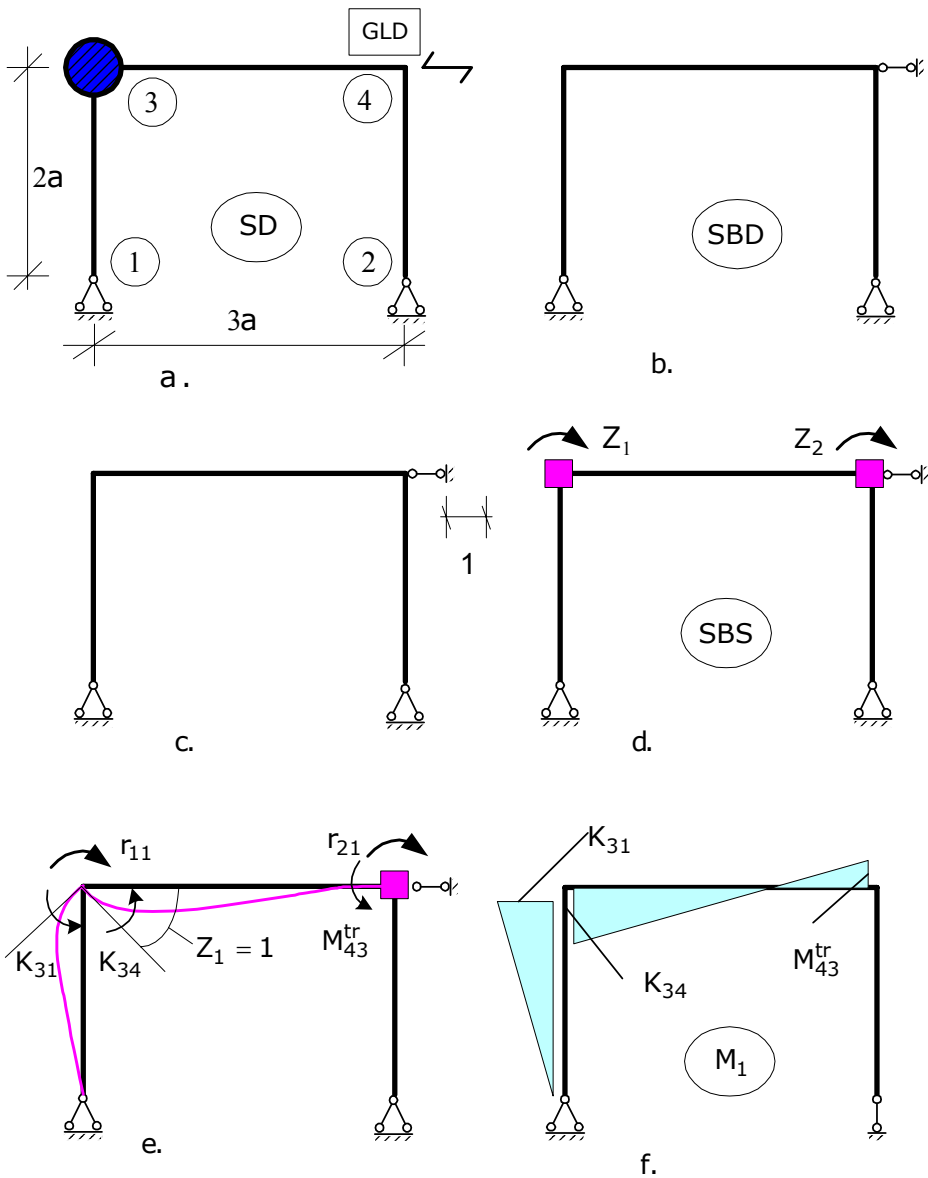


Fig.16. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. și f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama de moment încovoietor

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 16.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 16.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului de pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 16.c.

Pentru calculul rigidității k , reacțiunea din blocajul GLD, se va folosi metoda deplasărilor. Sistemul de bază este constituit în figura 16.d, prin introducerea unui număr de blocaje egal cu gradul de nedeterminare cinematico-elastică al sistemului de bază dinamic.

Sistemul de ecuații de echilibru static are forma

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2P} = 0 \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3P} = 0 \end{cases}$$

Determinarea coeficienților r_{11} și r_{21}

Coeficientul r_{11} și r_{21} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 3, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 16.d. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned} \sum M_3 &= 0; \quad r_{11} - K_{34} - K_{31} = 0, \\ \sum M_4 &= 0; \quad r_{21} - M_{43}^{\text{tr}} = 0. \end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 3

$$\begin{aligned} K_{31} &= \frac{3EI}{l} = \frac{EI}{2a}, \quad K_{34} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{3a} \\ M_{43}^{\text{tr}} &= K_{34} \cdot t_{34} = \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{3a}, \end{aligned}$$

rezultă

$$\begin{aligned} r_{11} &= K_{34} + K_{31}, \quad r_{11} = \frac{3EI}{2a} + \frac{4EI}{3a} \quad \Rightarrow \quad r_{11} = \frac{17EI}{6a}, \\ r_{21} &= M_{43}^{\text{tr}}, \quad r_{21} = \frac{2EI}{3a}. \end{aligned}$$

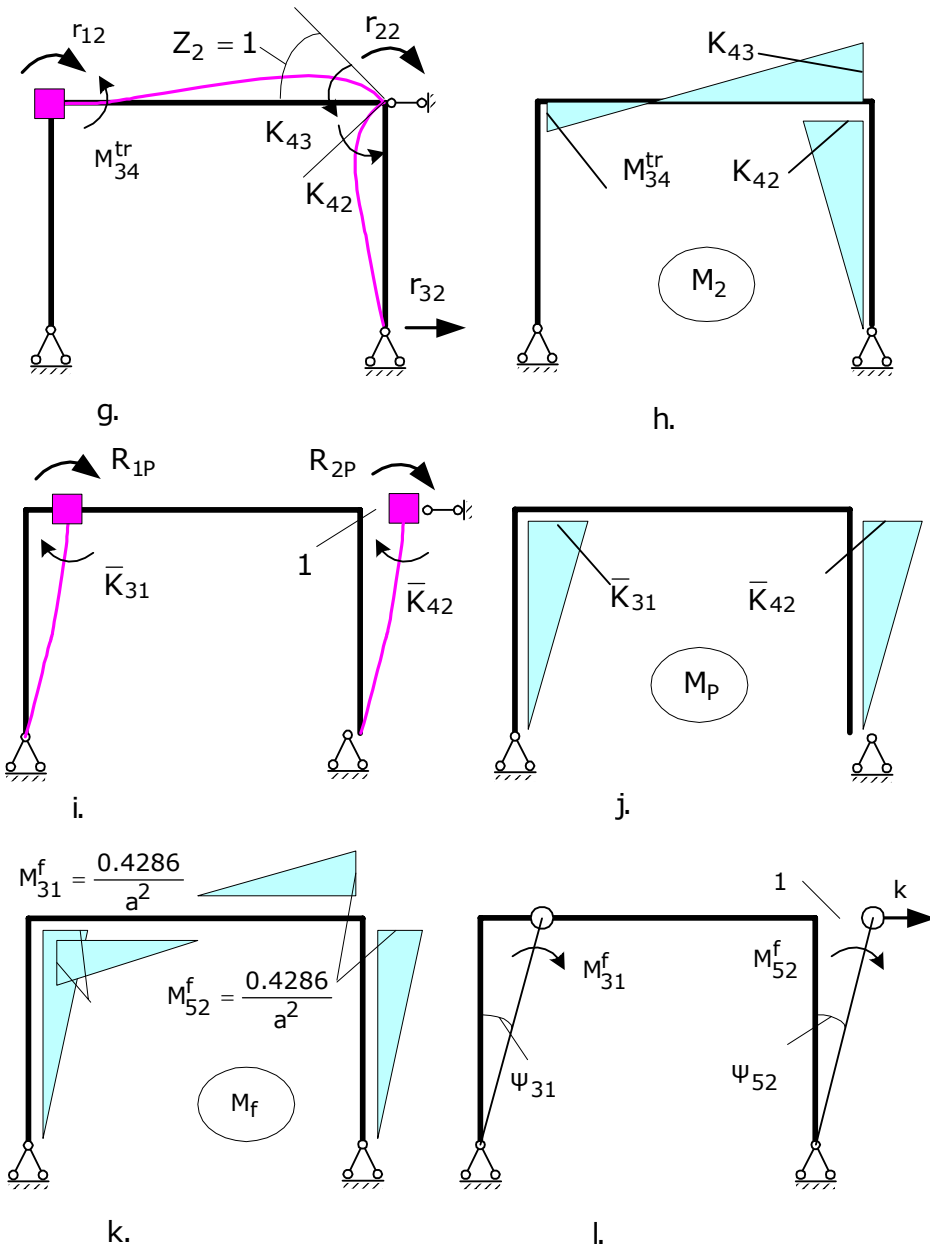


Fig.16 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. și h. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_2 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; i. și j. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor; k. diagrama finală de moment încovoietor; l. deplasată specifică pentru calculul rigidității - k

Determinarea coeficienților r_{12} și r_{22}

Coeficientul r_{12} și r_{22} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 4, egală cu unitatea, $Z_2 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 16.g. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{12} - M_{34}^{\text{tr}} = 0 ,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{22} - K_{43} - K_{42} = 0 .$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 4

$$K_{42} = \frac{3EI}{l} = \frac{EI}{2a}, \quad K_{43} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{3a}$$

$$M_{34}^{\text{tr}} = K_{43} \cdot t_{43} = \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{3a},$$

rezultă

$$r_{21} = M_{34}^{\text{tr}} \Rightarrow r_{21} = \frac{2EI}{3a},$$

$$r_{22} = K_{43} + K_{42}, \quad r_{22} = \frac{4EI}{3a} + \frac{3EI}{2a}, \quad r_{22} = \frac{17EI}{6a} .$$

Calculul termenilor liberi R_{1P} și R_{2P}

Termenii liberi R_{1P} și R_{2P} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem de GLD, egală cu unitatea, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 16.i. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad R_{1P} - \bar{K}_{31} = 0 ,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad R_{2P} - \bar{K}_{42} = 0 .$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară ce concură în nodul 4, respectiv în nodul 3

$$\bar{K}_{42} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{2a^2}, \quad \bar{K}_{31} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{2a^2}$$

rezultă

$$R_{1P} = \bar{K}_{31}, \quad R_{1P} = \frac{3EI}{2a^2},$$

$$R_{2P} = \bar{K}_{42}, \quad R_{2P} = \frac{3EI}{2a^2}.$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru

Sistemul de ecuații de echilibru static, după înlocuirea coeficienților și a termenilor liberi, are forma

$$\begin{cases} \frac{17EI}{6a} \cdot Z_1 + \frac{2EI}{3a} \cdot Z_2 - \frac{3EI}{4a^2} = 0 \\ \frac{17EI}{6a} \cdot Z_1 + \frac{2EI}{3a} \cdot Z_2 - \frac{3EI}{4a^2} = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$Z_1 = \frac{9}{42a}, \quad Z_2 = \frac{9}{42a}$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^2(x) \cdot Z_2 + M_{ij}^P(x),$$

și se obțin următoarele momente încovoietoare

$$M_{13}^f = M_{24}^f = 0$$

$$M_{31}^f = -K_{31} \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 + \bar{K}_{31} =$$

$$= \frac{3EI}{2a} \cdot \frac{9}{42a} + \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{31}^f = 0.4286 \frac{EI}{a^2},$$

$$M_{34}^f = K_{34} \cdot Z_1 + M_{34}^{tr} \cdot Z_2 + 0 =$$

$$= \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{9}{42a} + \frac{2EI}{3a} \cdot \frac{9}{42a} \Rightarrow M_{34}^f = 0.4286 \frac{EI}{a^2},$$

$$M_{43}^f = -M_{43}^{tr} \cdot Z_1 - K_{43} \cdot Z_2 + 0 =$$

$$= -\frac{2EI}{3a} \cdot \frac{9}{42a} - \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{9}{42a} \Rightarrow M_{43}^f = -0.4286 \frac{EI}{a^2},$$

$$M_{42}^f = 0 \cdot Z_1 + K_{42} \cdot Z_2 - \bar{K}_{42} =$$

$$= \frac{3EI}{2a} \cdot \frac{9}{42a} - \frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{9}{42a} \Rightarrow M_{42}^f = -0.4286 \frac{EI}{a^2}.$$

Diagrama final de moment încovoietor este trasată în figura 16.m.

Calculul rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul simplu, blocajul GLD, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 16.n. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legăturile suprimate și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 16.n:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{31}^f \cdot \theta - M_{42}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

și

$$k = M_{31}^f \cdot \theta + M_{42}^f \cdot \theta = 0.4286 \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} + 0.4286 \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a}$$

$$\Rightarrow k = 0.4286 \frac{EI}{a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{0.4286 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.6547 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 9.5973 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.5. Structura 5

Pentru cadrul din figura 1.17 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

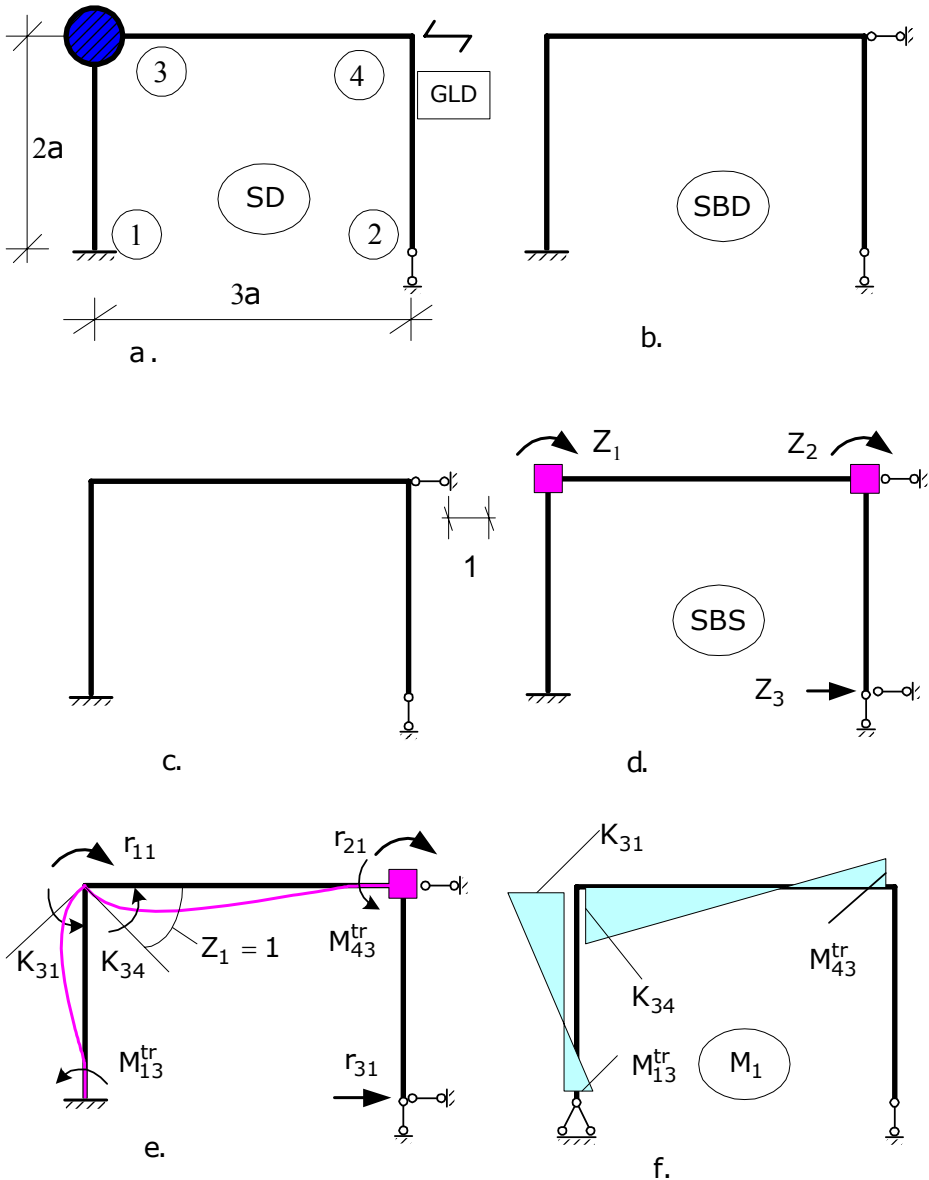


Fig.17. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. și f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama de moment încovoietor

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 17.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 17.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului introdus pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 17.c.

Pentru calculul rigidității k , reacțiunea din blocajul GLD, se va folosi metoda deplasărilor. Sistemul de bază este constituit în figura 17.d, prin introducerea unui număr de blocaje egal cu gradul de nedeterminare cinematico-elastică al sistemului de bază dinamic.

Sistemul de ecuații de echilibru static are forma

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2P} = 0 \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3P} = 0 \end{cases}$$

Determinarea coeficienților r_{11} și r_{21}

Coeficientul r_{11} și r_{21} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 3, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 17.d. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0; \quad r_{11} - K_{34} - K_{31} = 0, \\ \sum M_4 = 0; \quad r_{21} - M_{43}^{tr} = 0. \end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 3

$$K_{31} = \frac{EI}{l} = \frac{4EI}{2a} = \frac{2EI}{a}, \quad K_{34} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{3a}$$

$$M_{43}^{tr} = K_{34} \cdot t_{34} = \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{3a},$$

$$M_{13}^{tr} = K_{31} \cdot t_{31} = \frac{2EI}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{EI}{a}$$

rezultă

$$r_{11} = K_{34} + K_{31}, \quad r_{11} = \frac{4EI}{3a} + \frac{2EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{10EI}{3a},$$

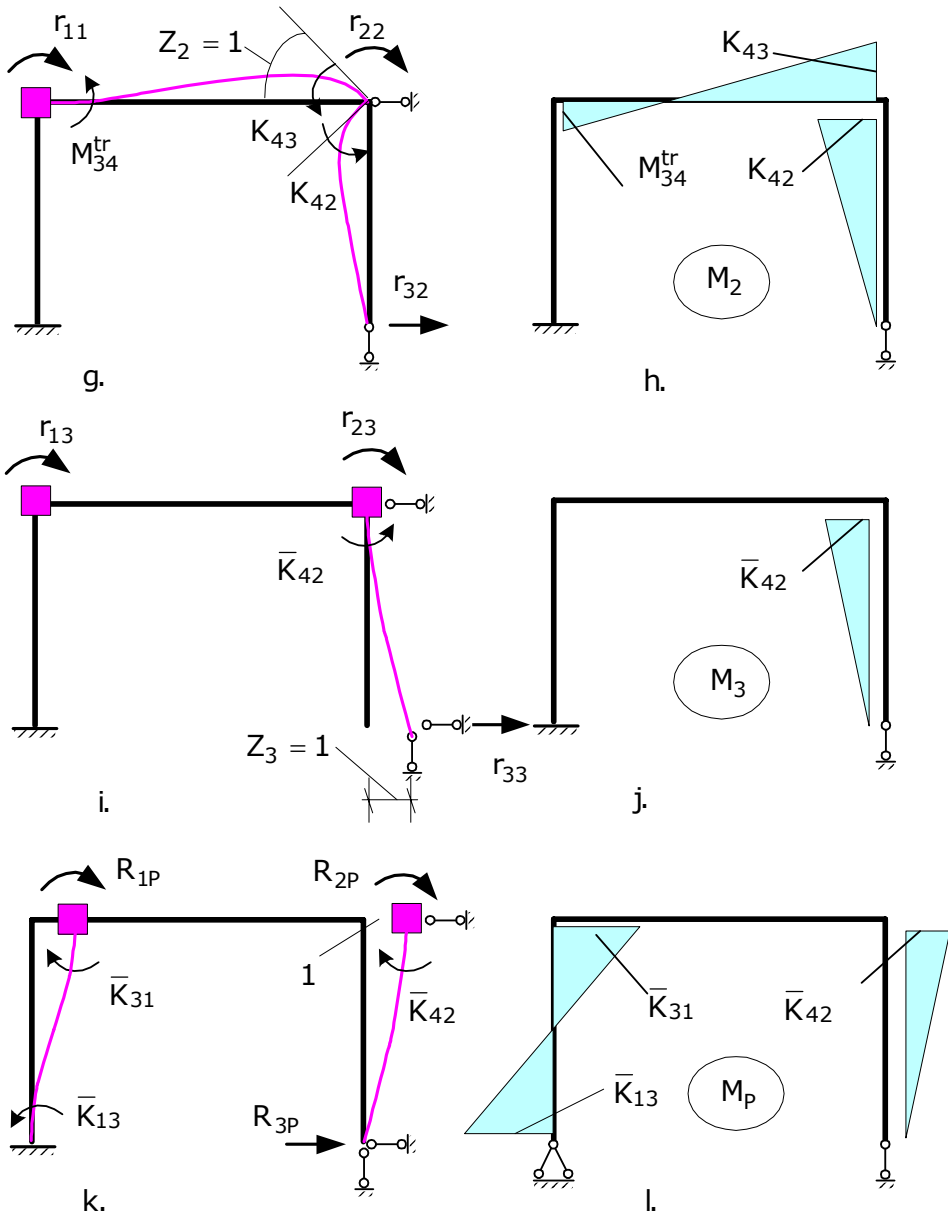


Fig.17 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. și h. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_2 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; i. și j. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj grad de libertate, $Z_3 = 1$ și diagrama de moment încovoietor; k. și l. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor

$$r_{21} = M_{43}^{\text{tr}}, \quad r_{21} = \frac{2EI}{3a}.$$

Determinarea coeficienților r_{12} și r_{22}

Coeficientul r_{12} și r_{22} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 4, egală cu unitatea, $Z_2 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 17.g. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{12} - M_{34}^{\text{tr}} = 0, \\ \sum M_4 = 0; \quad r_{22} - K_{43} - K_{42} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 4

$$K_{42} = \frac{3EI}{l} = \frac{EI}{2a}, \quad K_{43} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{3a} \\ M_{34}^{\text{tr}} = K_{43} \cdot t_{43} = \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2EI}{3a},$$

rezultă

$$r_{21} = M_{34}^{\text{tr}} \Rightarrow r_{21} = \frac{2EI}{3a}, \\ r_{22} = K_{43} + K_{42}, \quad r_{22} = \frac{4EI}{3a} + \frac{3EI}{2a}, \quad r_{22} = \frac{17EI}{6a}.$$

Determinarea coeficienților r_{13} și r_{23}

Coeficientul r_{13} și r_{23} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem, nodul 2, egală cu unitatea, $Z_3 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 17.i. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{13} = 0, \\ \sum M_4 = 0; \quad r_{23} - \bar{K}_{42} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară ce concură în nodul 4

$$\bar{K}_{42} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{4a^2},$$

rezultă

$$r_{13} = 0 \quad r_{23} = \frac{3EI}{4a^2}.$$

Calculul termenilor liberi R_{1P} și R_{2P}

Termenii liberi R_{1P} și R_{2P} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem de GLD, egală cu unitatea, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 17.k. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\begin{aligned} \sum M_3 = 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{31} = 0, \\ \sum M_4 = 0; \quad R_{2P} + \bar{K}_{42} = 0. \end{aligned}$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară ce concură în nodul 4, respectiv în nodul 3

$$\bar{K}_{42} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{2a^2}, \quad \bar{K}_{31} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6EI}{(2a)^2} = \frac{3EI}{2a^2}$$

rezultă

$$\begin{aligned} R_{1P} = -\bar{K}_{31}, \quad R_{1P} = -\frac{3EI}{2a^2}, \\ R_{2P} = -\bar{K}_{42}, \quad R_{2P} = -\frac{3EI}{4a^2}. \end{aligned}$$

Determinarea coeficienților r_{31} , r_{32} și r_{33}

Având calculate diagramele de moment încovoietor corespunzătoare deformatelor sistemului de bază acționat, succesiv, cu cedările de reazem: $Z_1 = 1$, $Z_2 = 1$ și $Z_3 = 1$, prezentate în figurile 17.f., h., j., coeficienții r_{31} , r_{32} și r_{33} se pot determina folosind principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat, succesiv, de momentele încovoietoare introduse în locul legăturile suprimate, figurile 17.m., n. și o.

În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figurile 17.m., n. și o.:

$$LMV = 0; \quad r_{31} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{31} = 0$$

$$LMV = 0; \quad r_{32} \cdot 1 - K_{42} \cdot \theta = 0,$$

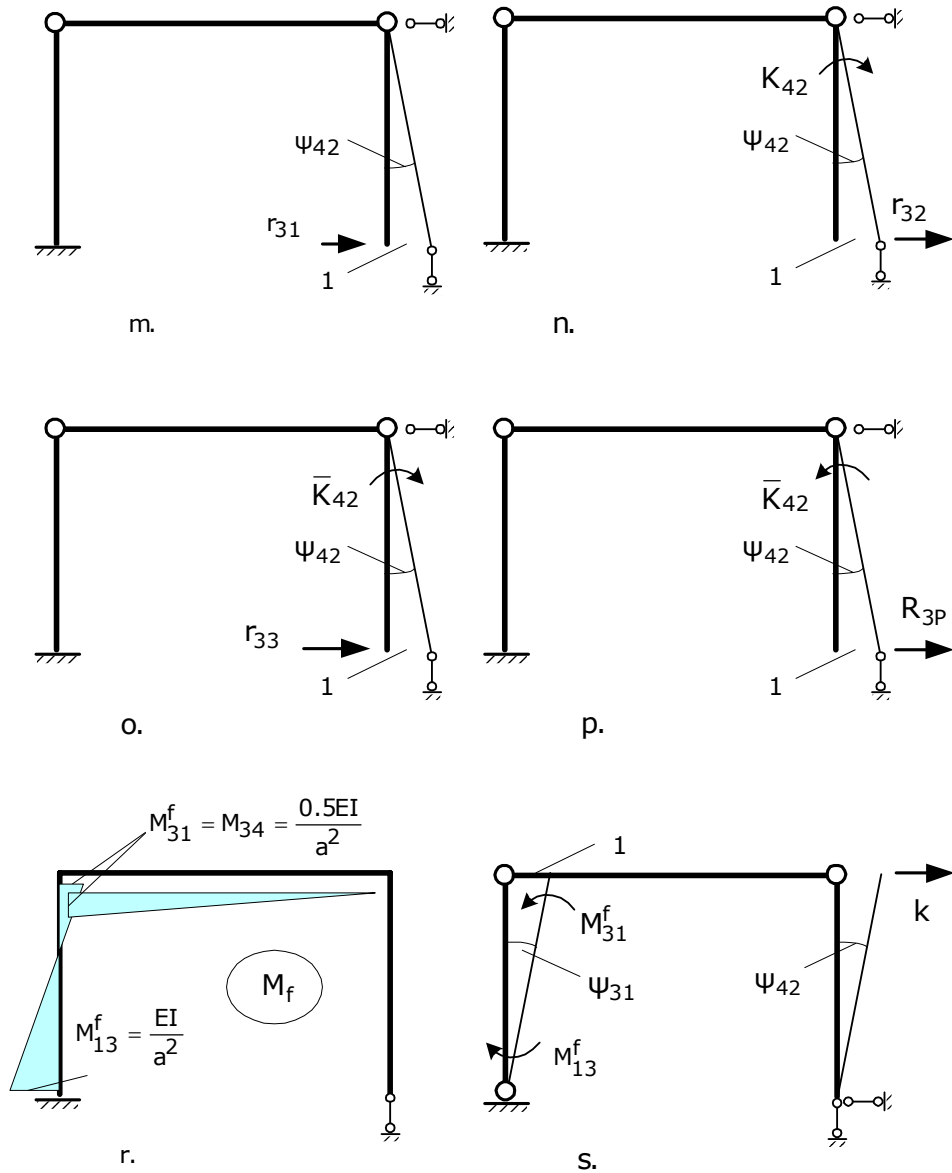


Fig.17 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: m., n., o. și p. deplasate specifice pentru calculul coeficienților - r_{31} , r_{32} , r_{33} și termenului liber - R_{3p} ; r. diagrama finală de moment încovoietor; s. deplasată specifică pentru calculul rigidității - k

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad r_{32} = \frac{3EI}{2a} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow r_{32} = \frac{3EI}{4a^2}$$

și

$$LMV = 0; \quad r_{33} \cdot 1 - \bar{K}_{42} \cdot \theta = 0,$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad r_{33} = \frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow r_{33} = \frac{3EI}{8a^3}.$$

Calculul termenului liber R_{3p}

Se folosește diagrama de moment încovoietor, figura 17.l, corespunzătoare deformatelor sistemului de bază acționat cu cedarea de blocaj de GLD, egală cu unitatea figura 17.k. Pentru calculul termenului liber R_{3p} se utilizează principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism acționat de momentele încovoietoare introduse în locul legăturilor suprimate, figura 17.p.

În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 17.p

$$LMV = 0; \quad R_{3p} \cdot 1 + \bar{K}_{42} \cdot \theta = 0$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a}, \quad R_{3p} = -\bar{K}_{42} \cdot \theta = -\frac{3EI}{4a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow R_{3p} = -\frac{3EI}{8a^3}.$$

Rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru

Sistemul de ecuații de echilibru static, după înlocuirea coeficienților și a termenilor liberi, are forma

$$\begin{cases} \frac{10EI}{3a} \cdot Z_1 + \frac{2EI}{3a} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 - \frac{3EI}{2a^2} = 0 \\ \frac{2EI}{3a} \cdot Z_1 + \frac{17EI}{6a} \cdot Z_2 + \frac{3EI}{4a^2} \cdot Z_3 - \frac{3EI}{4a^2} = 0 \\ 0 \cdot Z_1 + \frac{3EI}{4a^2} \cdot Z_2 + \frac{3EI}{8a^3} \cdot Z_3 - \frac{3EI}{8a^3} = 0 \end{cases}$$

cu soluțiile:

$$Z_1 = \frac{0.5}{a}, \quad Z_2 = 1.5, \quad Z_3 = -\frac{0.25}{a}.$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^2(x) \cdot Z_2 + M_{ij}^3(x) \cdot Z_3 + M_{ij}^P(x),$$

și se obțin următoarele momente încovoietoare

$$M_{24}^f = 0$$

$$\begin{aligned} M_{13}^f &= -M_{13}^{tr} \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 - \bar{K}_{13} = \\ &= \frac{EI}{a} \cdot \frac{0.5}{a} - \frac{3EI}{2a^2} \Rightarrow M_{13}^f = -\frac{EI}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{31}^f &= -K_{31} \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + \bar{K}_{31} = \\ &= -\frac{2EI}{a} \cdot \frac{0.5}{a} + \frac{3EI}{2a^2} \Rightarrow M_{31}^f = \frac{0.5EI}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{34}^f &= K_{34} \cdot Z_1 + M_{34}^{tr} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + 0 = \\ &= \frac{4EI}{3a} \cdot \frac{0.5}{a} + \frac{2EI}{3a} \cdot \left(-\frac{0.25}{a}\right) \Rightarrow M_{34}^f = \frac{0.5EI}{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{43}^f &= -M_{43}^{tr} \cdot Z_1 - K_{43} \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + 0 = \\ &= -\frac{2EI}{3a} \cdot \frac{0.5}{a} - \frac{4EI}{3a} \cdot \left(-\frac{0.25}{a}\right) \Rightarrow M_{43}^f = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{42}^f &= 0 \cdot Z_1 + K_{42} \cdot Z_2 + \bar{K}_{42} \cdot Z_3 - \bar{K}_{42} = \\ &= \frac{3EI}{2a} \cdot \left(-\frac{0.25}{a}\right) + \frac{3EI}{4a^2} \cdot 1.5 - \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{42}^f = 0. \end{aligned}$$

Diagrama final de moment încovoietor este trasată în figura 17.r.

Calculul rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul simplu, blocajul GLD, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 17.s. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legăturile suprimate și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru

mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 17.s:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{31}^f \cdot \theta - M_{13}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

și

$$k = M_{31}^f \cdot \theta + M_{13}^f \cdot \theta = 0.5 \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} + \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow k = 0.75 \cdot \frac{EI}{a^2}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{0.75 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.866 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 7.2552 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.6. Structura 6

Pentru cadrul din figura 1.18 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

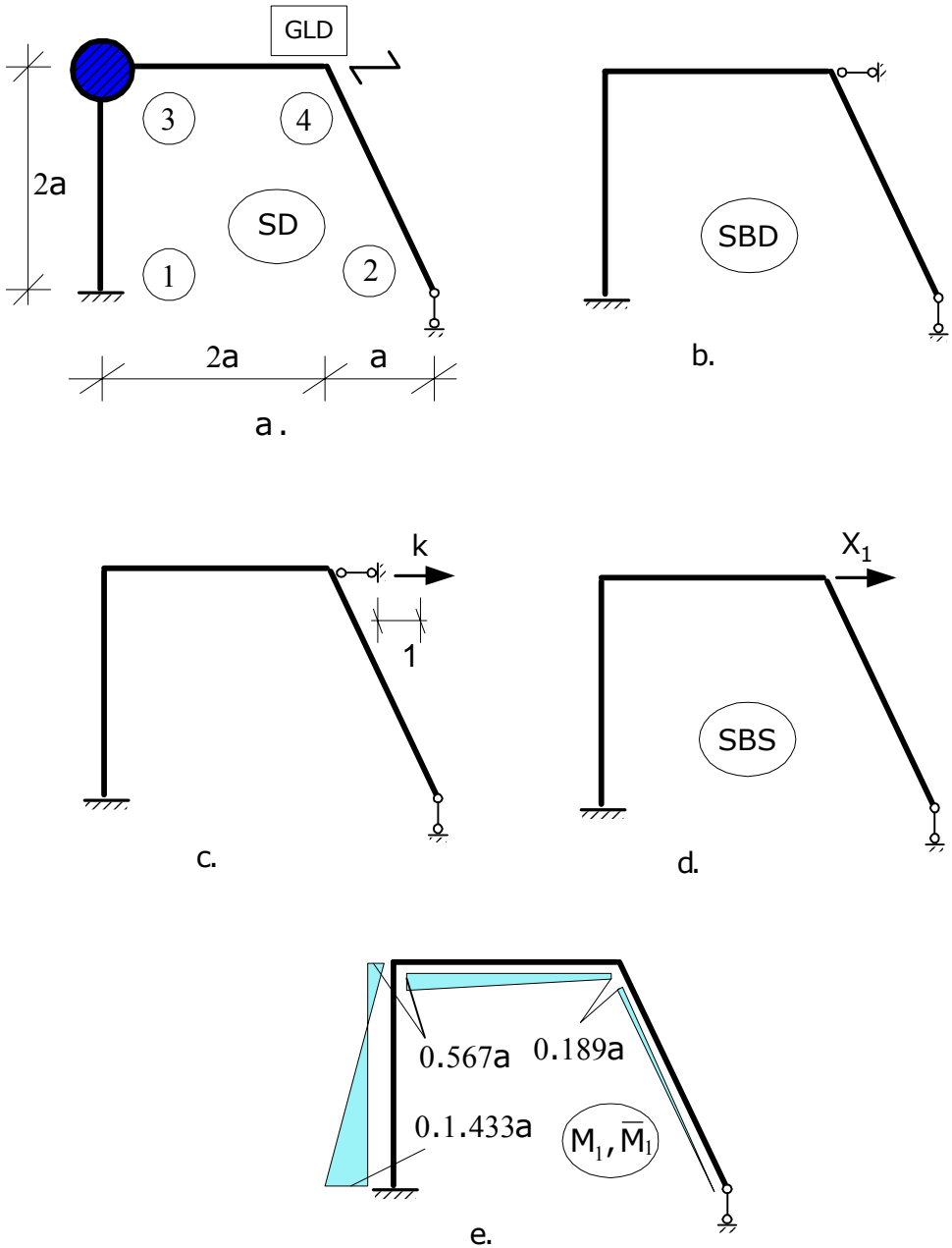
Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 18.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 18.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului de pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 18.c.

Sistemul de bază dinamic (fig.18.b) este un cadru cu două nedeterminări statice. Rigiditatea sistemului dinamic va fi determinată folosind metoda forțelor. Se va utiliza un sistem de bază static nedeterminat (fig.18.d), aceasta se va identifica cu structura reală, cadru o dată static nedeterminat.

Ecuția de echilibru elastic are forma

$$\delta_{11} \cdot X_1 = \Delta_{1c}.$$



În general, alegerea unui sistem de bază static nedeterminat este posibilă, numai dacă diagramele unitate și din încărcări, trasate pe sistemul de bază sunt cunoscute. În acest caz, diagrama unitară de

moment încovoietor este cunoscută de la aplicația 1, structura 1.2.6, fiind identică cu diagrama finală, pe care o reproducem în figura 18.e.

Determinarea coeficientului δ_{11}

Coeficientul δ_{11} se calculează cu relația

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1(x) \cdot M_1(x)}{EI} dx .$$

Constatăm că valoarea coeficientului este egală cu cea a flexibilității δ din aplicația anterioară, deci

$$\delta_{11} = \delta = 1.533 \frac{a^3}{EI}$$

Calculul termenului liber Δ_{1C}

Relația de calcul are forma

$$\Delta_{1C} = 1 \cdot \Delta_1 \pm \sum R_k^1 \cdot \Delta_k ,$$

unde

$$\Delta_1 = 1 ,$$

reprezentând cedarea de reazem produsă pe direcția DLD, acțiune în sistemul de bază dinamic,

$$\Delta_k = 0, \quad k = \overline{1, n} .$$

Deoarece nu se produc cedări de reazeme pe direcțiile reacțiunilor sistemului de bază (fig.18.e), nu este necesar să le calculăm, deci

$$\Delta_{1C} = 1 .$$

Calculul necunoscutei X_1

$$X_1 = \frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}} = \frac{1}{1.533 \frac{a^3}{EI}} \Rightarrow X_1 = 0.6523 \frac{EI}{a^3} .$$

Dar cum necunoscuta reprezintă însăși rigiditatea sistemului dinamic, atunci

$$K = 0.6523 \frac{EI}{a^3} .$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{0.6523 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.7952 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 7.9017 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.7. Structura 7

Pentru cadrul din figura 1.19 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 19.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 19.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului de pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 19.c.

Pentru calculul rigidității k , reacțiunea din blocajul GLD, se va folosi metoda deplasărilor. Sistemul de bază este constituit în figura 17.d, obținut prin introducerea unui blocaj de nod, în nodul numărul 3, funcție de gradul de nedeterminare cinematico-elastică al sistemului de bază dinamic, care este egal cu unu.

Ecuajii de echilibru static are forma

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0.$$

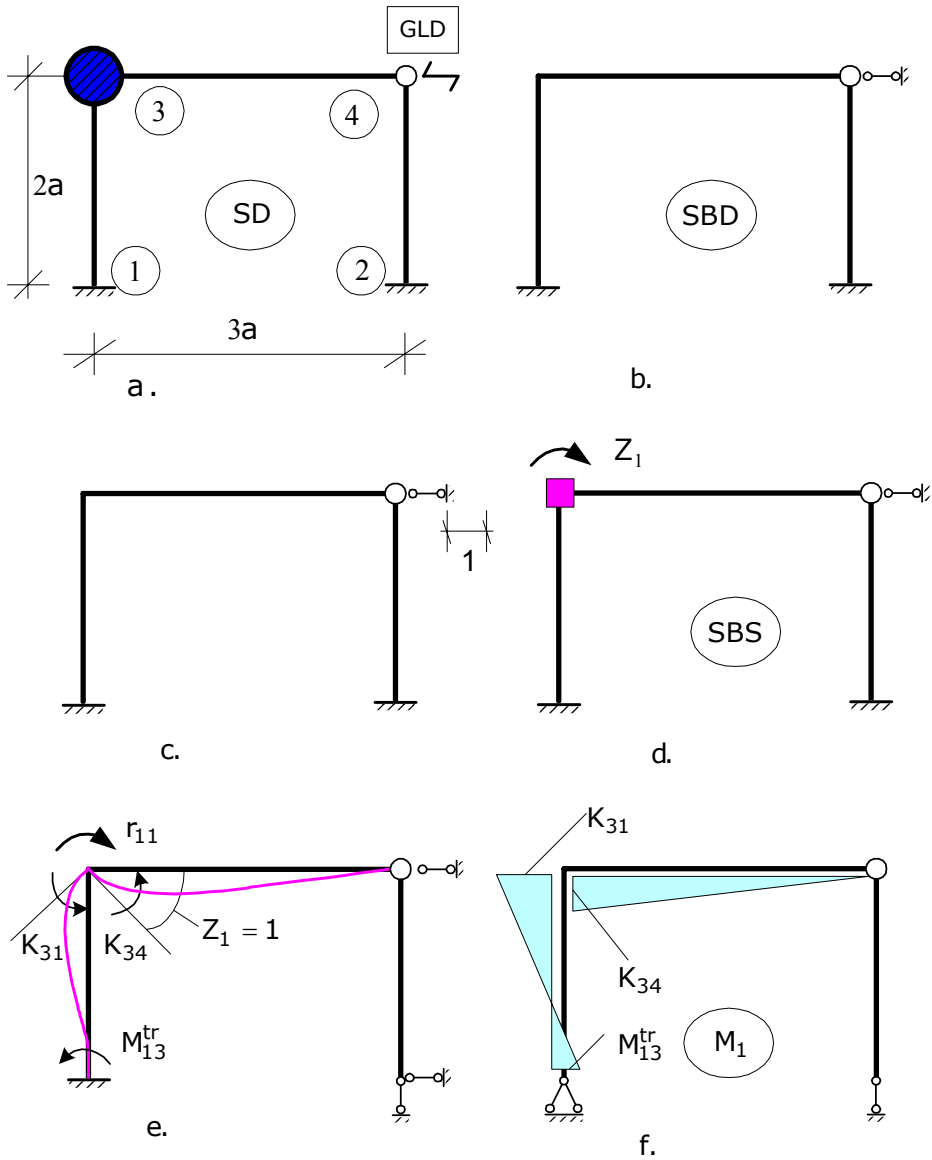
Determinarea coeficientului r_{11}

Coeficientul r_{11} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 3, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 17.e. Se scrie următoarea ecuație de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{11} - K_{34} - K_{31} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 3

$$K_{31} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{2a} = \frac{2EI}{a}, \quad K_{34} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{3a} = \frac{EI}{a}$$



$$M_{13}^{tr} = K_{31} \cdot t_{31} = \frac{2EI}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{EI}{a}$$

rezultă

$$r_{11} = K_{34} + K_{31}, \quad r_{11} = \frac{2EI}{3a} + \frac{EI}{a} \Rightarrow r_{11} = \frac{3EI}{a}.$$

Calculul termenului liber R_{1P}

Termenul liberi R_{1P} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem de GLD, egală cu unitatea, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 19.g. Se scrie următoarea ecuație de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{31} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară din deformată prezentată în figura 19.g

$$\bar{K}_{24} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{4a^2}, \quad \bar{K}_{31} = \bar{K}_{13} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6EI}{(2a)^2} = \frac{3EI}{2a^2}$$

rezultă

$$R_{1P} = -\bar{K}_{31}, \quad R_{1P} = -\frac{3EI}{2a^2}.$$

Rezolvarea ecuației de echilibru

Ecuația de echilibru static, după înlocuirea expresiilor coeficientului și a termenului liberi are forma

$$\frac{3EI}{a} \cdot Z_1 - \frac{3EI}{2a^2} = 0$$

cu soluția:

$$Z_1 = \frac{0.5}{a}.$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^P(x),$$

și se obțin următoarele momente încovoietoare

$$M_{13}^f = -M_{13}^{tr} \cdot Z_1 - \bar{K}_{13} = \frac{EI}{a} \cdot \frac{0.5}{a} - \frac{3EI}{2a^2} \Rightarrow M_{13}^f = -\frac{EI}{a^2},$$

$$M_{31}^f = -K_{31} \cdot Z_1 + \bar{K}_{31} = -\frac{2EI}{a} \cdot \frac{0.5}{a} + \frac{3EI}{2a^2} \Rightarrow M_{31}^f = \frac{0.5EI}{a^2},$$

$$M_{34}^f = K_{34} \cdot Z_1 + 0 = \frac{EI}{a} \cdot \frac{0.5}{a} \Rightarrow M_{34}^f = \frac{0.5EI}{a^2},$$

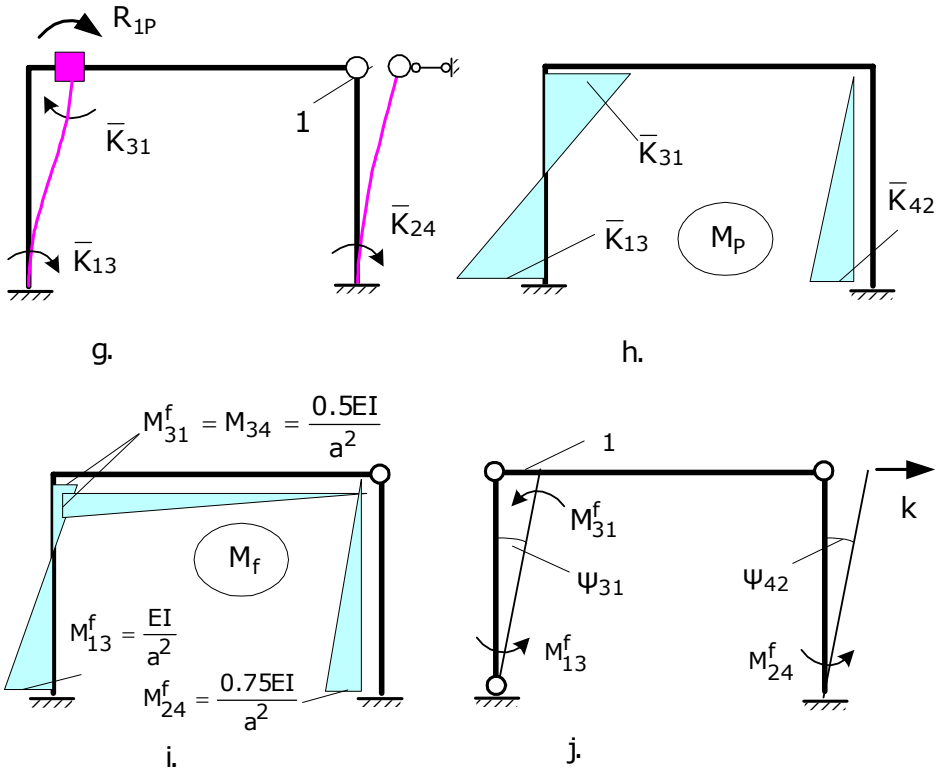


Fig.19 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: g. și h. situație de încărcare produsă de încărcarea exterioară, situație de încărcare produsă de o cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor deplasată specifică pentru calculul termenului liber - R_{1P} ; i. diagrama finală de moment încovoietor; j. deplasată specifică pentru calculul rigidității - k

$$M_{43}^f = M_{42}^f = 0$$

$$M_{24}^f = 0 \cdot Z_1 + \bar{K}_{24} = \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{24}^f = 0.75 \frac{EI}{a^2}.$$

Diagrama final de moment încovoietor este trasată în figura 19.i.

Calculul rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul simplu, blocajul GLD, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 19.j. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legăturile suprimate și se

evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 19.j:

$$LMV = 0; \quad k \cdot 1 - M_{31}^f \cdot \theta - M_{13}^f \cdot \theta - M_{42}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

și

$$k = M_{31}^f \cdot \theta + M_{13}^f \cdot \theta + M_{42}^f \cdot \theta = 0.5 \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} + \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} + 0.75 \frac{EI}{a^2}$$

$$\Rightarrow k = 1.125 \cdot \frac{EI}{a^3}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{1.125 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 1.0607 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 5.9236 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.8. Structura 8

Pentru cadrul din figura 1.20 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Calculul rigidității

În vederea determinării rigidității corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 20.a, se construiește sistemul de bază dinamic prin blocarea deplasării pe direcția GLD, figura 20.b. Sistemul de bază dinamic este acționat de o cedare de reazem, egală cu unitatea, aplicată în blocajului de pe direcția GLD, situație de încărcare arătată în figura 20.c.

Pentru calculul rigidității k , reacțiunea din blocajul GLD, se va folosi metoda deplasărilor. Sistemul de bază este constituit în figura 20.d, obținut prin introducerea unui blocaj de nod, în nodul numărul 3, funcție de gradul de nedeterminare cinematico-elastică al sistemului de bază dinamic, care este egal cu unu.

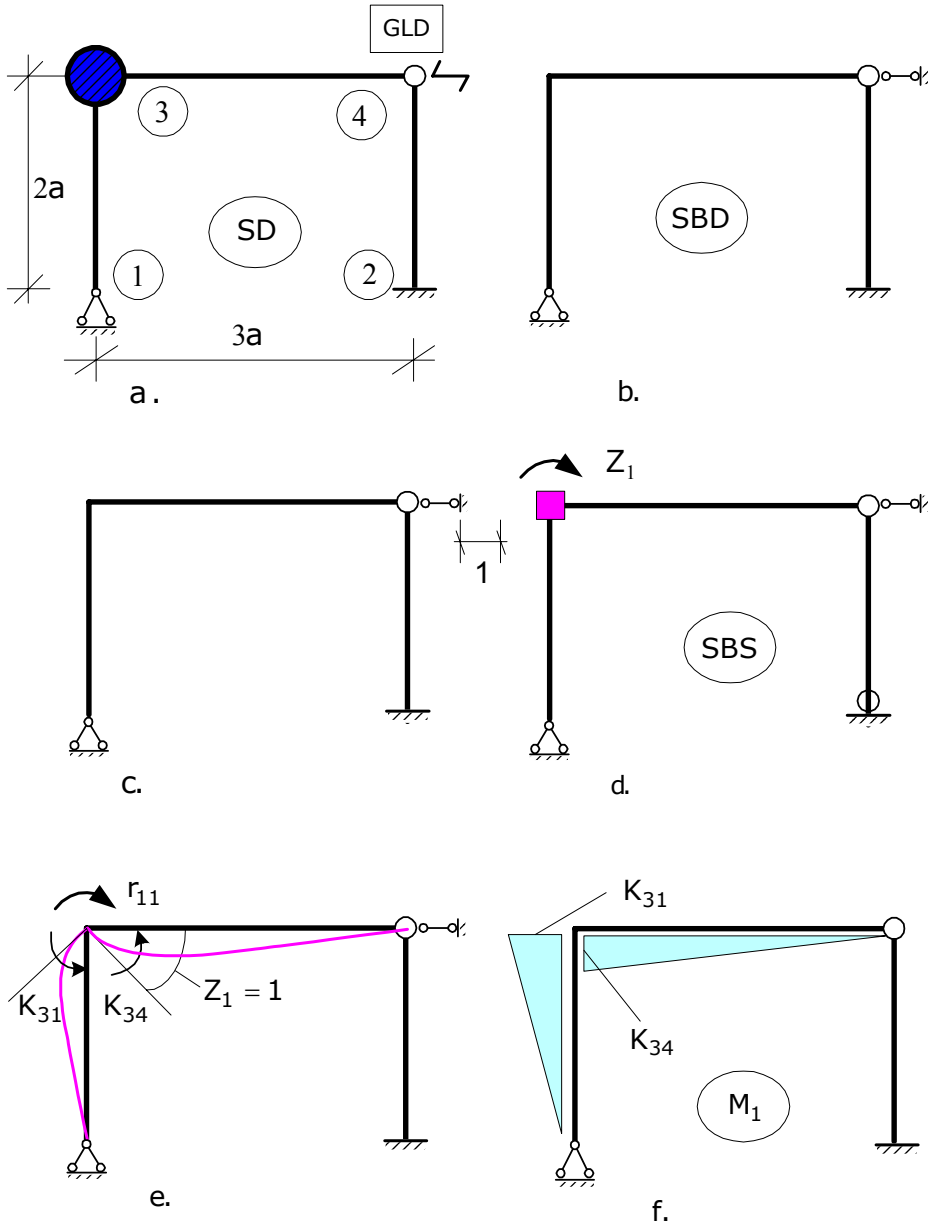


Fig.20. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază dinamic; c. situație de încărcare specifică calculului rigidității; d. sistem de bază în metoda deplasărilor; e. și f. situație de încărcare produsă de o cedare de blocaj de nod, $Z_1 = 1$ și diagrama de moment încovoietor

Ecuții de echilibru static are forma

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0.$$

Determinarea coeficientului r_{11}

Coeficientul r_{11} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, nodul 3, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 20.e. Se scrie următoarea ecuație de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{11} - K_{34} - K_{31} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară ce concură în nodul 3

$$K_{31} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{2a}, \quad K_{34} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{3a} = \frac{EI}{a}$$

$$M_{13}^{tr} = K_{31} \cdot t_{31} = \frac{2EI}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{EI}{a}$$

rezultă

$$r_{11} = K_{34} + K_{31}, \quad r_{11} = \frac{EI}{a} + \frac{3EI}{2a} \Rightarrow r_{11} = \frac{5EI}{2a}.$$

Calculul termenului liber R_{1P}

Termenul liberi R_{1P} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de reazem de GLD, egală cu unitatea, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 20.g. Se scrie următoarea ecuație de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad R_{1P} + \bar{K}_{31} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la deplasare a extremității de bară din deformată prezentată în figura 20.g

$$\bar{K}_{24} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{4a^2}, \quad \bar{K}_{31} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{(2a)^2} = \frac{3EI}{4a^2}$$

rezultă

$$R_{1P} = -\bar{K}_{31}, \quad R_{1P} = -\frac{3EI}{4a^2}.$$

Rezolvarea ecuației de echilibru

Ecuția de echilibru static, după înlocuirea expresiilor coeficientului și a termenului liberi are forma

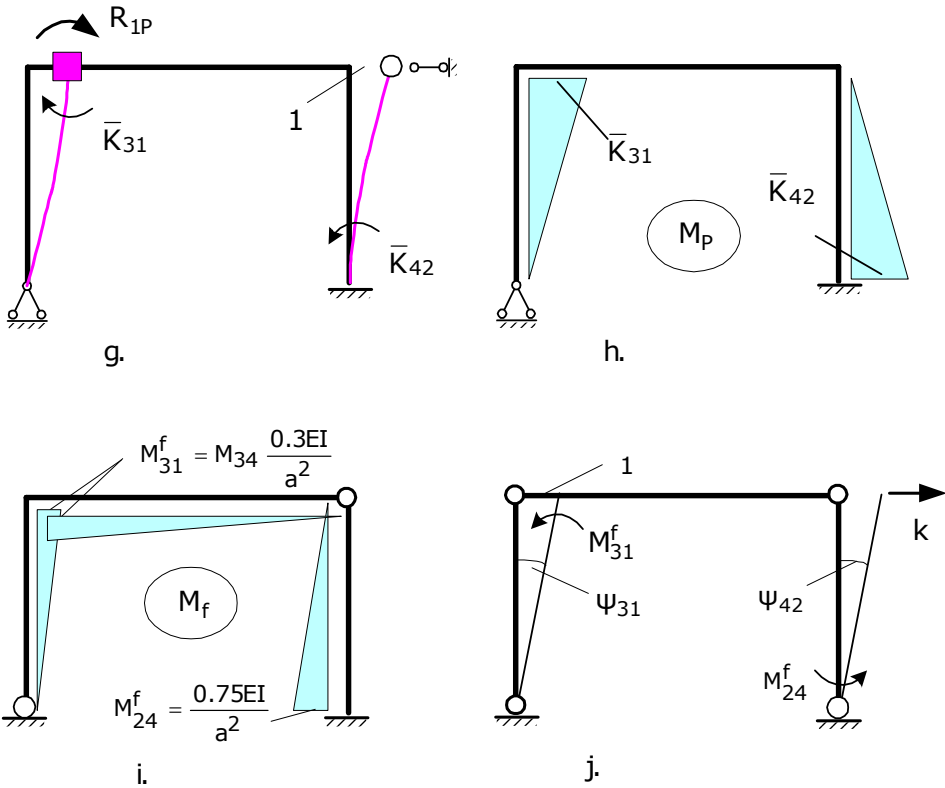


Fig.20 continuare. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD:
 g. și h. situație de încărcare produsă de acțiunea exterioară, cedare de reazem egală cu unitatea și diagrama de moment încovoietor i. diagrama finală de moment încovoietor;
 j. deplasată specifică pentru calculul rigidității- k

$$\frac{5EI}{2a} \cdot Z_1 - \frac{3EI}{4a^2} = 0$$

cu soluția:

$$Z_1 = \frac{0.3}{a}.$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

Pentru a trasa diagrama unitară finală de moment încovoietor se aplică relația de calcul

$$M_{ij}^f(x) = M_{ij}^1(x) \cdot Z_1 + M_{ij}^P(x),$$

și se obțin următoarele momente încovoietoare

$$M_{13}^f = M_{43}^f = M_{42}^f = 0,$$

$$M_{31}^f = -K_{31} \cdot Z_1 + \bar{K}_{31} = -\frac{2EI}{a} \cdot \frac{0.3}{a} + \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{31}^f = \frac{0.3EI}{a^2},$$

$$M_{24}^f = 0 \cdot Z_1 + \bar{K}_{24} = \frac{3EI}{4a^2} \Rightarrow M_{24}^f = 0.75 \frac{EI}{a^2}.$$

Diagrama final de moment încovoietor este trasată în figura 20.i.

Calculul rigidității

Având calculată diagrama finală de moment încovoietor se poate determina rigiditatea sistemului dinamic. Rigiditatea reprezintă reacțiunea din reazemul simplu, blocajul GLD, iar pentru aflarea valorii acesteia se va folosi principiul lucrului mecanic virtual. Se transformă sistemul de bază dinamic într-un mecanism, figura 20.j. acționat de momentele încovoietoare care înlocuiesc legăturile suprimate și se evidențiază rigiditatea sistemului, k . În vederea scrierii ecuației de lucru mecanic virtual se va produce o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, egală cu unitatea, figura 20.j:

$$\text{LMV} = 0; \quad k \cdot 1 - M_{31}^f \cdot \theta - M_{24}^f \cdot \theta = 0,$$

unde

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

și

$$\begin{aligned} k &= M_{31}^f \cdot \theta + M_{24}^f \cdot \theta = 0.3 \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} + 0.75 \frac{EI}{a^2} \cdot \frac{1}{2a} \\ &\Rightarrow k = 0.525 \cdot \frac{EI}{a^3} \end{aligned}$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{1.125 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 0.7246 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 8.6716 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

1.2.9. Structura 9

Pentru cadrul din figura 1.21 se vor determina pulsația și perioada proprie de vibrație. Se vor parcurge etapele de calcul expuse în preambulul capitolului.

Calculul rigidității

Rigiditatea corespunzătoare sistemului dinamic prezentat în figura 21.a se va determina prin procedeul condensării matricei de rigiditate a sistemului static, matrice identică cu matricea coeficienților din metoda deplasărilor. Sistemul de bază corespunzător metodei deplasărilor este desenată în figura 21.b. Procedeul a fost prezentat la începutul capitolului. Rigiditatea sistemului dinamic se determină cu relația:

$$k = k_{11} - [k_{12}][k_{22}]^{-1}\{k_{21}\},$$

dacă matricea coeficienților are următoarea formă și este partiționată după cum urmează

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & [k_{12}] \\ \{k_{21}\} & [k_{22}] \end{bmatrix}.$$

Matricea coeficienților are patru linii și patru coloane deoarece sistemul considerat are patru grade de nedeterminare cinematico-elastice. Se face precizarea că totdeauna se notează ca primă necunoscută, cea corespunzătoare deplasării de pe direcția GLD.

Calculul coeficienților r_{11} , r_{21} , r_{31} și r_{41}

Coeficienții r_{11} , r_{21} , r_{31} și r_{41} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de grad de libertate, egală cu unitatea, $Z_1 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 21.c. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{31} - \bar{K}_{31} = 0,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{41} - \bar{K}_{42} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară conform deformată sistemului de bază, figura 21.c

$$\bar{K}_{31} = \bar{K}_{13} = \bar{K}_{42} = \bar{K}_{24} = \frac{6EI}{l^2} = \frac{6EI}{(2a)^2} = \frac{3EI}{2a^2},$$

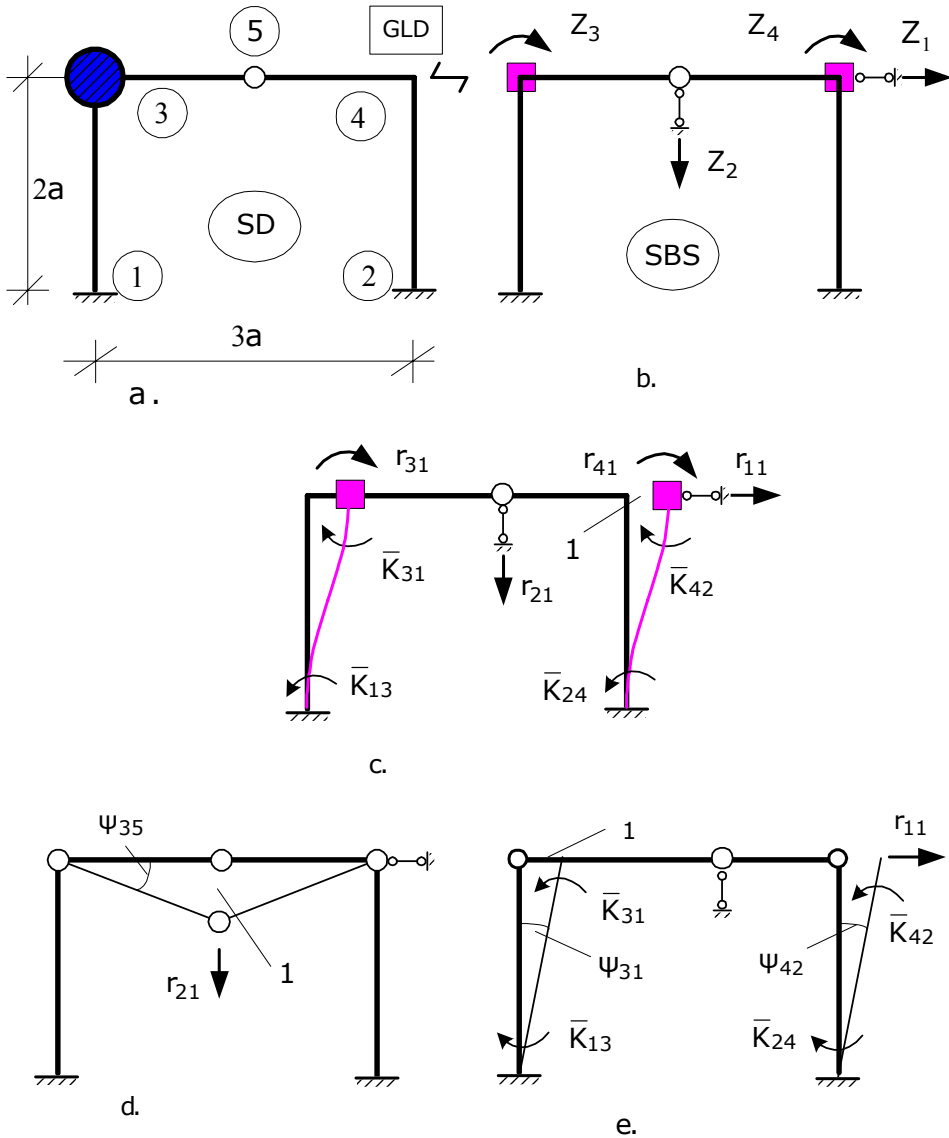


Fig.21. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: a. sistem dinamic; b. sistem de bază în metoda deplasărilor; c.; situație de încărcare pentru calculul coeficienților: r_{11} , r_{21} , r_{31} și r_{41} ; d. și e. deplasate specifice pentru calculul coeficienților: r_{31} și r_{11}

rezultă expresiile de calcul ale coeficienți r_{31} și r_{41}

$$r_{31} = -\bar{K}_{31}, \Rightarrow r_{31} = -\frac{3EI}{2a^2},$$

$$r_{41} = -\bar{K}_{42}, \Rightarrow r_{41} = -\frac{3EI}{2a^2}.$$

Coeficienții r_{21} și r_{11} se determină folosind principiul lucrului mecanic virtual. Momentele de capăt, din extremitățile barelor, evidențiate pe deformata sistemului de bază, pentru deplasarea $Z_1 = 1$, figura 21. c, parcurgând deplasările virtuale din deplasata obținută prin producerea unei deplasări virtuale pe direcția celei de a doua necunoscută, figura 21.d, sau pe direcția primei necunoscute, figura 21.e, pun în evidență ecuațiile

$$LMV = 0; \quad r_{21} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{21} = 0$$

$$LMV = 0; \quad r_{11} \cdot 1 - (\bar{K}_{31} + \bar{K}_{13} + \bar{K}_{42} + \bar{K}_{24}) \cdot \theta = 0,$$

dar

$$\theta = \frac{1}{2a},$$

$$r_{11} = (\bar{K}_{31} + \bar{K}_{13} + \bar{K}_{42} + \bar{K}_{24}) \cdot \theta = 4 \cdot \frac{3EI}{2a^2} \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow r_{11} = \frac{3EI}{a^3}.$$

Calculul coeficienților r_{12} , r_{22} , r_{32} și r_{42}

Coeficienții r_{12} , r_{22} , r_{32} și r_{42} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de grad de libertate, egală cu unitatea, $Z_2 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 21.f. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{32} + \bar{K}_{25} = 0,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{42} - \bar{K}_{45} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară conform deformată sistemului de bază, figura 21.f

$$\bar{K}_{25} = \bar{K}_{45} = \frac{3EI}{l^2} = \frac{3EI}{(1.5a)^2} = \frac{3EI}{2.25a^2},$$

rezultă expresiile de calcul ale coeficienți r_{32} și r_{42}

$$r_{32} = -\bar{K}_{25}, \Rightarrow r_{32} = -\frac{3EI}{2.25a^2},$$

$$r_{42} = \bar{K}_{45}, \Rightarrow r_{42} = \frac{3EI}{2.25a^2}.$$

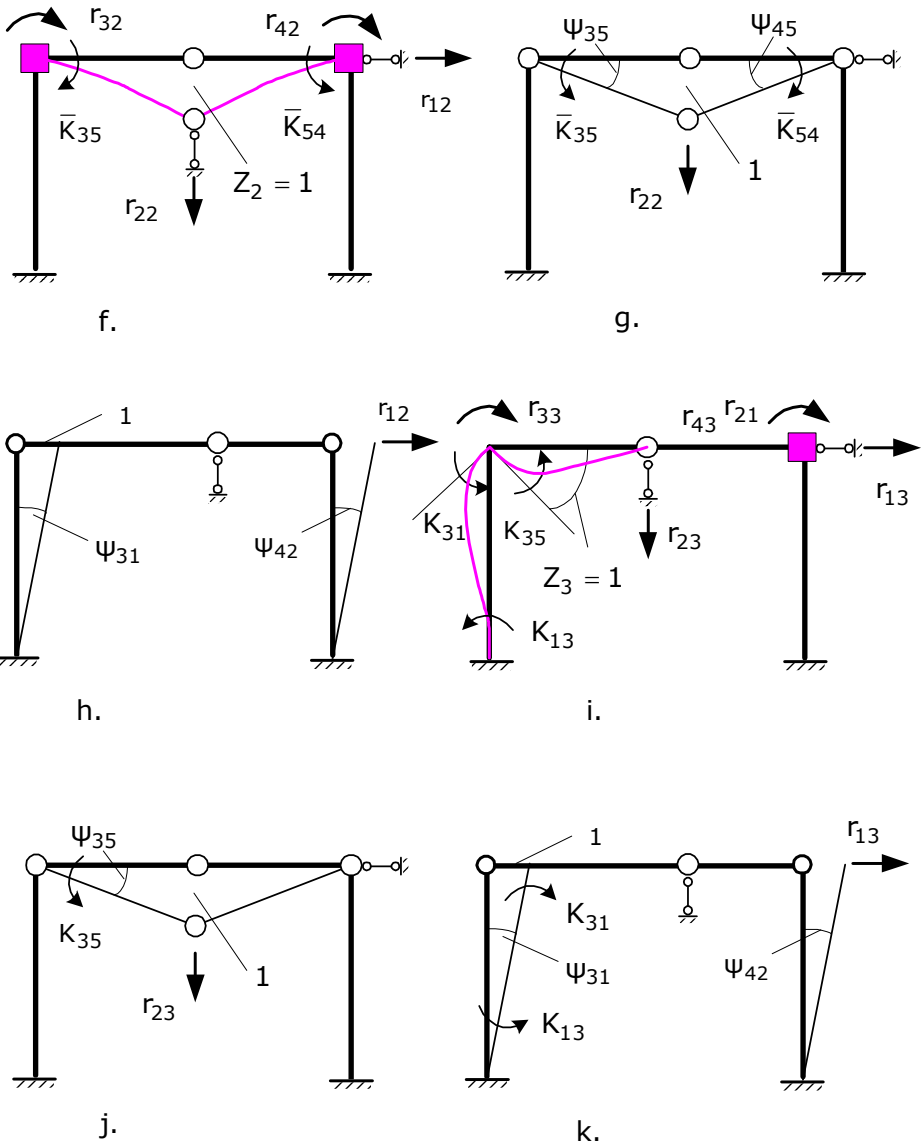


Fig.21. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: f. situație de încărcare pentru calculul coeficienților: r_{12} , r_{22} , r_{32} și r_{42} ; g. și h. deplasate specifice pentru calculul coeficienților: r_{32} și r_{12} ; i. situație de încărcare pentru calculul coeficienților: r_{13} , r_{23} , r_{33} și r_{43} ; j. și k. deplasate specifice pentru calculul coeficienților: r_{33} și r_{13}

Coeficienții r_{22} și r_{12} se determină folosind principiul lucrului mecanic virtual. Momentele de capăt, din extremitățile barelor,

evidențiate pe deformată sistemului de bază, pentru deplasarea $Z_2 = 1$, figura 21. f, parcurgând deplasările virtuale din deplasata obținută prin producerea unei deplasări virtuale pe direcția celei de a doua necunoscută, figura 21.g, sau pe direcția primei necunoscute, figura 21.h, pun în evidență ecuațiile

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{22} \cdot 1 - \bar{K}_{25} \cdot \theta - \bar{K}_{45} \cdot \theta = 0$$

$$\text{LMV} = 0; \quad r_{12} \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{12} = 0$$

dar

$$\theta = \frac{1}{1.5a},$$

$$r_{11} = (\bar{K}_{25} + \bar{K}_{45}) \cdot \theta = 2 \cdot \frac{3EI}{2.25a^2} \cdot \frac{1}{1.5a} \Rightarrow r_{22} = \frac{4EI}{2.25a^3}.$$

Calculul coeficienților r_{13} , r_{23} , r_{33} și r_{43}

Coeficienții r_{13} , r_{23} , r_{33} și r_{43} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, egală cu unitatea, $Z_3 = 1$, deformată corespunzătoare este prezentată în figura 21.i. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{33} - K_{35} - K_{31} = 0,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{43} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară conform deformată sistemului de bază, figura 21.i

$$K_{31} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{2a} = \frac{2EI}{a}, \quad M_{13}^{\text{tr}} = K_{31} \cdot t_{31} = \frac{2EI}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{EI}{a},$$

$$K_{35} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{1.5a} = \frac{2EI}{a},$$

rezultă expresiile de calcul ale coeficienți r_{33}

$$r_{33} = K_{35} + K_{31} = \frac{2EI}{a} + \frac{2EI}{a} \Rightarrow r_{33} = \frac{4EI}{a}.$$

Coeficienții r_{23} și r_{13} se determină folosind principiul lucrului mecanic virtual. Momentele de capăt, din extremitățile barelor, evidențiate pe deformată sistemului de bază, pentru deplasarea $Z_3 = 1$,

figura 21. i, parcurgând deplasările virtuale din deplasata obținută prin producerea unei deplasări virtuale pe direcția celei de a doua necunoscută, figura 21.g, sau pe direcția primei necunoscute, figura 21.k, pun în evidență ecuațiile

$$LMV = 0; \quad r_{23} \cdot 1 + K_{35} \cdot \theta_{35} = 0$$

$$LMV = 0; \quad r_{13} \cdot 1 + (K_{31} + M_{13}^{tr}) \cdot \theta_{13} = 0,$$

dar

$$\theta_{35} = \frac{1}{1.5a}, \quad \theta_{13} = \frac{1}{2a}$$

$$r_{23} = -K_3 \cdot \theta_{35} = -\frac{3EI}{1.5a} \cdot \frac{1}{1.5a} \Rightarrow r_{23} = -\frac{2EI}{1.5a^2},$$

$$r_{13} = (K_{31} + M_{13}^{tr}) \cdot \theta_{13} = -\left(\frac{2EI}{a} + \frac{EI}{a}\right) \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow r_{13} = -\frac{3EI}{2a^2}.$$

Calculul coeficienților r_{14} , r_{24} , r_{34} și r_{44}

Coeficienții r_{14} , r_{24} , r_{34} și r_{44} se determină prin producerea unei cedări de blocaj de nod, egală cu unitatea, $Z_4 = 1$, deformata corespunzătoare este prezentată în figura 21.l. Se scriu următoarele ecuații de echilibru static

$$\sum M_3 = 0; \quad r_{34} = 0,$$

$$\sum M_4 = 0; \quad r_{44} - K_{42} - K_{45} = 0.$$

Cunoscând expresiile rigidităților la rotire a extremităților de bară conform deformatăi sistemului de bază, figura 21.l

$$K_{45} = \frac{3EI}{l} = \frac{3EI}{1.5a} = \frac{2EI}{a}, \quad K_{42} = \frac{4EI}{l} = \frac{4EI}{2a} = \frac{2EI}{a},$$

$$M_{24}^{tr} = K_{42} \cdot t_{42} = \frac{2EI}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{EI}{a},$$

rezultă expresiile de calcul ale coeficienți r_{44}

$$r_{44} = K_{42} + K_{45} = \frac{2EI}{a} + \frac{2EI}{a} \Rightarrow r_{44} = \frac{4EI}{a}.$$

Coeficienții r_{24} și r_{14} se determină folosind principiul lucrului mecanic virtual. Momentele de capăt, din extremitățile barelor, evidențiate pe deformată sistemului de bază, pentru deplasarea $Z_4 = 1$,

figura 21.l, parcurgând deplasările virtuale din deplasata obținută prin producerea unei deplasări virtuale pe direcția celei de a doua necunoscută, figura 21.m, sau pe direcția primei necunoscute, figura 21.n, pun în evidență ecuațiile

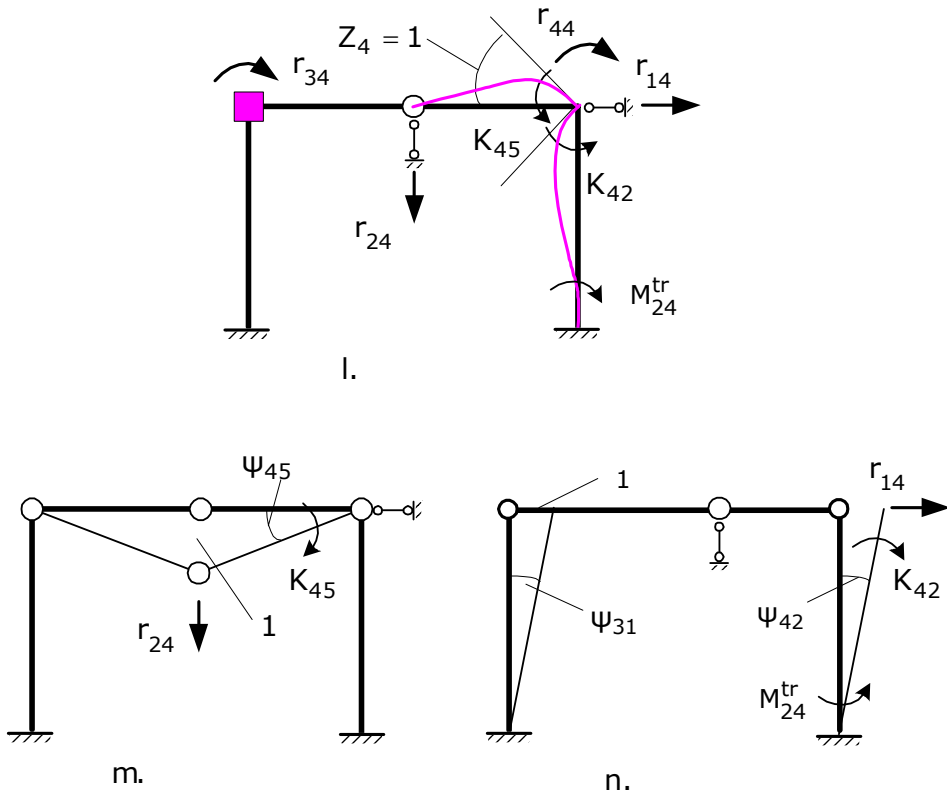


Fig.21. Calculul rigidității unui sistem dinamic cu 1GLD: l. situație de încărcare pentru calculul coeficienților: r_{14} , r_{24} , r_{34} și r_{44} ; m. și n. deplasate specifice pentru calculul coeficienților: r_{34} și r_{14}

$$LMV = 0; \quad r_{24} \cdot 1 - K_{45} \cdot \theta_{45} = 0$$

$$LMV = 0; \quad r_{14} \cdot 1 + (K_{42} + M_{24}^{tr}) \cdot \theta_{24} = 0,$$

dar

$$\theta_{45} = \frac{1}{1.5a}, \quad \theta_{24} = \frac{1}{2a}$$

$$r_{24} = K_{45} \cdot \theta_{45} = \frac{2EI}{a} \cdot \frac{1}{1.5a} \Rightarrow r_{24} = \frac{2EI}{1.5a^2},$$

$$r_{14} = -(K_{42} + M_{24}^{tr}) \cdot \theta_{24} = -\left(\frac{2EI}{a} + \frac{EI}{a}\right) \cdot \frac{1}{2a} \Rightarrow r_{14} = -\frac{3EI}{2a^2}.$$

Calculul rigidității k

Matricea coeficienților are forma

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & [k_{12}] \\ \{k_{21}\} & [k_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{a^3} \\ 0 \\ -\frac{3EI}{2a^2} \\ -\frac{3EI}{3EI} \\ -\frac{3EI}{2a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3EI}{2a^2} & -\frac{3EI}{2a^2} \\ 4EI & -\frac{3EI}{2.25a^2} & \frac{3EI}{2.25a^2} \\ \frac{2.25a^3}{3EI} & \frac{4EI}{a} & 0 \\ -\frac{2.25a^2}{3EI} & 0 & \frac{4EI}{a} \\ -\frac{2.25a^2}{2.25a^2} & & \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

iar rigiditatea rezultă

$$k = k_{11} - [k_{12}][k_{22}]^{-1}\{k_{21}\} = 1.875 \frac{EI}{a^3}.$$

Determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație

Se aplică relațiile

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{1.875 \frac{EI}{ma^3}} \Rightarrow \omega = 1.3693 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$T = 4.5886 \sqrt{\frac{ma^3}{EI}}.$$

BIBLIOGRAFIE **B**

1. Bănuț, V., Calculul neliniar al structurilor, Editura Tehnică, București, 1981.
2. Bănuț, V., Popescu, H., Stabilitatea structurilor elastice, Editura Academiei R.S.R., București, 1975.
3. Bălan, Șt., Mihăilescu, N. Șt., Istoria științei și tehnicii în România. Date cronologice., Editura Academiei R.S.R., București, 1985.
4. Bălan, Șt., ș.a., Dicționar cronologic al științei și tehnicii universale, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1979.
5. Bârsan, G.M., Dinamica și stabilitatea construcțiilor, EDP, București, 1979.
6. Bigs, J.M., Introduction to Structural Dynamics, McGraw-Hill Books Company, New York, 1964.

7. Bratu, Polidor, *Vibrațiile sistemelor elastice*, Editura Tehnică, București, 2000.
8. Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeș, M., *Vibrații mecanice*, EDP, București, 1979.
9. Buzdugan, Gh., Mihăilescu El., Radeș, M., *Măsurarea vibrațiilor*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
10. Buzdugan, Gh., *Izolarea antivibratilă a mașinilor*, Editura Academiei R.S.R., București, 1980.
11. Buzdugan, Gh., *Dinamica fundațiilor de mașini*, Editura Academiei R.S.R., București, 1968. Silaș, Gh. ș.a., *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, vol. I, *Sisteme liniare cu un număr finit de grade de libertate*, Editura Tehnică, București, 1967.
12. Bratu, P.P., *Izolarea și amortizarea vibrațiilor la utilaje de construcții*, INCERC București, 1982.
13. Caracostea, A., ș.a., *Manual pentru calculul construcțiilor*, Vol.I, *Bazele teoretice de calcul al construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1977.
14. Chiriacescu, Sergiu T., *Dinamica mașinilor unelte. Prolegomene*, Editura Tehnică, București, 2004.
15. *** *Culegere de probleme de mecanică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974.
16. *Dicționar de mecanică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
17. Darabont, Al., Iorga, I., Văiteanu, D., Simanschevici, H., *Șocuri vibrații. Aplicații în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1988.
18. Darabont, Al., Iorga, I., Cihodaru, M., *Măsurarea zgomotului și vibrațiilor în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1983.
19. Filimon, I., Soare, M., *Ecuatii diferențiale cu aplicații în mecanica construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1983.
20. Gheorghiu, Al., *Statica construcțiilor*, Vol.III, *Formulări și metode matriceale în statica liniară. Comportarea și calculul nelinier al structurilor.*, Editura Tehnică, București, 1980.
21. Gioncu, V., Ivan, M., *Bazele calculului structurilor la stabilitate*, Editura Facla, Timișoara, 1983.
22. Hangan, S., Crainic, L., *Concepte și metode energetice în dinamica construcțiilor*, Editura Academiei R.S.R., București, 1980.
23. Harris, C., Crede, Ch., *Șocuri și Vibrații*, vol. I, II și III, Editura Tehnică, București, 1968.
24. Ifrim, M., *Dinamica structurilor și inginerie seismică*, EDP, București, 1984.
25. Ifrim, M., *Aplicații în Analiza Dinamică a Structurilor și Inginerie Seismică*, EDP, București, 1974.
26. Ilie, Gh., Fierbințeanu, V., Stănilă, N., Petrescu, I., *Mecanica construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1987.

27. Ispas, C., Simion, F.-P., *Vibrațiile mașinilor – unelte. Teorie și aplicații*, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
28. Ixaru, L. Gr., *Metode numerice pentru ecuații diferențiale cu aplicații*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
29. Marinov., R., *Probleme de stabilitate dinamică în construcții*, EDP, București, 1985.
30. Massonnet, Ch., ș.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Editura Tehnică, București, 1974.
31. Mișu, C., *Metode numerice în algebra liniară*, Editura Tehnică, București, 1977.
32. Mișu, C., *Sisteme de ecuații liniare și forme pătratice*, Editura Tehnică, București, 1985.
33. Munteanu, M., *Introducere în dinamica mașinilor vibratoare*, Editura Academiei R.S.R., București, 1986.
34. Nowacki, W., *Dinamica sistemelor elastice*, Editura Tehnică, 1969.
35. Olariu, V., Sima, P., Achiriloaie, V., *Mecanică tehnică*, Editura Tehnică, București, 1982.
36. Oprea, Gh., *Stabilitatea și calculul de ordinal II al structurilor din bare*, Editura Național, 1999.
37. Pană, T., *Absorbitori dinamici de vibrații*, Editura Tehnică, București, 1984.
38. Posea, N., *Calculul dinamic al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1991.
39. Radeș, M., *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Editura Academiei R.S.R., București, 1979.
40. Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D., *Elemente de vibrații mecanice*, EDP, București, 1973., *Statica Construcțiilor*, EDP, București, 1972.
41. Răutu, S., Băbuț, V
42. Salvadori, M.G., Baron, M.L., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1972.
43. Sandi, H., *Elemente de dinamica structurilor*, EDP, București, 1983.
44. Scarlat, A., *Stabilitatea și calculul de ordinul II al structurilor*, Editura Tehnică, București, 1969.
45. Scarlat, A., *Stabilitatea structurilor. Probleme speciale*, Editura Tehnică, București, 1969.
46. Silaș, Gh. ș.a., *Culegere de probleme de vibrații mecanice*, vol. II, *Sisteme neliniare și parametrice. Sisteme vibropercutante. Aplicații tehnice*, Editura Tehnică, București, 1973.
47. Silaș, Gh., *Mecanică. Vibrații mecanice*, EDP, București, 1968.
48. Silaș, Gh., Brîndeu, L., *Sisteme vibropercutante*, Editura Tehnică, 1986.
49. Simionescu, I., Dragnea, M., Moise, V., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică. *Aplicații în FORTRAN*, EDITURA TEHNICĂ, 1995.
50. Simonici, M., *Dinamica construcțiilor*, Editura Tehnică, București, 1958.

51. Soare, M., Teodorescu, P.P., Toma, I., Ecuatii diferențiale cu aplicații în Mecanica Construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1999.
52. Snitko, N.K., Dinamica construcțiilor, Editura Tehnică, București, 1965.
53. Staicu, Șt., Introducere în mecanica teoretică, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983.
54. STAS 3451 - 73, Statica, dinamica și stabilitatea structurilor. Terminologie.
55. STAS 6488 - 73, Solicitări variabile periodice. Terminologie și simboluri.
56. STAS 10101/0 - 75. Acțiuni în construcție. Clasificarea și gruparea acțiunilor.
57. STAS 101001/OB - 77, Clasificarea și gruparea acțiunilor pentru poduri de cale ferată și șosea.
58. STAS 10101/1 - 75, Acțiuni în construcție. Greutăți tehnice și încărcări permanente.
59. STAS 1489 - 75, Poduri de cale ferată. Acțiuni.
60. STAS 1545 - 63, Poduri pentru străzi și șosele. Pasarele. Sarcini.
61. STAS 3220 - 65, Sarcini în construcții. Poduri de cale ferată. Convoaie tip.
62. STAS 3221 - 63, Poduri pentru străzi și șosele. Convoaie tip și clase de încărcare.
63. STAS 737/1 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Unități fundamentale și unități suplimentare.
64. STAS 737/2 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Unități derivate.
65. STAS 737/3 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Reguli de formare și scriere a unităților SI.
66. STAS 737/4 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Prefixe pentru formarea multiplilor și submultiplilor zecimali ai unităților SI.
67. STAS 737/8 - 72, Sistemul Internațional de unități (SI). Mărimi caracteristice mecanicii. Unități de măsură.
68. STAS 9446 - 73, Unități de măsură care nu fac parte din sistemul Internațional de unități (SI). Unități tolerate.
69. Teodorescu, P.P., Dinamica corpurilor liniar elastice, Editura Academiei R.S.R., București, 1972.
70. Jăposu, I., Mecanică analitică și vibrații, Teorie și probleme, Editura Tehnică, București, 1998.
71. Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R., Mecanică teoretică, Editura Tehnică, București, 1968.