

**BĂNUȚ VALERIU**

**TEODORESCU MIRCEA EUGEN**

**STATICA CONSTRUCȚIILOR**

**APLICAȚII**

**STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE**

**MATRIX ROM**

**Bucuresti 2003**



# INTRODUCERE

Structurile static nedeterminate sunt acele structuri care au un număr de legături – interioare și/sau exterioare – mai mare decât numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice. În consecință, numărul de necunoscute este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru static. Pentru calculul unei structuri static nedeterminate este deci necesar să se stabilească un număr suplimentar de ecuații.

S-a arătat în prima parte a acestei lucrări că pentru rezolvarea problemelor în Statica Construcțiilor se utilizează două dintre condițiile ce caracterizează echilibrul structurii în poziție deformată și anume: condiția de echilibru static și condiția de continuitate a deformatei cu legăturile (interioare sau exterioare).

În cazul structurilor static determinate pentru calculul reacțiunilor și eforturilor este suficientă condiția de echilibru static.

În cazul structurilor static nedeterminate pentru calculul eforturilor este necesară utilizarea celor două condiții prezentate mai sus.

În funcție de ordinea care sunt utilizate aceste două condiții rezulta cele două metode generale, utilizate în calculul structurilor static nedeterminate.

Dacă se respectă permanent condiția de echilibru static iar pentru obținerea soluției problemei se impune condiția de compatibilitate a deformatei cu legăturile se obține metoda eforturilor (metoda forțelor).

Dacă se respectă permanent condiția de compatibilitate a deformatei cu legăturile iar pentru obținerea soluției problemei se impune condiția de echilibru static se obține metoda deplasărilor.

Utilizarea uneia sau alteia dintre cele două metode depinde de avantajele pe care le prezintă în calculul diferitelor tipuri de structuri.

În calculul structurilor static nedeterminate o importanță deosebită o au teoremele de reciprocitate a lucrurilor mecanice ale forțelor exterioare, a deplasărilor unitare și a reacțiunilor unitare.

Teorema reciprocității lucrurilor mecanice ale forțelor exterioare – teorema lui Betti – se enunță astfel: “lucrul mecanic efectuat de sistemul de forțe  $P_i$  parcurgând deplasările  $\Delta_{ij}$  produse de sistemul de forțe  $P_j$  este egal cu lucrul mecanic efectuat de sistemul de forțe  $P_j$  parcurgând deplasările  $\Delta_{ji}$  produse de sistemul de forțe  $P_i$ ”.

Forma matematică a acestei teoreme este

$$\sum P_i \Delta_{ij} = \sum P_j \Delta_{ji} \quad (1)$$

Teorema de reciprocitate a deplasărilor unitare (deplasări produse de forțe sau momente egale cu unitatea) se obțin din (1) astfel:

- se exprimă deplasările reale  $\Delta_{ij}$  și  $\Delta_{ji}$  în funcție de deplasările unitare  $\delta_{ij}$  și  $\delta_{ji}$  și forțele  $P_i$  și  $P_j$

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} \cdot P_j ; \Delta_{ji} = \delta_{ji} \cdot P_i \quad (2)$$

- scriind relația (1) sub forma

$$\frac{\Delta_{ij}}{P_j} = \frac{\Delta_{ji}}{P_i} \text{ rezultă } \delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (3)$$

ceea ce reprezintă expresia matematică a teoremei de reciprocitate a deplasărilor unitare.

Enunțul acestei teoreme este: deplasarea produsă pe direcția i de o forță egală cu unitatea, acționând pe direcția j este egală cu deplasarea produsă pe direcția j de o forță egală cu unitatea acționând pe direcția i.

Teorema reciprocității lucrurilor mecanice și teorema reciprocității deplasărilor unitare se aplică atât structurilor static determinate cât și celor static nedeterminate.

Teorema de reciprocitate a reacțiunilor unitare este valabilă numai pentru structuri static nedeterminate și se obține tot din forma generală (1) astfel:

- pe direcția legăturii i se imprimă deplasarea  $\Delta_i$  iar în legătura j apare reacțiunea  $R_{ji}$

- direcția legăturii j se imprimă deplasarea  $\Delta_j$  iar în legătura i apare reacțiunea  $R_{ij}$

- se exprimă reacțiunile  $R_{ij}$  și  $R_{ji}$  în funcție de reacțiunile  $r_{ij}$  și  $r_{ji}$  (reacțiuni produse de deplasări egale cu unitatea) astfel:

$$R_{ij} = r_{ij} \cdot \Delta_j; \quad R_{ji} = r_{ji} \cdot \Delta_i \quad (4)$$

- scriind relația (1) sub forma

$$\frac{R_{ij}}{\Delta_j} = \frac{R_{ji}}{\Delta_i} \text{ rezulta } r_{ij} = r_{ji} \quad (5)$$

ceea ce reprezintă forma matematică a teoremei reciprocității reacțiunilor unitare.

Enunțul acestei teoreme este: reacțiunea produsă în legătura i de o deplasare egală cu unitatea pe direcția legăturii j este egală cu reacțiunea produsă în legătura j de o deplasare egală cu unitatea pe direcția legăturii j.

# METODA EFORTURILOR

## CAPITOLUL IX

### PRINCIPIILE METODEI EFORTURILOR

Metoda eforturilor pornește de la analiza statică a structurii și utilizează ca necunoscute eforturile (forțele) din legăturile suplimentare ale structurii static nedeterminate. Numărul legăturilor suplimentare reprezintă gradul de nedeterminare statică a structurii. Analiza statică a structurii se referă la stabilirea gradului de nedeterminare a acesteia.

Legăturile suplimentare pot fi exterioare, interioare sau exterioare și interioare (fig. IX.1).

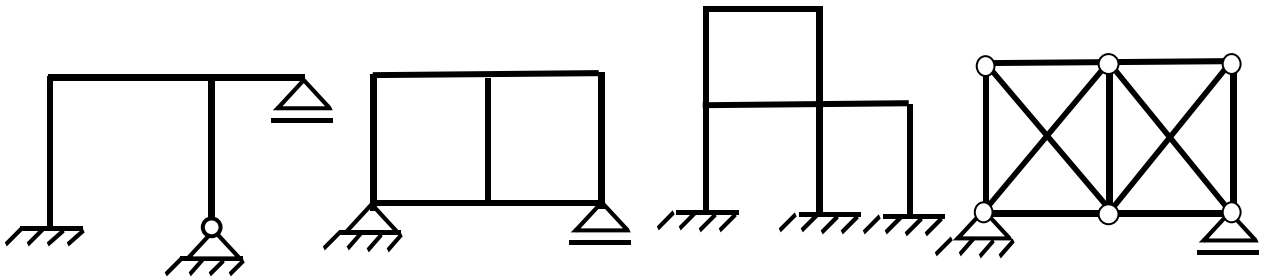


Fig.IX.1

Pentru grinzi drepte, cadre și arce gradul de nedeterminare statică se stabilește cu relația

$$N = 3C - A - 2S \quad (\text{IX.1})$$

unde  $N$  reprezintă gradul de nedeterminare statică,  $C$  numărul de contururi închise (între bare sau între bare și baza de susținere),  $A$  numărul de articulații simple,  $S$  numărul de reazeme simple.

Pentru grinzile cu zăbrele plane – la care nodurile sunt considerate articulații perfecte) relația utilizată este:

$$N = b + r - 2n \quad (\text{IX.2})$$

unde  $b$  reprezintă numărul de bare,  $r$  numărul de legături simple cu baza de susținere și  $n$  numărul de noduri.

Dacă

$N > 0$  structura este static nedeterminată

$N = 0$  structura este static determinată

$N < 0$  mecanism

În metoda eforturilor, pentru calculul unei structuri static nedeterminate, se utilizează un sistem de bază, obținut din structura reală prin eliminarea unui număr de legături simple egal cu gradul de nedeterminare statică a structurii. Sistemul de bază este o structură static determinată și poate fi obținut în diverse moduri (fig.IX.2).

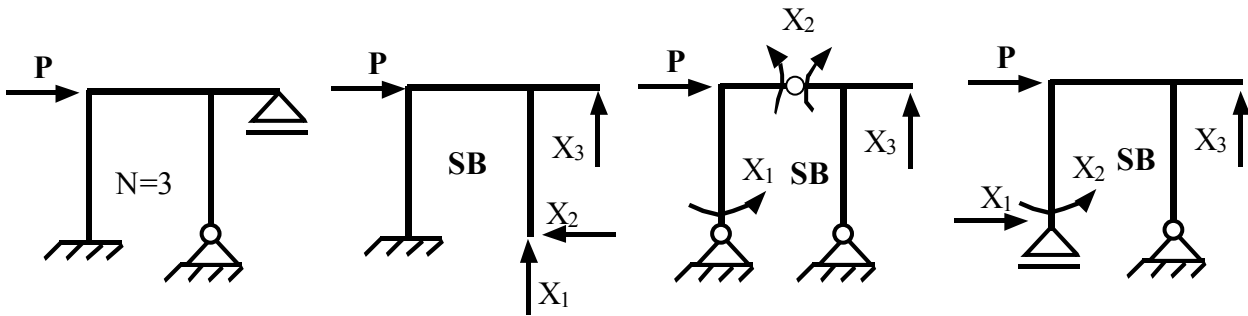


Fig.IX.2

Sistemul de bază se încarcă cu forțele reale și cu necunoscutele  $X_i$  (care reprezintă echivalentul mecanic al legăturilor îndepărtate). Fiind static determinat se pot calcula eforturile și deplasările pe direcțiile necunoscutelor. Soluția unică a problemei se obține punând condiția de compatibilitate a deformatelor cu legăturile reale, adică deplasarea totală pe direcția fiecărei necunoscute să fie egală cu zero, deoarece în realitate pe aceste direcții există legături fixe.

În acest mod se asigură condiția ca sistemul de bază să se comporte identic cu structura reală, adică să aibă aceeași stare de eforturi și aceeași formă deformată.

Aceste condiții se exprimă astfel:

$$\Delta_1=0, \Delta_2=0, \dots, \Delta_n=0 \quad (\text{IX.3})$$

sau în formă dezvoltată

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0 \end{cases} \quad (\text{IX.4})$$

ceea ce reprezintă un sistem de ecuații liniare.

Elemente componente ale sistemului de ecuații au următoarea semnificație fizică:

- necunoscutele  $X_1, X_2, \dots, X_n$  reprezintă forțe generalizate (forțe, momente, perechi de forțe, perechi de momente),
- coeficienții necunoscutelor principale  $\delta_{ii}$  reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei  $X_i$ , când sistemul de bază este încărcat numai cu necunoscuta  $X_i=1$ ,
- coeficienții necunoscutelor secundare  $\delta_{ij}$  reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei  $X_i$ , când sistemul de bază este încărcat numai cu necunoscuta  $X_j=1$ ,

Acești coeficienți respectă condiția  $\delta_{ij}=\delta_{ji}$

- termenii liberi  $\Delta_{ip}$  reprezintă deplasarea pe direcția necunoscută  $X_i$  când sistemul de bază este încărcat numai cu forțele reale.

Pentru grinzi drepte și cadre formate din bare drepte coeficienții necunoscuților și termenii liberi au expresiile:

$$\delta_{ii} = \int \frac{m_i^2}{EI} dx \neq 0; \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx; \quad \Delta_{ip} = \int \frac{m_i M_p^0}{EI} dx \quad (\text{IX.5})$$

unde  $m_i, m_j$  sunt diagrame unitare produse de  $X_i=1, X_j=1$  acționând separat pe sistemul de bază, iar  $M_p^0$  este digrama produsă de forțele reale.

Se constată din expresiile coeficienților necunoscuților că aceștia depind numai de caracteristicile structurii. Numai termenii liberi depind de încărcările reale.

După rezolvarea sistemului de ecuații (IX.6) se pot calcula momentele încovoietoare pentru structura reală, prin suprapunere de efecte:

$$M_p = M_p^0 + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2 + \dots + m_n \cdot X_n \quad (\text{IX.6})$$

Forțele tăietoare se determină din condiția de echilibru a fiecărei bare, separate din structură și încărcată cu forțele reale (dacă există pe bară) și cu momentele încovoietoare din diagrama  $M_p$ .

Forțele axiale se calculează din condiția de echilibru static al fiecărui nod, presupus detașat din structură.

Deoarece este posibil ca pe parcursul calculului numeric să se producă greșeli este necesar să se verifice rezultatul final.

Condiția eficientă de verificare este condiția de compatibilitate a deformatei cu legăturile reale ale structurii static nedeterminate.

Deoarece diagrama  $M_p$  respectă condiția de echilibru static (fiecare diagramă din (IX.6) respectând această condiție) este necesar ca această diagramă să respecte și condiția de compatibilitate a deformatei cu legăturile.

Condiția de verificare este

$$\Delta_i=0 \quad (\text{IX.7})$$

unde direcția  $i$  reprezintă direcția unei legături existente.

Se demonstrează că o deplasare pe o structură static nedeterminată, încărcată cu forțe, se calculează cu relația

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_p}{EI} dx = \int \frac{m_i^0 M_p}{EI} dx \quad (\text{IX.8})$$

unde  $M_p$  este diagrama finală,  $m_i$  diagrama pe structura static nedeterminată încărcată cu o forță  $P_i=1$  pe direcția deplasării, iar  $m_i^0$  o diagramă obținută pe orice sistem de bază (static determinat) derivat din structura reală și încărcat cu forța  $P_i=1$  pe direcția deplasării căutate. A doua formă a relației (IX.8) conduce – așa cum se va vedea în aplicații ulterioare – la un volum de calcule mult mai mic, comparativ cu prima formă a relației (IX.8).

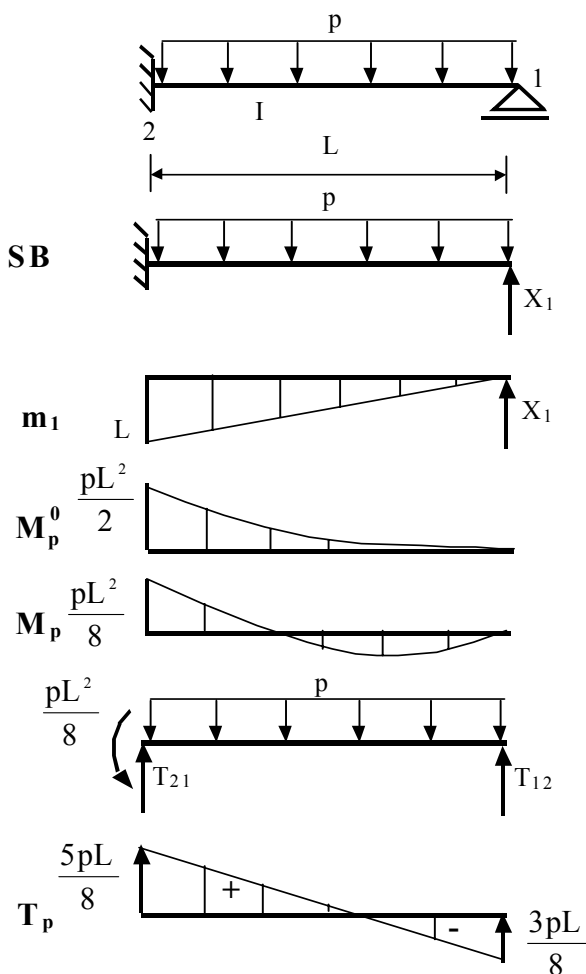
Calculul practic al structurilor static nedeterminate prin metoda eforturilor, implică parcurgerea următoarelor etape:

- se stabilește gradul de nedeterminare statică a structurii,
- se alege sistemul de bază,
- se trasează diagramele unitare  $m_i$  și  $M_p^0$ , pe sistemul de bază,
- se calculează coeficienții necunoscutelor  $\delta_{ii}$  și  $\delta_{ij}$  și termenii liberi  $\Delta_{ip}$ ,
- se rezolvă sistemul de ecuații și se obțin necunoscutele  $X_i$ ,
- se determină diagrama finală de momente încovoietoare  $M_p$ ,
- se verifică diagrama  $M_p$ ,
- se calculează forțele tăietoare,
- se calculează forțele axiale.

## APLICAȚII

A Să se traseze diagramele de eforturi elementele sau structurile static static nedeterminate următoare:

### Problema 9.1 (fig.9.1)



- Fig.9.1 -

Grinda este o singură dată static nedeterminată.

Condiția de compatibilitate este

$$\Delta_1 = 0$$

cu forma dezvoltată  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$

Calculul coeficientului necunoscutei

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot L \cdot \frac{2}{3} L = \frac{L^3}{EI}$$

Calculul termenului liber

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{pL^2}{2} \cdot L \cdot \frac{3}{4} L = \\ &= -\frac{pL^4}{8EI} \end{aligned}$$

$$\frac{L^3}{3EI} X_1 - \frac{pL^4}{8EI} = 0; X_1 = \frac{3pL}{8}$$

Se constată că efortul  $X_1$  nu depinde de produsul  $EI$ .

Momentele încovoietoare finale se calculează prin suprapunere de efecte

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1$$

$$M_2 = \frac{pL^2}{2} - \frac{3}{8} pL^2 = \frac{pL^2}{8}$$



Forța tăietoare se calculează considerând grinda încărcată cu forța uniform distribuită și cu momentul în încăstrare și scriind condiția de echilibru static.

$$\sum M_1 = 0; \quad T_{21} \cdot L - \frac{pL^2}{8} - \frac{pL^2}{2} = 0; \quad T_{21} = \frac{5pL}{8}; \quad T_{12} = X_1 = \frac{3pL}{8}$$

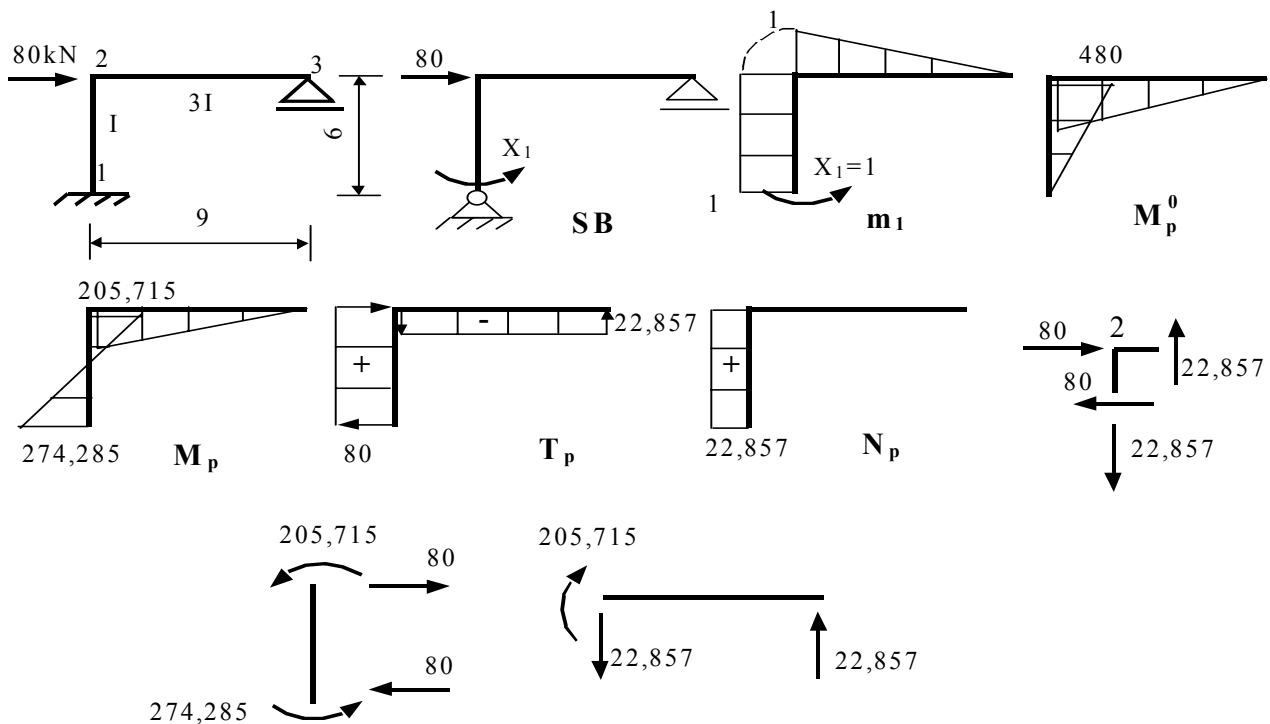
Verificare  $\sum Y_i = 0; \quad T_{21} - pL + T_{12} = 0; \quad \frac{5pL}{8} - pL + \frac{3pL}{8} = 0$

Momentul încovoietor maxim în câmp are loc în secțiunea în care forța tăietoare se anulează.

$$T_x = \frac{5pL}{8} - p \cdot x; \quad T_x = 0; \quad x = \frac{5}{8}L;$$

$$M_{\max} = \frac{5pL}{8} \cdot \frac{5L}{8} - \frac{pL^2}{8} - p \cdot \frac{25L^2}{128} = \frac{9pL^2}{128}$$

Problema 9.2 (fig.9.2)



- Fig.9.2 -

Structura este o singură dată static nedeterminată. Sistemul de bază și diagramele  $m_1$  și  $M_p^0$  sunt date direct în figura.

Condiția de compatibilitate este  $\Delta_1=0$  și are forma dezvoltată

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 480 \cdot 1 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 480 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1920}{EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{1920}{7} = 274,285$$

Momentele încovoietoare finale se calculează cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1$$

$$M_{12} = 0 + 1 \cdot 274,285 = 274,285 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -480 - 274,285 = -205,715 \text{ kNm}$$

Forțele tăietoare se calculează scriind echilibrul barelor, iar forțele axiale scriind echilibrul de nod.

### Problema 9.3 (fig.9.3)

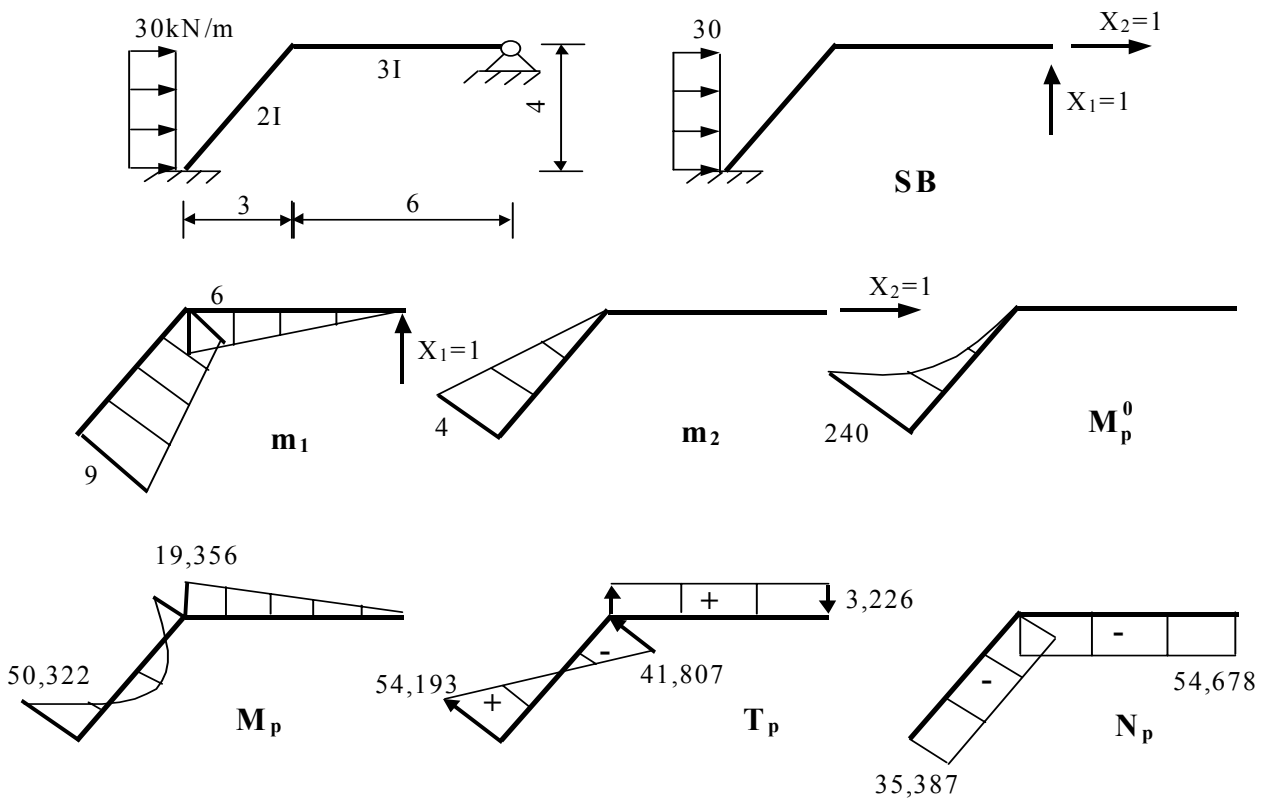


Fig.9.3

Structura este de două ori static nedeterminată. Condițiile de compatibilitate sunt  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$  cu forma dezvoltată

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) \right] + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 =$$

$$= \frac{166,5}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) \right] = -\frac{40}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{40}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 240 \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 6 \right) \right] = -\frac{1650}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 240 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{600}{EI}$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} \frac{166,5}{EI} X_1 - \frac{40}{EI} X_2 - \frac{1650}{EI} = 0 \\ -\frac{40}{EI} X_1 + \frac{40}{3EI} X_2 + \frac{600}{EI} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 166,5X_1 - 40X_2 - 1650 = 0 \\ -120X_1 + 40X_2 + 1800 = 0 \end{cases}$$

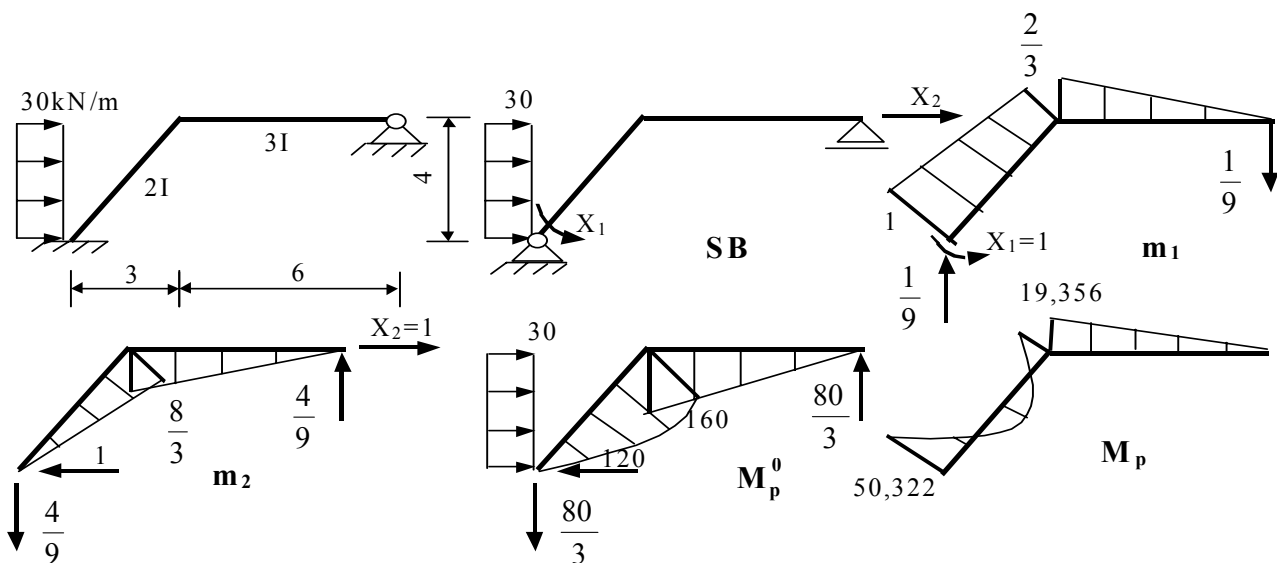
iar necunoscutele au următoarele valori  $X_1 = -3,225$ ;  $X_2 = -54,678$

Diagrama finală de moment încovoietor se obține prin suprapunere de efecte:

$$M_p = M_p^0 + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2$$

și este dată în figura 9.3.

Problema 9.4 (fig.9.4). Structura este aceeași de la aplicația precedentă, dar se va utiliza un alt sistem de bază.



- Fig.9.4 -

Condițiile de compatibilitate  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2,055}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{8}{3} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) \right] - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{3,778}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{10,667}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 160 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4^2}{8} \cdot 5 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 160 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{310}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 160 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4^2}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \right] +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 160 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{773,333}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2,055X_1 - 3,778X_2 - 310 = 0 \\ -3,778X_1 + 10,667X_2 + 773,333 = 0 \end{cases}$$

Necunoscutele au valorile

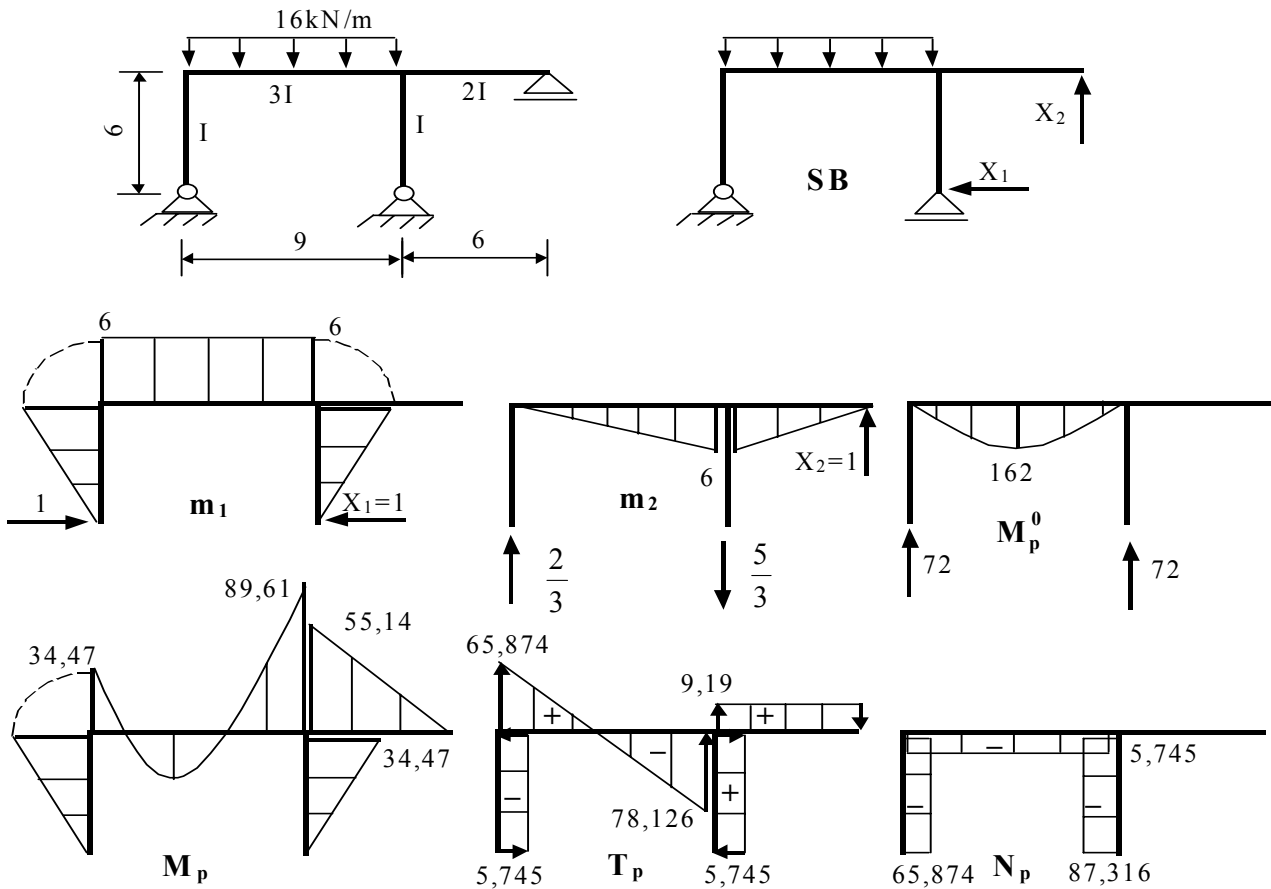
$$X_1 = 50,294; \quad X_2 = -54,696$$

Diagrama de momente încovoietoare pe structura reală static nedeterminată este dată în figura 9.4, valorile fiind obținute prin suprapunerea efectelor

$$M_p = M_p^0 + m_1 \cdot X_1 + m_2 \cdot X_2$$

Observație: Micile diferențe înregistrate comparativ cu cazul precedent sunt normale, calculul fiind efectuat cu un anumit număr de zecimale.

Problema 9.5 (fig.9.5)



- Fig.9.5 -

Ecuatiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 9 \cdot 6 = \frac{252}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = -\frac{54}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{72}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 162 \cdot 6 = -\frac{1944}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 162 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = \frac{972}{EI}$$

Sistemul de ecuații

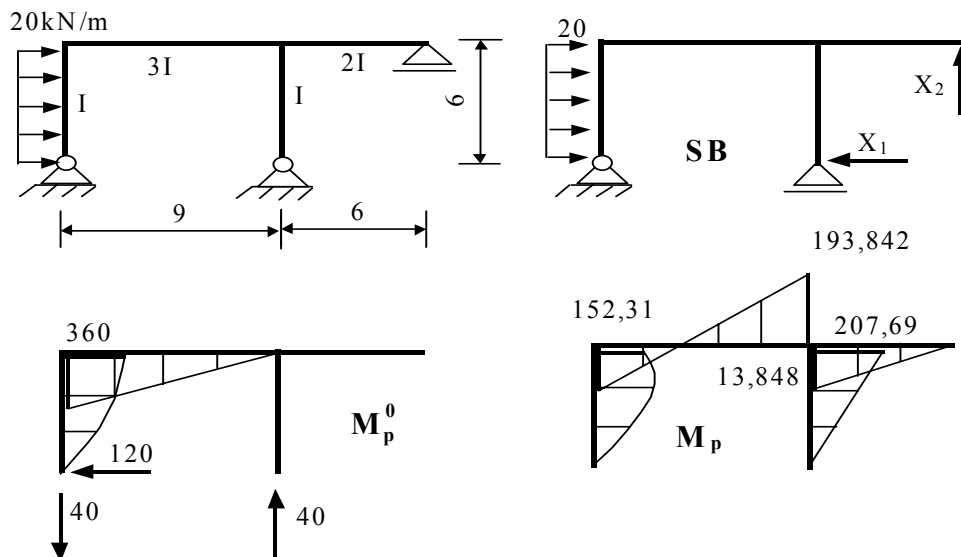
$$\begin{cases} 252X_1 - 54X_2 - 1944 = 0 \\ -54X_1 + 72X_2 + 972 = 0 \end{cases}$$

Necunoscutele au valorile

$$X_1 = 5,745; X_2 = -9,19$$

Diagramele de moment încovoietor, forță tăietoare și forță axială sunt date în figura 9.5.

Problema 9.6 (fig.9.6) Aceeași structură ca în cazul precedent cu o altă încărcare. Alegând același sistem de bază, diagramele unitare și coeficienții necunoscutelor nu se modifică – deoarece depind numai de caracteristicile structurii – dar se obține o nouă diagramă  $M_p^0$  și alte valori pentru termenii liberi –



- Fig.9.6 -

Calculul termenilor liberi

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right] - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = -\frac{8640}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{1080}{EI}$$

Sistemul de ecuații

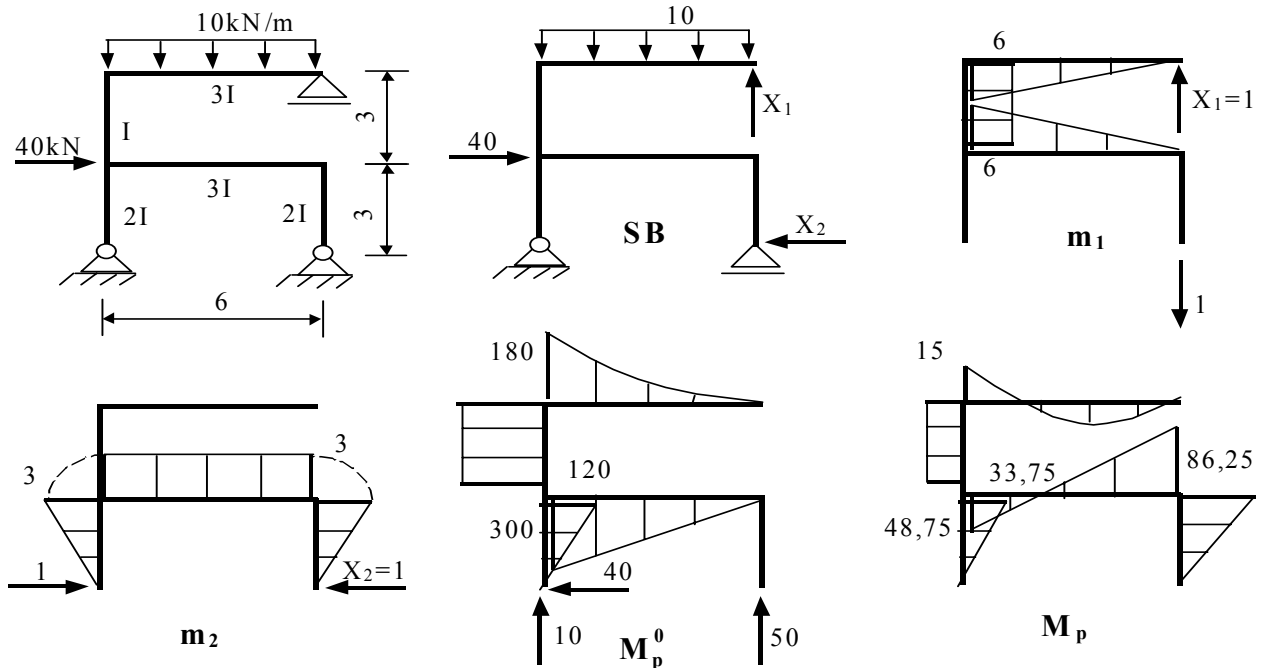
$$\begin{cases} 252X_1 - 54X_2 - 8640 = 0 \\ -54X_1 + 72X_2 + 1080 = 0 \end{cases}$$

Valorile necunoscute sunt

$$X_1 = 34,615; \quad X_2 = 2,308$$

Diagrama de momente încovoietoare pe structura reală este dată direct în figura 9.6.

Problema 9.7 (fig.9.7)



- Fig.9.7 -

Condițiile de compatibilitate  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{156}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = \frac{18}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = \frac{27}{EI}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx &= -\frac{1}{3EI} \left( \frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{EI} \cdot 180 \cdot 3 \cdot 6 = -\frac{4980}{EI} \end{aligned}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 300 \cdot 3 = -\frac{1260}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 156X_1 + 18X_2 - 4980 = 0 \\ 18X_1 + 27X_2 - 1260 = 0 \end{cases}$$

și valorile necunoscutelor

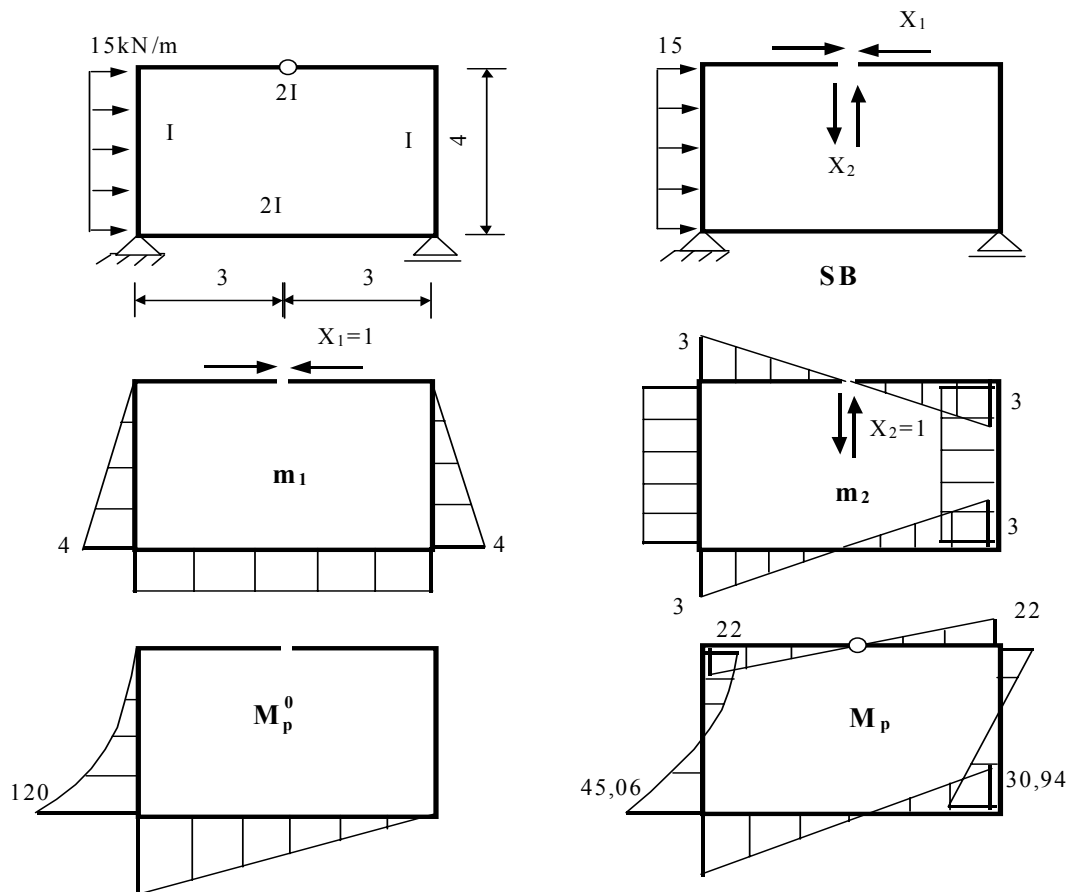
$$X_1 = 28,75; X_2 = 27,5$$

Momentele încovoietoare pe structura reală au fost calculate prin suprapunere de efecte

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2$$

și au fost reprezentate în figura 9.7.

### Problema 9.8 (fig.9.8)



- Fig.9.8 -

Condițiile de compatibilitate  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$

Ecuațiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$



Calculul coeficienților necunoscutelor și termenii liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 = \frac{272}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = 0 \text{ deoarece diagrama } m_1 \text{ este simetrică iar diagrama } m_2 \text{ este antisimetrică}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{4}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{90}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \cdot 4 = \frac{1200}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) \right] = \frac{660}{EI}$$

Sistemul de ecuații

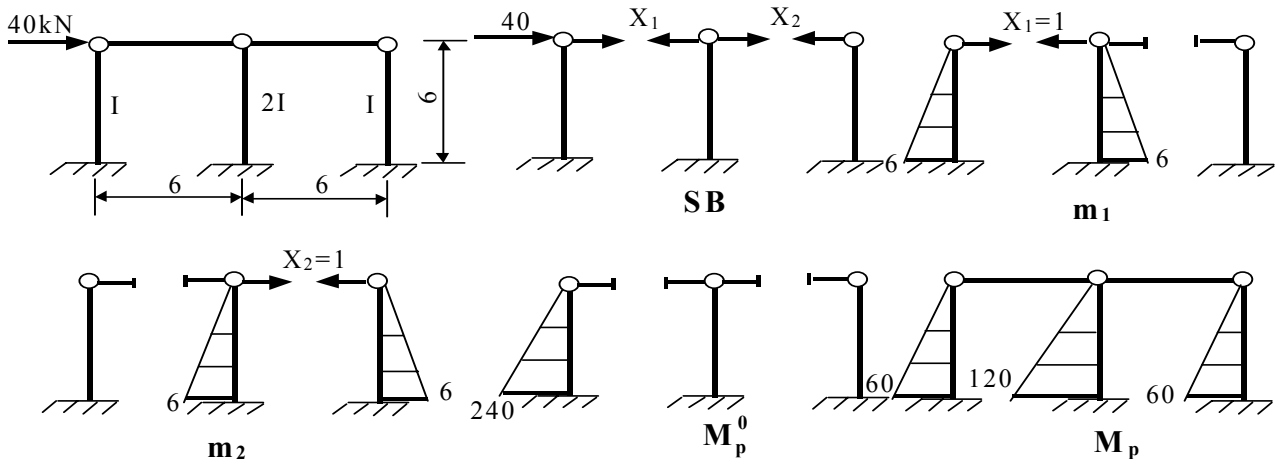
$$\begin{cases} \frac{273}{3} X_1 + 1200 = 0 \\ 90 X_2 + 660 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele

$$X_1 = -13,235; \quad X_2 = -7,334$$

Diagrama finală de momente încovoietoare este dată direct în figura 9.8.

Problema 9.9 (fig.9.9)



- Fig.9.9 -

Condițiile de compatibilitate  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$

Ecuatiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenii liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{108}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{36}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{108}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2880}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = 0$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 108X_1 - 36X_2 + 2880 = 0 \\ -36X_1 + 108X_2 = 0 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor

$$X_1 = -30; \quad X_2 = -10$$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 9.9.

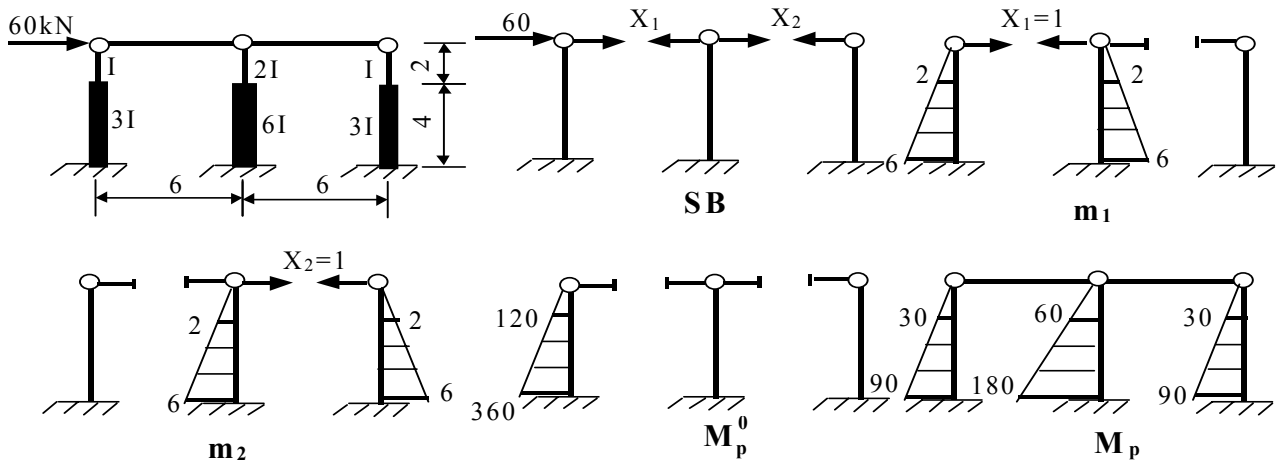
Din analiza diagramei finale de moment încovoietor rezultă următoarea concluzie:

- în cazul unei astfel de încărcări, structura având stâlpii de aceeași lungime, momentul forței orizontale raport cu secțiunea de încastrare – notat cu  $M_H = 40 \cdot 6 = 240\text{kN}$  se distribuie stâlpilor proporțional cu momentul de inerție al acestora.

- pentru stâlpii marginali  $M = M_H \cdot \frac{I}{4I} = 240 \cdot \frac{I}{4I} = 60\text{kNm}$

- pentru stâlpul central  $M = M_H \cdot \frac{2I}{4I} = 240 \cdot \frac{2I}{4I} = 120\text{kNm}$

Problema 9.10 (fig.9.10)



- Fig.9.10 -

Diferența față de aplicația precedentă constă în faptul că stâlpii au secțiunea variabilă trepte. În această situație integrarea se face pe părți de stâlp.

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] = \frac{116}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{116}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{6EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{116}{9EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 120 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 360 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4640}{3EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = 0$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 348X_1 - 116X_2 + 13920 = 0 \\ -116X_1 + 348X_2 = 0 \end{cases}$$

cu următoarele valori ale necunoscutelor

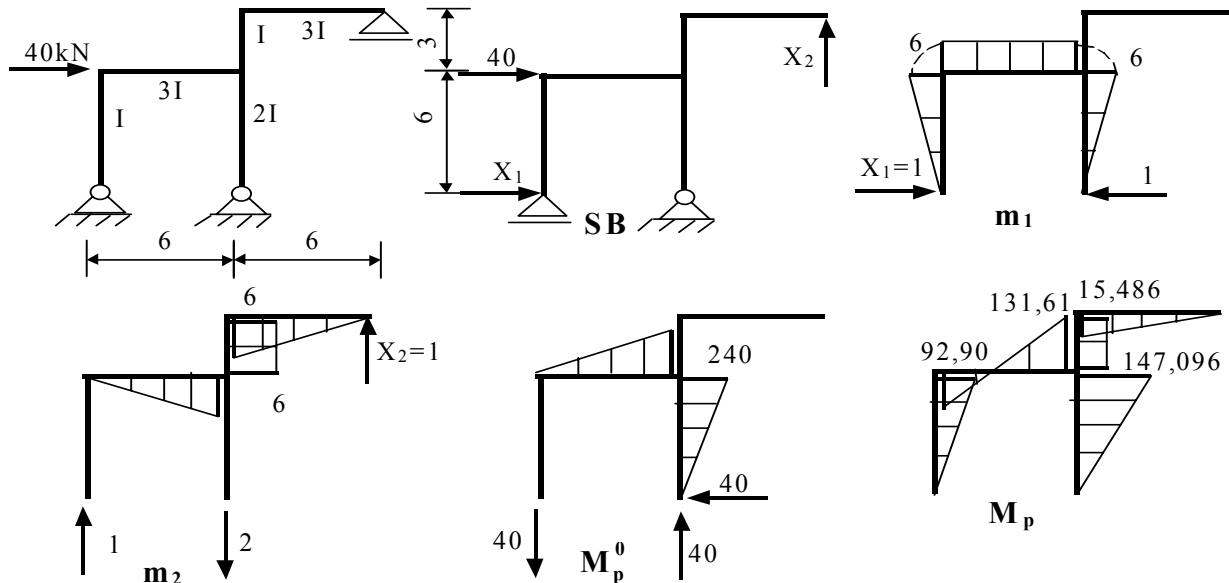
$$X_1 = -45; \quad X_2 = -15$$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 9.10.

Se constată aceeași distribuție ca în cazul precedent și aceasta din cauză că raportul momentelor de inerție pe cele două zone ale stâlpilor marginali și ale stâlpului central este același (egal cu 2 în acest caz).

Dacă raportul momentelor de inerție nu este același pe ambele zone distribuția momentului forței orizontale  $M_H$  urmează o altă lege.

Problema 9.11 (fig.9.11)



- Fig.9.11 -

Condițiile de compatibilitate  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenii liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{180}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = -\frac{36}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{2}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{156}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2880}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{960}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 180X_1 - 36X_2 + 2880 = 0 \\ -36X_1 + 156X_2 - 960 = 0 \end{cases}$$

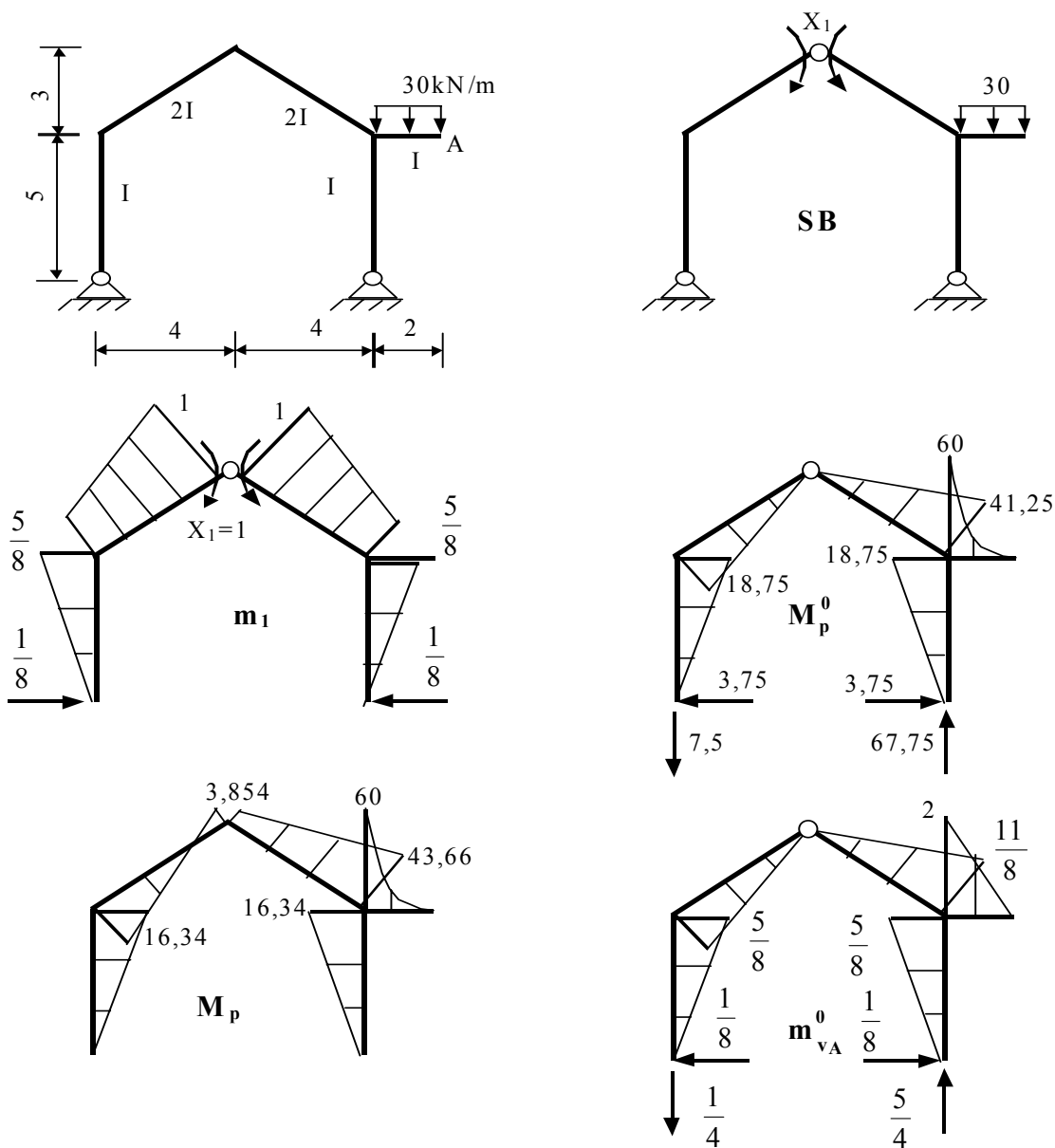
cu valorile necunoscutelor

$$X_1 = -14,484; \quad X_2 = 2,581$$

Diagrama finală de momente încovoietoare este dată în figura 9.11.

**B** Să se verifice diagrama de moment încovoietoare și să se calculeze deplasările indicate la următoarele structuri.

Problema 9.12 (fig.9.12) Translația pe verticală  $v_A$ .



- Fig.9.12 -

Condiția de compatibilitate  $\Delta_1=0$

Ecuția de condiție  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{2EI} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{8} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \right) \right] = \frac{4,662}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 18,75 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 18,85 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 41,25 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = -\frac{17,968}{EI}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{17,968}{4,662} = 3,854$$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 9.12.

Verificarea diagramei  $M_p$ . Se verifică dacă rotirea relativă din secțiunile nodului B este egală cu zero.

$$\theta_B^{rel} = \int \frac{M_p m_1}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16,34 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16,34 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,854 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,854 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 43,66 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right]$$

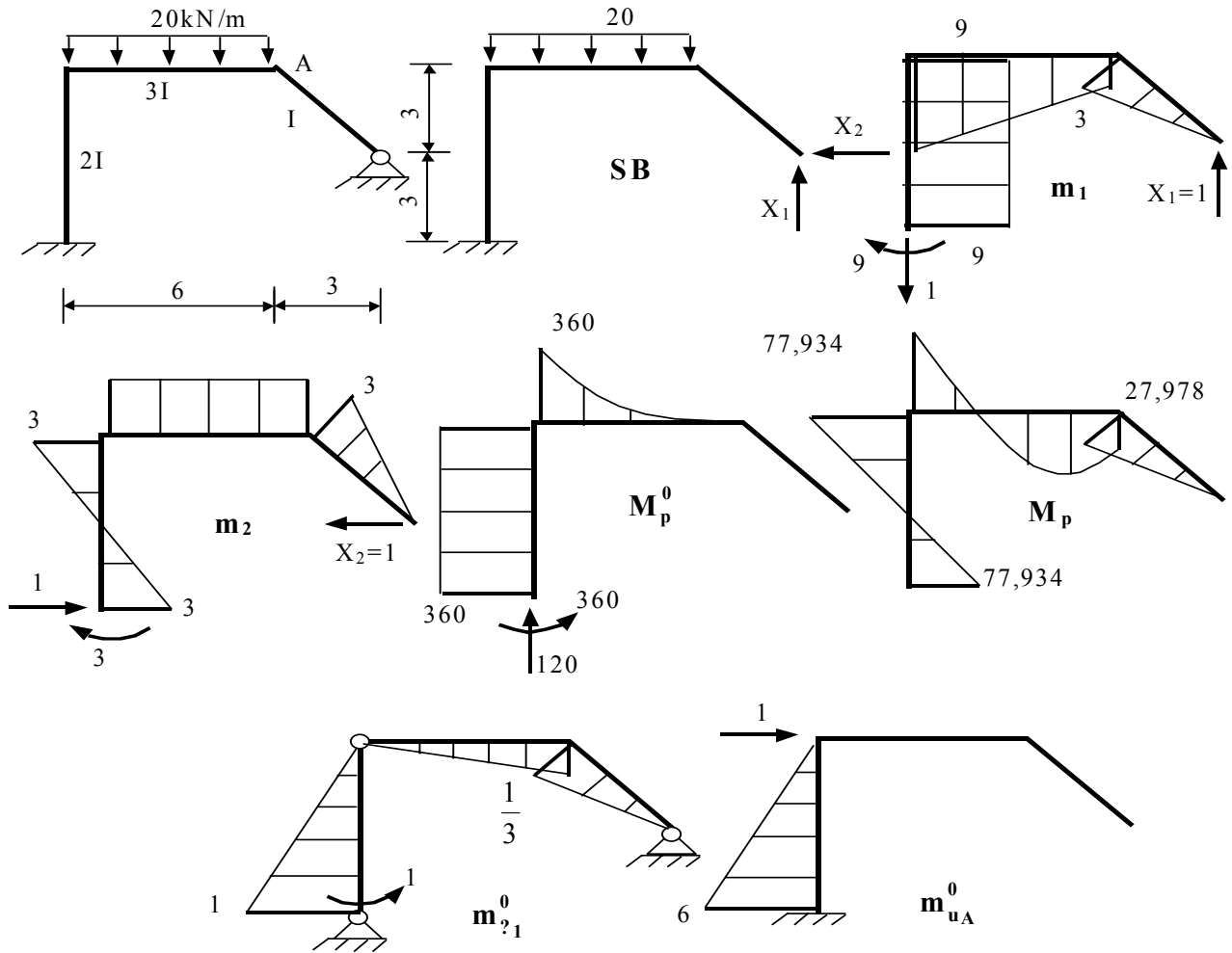
$$\theta_B^{rel} = -\frac{34,0416}{EI} + \frac{1}{2EI} (-30,6375 + 8,4306 + 8,4306 + 81,8625)$$

$$\theta_B^{rel} = \frac{-34,0416 + 34,0431}{EI} \approx 0$$

Calculul deplasării pe verticală a secțiunii A

$$v_A = \int \frac{M_p m_{v_A}}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16,34 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{8} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 16,34 - \frac{1}{3} \cdot 3,854 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{11}{8} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 43,66 + \frac{1}{3} \cdot 3,854 \right) \right] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 60 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = \\ = \frac{153,783}{EI} \text{ metri}$$

Problema 9.13 (fig.9.13) Deplasarea pe orizontală  $u_A$



- Fig. 9.13 -

Condițiile de compatibilitate  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenii liberi

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 9 \right) \right] + \frac{1}{2EI} \cdot 9 \cdot 6 \cdot 9 = \frac{333,73}{EI} \end{aligned}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \left(\frac{9+3}{2}\right) +$$

$$= \frac{1}{2EI} \cdot 9 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3\right) = -\frac{48,73}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 3\right)\right] = \frac{39,73}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 3\right) - \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 360 \cdot 9 = -\frac{11520}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 360 \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3\right) = \frac{720}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 333,73X_1 - 48,73X_2 - 11520 = 0 \\ -48,73X_1 + 39,73X_2 + 720 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele

$$X_1 = 38,826; \quad X_2 = 29,500$$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 9.13.

Verificarea diagramei  $M_p$ . Se calculează rotirea secțiunii din încastrare.

$$\theta_1 = \int \frac{M_p m_{\theta_1}^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 99,066 - \frac{2}{3} \cdot 77,934\right) + \frac{1}{3EI} \left[-\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 99,066 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 6^2}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 27,978 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 27,978 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\theta_1 = \frac{-28,401 + 28,399}{EI} \approx 0$$

Calculul diagramei  $M_p$  a fost corect.

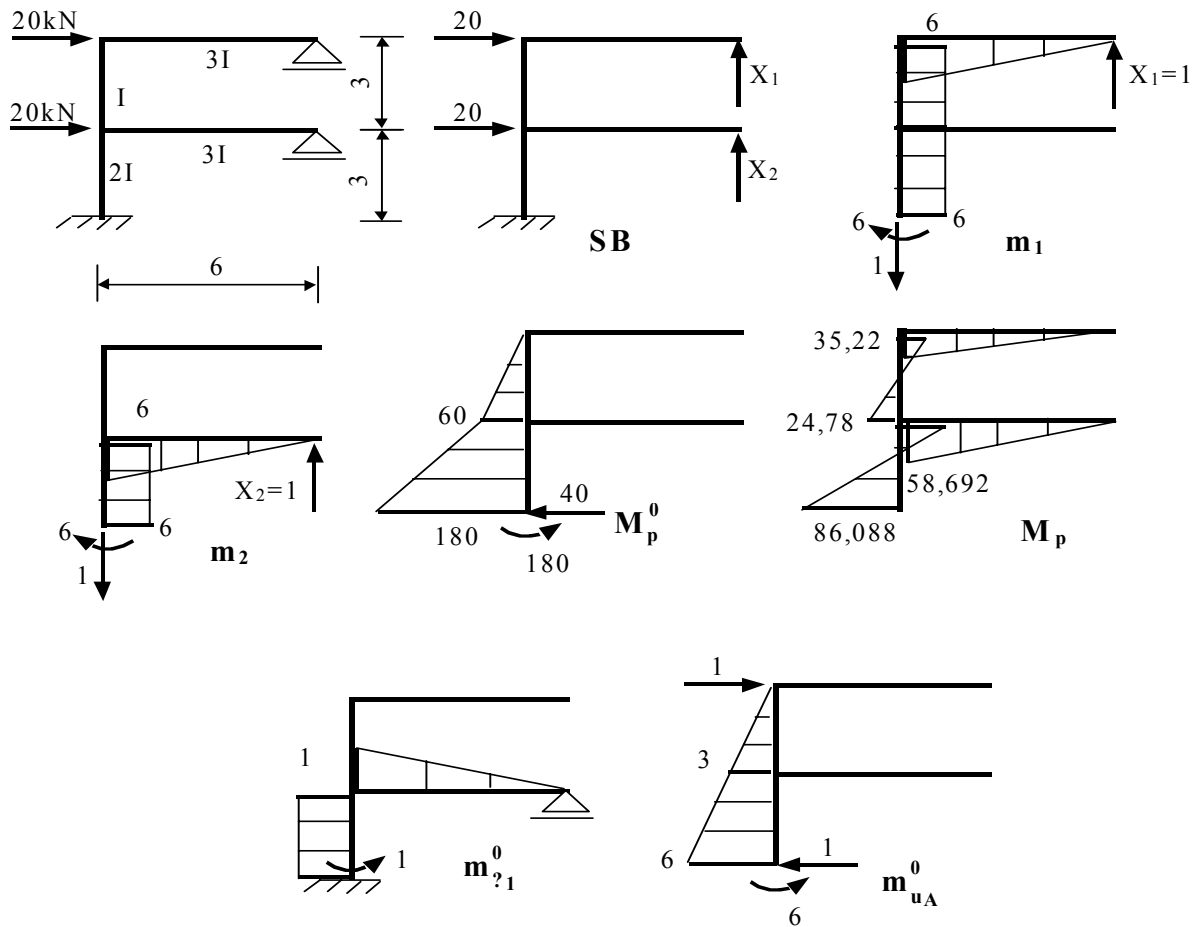
Calculul deplasării  $u_A$

Considerând același sistem de baza ca pentru calculul eforturilor se obține:

$$u_A = \int \frac{M_p m_{u_A}^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 99,066 - \frac{2}{3} \cdot 77,934\right) = -\frac{170,406}{EI} \text{ metri}$$



Problema 9.14 (fig.9.14) Deplasarea  $u_A$



- Fig.9.14 -

Condițiile de compatibilitate  $\Delta_1=0, \Delta_2=0$

Ecuatiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenii liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{186}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{54}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{78}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot 6 - \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \left( \frac{60 + 180}{2} \right) = -\frac{1620}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \left( \frac{260 + 180}{3} \right) = -\frac{960}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 186X_1 + 54X_2 - 1620 = 0 \\ 54X_1 + 78X_2 - 1080 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele

$$X_1 = 5,87; \quad X_2 = 9,782$$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 9.14.

Verificarea diagramei  $M_p$ . Se verifică rotirea din încastrare.

$$\theta_1 = \int \frac{M_p m_{\theta_1}^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left( \frac{86,088 - 33,912}{2} \right) - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 58,692$$

$$\theta_1 = \frac{39,132 - 39,128}{EI} \approx 0$$

Calculul deplasării  $u_A$

$$\begin{aligned} u_A = \int \frac{M_p m_{u_A}^0}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left( \frac{2}{3} 24,78 - \frac{1}{3} 35,22 \right) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \left( \frac{1}{3} 86,088 - \frac{2}{3} 33,912 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \left( \frac{2}{3} 86,088 - \frac{1}{3} 33,912 \right) \right] = \frac{168,906}{EI} \text{ metri} \end{aligned}$$

## CAPITOLUL X

### PROCEDEE PENTRU REDUCEREA CALCULULUI NUMERIC

Rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda eforturilor necesită efectuarea unui mare volum de calcule numerice, în special pentru determinarea coeficienților necunoscutelor, a termenilor liberi și a necunoscutelor. Acest volum de calcule crește rapid odată cu creșterea numărului de necunoscute.

În vederea reducerii volumului de calcule au fost elaborate unele procedee specifice metodei eforturilor.

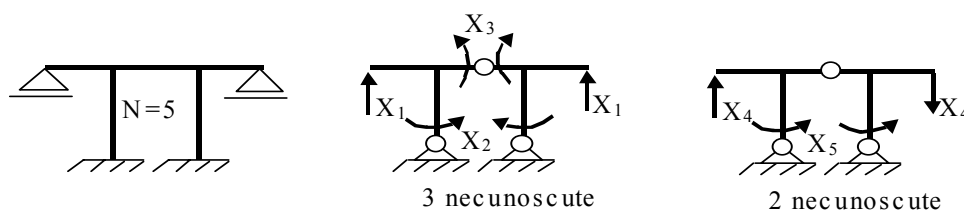
Aceste procedee sunt:

- procedeul grupării necunoscutelor, care poate fi utilizat atât pentru calculul structurilor de formă oarecare cât și pentru calculul structurilor simetrice;
- procedeul ortogonalizării diagramelor unitare, care poate fi utilizat pentru structuri oarecare;
- procedeul semistructurilor, care este utilizat numai pentru calculul structurilor simetrice.

#### a) Procedeul grupării necunoscutelor

Avantaje deosebite se obțin prin utilizarea acestui procedeu în calculul structurilor simetrice. Condiția care se impune în acest caz este ca sistemul de bază să fie simetric. Necunoscutele se grupează în necunoscute simetrice și necunoscute antisimetrice, astfel încât sistemul general de ecuații se descompune în două sisteme, unul care conține numai necunoscute simetrice și unul care conține numai necunoscute antisimetrice.

În figura 10.1 se prezintă un exemplu de grupare a necunoscutelor simetrice și antisimetrice.



- Fig.10.1 -

În cazul structurilor de formă oarecare – pornind de la observația că diagramele unitare trebuie să fie liniar independente – se poate obține soluția corectă a problemei chiar dacă se utilizează mai multe sisteme de bază (a se vedea problemele 10.1 și 10.2).

b) Procedeul ortogonalizării diagramelor unitare

Două diagrame unitare  $m_i$  și  $m_j$  sunt denumite ortogonale dacă satisfac condiția:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx = 0 \quad (X.1)$$

Cazul tipic de diagrame ortogonale sunt diagramele simetrice și antisimetrice.

În cazul general procedeul conduce la un volum foarte mare de calcule și nu este avantajos. Cazul în care procedeul este utilizat cu succes este cazul arcelor static nedeterminate – dublu încastrate ( a se vedea Capitolul 11).

c) Procedeul semistructurilor

Pornind de la structura reală simetrică, aceasta se secționează în axa de simetrie obținând ceea ce se numește semistructura. Această semistructură trebuie să aibă aceeași comportare ca în structura reală și în consecință în secțiunile practicate se vor introduce niște legături care să joace rolul jumătății de structură îndepărtată. În funcție de încărcare – simetrică sau antisimetrică – rezolvă semistructura corespunzătoare.

În figurile X.2 și X.3 se prezintă semistructurile corespunzătoare încărcării.

Structura si încărcarea	Semistructura	Semistructura	Conditii pentru sectiunea de pe axa de simetrie
			$H \neq 0, M \neq 0, V = 0$ $u = 0, \theta \neq 0, v \neq 0$
			$H \neq 0, M \neq 0, V = 0$ $u = 0, \theta \neq 0, v \neq 0$
			$H \neq 0, M \neq 0, V \neq 0$ $u = 0, \theta \neq 0, v = 0$

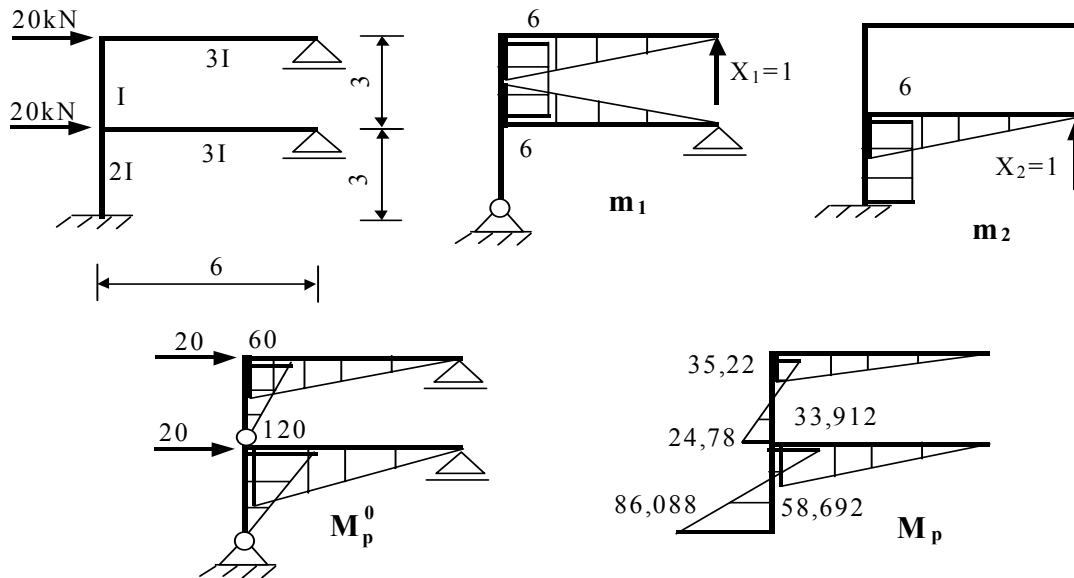
- Fig.X.2 -

Structura si încărcarea	Semistruktura	Semistruktura	Condiții pentru secțiunea de pe axa de simetrie
			$H \neq 0, M \neq 0, V = 0$ $u = 0, \theta = 0, v \neq 0$
			$H \neq 0, M \neq 0, V = 0$ $u = 0, \theta = 0, v \neq 0$
			$H \neq 0, M \neq 0, V \neq 0$ $u = 0, \theta = 0, v = 0$

- Fig.X.3 -

În cazul în care axa de simetrie se suprapune peste axa unei bare, în semistruktura corespunzătoare încărcării antisimetrice bara respectivă se consideră cu momentul de inerție pe jumătate. După obținerea diagramei de momente încovoietoare pe semistruktură, când se trece la structura întreagă, pe această bară se dublează valoarea momentului încovoietor, pentru a respecta condiția de echilibru static al nodului structurii reale.

Problema 10.1 (fig.10.1) Rezolvare utilizând mai multe sisteme de bază (a se vedea problema 9.14).



- Fig.10.1 -

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{156}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{24}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{78}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot 6 + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{300}{EI}$$

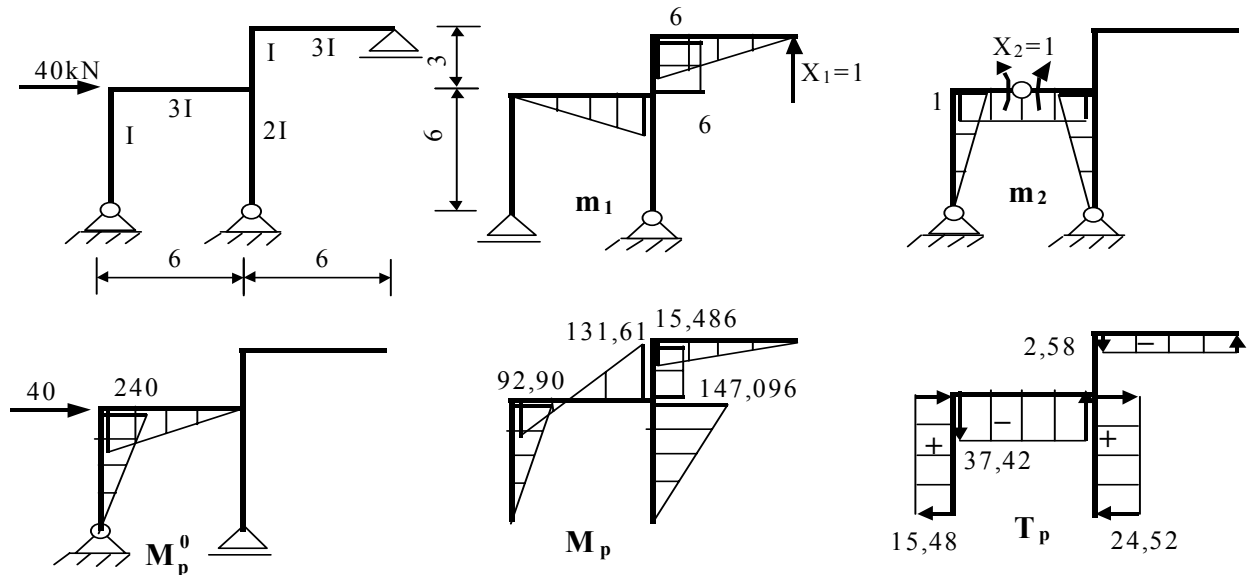
$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 3 \cdot 120 \cdot 6 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{1020}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 156X_1 - 24X_2 + 300 = 0 \\ -24X_1 + 78X_2 + 1020 = 0 \end{cases}$$

Cu valorile necunoscutelor  $X_1 = -4,130$  și  $X_2 = -14,348$  s-au calculat momentele încovoietoare finale  $M_p$ . Se constată că s-au obținut aceleași valori utilizând mai multe sisteme de bază.

Problema 10.2 (fig.10.2) Rezolvare utilizând mai multe sisteme de bază (a se vedea problema 9.11).



- Fig.10.2 -

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{156}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{6}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{5}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{480}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot 1 = \frac{720}{EI}$$

Sistemul de ecuații

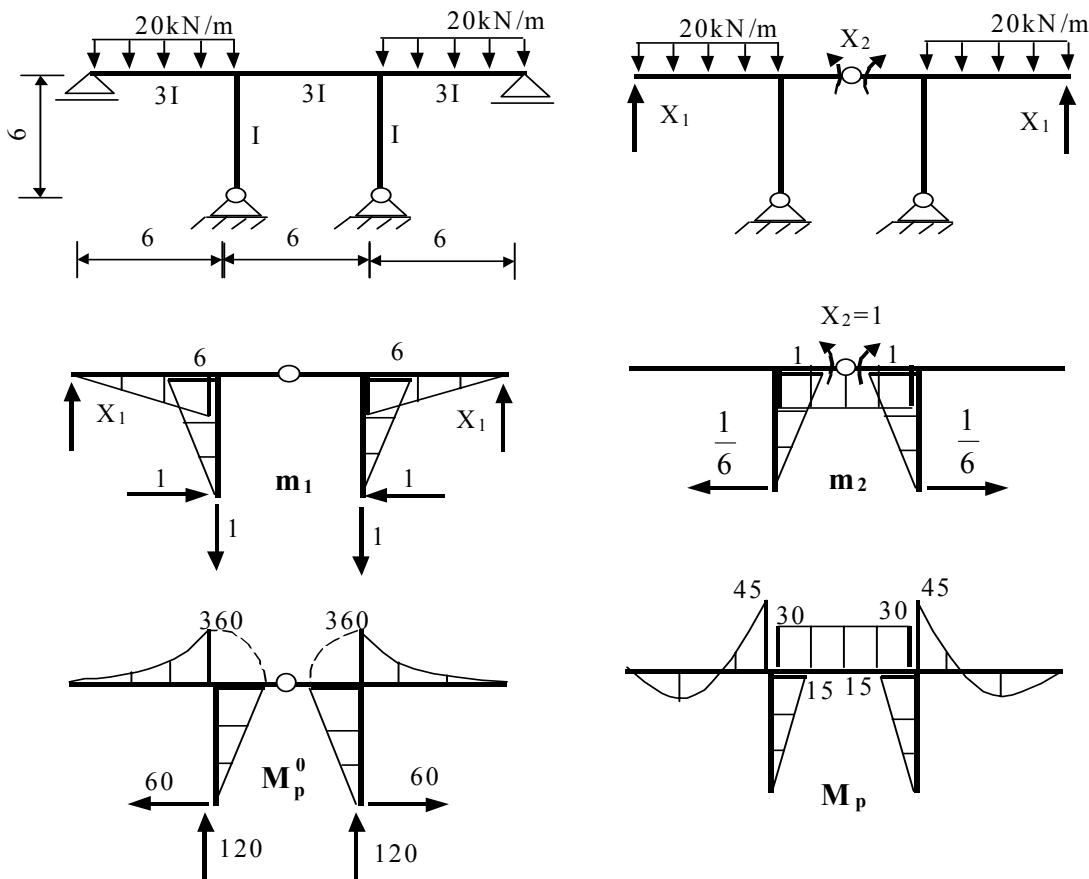
$$\begin{cases} 156X_1 + 6X_2 + 480 = 0 \\ 6X_1 + 5X_2 + 720 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele

$$X_1 = 2,581; \quad X_2 = -147,097$$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 10.2. Se constată că s-au obținut aceleași eforturi ca la aplicația 9.11.

Problema 10.3 (fig.10.3) Rezolvare prin gruparea necunoscutele.



- Fig.10.3 -

Structura fiind simetrică, sistemul de bază trebuie să fie simetric. Se utilizează gruparea simetrică a necunoscutele.

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutele și termenilor liberi. Se integrează diagramele pe jumătate de structură și fiecare termen se multiplică cu doi.



$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{192}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{24}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{6}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{2}{3EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{10800}{EI}$$

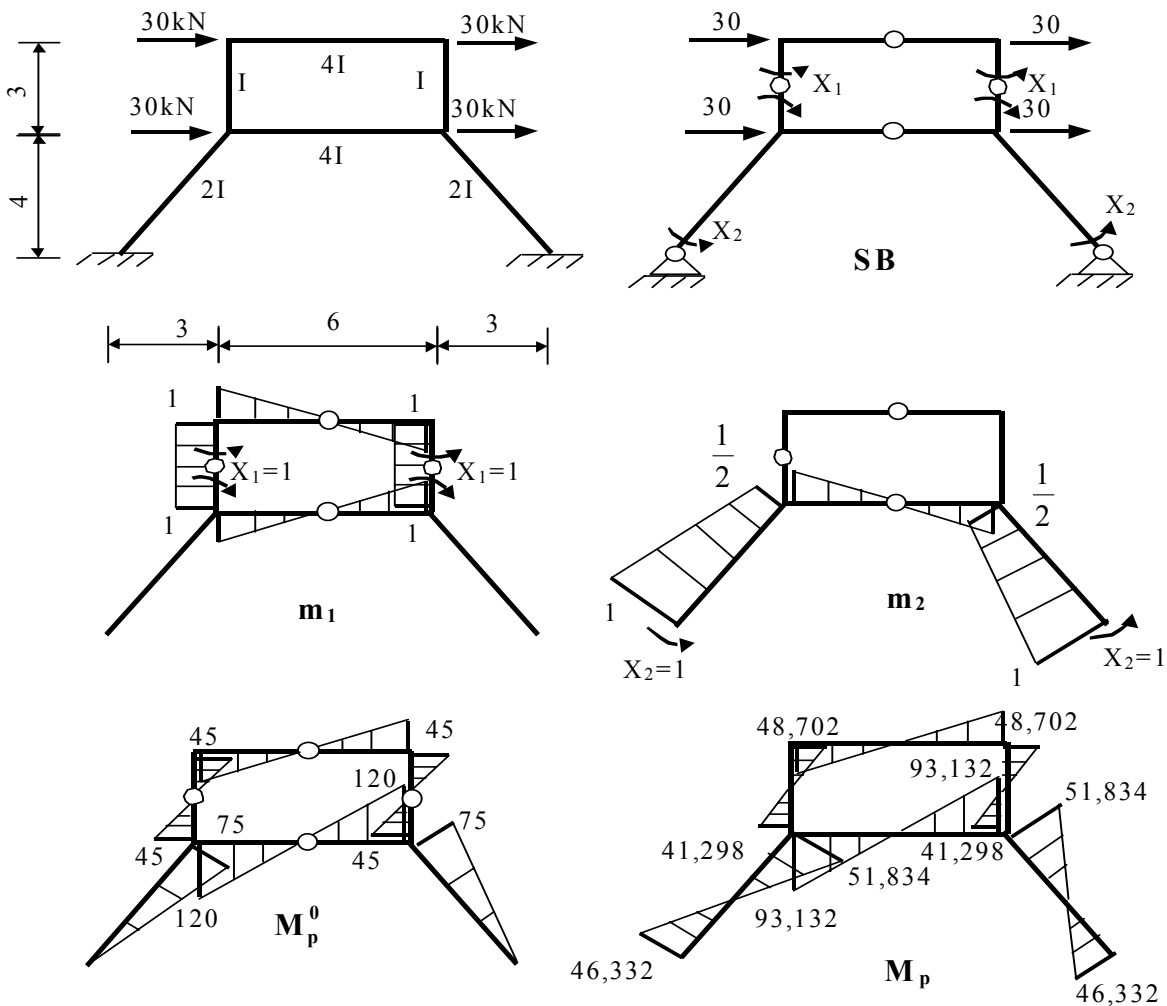
$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1440}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 192X_1 - 24X_2 - 10800 = 0 \\ -24X_1 + 6X_2 + 1440 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = 52,5$  și  $X_2 = -30$

Problema 10.4 (fig.10.4) Rezolvare prin gruparea necunoscutei.



- Fig.10.4 -

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{4}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{7}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{2}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{2}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{36,5}{12EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{2}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 45 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{37,5}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 75 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{140}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 7X_1 - 0,25X_2 + 37,5 = 0 \\ -0,25X_1 + \frac{36,5}{12}X_2 - 140 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = -3,702$  și  $X_2 = 46,332$

Problema 10.5 (fig.10.5) Rezolvare utilizând procedeul semistructurilor.

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = \frac{96}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{10}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{11}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left( -\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = -\frac{2610}{EI}$$

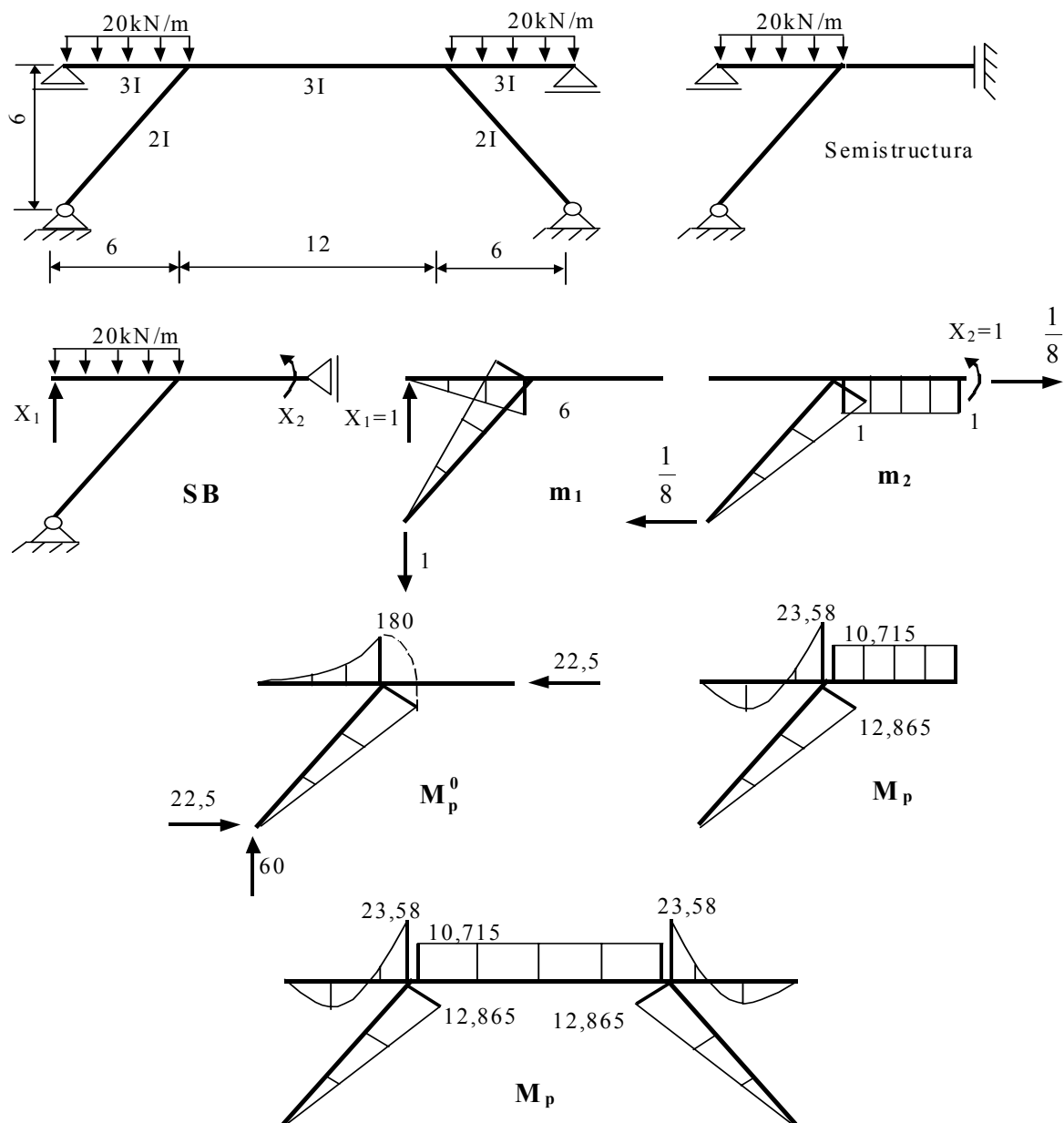
$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{300}{EI}$$

Sistemul de ecuații

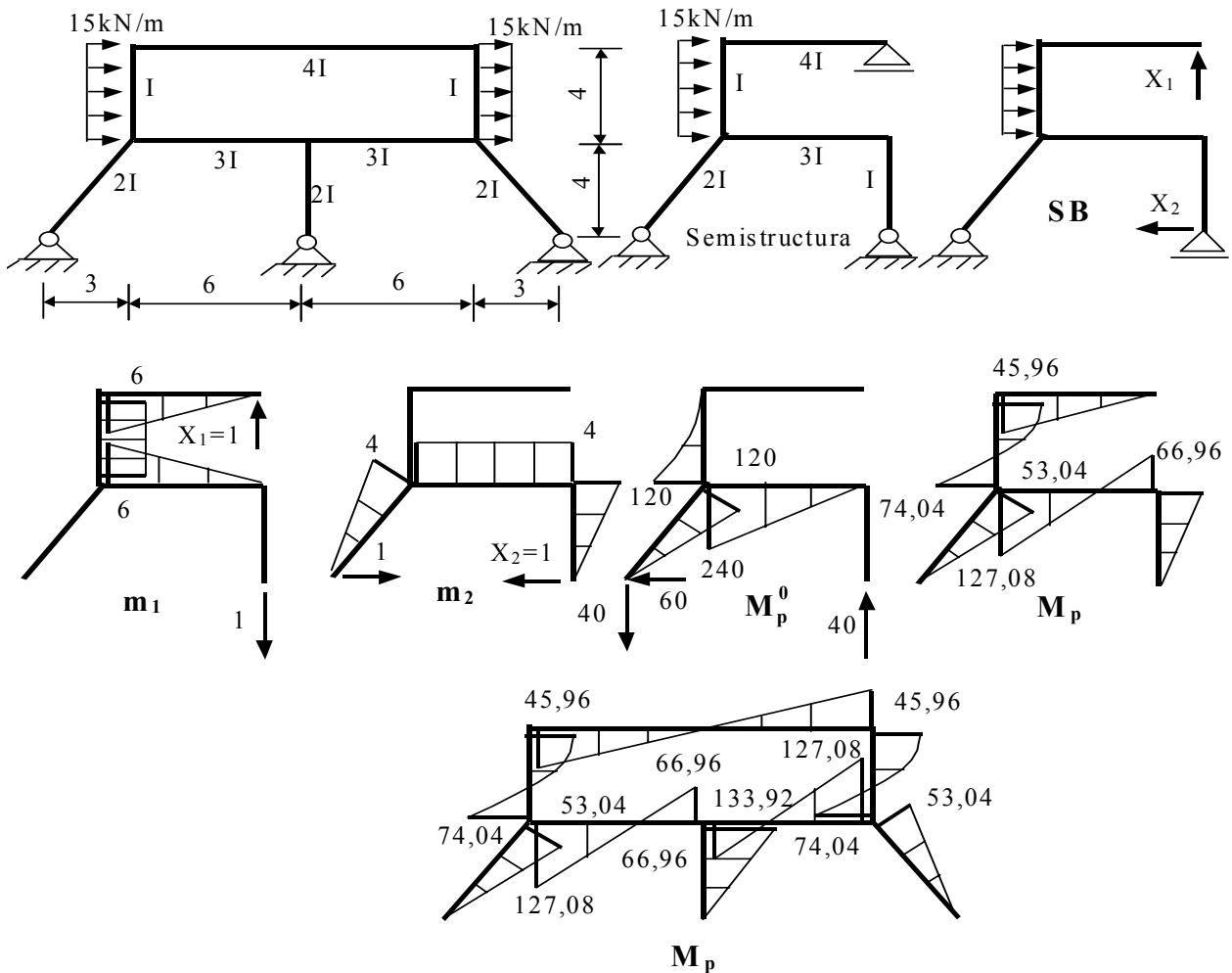
$$\begin{cases} 96X_1 - 10X_2 - 2610 = 0 \\ -10X_1 + \frac{11}{3}X_2 + 300 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = 26,07$  și  $X_2 = -10,715$

Diagrama  $M_p$  a fost trasată atât pe semistructură cât și pe structura întreagă.



Problema 10.6 (fig.10.6) Rezolvare utilizând procedeul semistructurilor.



- Fig.10.6 -

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = \frac{180}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = \frac{18}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{4EI} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{176}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 120 \cdot 6 - \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{1680}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 240 \cdot 4 = -\frac{1120}{EI}$$

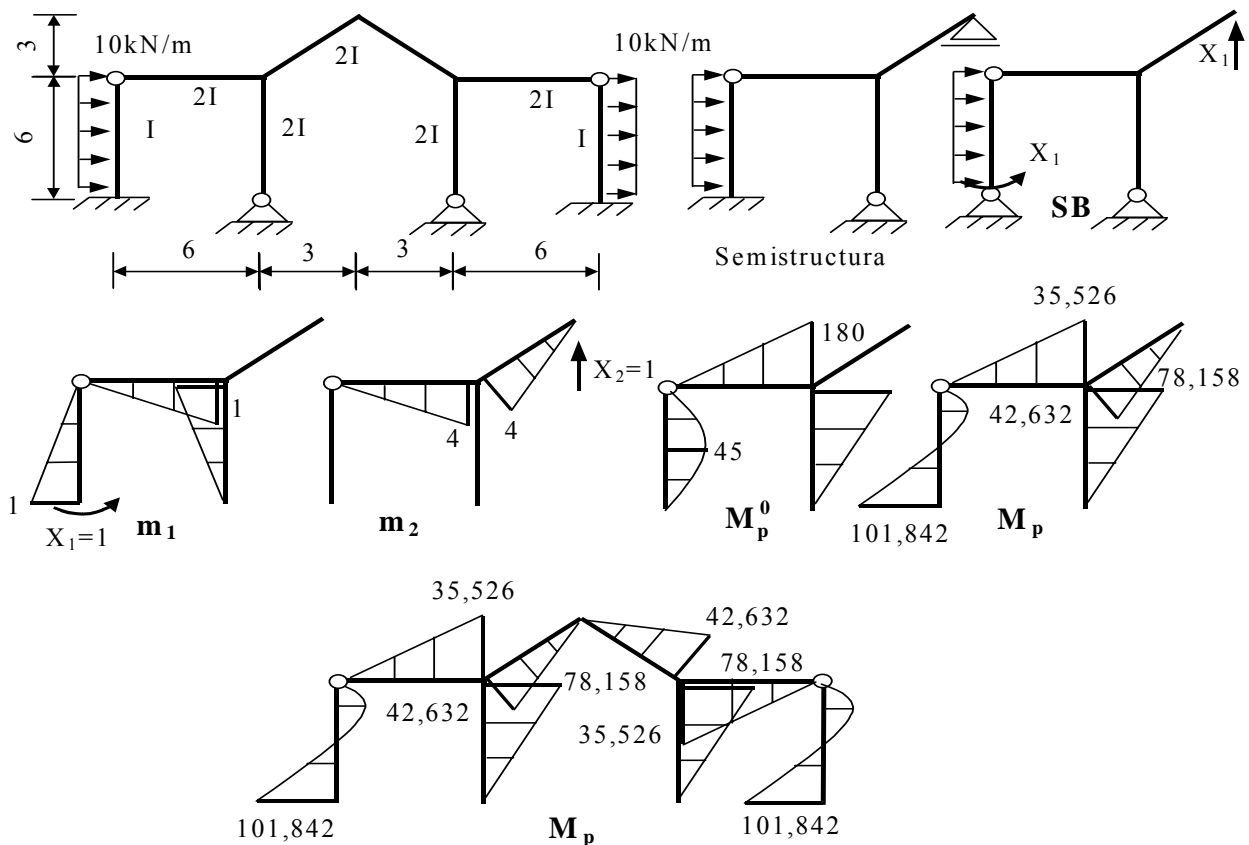
Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 180X_1 + 18X_2 - 1680 = 0 \\ 18X_1 + \frac{176}{3}X_2 - 1120 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = 7,66$  și  $X_2 = 16,74$

Diagrama  $M_p$  a fost trasată atât pe semistructură cât și pe structura întreagă. De menționat că în structura întreagă, momentul încovoietor de pe stâlpul central a fost dublat pentru a respecta condiția de revenire de la semistructură la structura întreagă – adică pentru asigurarea echilibrului static al nodului.

**Problema 10.7 (fig.10.7)** Utilizarea procedurii semistructurilor.



- Fig.10.7 -

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{4}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{88}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = -\frac{450}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{720}{EI}$$

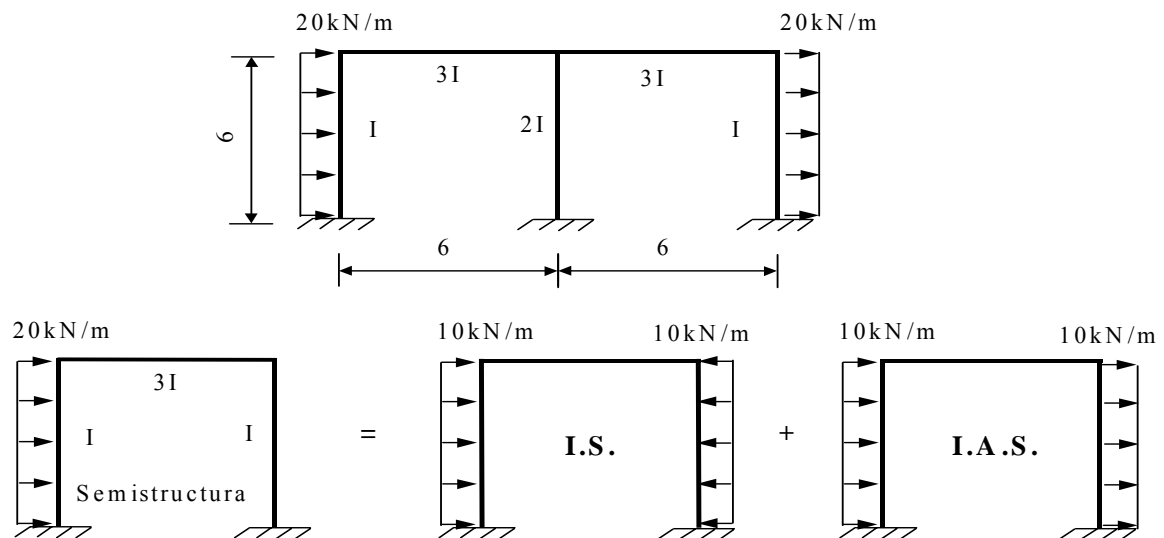
Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 4X_1 + 4X_2 - 450 = 0 \\ 4X_1 + \frac{88}{3}X_2 - 720 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = 101,842$  și  $X_2 = 10,658$

Diagrama finală este dată în figura 10.7 atât pentru semistructură cât și pentru structura întregă.

**Problema 10.8 (fig.10.8)** Utilizarea procedurii semistructurilor combinat cu procedeul grupării necunoscutelor.

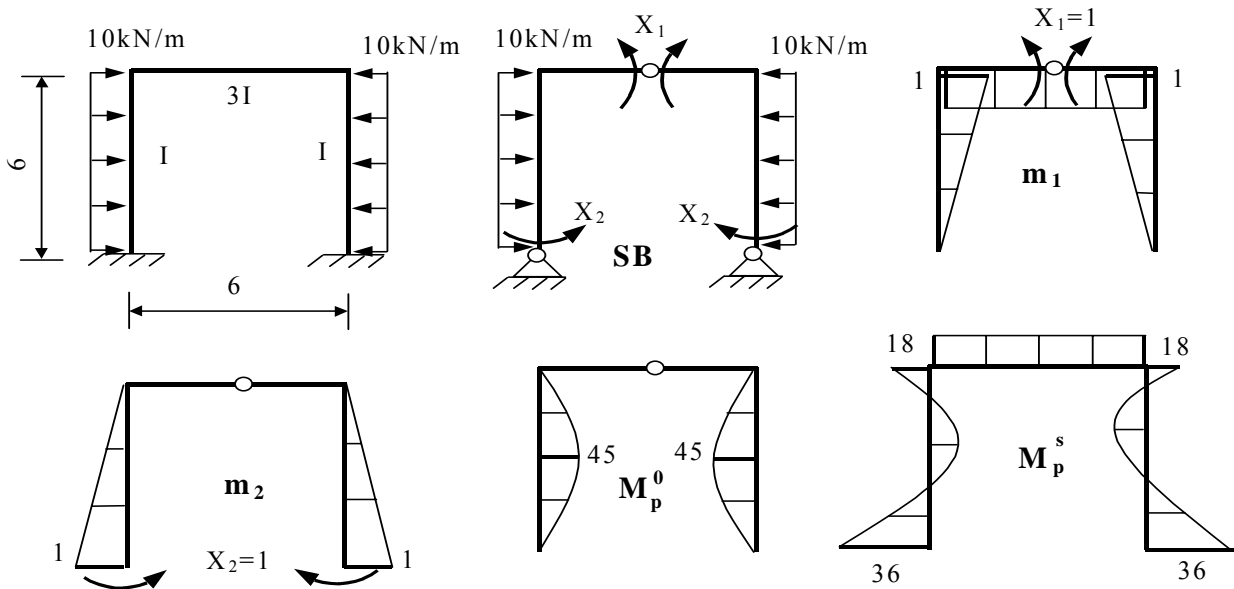


- Fig.10.8 -

Structura este simetrică și încărcată antisimetric. Semistructura este simetrică, dar încărcată cu o încărcare oarecare, ce este descompusă în încărcare simetrică și încărcare antisimetrică.

Se rezolvă separat pentru cele două situații de încărcare și apoi se suprapun efectele.

Încărcarea simetrică. (fig.10.9) Se utilizează procedeul necunoscutelor grupate.



- Fig.10.9 -

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{6}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{2}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{180}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{2}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{180}{EI}$$

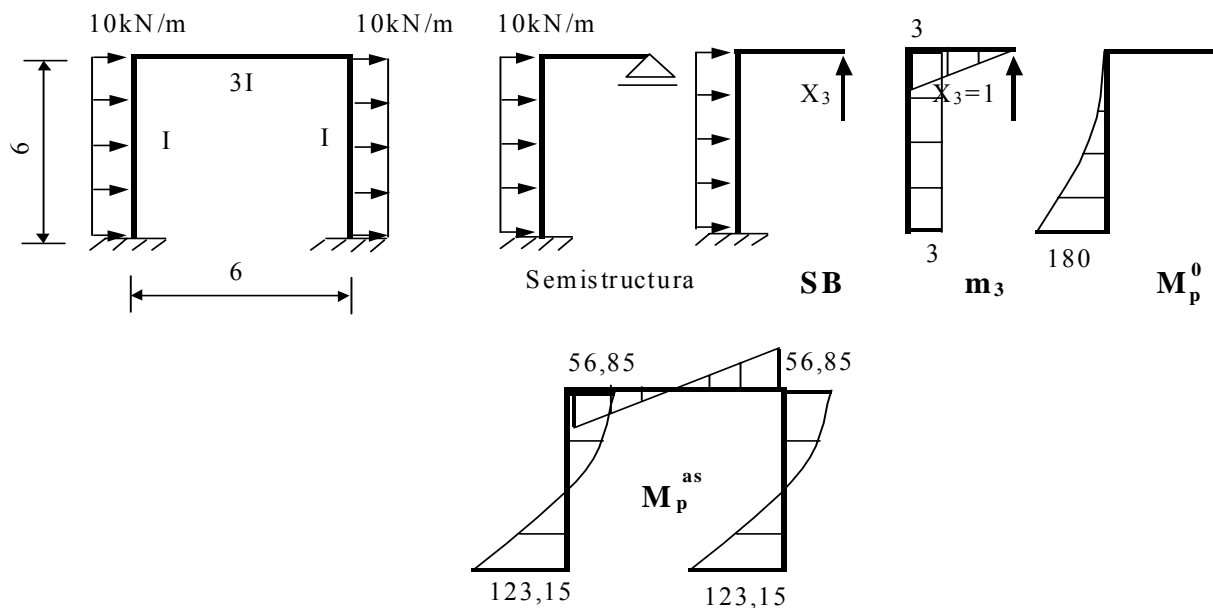
Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 6X_1 - 2X_2 + 180 = 0 \\ -2X_1 + 4X_2 - 180 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = 18$  și  $X_2 = 36$

Diagrama  $M_p^s$  este dată în figura 10.9.

Încărcarea antisimetrică. (fig.10.10) Se utilizează procedeul semistructurilor.



- Fig.10.10 -

Ecuatia de condiție  $\delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$

Calculul coeficientului necunoscutei și termenului liber

$$\delta_{33} = \int \frac{m_3^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{57}{EI}$$

$$\Delta_{3p} = \int \frac{m_3 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 180 \cdot 3 = -\frac{1080}{EI}$$

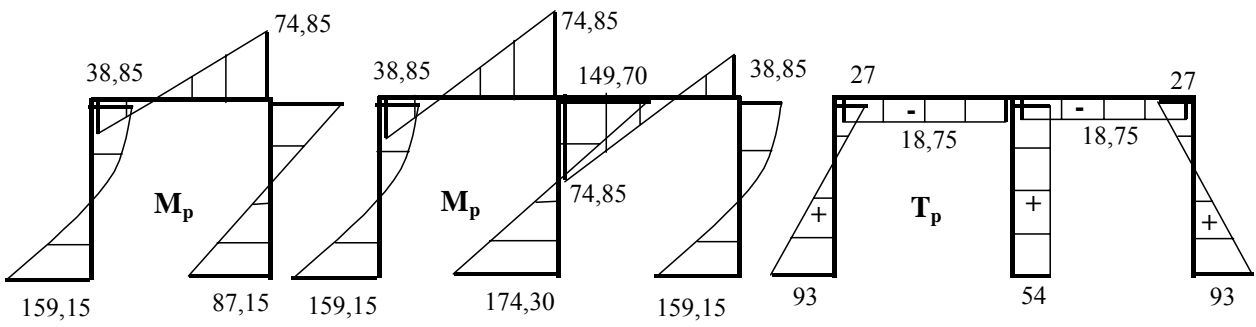
Calculul necunoscutei

$$57X_3 - 1080 = 0; \quad X_3 = 18,95$$

Diagrama  $M_p^{as}$  este dată în figura 10.10.

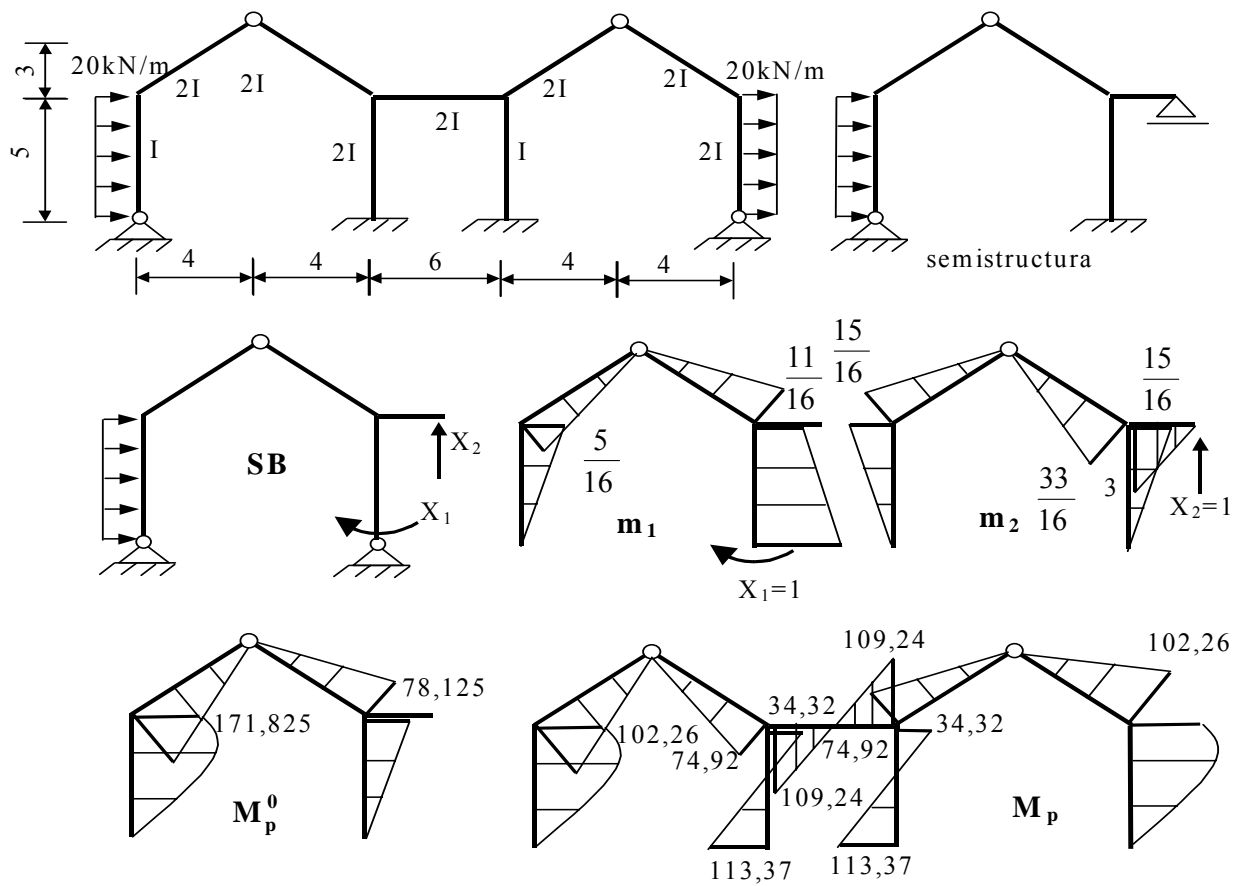
Prin suprapunerea de efecte rezultă diagrama de momente încovoietoare pe semistructură, diagramă care este transpusă antisimetric pe structura întreagă (fig.10.11).





- Fig.10.11 -

**Problema 10.9 (fig.10.12) Utilizarea procedurii semistructurilor.**



- Fig.10.12 -

Ecuatiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{11}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{16} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{11}{16} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{16} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{16} \right) \right] = \frac{2,438}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{2EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{11}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{16} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{16} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = -\frac{0,342}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{33}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{33}{16} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} \right] = \frac{10,974}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 171,825 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{2}{3} \cdot 62,5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} \right] + \frac{1}{2EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 78,125 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 78,125 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{16} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 78,125 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{16} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{288,856}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 171,825 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} + \frac{2}{3} \cdot 62,5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16} \right] + \frac{1}{2EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 171,825 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{33}{16} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 78,125 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} \right] = -\frac{438,375}{EI}$$

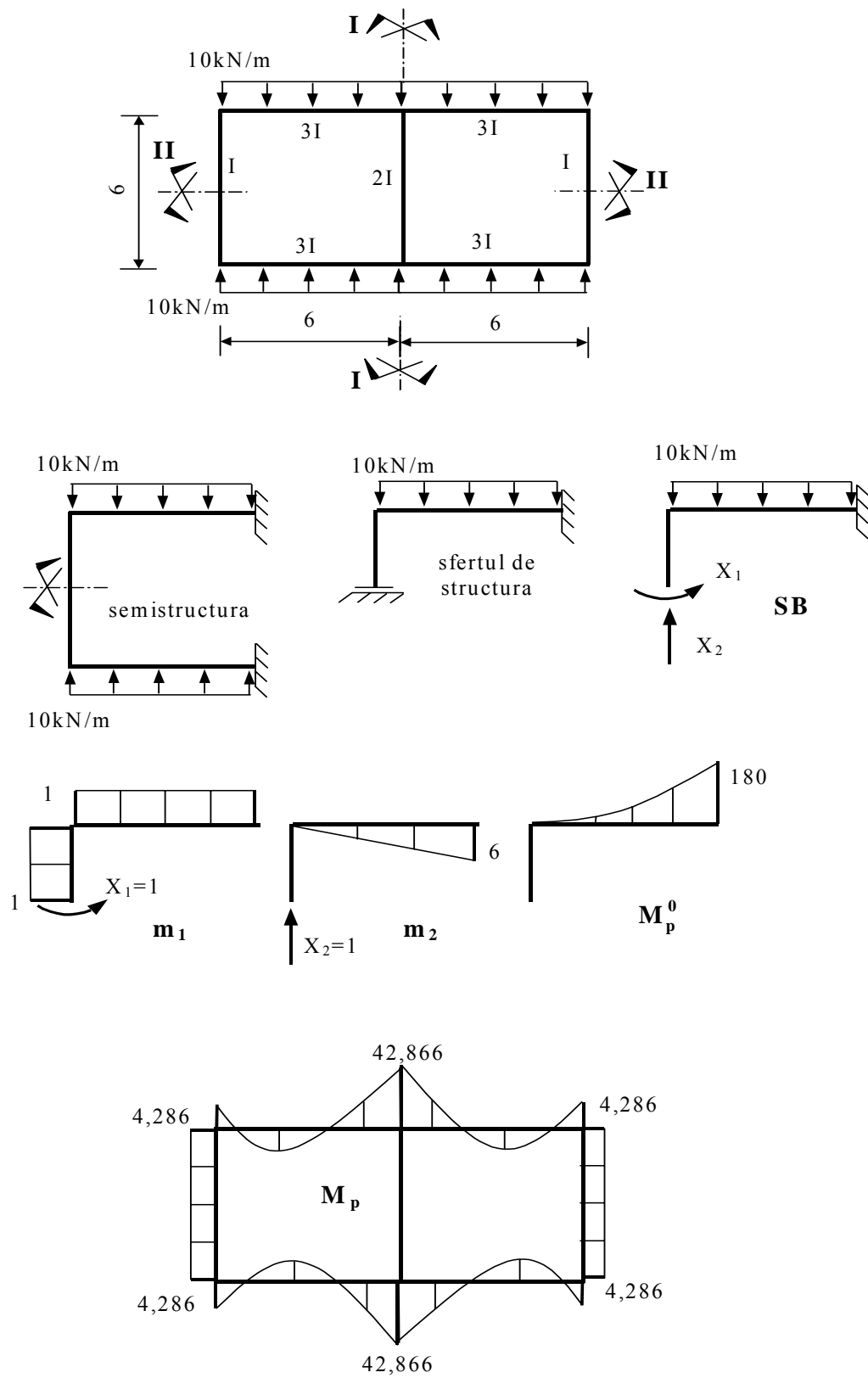
Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2,438X_1 - 0,342X_2 + 288,856 = 0 \\ -0,342X_1 + 10,974X_2 - 438,375 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = -113,37$  și  $X_2 = 36,413$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 10.12.

**Problema 10.10 (fig.10.13) Utilizarea procedului semistructurilor.**



- Fig.10.13 -

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{5}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = -\frac{6}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{24}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 180 \cdot 1 = \frac{120}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{m_2 M_p^0}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 = -\frac{540}{EI}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 5X_1 - 6X_2 + 120 = 0 \\ -6X_1 + 24X_2 - 540 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = 4,286$  și  $X_2 = 23,57$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 10.13.

# CAPITOLUL XI

## APLICAȚII ALE METODEI EFORTURILOR

În acest capitol se prezintă aplicarea principiilor metodei eforturilor în calculul următoarelor elemente static nedeterminate:

- grinzi continue,
- grinzi cu zăbrele,
- arce.

### GRINZI CONTINUE

Grinzile continue reprezintă o categorie de elemente de rezistență, static nedeterminate, frecvent utilizate în practică. Schema de calcul a grinzilor continue conține un reazem fix la translație – articulație sau încastrare – și un număr oarecare de reazeme simple.

Calculul grinzilor continue prin metoda eforturilor poate fi schematizat ca urmare a alegerii judicioase a sistemului de bază. Se obțin ecuații cu cel mult trei necunoscute, din care cauză procedeul se numește ecuația celor trei momente. Această modalitate de rezolvare a fost stabilită de Clapeyron.

Se consideră o parte dintr-o grindă continuă (fig.XI.1). Sistemul de bază se alege prin întreruperea continuității grinzii în secțiunile din dreptul reazemelor simple intermediare. Necunoscutele sunt perechile de momente încovoietoare.

Sistemul de bază fiind format din grinzi simplu rezemate, diagramele unitare se extind doar pe două deschideri. Condiția de continuitate în secțiunea  $j$  reprezintă condiția ca rotirea relativă să fie egală cu zero, deoarece în secțiunea  $j$  grinda este continuă.

Forma generală a ecuației  $j$  este:

$$\delta_{j1}X_1 + \delta_{j2}X_2 + \dots + \delta_{ji}X_i + \delta_{jj}X_j + \delta_{jk}X_k + \dots + \delta_{jn}X_n + \Delta_{jp} = 0 \quad (\text{XI.1})$$

Dar numai coeficienții sunt diferiți de zero. Se obține astfel ecuația celor trei momente

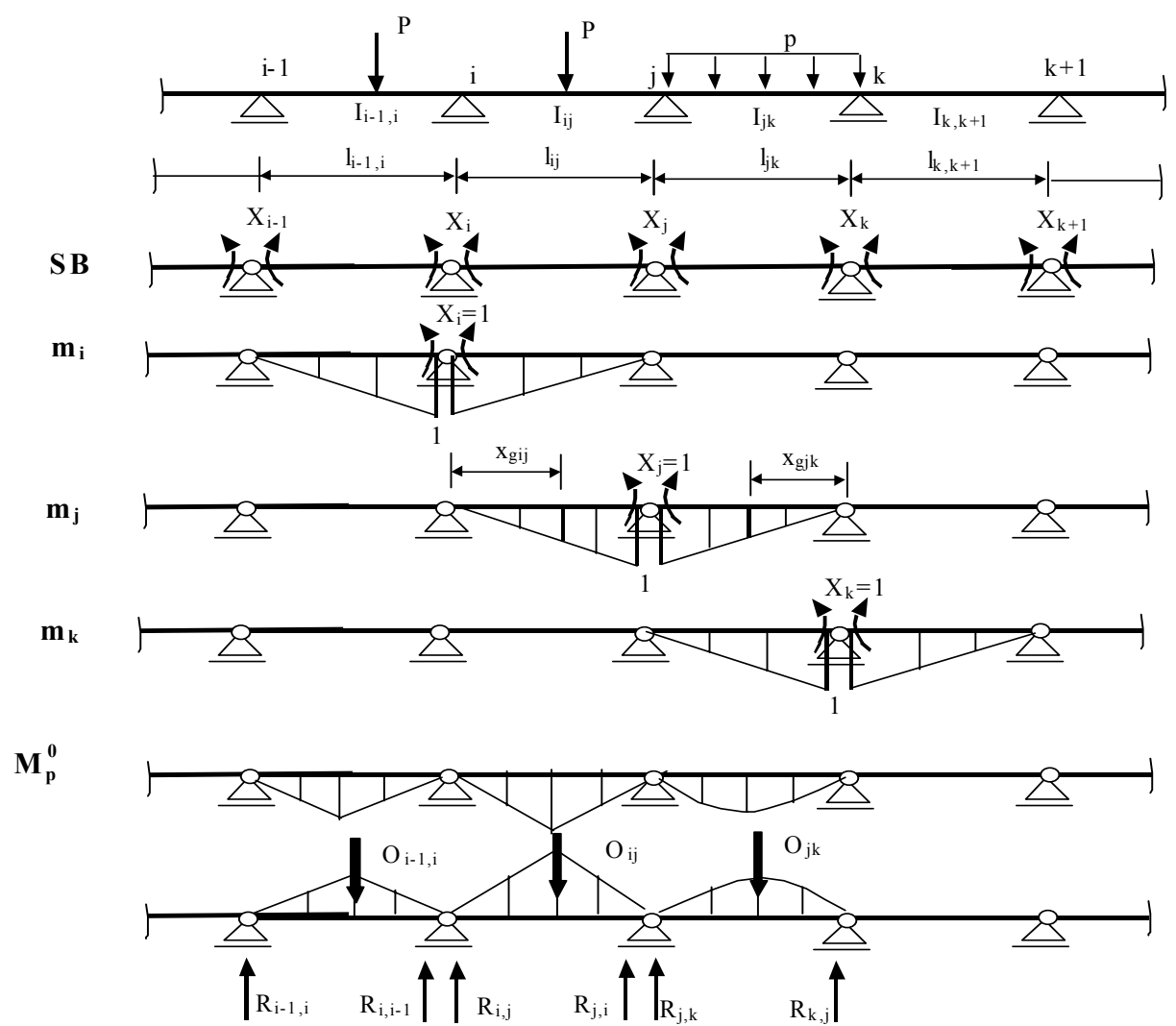
$$\delta_{ji}X_i + \delta_{jj}X_j + \delta_{jk}X_k + \Delta_{jp} = 0 \quad (\text{XI.2})$$

Calculând coeficienții necunoscuților și termenii liberi și multiplicând cu  $6EI_0$ , unde  $I_0$  este un moment de inerție de comparație, rezultă forma finală a ecuației de condiție “ $j$ ”

$$\lambda_{ji}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k = -6R_{ji} \cdot \frac{I_0}{I_{ij}} - 6R_{jk} \cdot \frac{I_0}{I_{jk}} \quad (\text{XI.3})$$

În ecuația (XI.3) au fost folosite următoarele notații:

- $\lambda_{ij} = l_{ij} \cdot \frac{I_0}{I_{ij}}$ ,  $\lambda_{jk} = l_{jk} \cdot \frac{I_0}{I_{jk}}$  și care sunt denumite lungimi transformate ale deschiderilor  $l_{ij}$  și  $l_{jk}$
- $R_{ji} = \Omega_{ij} \cdot \frac{X_{gij}}{l_{ij}}$  și  $R_{jk} = \Omega_{jk} \cdot \frac{X_{gjk}}{l_{jk}}$  reprezintă reacțiunile în reazemul  $j$  obținute pe grinzile conjugate  $ij$  și  $jk$  încărcate cu diagrama  $M_p^0$  răsturnată.

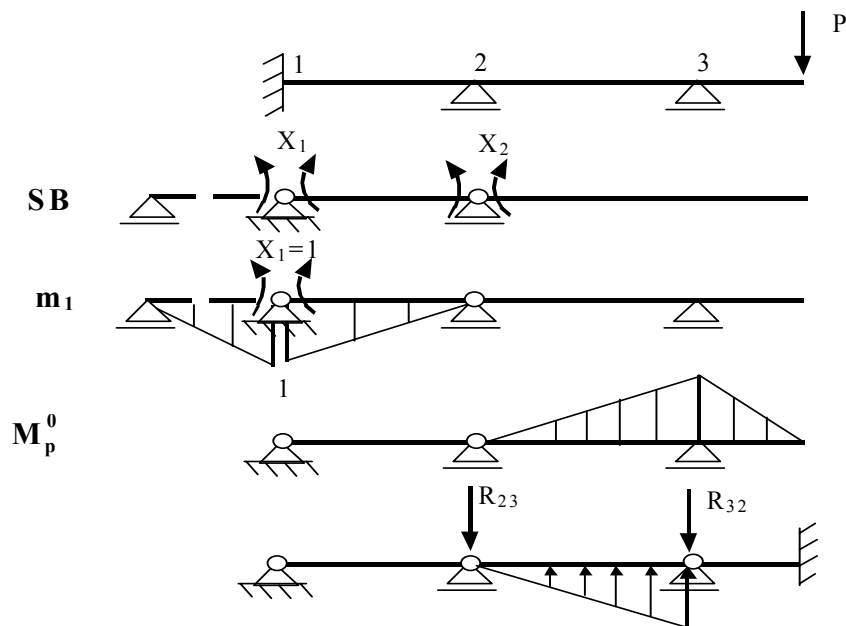


- Fig.XI.1 -

Scriind câte o ecuație de forma (XI.3) pentru fiecare secțiune în care a fost întreruptă continuitatea se obține sistemul general de ecuații, din a cărei rezolvare rezultă necunoscutele  $X_j$ , care reprezintă valoarea reală a momentului încovoietor din secțiunea de pe reazem. În câmp momentele încovoietoare se obțin prin suprapunere de efecte  $M_p = M_p^0 + \sum m_i \cdot X_i$ .

Observație.

- Prima și ultima ecuație din sistem conțin numai două necunoscute;
- Reacțiunile fictive  $R_{ji}$  și  $R_{jk}$  se introduc cu semnul plus dacă au sensul de jos în sus și cu semnul minus dacă au sensul de sus în jos;
- Dacă grinda continuă are un capăt încastat, atunci în sistemul de bază se introduce o deschidere fictivă (pentru păstrarea uniformității diagramelor unitare) dar care are lungimea transformată egală cu zero. În figura XI.2 s-a notat  $I_{01}=\infty$  și  $\lambda_{01} = l_{01} \cdot \frac{I_0}{I_{01}} = 0$ ;
- Dacă grinda are o consolă atunci pentru calculul termenului liber (al reacțiunilor fictive) se consideră numai diagrama  $M_p^0$  de pe deschidere, nu și aceea de pe consolă, deoarece conjugata grinzii cu consolă este o grindă Gerber, cu deschiderea 2-3 grindă secundară și consola grindă principală (fig.XI.2).

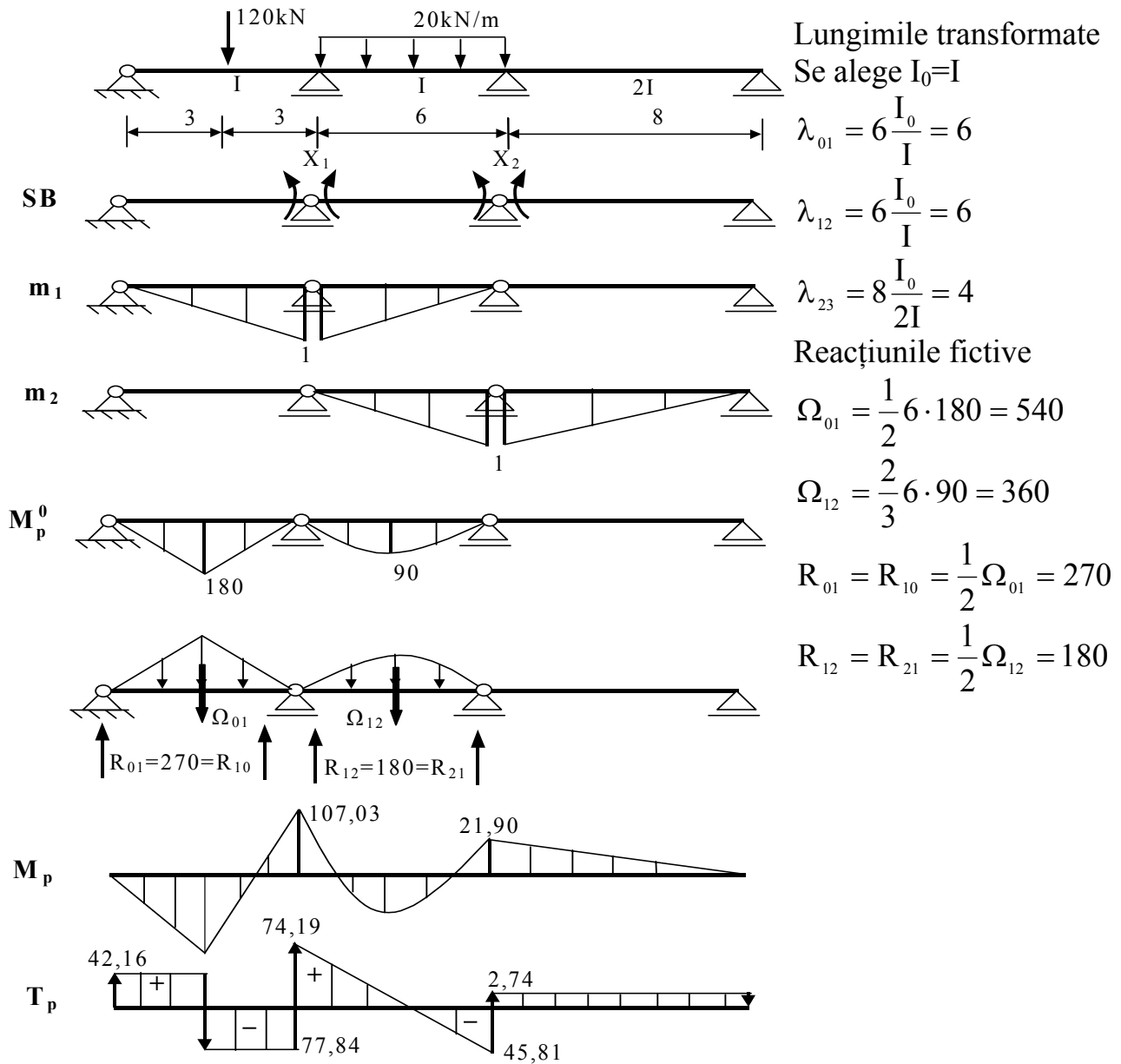


- Fig.XI.2 -

## APLICAȚII

Să se traseze diagramele de eforturi la următoarele grinzi continue:

### Problema 11.1 (fig.11.1)



- Fig.11.1 -

Ecuatiile de condiție



$$\begin{cases} \lambda_{01} X_0 + 2(\lambda_{01} + \lambda_{12}) X_1 + \lambda_{12} X_2 = -6R_{10} \cdot \frac{I_0}{I_{01}} - 6R_{12} \cdot \frac{I_0}{I_{12}} \\ \lambda_{12} X_1 + 2(\lambda_{12} + \lambda_{23}) X_2 + \lambda_{23} X_3 = -6R_{21} \cdot \frac{I_0}{I_{12}} - 6R_{23} \cdot \frac{I_0}{I_{23}} \end{cases}$$

cu elementele calculate și observând că  $X_0=0$ ,  $X_3=0$  și  $R_{23}=0$  rezultă

$$\begin{cases} 2(6+6)X_1 + 6X_2 = -6 \cdot 270 \cdot \frac{I}{I} - 6 \cdot 180 \cdot \frac{I}{I} \\ 6X_1 + 2(6+4)X_2 = -6 \cdot 180 \cdot \frac{I}{I} - 0 \end{cases}$$

sau

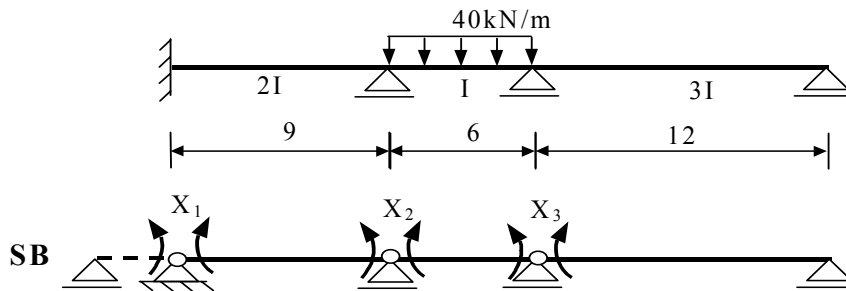
$$\begin{cases} 24X_1 + 6X_2 = -2700 \\ 6X_1 + 20X_2 = -1080 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor  $X_1 = -107,03$  și  $X_2 = -21,90$

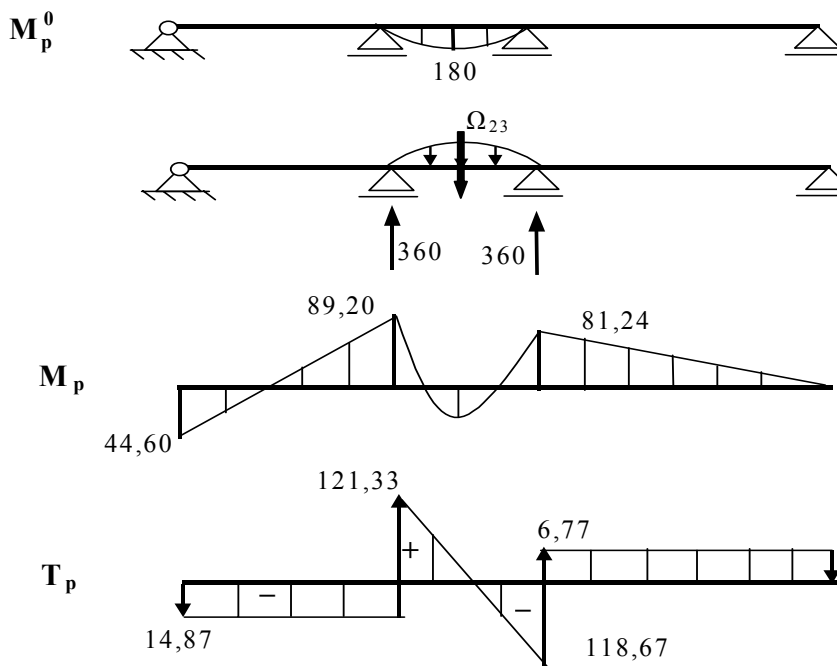
Reacțiunile reale din reazeme sunt

Verificare:  $\sum Y_i = 0$

$$V_0 - 120 + V_1 - 20 \cdot 6 + V_2 - V_3 = 42$$



**Problema 11.2**  
**(fig.11.2)**



Lungimile transformate

Se alege  $I_0=3I$

$$\lambda_{01} = 0$$

$$\lambda_{12} = 9 \frac{3I}{2I} = 13,5$$

$$\lambda_{23} = 12 \frac{3I}{3I} = 12$$

Reacțiunile fictive

$$\Omega_{23} = \frac{2}{3} 6 \cdot 180 = 720$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{1}{2} \Omega_{23} = 360$$

- Fig.11.2 -

Sistemul de ecuații

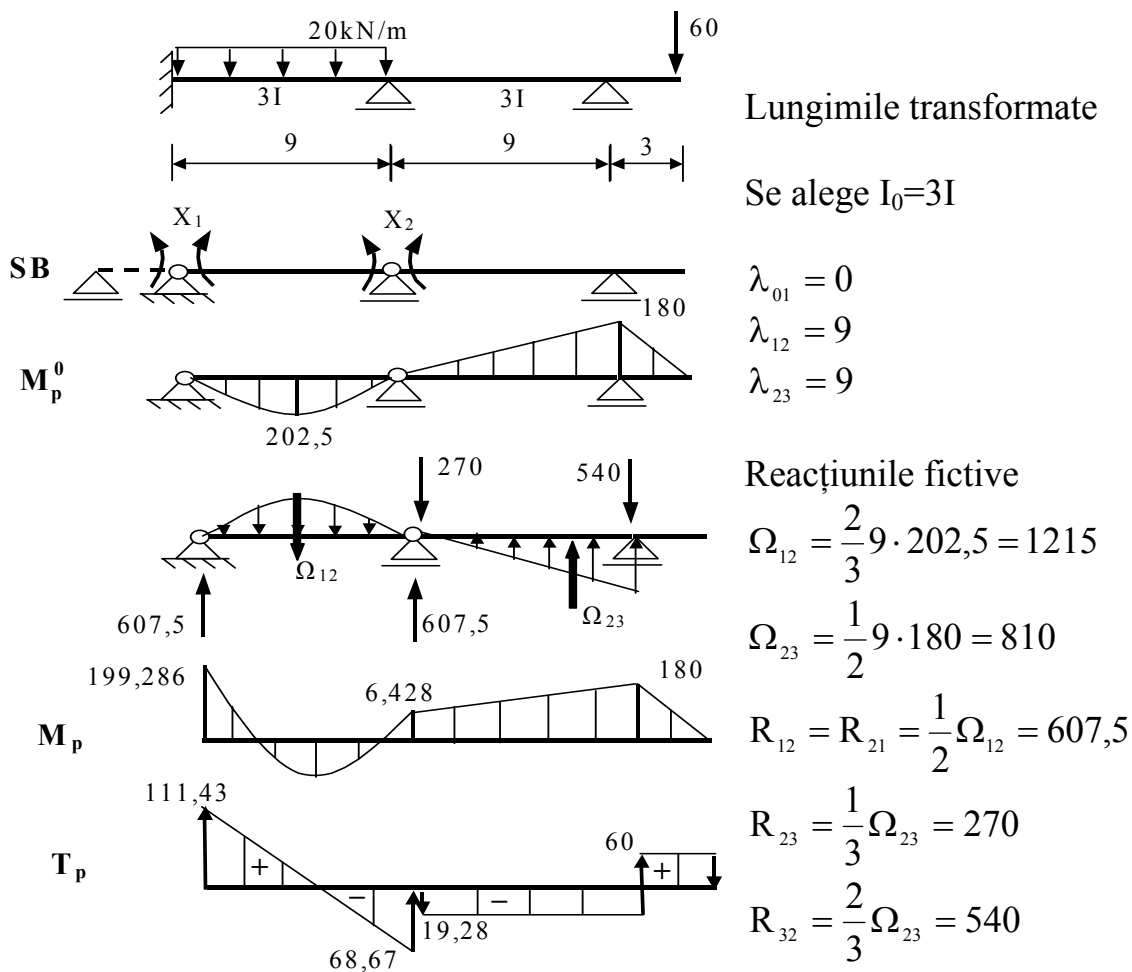
$$\begin{cases} 0 + 2(0 + 13,5)X_1 + 13,5X_2 = 0 \\ 13,5X_1 + 2(13,5 + 18)X_2 + 18X_3 = 0 - 6 \cdot 360 \cdot \frac{3I}{I} \\ 18X_2 + 2(18 + 12)X_3 = -6 \cdot 360 \cdot \frac{3I}{I} - 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 27X_1 + 13,5X_2 = 0 \\ 13,5X_1 + 63X_2 + 18X_3 = -6480 \\ 18X_2 + 60X_3 = -6480 \end{cases}$$

cu următoarele valori ale necunoscutelor  $X_1 = 44,60$ ,  $X_2 = -89,20$  și  $X_3 = -81,24$

### Problema 11.3 (fig.11.3)



- Fig.11.3 -

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 0 + 2(0 + 9)X_1 + 9X_2 = 0 - 6 \cdot 607,5 \cdot \frac{3I}{3I} \\ 9X_1 + 2(9 + 9)X_2 = -6 \cdot 607,5 \cdot \frac{3I}{3I} - 6 \cdot (-270) \cdot \frac{3I}{3I} \end{cases}$$

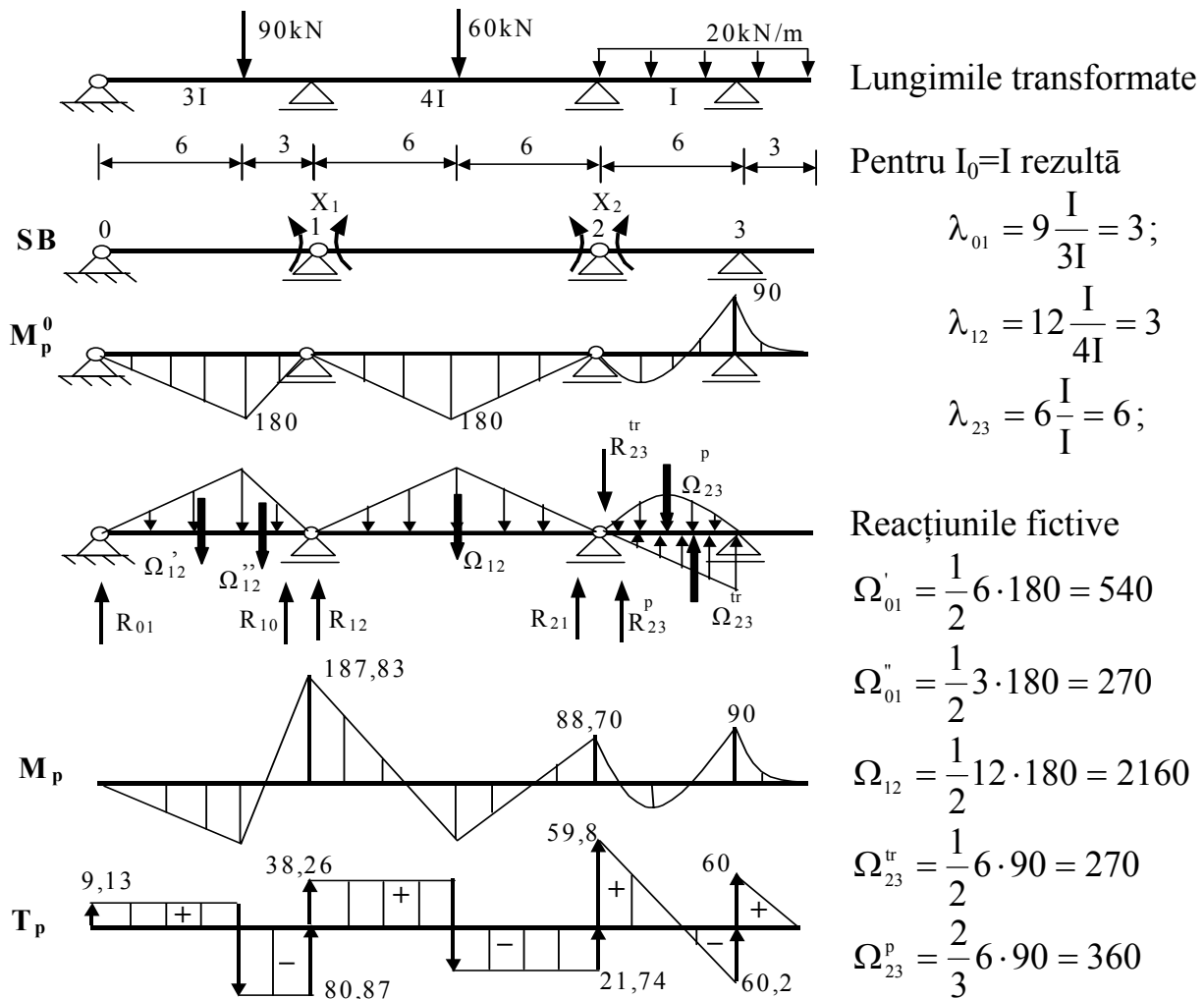
sau

$$\begin{cases} 18X_1 + 9X_2 = -3645 \\ 9X_1 + 36X_2 = -2025 \end{cases}$$

cu următoarele valori pentru necunoscute  $X_1 = -199,286$  și  $X_2 = -6,428$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 11.3.

### Problema 11.4 (fig.11.4)



- Fig.11.4 -

$$R_{01} = \frac{1}{9} [540 \cdot (3 + 2) + 270 \cdot 2] = 360; \quad R_{10} = \frac{1}{9} [540 \cdot 4 + 270 \cdot (6 + 1)] = 450$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2} \Omega_{12} = 1080$$

$$R_{23}^p = \frac{2}{3} \Omega_{23}^p = 180; \quad R_{23}^{tr} = \frac{1}{3} \Omega_{23}^{tr} = 90; \quad R_{23} = 180 - 90 = 90$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 0 + 2(3+3)X_1 + 3X_2 = -6 \cdot 450 \cdot \frac{I}{3I} - 6 \cdot 1080 \cdot \frac{I}{4I} \\ 3X_1 + 2(3+6)X_2 = -6 \cdot 1080 \cdot \frac{I}{4I} - 6 \cdot 90 \cdot \frac{I}{I} \end{cases}$$

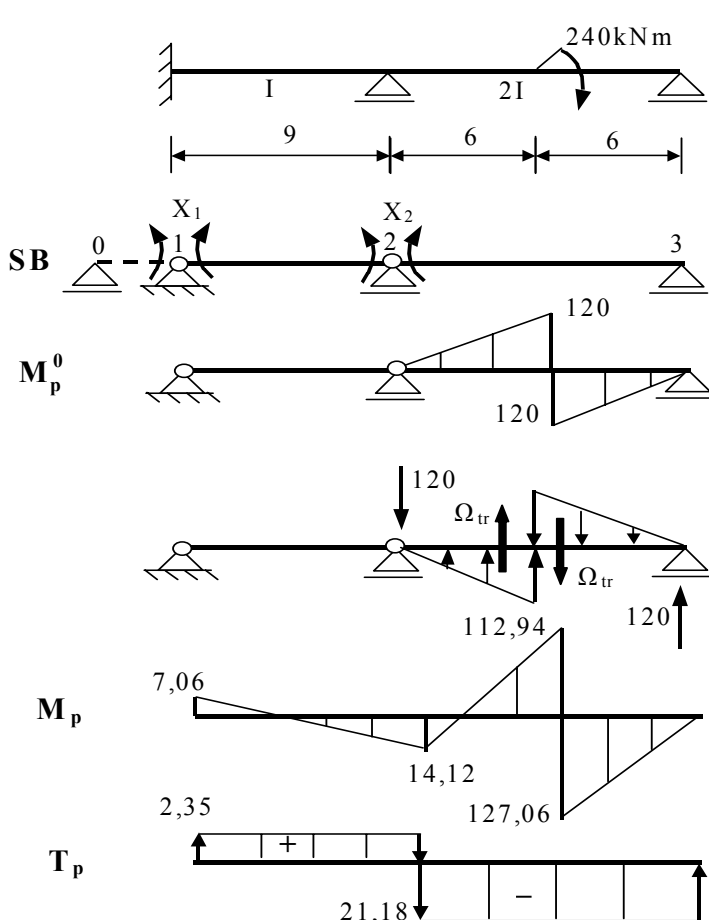
sau

$$\begin{cases} 12X_1 + 3X_2 = -2520 \\ 3X_1 + 18X_2 = -2160 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor  $X_1 = -187,83$  și  $X_2 = -88,70$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în figura 11.4.

### Problema 11.5 (fig.11.5)



Lungimile transformate

Pentru  $I_0=I$  se obține

$$\lambda_{01} = 0$$

$$\lambda_{12} = 9$$

$$\lambda_{23} = 6$$

Reacțiunile fictive

$$\Omega_{tr} = \frac{1}{2} 6 \cdot 120 = 360;$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{4 \cdot \Omega_{tr}}{12} = 120$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 18X_1 + 9X_2 = 0 \\ 9X_1 + 30X_2 = 360 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor

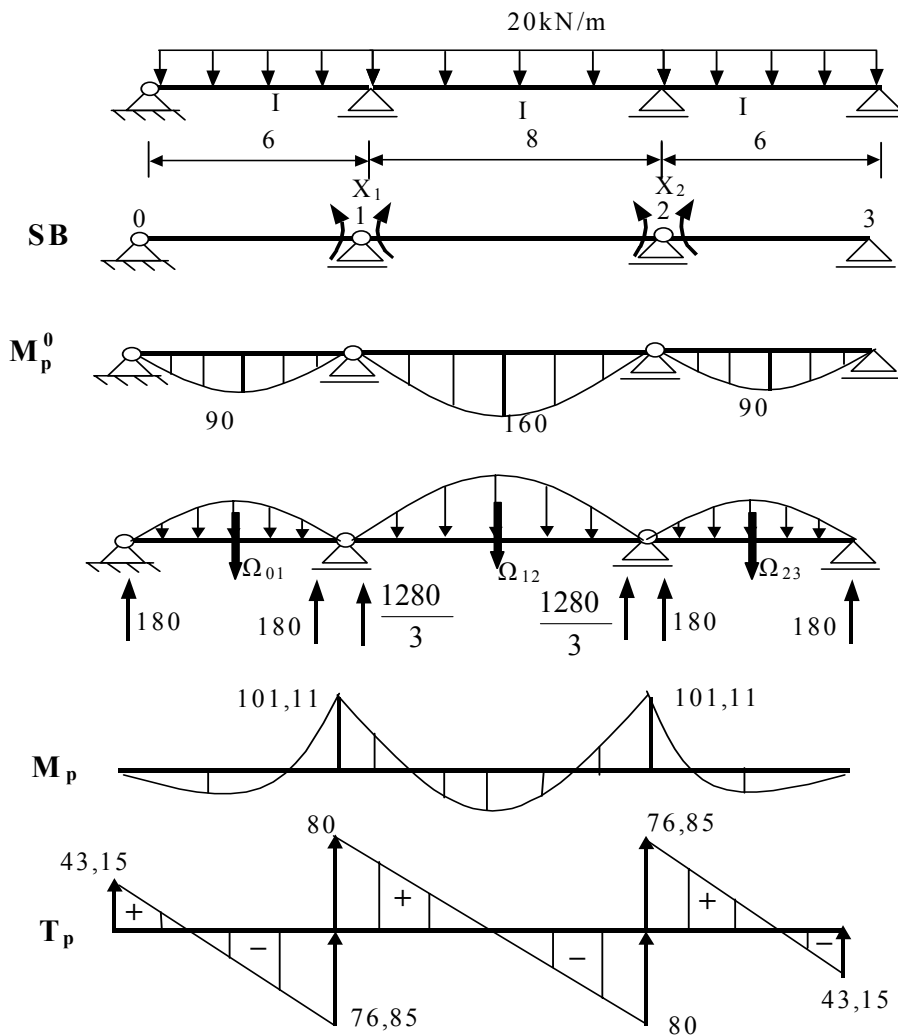
$$X_1 = -7,06$$

$$X_2 = +14,12$$

- Fig.11.5 -

### Problema 11.6 (fig.11.6)

Lungimile transformate



Pentru  $I_0=I$

$$\lambda_{01} = 6; \lambda_{12} = 8; \lambda_{23} = 6$$

Reacțiunile fictive

$$\Omega_{01} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 90 = 360$$

$$\Omega_{12} = \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 160 = \frac{2560}{3}$$

$$\Omega_{23} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 90 = 360$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{1}{2} \Omega_{01} = 180$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2} \Omega_{12} = \frac{1280}{3}$$

$$R_{23} = R_{32} = \frac{1}{2} \Omega_{23} = 180$$

- Fig.11.6 -  
Ecuatiile de

condiție

$$\begin{cases} 0 + 2(6 + 8)X_1 + 8X_2 = -6 \cdot 180 - 6 \cdot \frac{1280}{3} \\ 8X_1 + 2(8 + 6)X_2 = -6 \cdot \frac{1280}{3} - 6 \cdot 180 \end{cases}$$

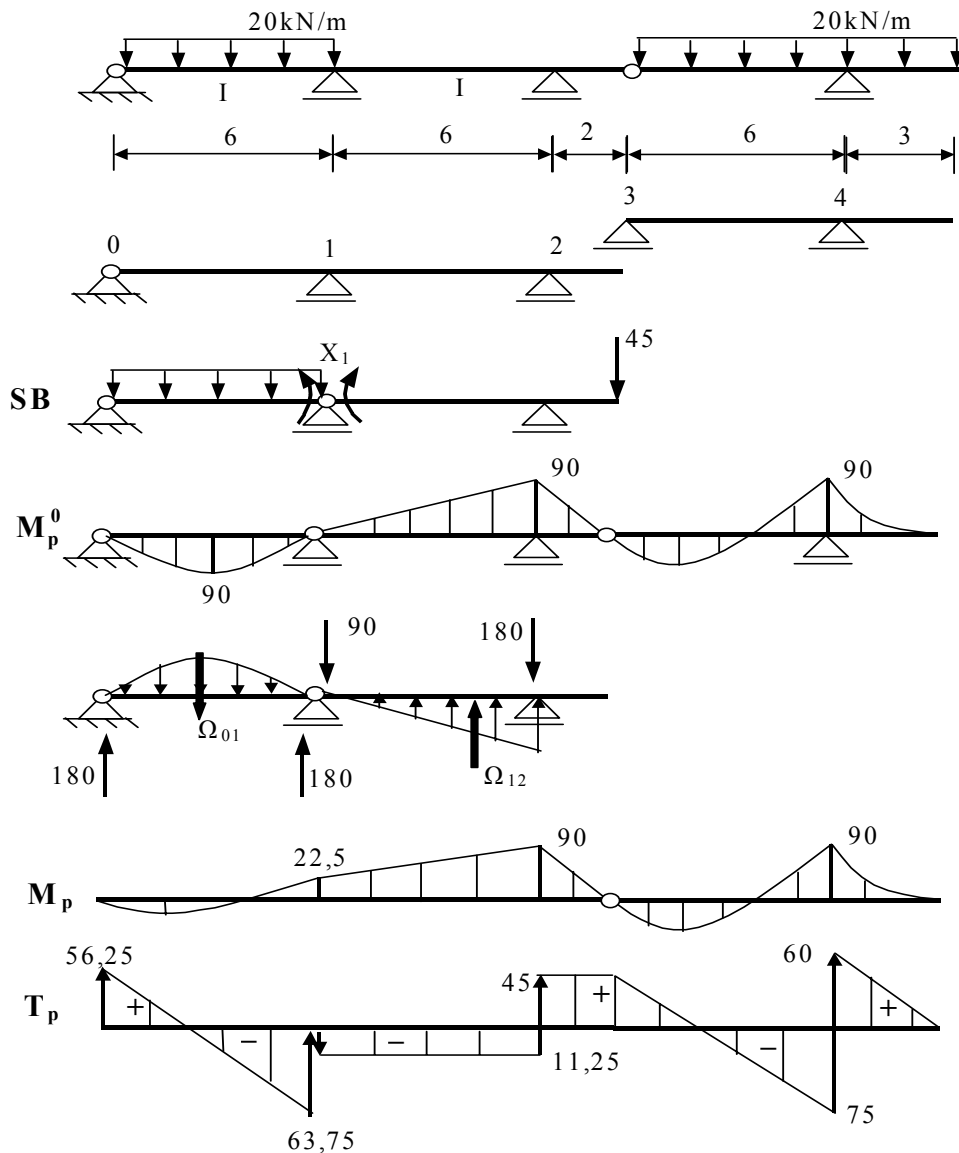
sau

$$\begin{cases} 28X_1 + 8X_2 = -3640 \\ 8X_1 + 28X_2 = -3640 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor  $X_1 = X_2 = -101,11$

Grinda continuă fiind simetrică și încărcată simetric diagrama  $M_p$  este simetrică, iar diagrama  $T_p$  este antisimetrică.

**Problema 11.7 (fig.11.7)**



- Fig.11.7 -

Grinda este o grindă Gerber având partea principală static nedeterminată și o parte secundară. Rezolvând grinda secundară se obține efectul acesteia asupra grinzii principale – respective forța de 45kN acționând în capătul consolei.

Calculul grinzii principale – Grinda este o singură dată static nedeterminată. Lungimile transformate.

Pentru  $I_0=I$  se obține  $\lambda_{01} = 6$ ,  $\lambda_{12} = 6$

Reacțiunile fictive

$$\Omega_{01} = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 90 = 360; \quad \Omega_{12} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 90 = 270$$

$$R_{01} = R_{10} = \frac{1}{2} \Omega_{01} = 180; \quad R_{12} = \frac{1}{3} \Omega_{12} = 90; \quad R_{2'} = \frac{2}{3} \Omega_{12} = 180$$

Ecuția de condiție

$$2(6 + 6)X_1 = -6 \cdot 180 - 6 \cdot (-90)$$

sau

$$24X_1 = -540$$

cu necunoscuta  $X_1 = -22,5$

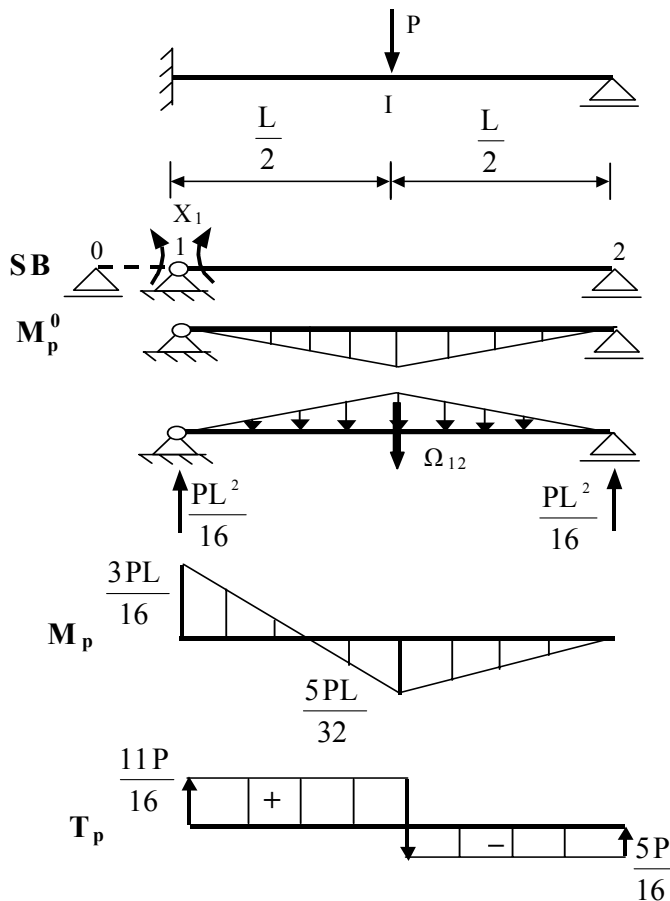
Diagramele de eforturi sunt date în figura 11.7.

**Problema 11.8 (fig.11.8)**

Lungimea transformată

$$\lambda_{12} = L$$

Reacțiunile fictive



$$\Omega_{12} = \frac{1}{2}L \cdot \frac{PL}{4} = \frac{PL^2}{8}$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2}\Omega_{12} = \frac{PL^2}{16}$$

Ecuatia de condiție

$$2LX_1 = -6\frac{PL^2}{16}$$

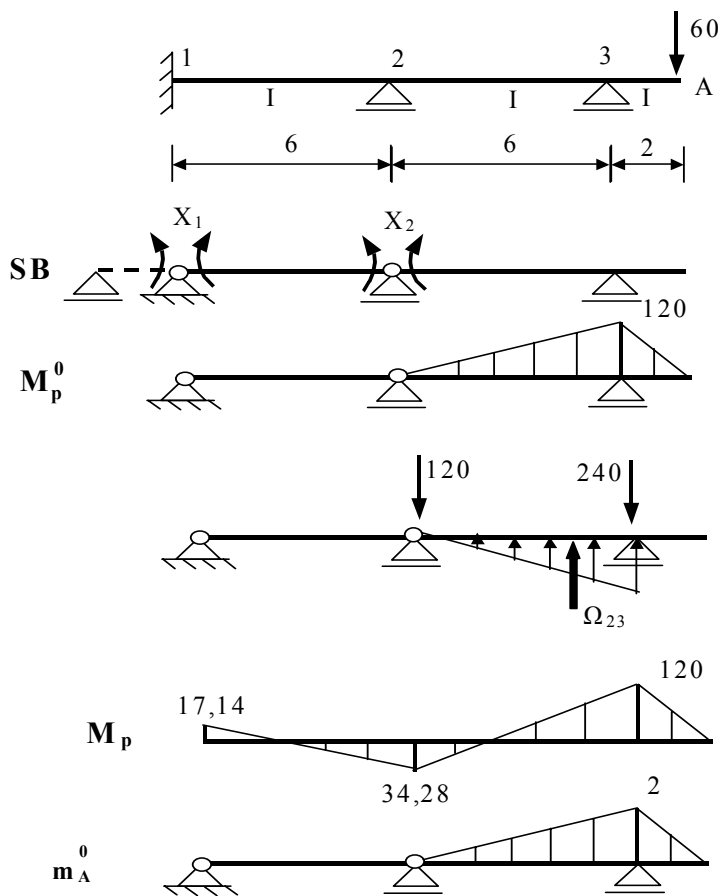
cu necunoscuta

$$X_1 = -\frac{3PL}{16}$$

Observație: Pentru bara static nedeterminată cu o singură deschidere, - având diferite legături la capete și diferite încărcări, diagramele de momente încovoietoare sunt date în tabelul 11.1

- Fig.11.8 -

**Problema 11.9 (fig.11.9)** Să se calculeze deplasarea pe verticală a capătului liber al consolei (A)  
Lungimile transformate



Pentru  $I_0=I$  se obține  
 $\lambda_{01} = 0; \lambda_{12} = 6; \lambda_{23} = 6$

Reacțiunile fictive

$$\Omega_{23} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 120 = 360$$

$$R_{23} = \frac{1}{3} \cdot \Omega_{23} = 120$$

$$R_{32} = \frac{2}{3} \cdot \Omega_{23} = 240$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 0 + 2(0 + 6)X_1 + 6X_2 = 0 \\ 6X_1 + 2(6 + 6)X_2 = -6 \cdot (-120) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 12X_1 + 6X_2 = 0 \\ 6X_1 + 24X_2 = 720 \end{cases}$$

Necunoscutele au valorile  
 $X_1 = -17,14$  și  $X_2 = 34,28$

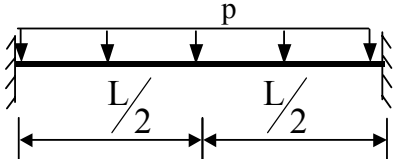
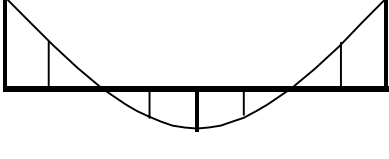
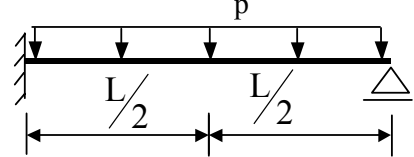
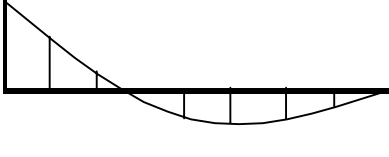
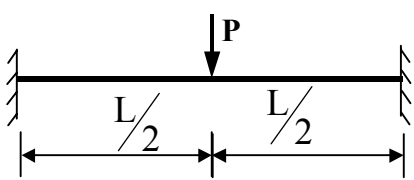
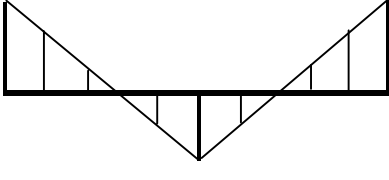
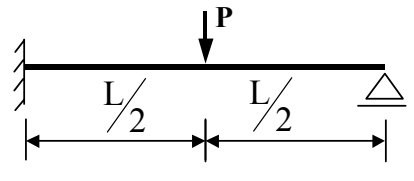
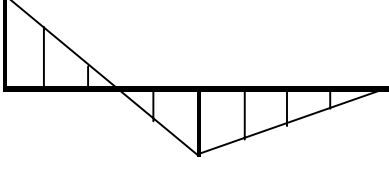
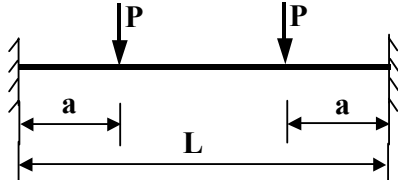
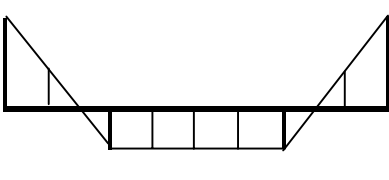
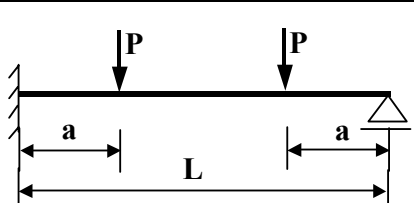
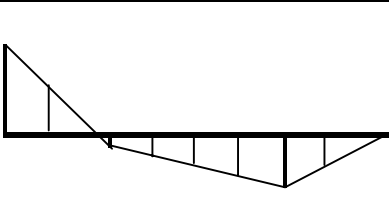
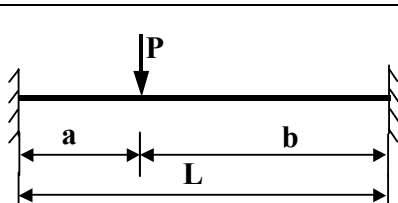
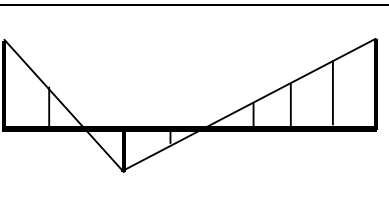
- Fig.11.9 -

Pentru calculul deplasării se încarcă sistemul de bază cu o forță egală cu unitatea, acționând în secțiunea A și se obține diagrama  $m_A^0$ . Se integrează diagrama  $M_p$  cu diagrama  $m_A^0$ .

$$v_A = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 120 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 120 - \frac{1}{3} \cdot 34,28 \right) \right] = \frac{571,44}{EI} \text{ metri}$$

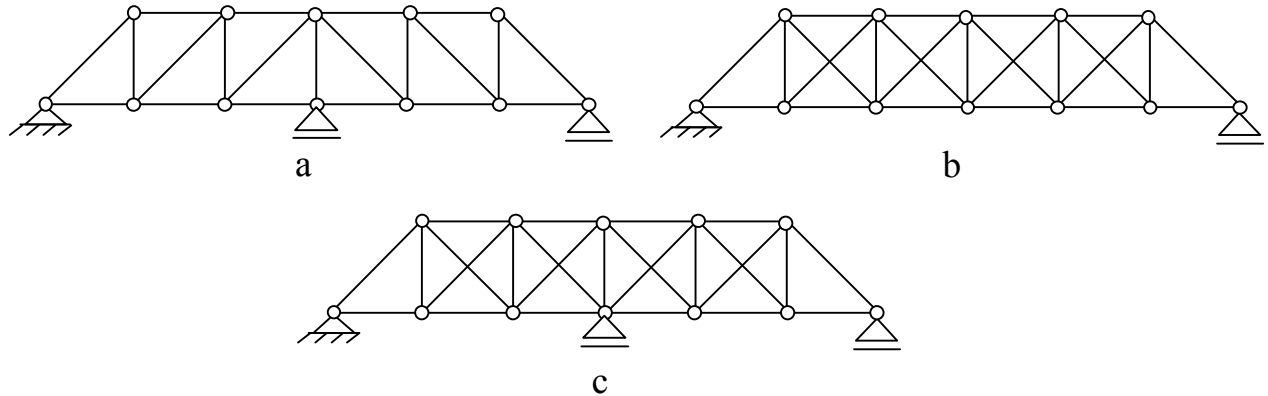


Tabelul 11.1

Bara	Diagrama de momente	Momentul de încadrare perfectă
		$M_{12} = M_{21} = \frac{pL^2}{12}$
		$M_{12} = \frac{pL^2}{8}$ $M_{21}=0$
		$M_{12} = M_{21} = \frac{PL}{8}$
		$M_{12} = \frac{3PL}{16}$ $M_{21}=0$
		$M_{12} = M_{21} = \frac{Pa(L-a)}{L}$
		$M_{12} = \frac{3Pa(L-a)}{2L}$ $M_{21}=0$
		$M_{12} = M_{21} = \frac{Pab^2}{L^2}$

## GRINZI CU ZĂBRELE STATIC NEDETERMINATE

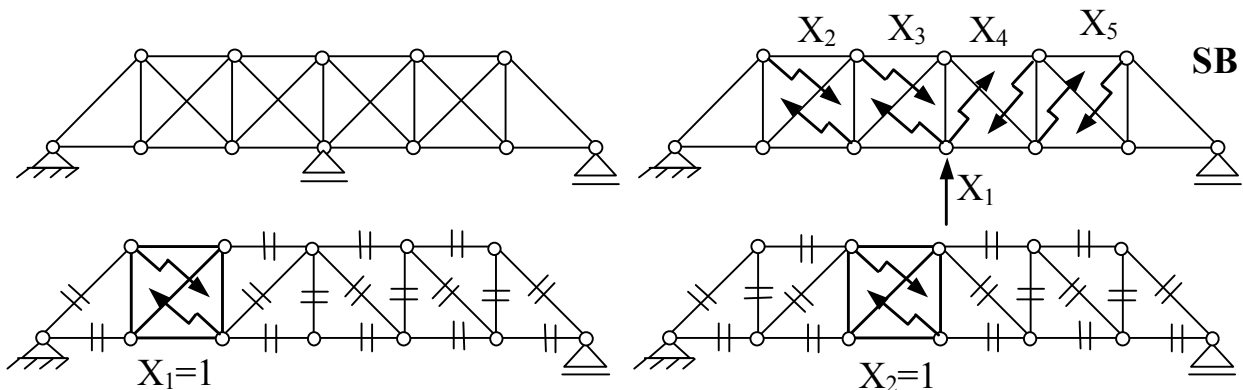
Grinzile cu zăbrele sunt static nedeterminate exterior (fig. XI.3,a), static nedeterminate interior (fig.IX.3,b) sau static nedeterminate exterior și interior (fig.XI.3,c).



- Fig.XI.3 -

Calculul grinzilor cu zăbrele static nedeterminate se efectuează parcurgând etapele obișnuite ale metodei eforturilor. În acest caz trebuie să se acorde o atenție deosebită alegerii sistemului de bază, pentru a evita sistemele critice.

Pentru grinzile cu zăbrele static nedeterminate interior, alegerea sistemului de bază prin secționarea diagonalelor duble, conduce la o distribuție particulară de eforturi axiale unitare (fig.XI.4). Apar eforturi axiale numai în barele panoului din care face parte necunoscuta.



- Fig.XI.4 -

O altă particularitate constă în forma ecuației de condiție. În cazul unei necunoscute reprezentând echivalentul mecanic al unui reazem simplu, în cazul de mai sus necunoscuta  $X_1$ , ecuația de condiție are forma obișnuită, adică

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{15}X_5 + \Delta_{1p} = 0 \quad (\text{XI.4})$$

Dacă necunoscuta reprezintă efortul dintr-o bară atunci deplasarea totală nu mai este egală cu zero ci este egală cu alungirea barei. De exemplu

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{25}X_5 + \Delta_{2p} = -\rho_2 X_2 \quad (\text{XI.5})$$

unde  $\rho_2 = \frac{1 \cdot l_2}{EA_2}$  reprezintă alungirea produsă de  $X_2=1$ . Semnul minus apare pentru a

pune în concordanță convenția pentru reprezentarea eforturilor și fenomenul fizic real al deformării axiale a barelor.

Deoarece în barele grinzilor cu zăbrele apar numai eforturi axiale coeficienții necunoscutelor și termenii liberi se exprimă astfel

$$\delta_{ii} = \int \frac{n_i^2}{EA} dx = \sum_1^b \frac{n_i^2 \cdot l}{EA}$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{n_i \cdot n_j}{EA} dx = \sum_1^b \frac{n_i \cdot n_j \cdot l}{EA} \quad (\text{XI.6})$$

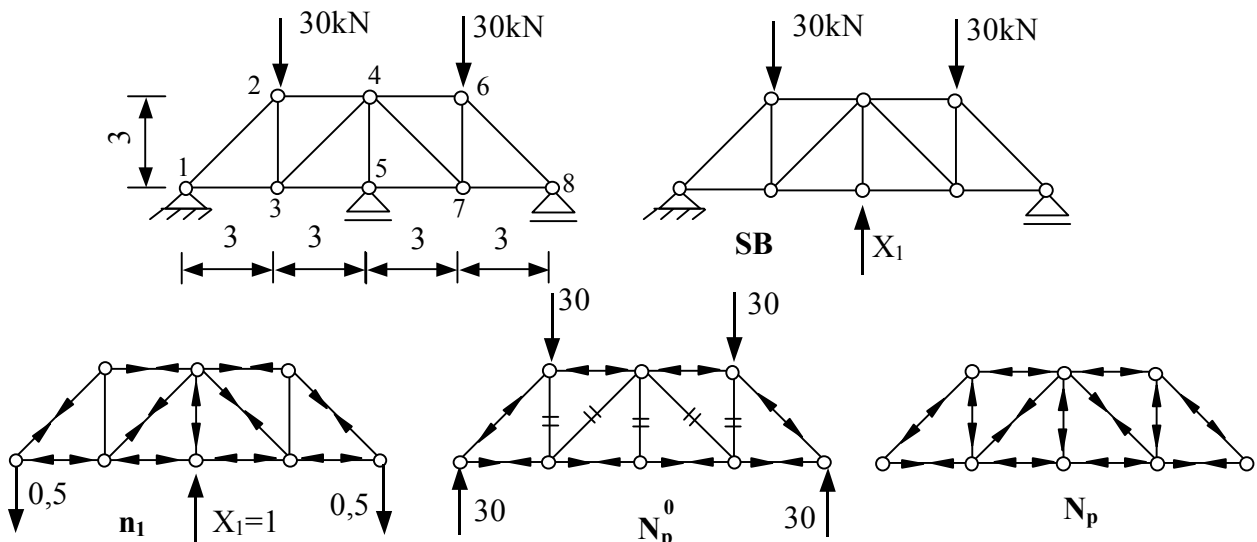
$$\Delta_{ip} = \int \frac{n_i \cdot N_p^0}{EA} dx = \sum_1^b \frac{n_i \cdot N_p^0 \cdot l}{EA}$$

Eforturile finale se determină prin suprapunere de efecte

$$N_p = N_p^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots + n_n X_n \quad (\text{XI.7})$$

Calculul grinzilor cu zăbrele se organizează într-un tabel.

**Problema 11.10 (fig.11.10)** Se consideră secțiunea 2A pentru tălpi și A pentru diagonale și montanți.



- Fig.11.10 -

Tabelul 11.10

Bara	Aria	l	$n_1$	$N_p^0$	$\frac{n_1^2 \cdot l}{EA}$	$\frac{n_1 \cdot N_p^0 \cdot l}{EA}$	$N_p$
1-2	2A	$3\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-30\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4EA}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4EA}$	-3,426
1-3	2A	3	$-\frac{1}{2}$	30	$\frac{3}{8EA}$	$\frac{3}{8EA}$	+2,426
2-3	A	3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{8EA}$	0	-27,57
2-4	2A	3	$-\frac{1}{2}$	-30	$\frac{3}{8EA}$	$-\frac{90}{4EA}$	-2,426
3-4	A	$3\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{4EA}$	0	+39,0
3-5	2A	3	-1	30	$\frac{3}{8EA}$	$-\frac{90}{2EA}$	-25,147
4-5	A	3	-1	0	$\frac{3}{EA}$	0	-55,147
4-6	2A	3	$-\frac{1}{2}$	-30	$\frac{3}{8EA}$	$-\frac{90}{4EA}$	-2,426
4-7	A	$3\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{4EA}$	0	+39,0
5-7	2A	3	-1	30	$\frac{3}{8EA}$	$-\frac{90}{2EA}$	-25,147
6-7	A	3	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{8EA}$	0	-27,57
6-8	2A	$3\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-30\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4EA}$	$\frac{90\sqrt{2}}{2EA}$	-3,426
7-8	2A	3	$-\frac{1}{2}$	30	$\frac{3}{8EA}$	$\frac{90}{4EA}$	+2,426

Ecuatia de condiție

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

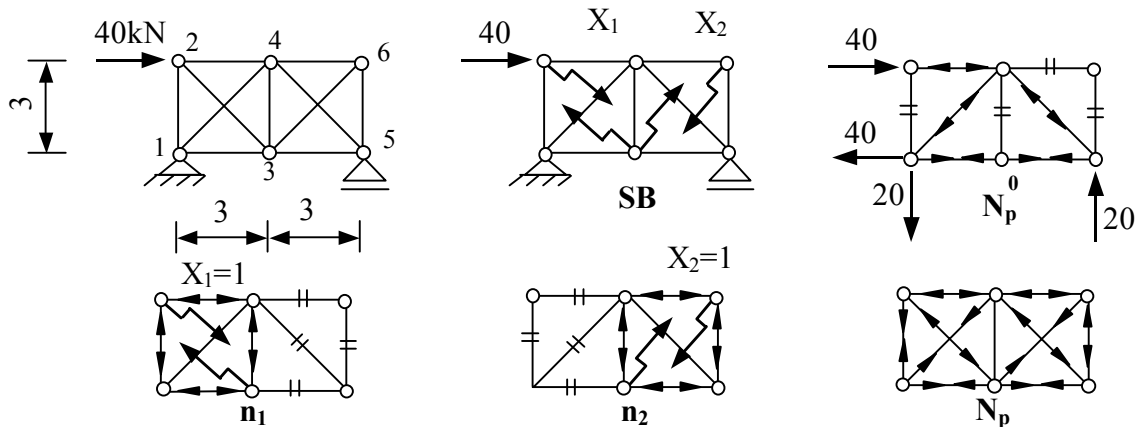
unde

$$\delta_{11} = \frac{9 + 4,5\sqrt{2}}{EA} \quad \Delta_{1p} = \frac{9 + 4,5\sqrt{2}}{EA}$$

$$15,364X_1 - 847,28 = 0; \quad X_1 = 55,147$$

Eforturile finale se calculează cu relația  $N_p = N_p^0 + n_1X_1$

**Problema 11.11 (fig.11.11)** Aria secțiunii transversale a tălpilei este  $2A$ , iar a montanților și diagonalelor este  $A$ .



- Fig.11.11 -

Tabelul 11.11

Bara	A	l	$N_p^0$	$N_1$	$N_2$	$\frac{n_1^2 \cdot l}{EA}$	$\frac{n_2^2 \cdot l}{EA}$	$\frac{n_1 n_2 \cdot l}{EA}$	$\frac{n_1 N_p^0 \cdot l}{EA}$	$\frac{n_2 N_p^0 \cdot l}{EA}$	$N_p$
1-2	A	3	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0	0	8,694
1-3	2A	3	20	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	$-\frac{15\sqrt{2}}{EA}$	0	28,694
1-4	A	$3\sqrt{2}$	$20\sqrt{2}$	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	$\frac{120}{EA}$	0	15,99
2-3	A	$3\sqrt{2}$	0	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	0	0	-12,295
2-4	2A	3	-40	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	$\frac{30\sqrt{2}}{EA}$	0	-31,306
3-4	A	3	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2EA}$	$\frac{3}{2EA}$	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0
3-5	2A	3	20	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	$-\frac{15\sqrt{2}}{EA}$	-8,694
3-6	A	$3\sqrt{2}$	0	0	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	0	12,295
4-5	A	$3\sqrt{2}$	$20\sqrt{2}$	0	1	0	$\frac{3\sqrt{2}}{EA}$	0	0	$-\frac{120}{EA}$	-15,99
4-6	2A	3	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0	-8,694
5-6	A	3	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3}{2EA}$	0	0	0	-8,694

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi

$$\delta_{11} = \frac{4,5 + 6\sqrt{2}}{EA} = \frac{12,985}{EA}; \quad \delta_{22} = \frac{4,5 + 6\sqrt{2}}{EA} = \frac{12,985}{EA}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1,5}{EA};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{120 + 15\sqrt{2}}{EA} = \frac{141,213}{EA}; \quad \Delta_{2p} = -\frac{120 + 15\sqrt{2}}{EA} = -\frac{141,213}{EA}$$

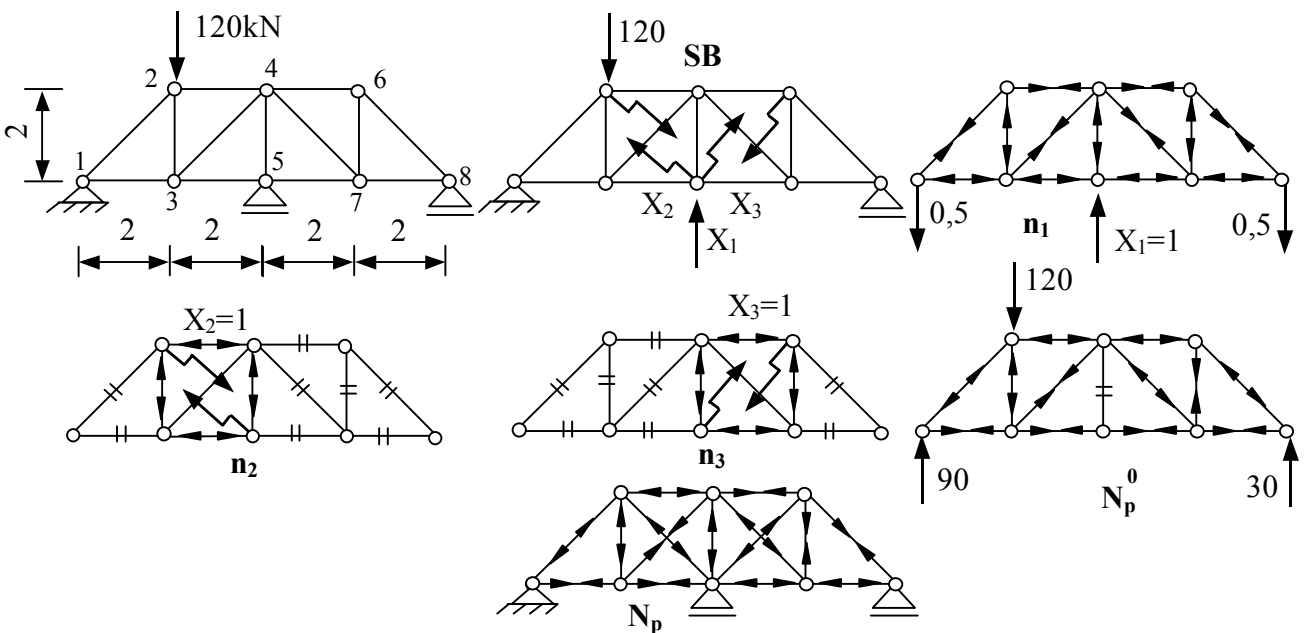
Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 12,985X_1 + 1,5X_2 + 141,213 = 0 \\ 1,5X_1 + 12,985X_2 - 141,213 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $X_1 = -12,295$  și  $X_2 = 12,295$

Eforturile finale, determinate cu relația  $N_p = N_p^0 + n_1X_1 + n_2X_2$  sunt date în tabelul 11.11.

**Problema 11.12 (fig.11.12)** Aria secțiunii transversale a tălpilor este  $2A$ , iar a diagonalelor și montanților este  $A$ .



- Fig.11.12 -

Rezolvând sistemul de ecuații au rezultat următoarele valori ale necunoscutelor:  $X_1 = 67,215$ ,  $X_2 = -55,130$  și  $X_3 = -7,163$

Eforturile finale sunt date în tabelul 11.12

Tabelul 11.12

<b>Bara</b>	<b>1-2</b>	<b>1-3</b>	<b>2-3</b>	<b>2-4</b>	<b>2-5</b>
<b>Efortul</b>	-79,751	56,392	-24,624	-17,409	-55,130
<b>Bara</b>	<b>3-4</b>	<b>3-5</b>	<b>4-5</b>	<b>4-6</b>	<b>4-7</b>
<b>Efortul</b>	34,824	31,768	-23,167	8,673	-2,061
<b>Bara</b>	<b>5-6</b>	<b>5-7</b>	<b>6-7</b>	<b>6-8</b>	<b>7-8</b>
<b>Efortul</b>	-7,163	-2,15	1,457	5,102	3,607

## ARCE STATIC NEDETERMINATE

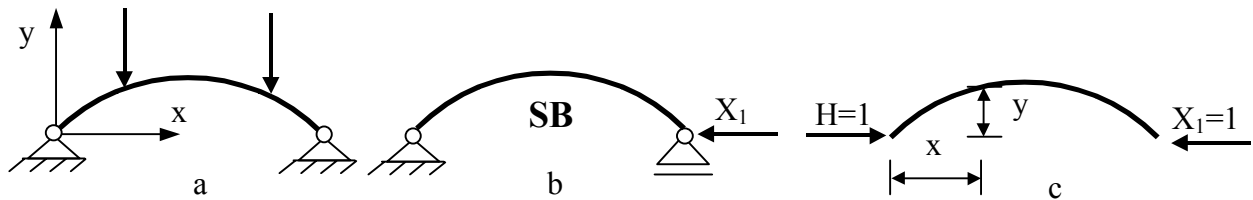
Arcele static nedeterminate sunt:

- arcul dublu articulat
- arcul cu tirant
- arcul dublu încastrat.

1. Arcul dublu articulat este o singură dată static nedeterminat. Condiția de compatibilitate este  $\Delta_1 = 0$  sau dezvoltat

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \quad (\text{XI.8})$$

În figura XI.5 este reprezentat arcul dublu articulat și sistemul de bază – arc simplu rezemat. Eforturile unitare sunt  $m_1 = -y$  și  $n_1 = -\cos \varphi$ .



- Fig.XI.5 -

Expresia coeficientului necunoscutei și a termenului liber conține efectul momentelor încovoietoare și a forțelor axiale.

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds = \int \frac{y^2}{EI} ds + \int \frac{\cos^2 \varphi}{EA} ds$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{m_1 M_p^0}{EI} ds + \int \frac{n_1 N_p^0}{EA} ds = - \int \frac{y M_p^0}{EI} ds - \int \frac{N_p^0 \cos \varphi}{EA} ds \quad (\text{XI.9})$$

Alegând ca elemente de comparație  $I_0$  și  $A_0$  se obține

$$EI_0 \delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds$$

$$EI_0 \Delta_{1p} = - \int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds - \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \cos \varphi ds \quad (\text{XI.10})$$

iar expresia necunoscutei are forma:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds + \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \cos \varphi ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds} \quad (\text{XI.11})$$

În cazul forțelor gravitaționale și a arcelor pleoștite se poate neglija efectul forțelor axiale  $N_p^0$  comparativ cu cel al momentelor încovoietoare  $M_p^0$ .

Dacă se consideră cazul arcului cu secțiunea variabilă, legea de variație fiind  $A = A_0 \cos \varphi$  atunci integrala a doua de la numitor devine (cu  $dx = ds \cdot \cos \varphi$ )

$$\int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds = \int \frac{I_0}{A_0 \cos \varphi} \cos^2 \varphi \cdot \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{I_0}{A_0} \cdot L = i_0^2 \cdot L \quad (\text{XI.12})$$

În aceste condiții necunoscuta  $X_1$  capătă forma uzuală

$$X_1 = \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (\text{XI.13})$$

Deoarece integrarea directă este posibilă doar în cazuri simple de încărcare (regula lui Vereșciaghin nu se mai poate aplica deoarece bara este curbă), în practică se utilizează metode numerice de calcul.

În acest scop se împarte arcul într-un număr de elemente de lungime finită  $\Delta s$  – elemente numite bolțari – și calculând eforturile în centrul de greutate al bolțarilor, necunoscuta se obține cu expresia:

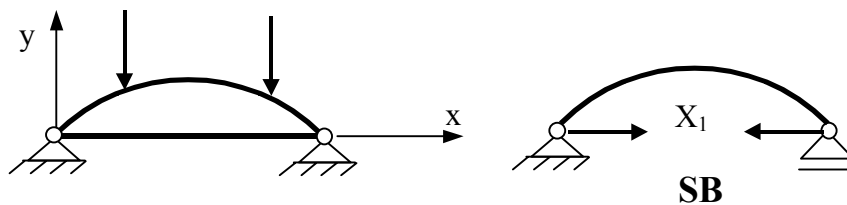
$$X_1 = \frac{\sum y M_p^0 W}{\sum y^2 W + L \cdot i_0^2} \quad (\text{XI.14})$$

unde  $W = \frac{I_0}{I} \Delta s$ .

Eforturile finale se determină astfel:

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + m_1 X_1 = M_p^0 - y X_1 \\ N_p &= N_p^0 + n_1 X_1 = N_p^0 - X_1 \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{XI.15})$$

2. Arcul cu tirant (fig.XI.6) este tot o singură dată static nedeterminat. Sistemul de bază se alege prin secționarea tirantului.



- Fig.XI.6 -

Se obține tot un arc simplu rezemat, dar trebuie să se introducă în expresia coeficientului necunoscutei și efectul efortului axial din tirant.



$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds + \int \frac{n_t^2}{E_t A_t} dx \quad (\text{XI.16})$$

sau cu notațiile anterioare

$$EI_0 \delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2 + L \cdot i_t^2 \quad (\text{XI.17})$$

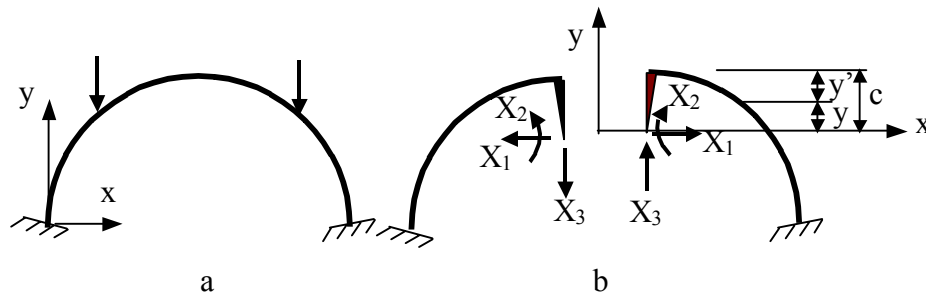
unde s-a notat cu  $i_t^2 = \frac{E \cdot I_0}{E_t \cdot A_t}$ , unde  $E_t$  și  $A_t$  fiind caracteristicile tirantului, iar  $E$  și  $I_0$  ale arcului.

Necunoscuta are forma

$$X_1 = \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + 1 \cdot (i_0^2 + i_t^2)} \quad (\text{XI.18})$$

3. Arcul dublu încastrat (fig.XI.7) este de trei ori static nedeterminat.

Pentru reducerea volumului de calcul se utilizează un procedeu de ortogonalizare a diagramelor unitare, denumit procedeu transferării necunoscutelor în centrul elastic (fig. XI.7b). În acest mod sistemul de ecuații va fi format din trei ecuații fiecare ecuație conținând o singură necunoscută.



- Fig.XI.7 -

Deoarece sistemul de bază este simetric, diagramele  $m_1$  și  $m_2$  sunt simetrice, iar diagrama  $m_3$  este antisimetrică. Din condiția ca  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$  rezultă lungimea consolelor în vârful cîrora au fost transferate necunoscutele.

Eforturile unitare în secțiunea curentă sunt:

$$\begin{aligned} m_1 &= -y; & n_1 &= -\cos \varphi; \\ m_2 &= 1; & n_2 &= 0; \\ m_3 &= x; & n_3 &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{XI.19})$$

deci

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds + \int \frac{n_1 n_2}{EA} ds = -\int \frac{y}{EI} ds$$

sau

$$\frac{I_0}{I} \delta_{12} = \int \frac{I_0}{I} (c - y') ds = 0 \quad (\text{XI.20})$$

de unde rezultă

$$c = \frac{\int \frac{I_0}{I} y' ds}{\int \frac{I_0}{I} ds} \quad (\text{XI.21})$$

Ținând seama de aproximațiile făcute la arcul dublu articulată și introducând și următoarele aproximații

$$\int \frac{I_0}{A} \sin^2 \varphi ds \approx 0 \quad \text{și} \quad \int \frac{I_0}{A} N_p^0 \sin \varphi ds \approx 0 \quad (\text{XI.22})$$

necunoscutele vor avea expresiile

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\int \frac{I_0}{I} y M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + l \cdot i_0^2}; \\ X_2 &= - \frac{\int \frac{I_0}{I} M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} ds} \\ X_3 &= - \frac{\int \frac{I_0}{I} x M_p^0 ds}{\int \frac{I_0}{I} x^2 ds} \end{aligned} \quad (\text{XI.23})$$

Pentru calculul prin boltări expresiile centrului elastic și ale necunoscutelor devin:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sum yW}{\sum W} \\ X_1 &= \frac{\sum y M_p^0 W}{\sum y^2 W + l \cdot i_0^2}; \quad X_2 = - \frac{\sum M_p^0 W}{\sum W}; \quad X_3 = - \frac{\sum x M_p^0 W}{\sum x^2 W} \end{aligned} \quad (\text{XI.24})$$

Dacă încărcarea este simetrică  $X_1 \neq 0$  și  $X_2 \neq 0$  iar  $X_3 = 0$ . Eforturile sunt:

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 = M_p^0 - y X_1 + X_2 \\ N_p &= N_p^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 = N_p^0 - X_1 \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{XI.25})$$

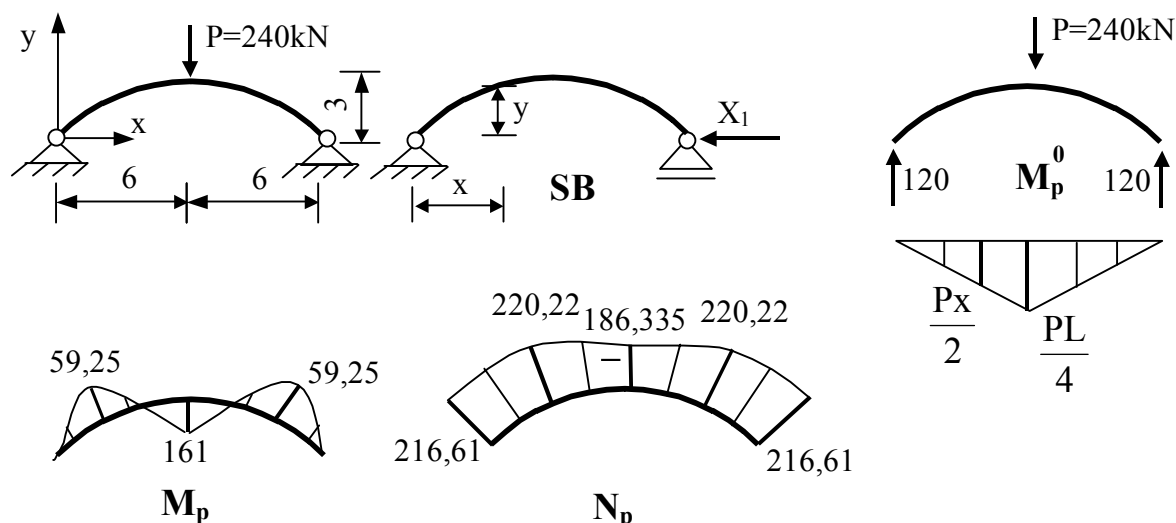
Dacă încărcarea este antisimetrică  $X_1 = 0$  și  $X_2 = 0$  iar  $X_3 \neq 0$ . Eforturile sunt:

$$\begin{aligned} M_p &= M_p^0 + m_3 X_3 = M_p^0 + x X_3 \\ N_p &= N_p^0 + n_3 X_3 = N_p^0 + X_3 \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{XI.26})$$

## APLICAȚII

Să se traseze diagramele de momente încovoietoare și de forță axială la următoarele arce

**Problema 11.13 (fig.11.13)** Arcul este parabolic cu secțiune constantă ( $b \times h = 40 \times 60 \text{ cm}^2$ ).



- Fig.11.13 -

Încărcarea fiind simplă se va utiliza integrarea directă. Expresia necunoscutei – în cazul secțiunii constante este

$$X_1 = \frac{\int y M_p^0 ds}{\int y^2 ds + L \cdot i_0^2}$$

Expresiile momentelor încovoietoare în secțiunea curentă sunt:  $m_1 = -y$ ,

$$M_p^0 = \frac{Px}{2}, \text{ iar } y = \frac{4fx(L-x)}{L^2}$$

$$\int y M_p^0 ds = 2 \int_0^{L/2} \frac{4fx(L-x)}{L^2} \cdot \frac{Px}{2} dx = \frac{5PL^2 f}{48} = 10800$$

$$\int y^2 ds = \int_0^{L/2} \frac{16f^2 x^2 (L-x)^2}{L^4} dx = \frac{8Lf^2}{15} = 57,6$$

$$L \cdot i_0^2 = L \frac{I}{A} = L \frac{h^2}{12} = 12 \cdot \frac{0,6^2}{12} = 0,36$$

$$X_1 = \frac{10800}{57,96} = 186,335$$

Calculul momentelor încovoietoare:  $M_p = M_p^0 - yX_1$

- secțiunea de la cheie

$$M_c = \frac{PL}{4} - f \cdot X_1 = 720 - 3 \cdot 186,335 = 161 \text{ kNm}$$

- secțiunea de la sfertul deschiderii

$$M_s = \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{4} - \frac{3}{4} f \cdot X_1 = 360 - 419,25 = -59,25 \text{ kNm}$$

Calculul forțelor axiale:  $N_p = N_p^0 - X_1 \cos \varphi$

- secțiunea de la nașteri:  $\cos \varphi_1 = 0,707$ ;  $\sin \varphi_1 = 0,707$

$$N_1 = -\frac{P}{2} \sin \varphi_1 - X_1 \cos \varphi_1 = -216,61 \text{ kN}$$

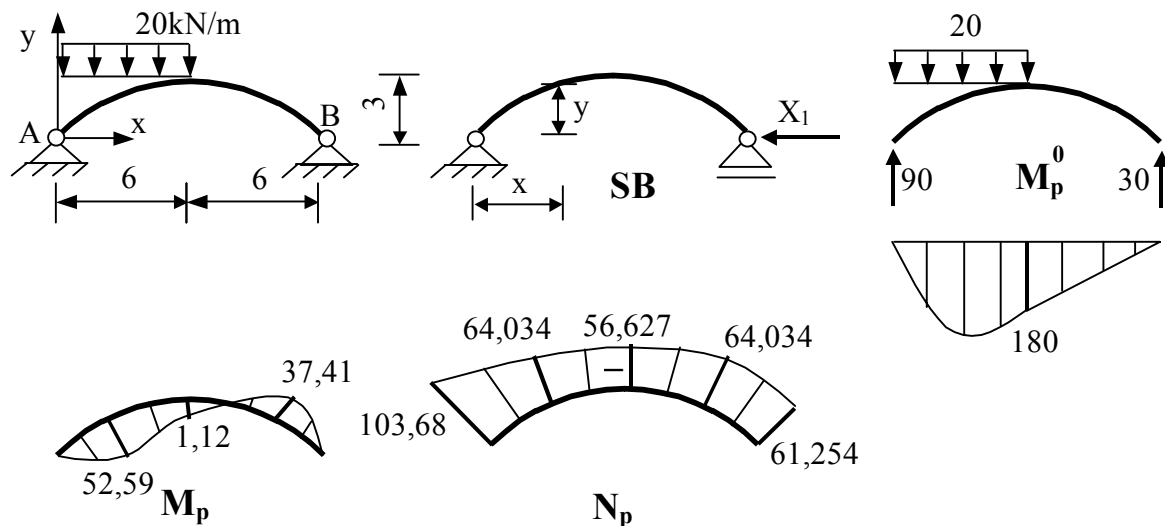
- secțiunea de la sfert:  $\cos \varphi_s = 0,894$ ;  $\sin \varphi_s = 0,447$

$$N_s = -\frac{P}{2} \sin \varphi_s - X_1 \cos \varphi_s = -220,22 \text{ kN}$$

- secțiunea de la cheie:  $\cos \varphi_c = 1$ ;  $\sin \varphi_c = 0$

$$N_c = -X_1 \cos \varphi_c = -186,335 \text{ kN}$$

**Problema 11.14 (fig.11.14)** Arcul de la aplicația precedentă, încărcat cu o forță uniform distribuită pe jumătate de deschidere.



- Fig.11.14 -

Arcul fiind același se va calcula numai termenul liber (numărătorul expresiei necunoscutei  $X_1$ )

Pe prima jumătate a arcului  $M_p^0 = 90x - 20x \frac{x}{2} = 90x - 10x^2$

$$\int y M_p^0 ds = \int_0^{L/2} \frac{4fx(L-x)}{L^2} \cdot (90x - 10x^2) dx = 2106$$

Pe jumătatea din dreapta a arcului  $M_p^0 = 30x$

$$\int y M_p^0 ds = \int_0^{L/2} \frac{4fx(L-x)}{L^2} \cdot 30x dx = 1350$$

Deci

$$\int y M_p^0 ds = 2106 + 1350 = 3456$$

Calculul necunoscutei

$$X_1 = \frac{3456}{57,96} = 56,627$$

Calculul momentelor încovoietoare

- secțiunea de la cheie

$$M_c = 180 - 3 \cdot 56,627 = 1,12 \text{ kNm}$$

- secțiunea de la sfert pe jumătatea din stânga a arcului

$$M_s = 90 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 - \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 56,627 = 52,59 \text{ kNm}$$

- secțiunea de la sfert pe jumătatea din dreapta a arcului

$$M_s = 30 \cdot 3 - \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 56,627 = -37,41 \text{ kNm}$$

Calculul forțelor axiale:

- secțiunea A  $\cos \varphi_A = 0,707$ ;  $\sin \varphi_A = 0,707$

$$N_1 = -90 \sin \varphi_A - 56,627 \cos \varphi_A = -103,68 \text{ kN}$$

- secțiunea de la sfert pe jumătatea din stânga a arcului  $\cos \varphi_s = 0,894$ ;

$$\sin \varphi_s = 0,447$$

$$N_s = -90 \sin \varphi_s - 56,627 \cos \varphi_s + 20 \cdot 3 \sin \varphi_s = -64,034 \text{ kN}$$

- secțiunea de la cheie:  $\cos \varphi_c = 1$ ;  $\sin \varphi_c = 0$

$$N_c = -56,627 \cos \varphi_c = -56,627 \text{ kN}$$

- secțiunea de la sfert pe jumătatea din dreapta a arcului  $\cos \varphi_s = 0,894$ ;

$$\sin \varphi_s = 0,447$$

$$N_s = -30 \sin \varphi_s - 56,627 \cos \varphi_s = -64,034 \text{ kN}$$

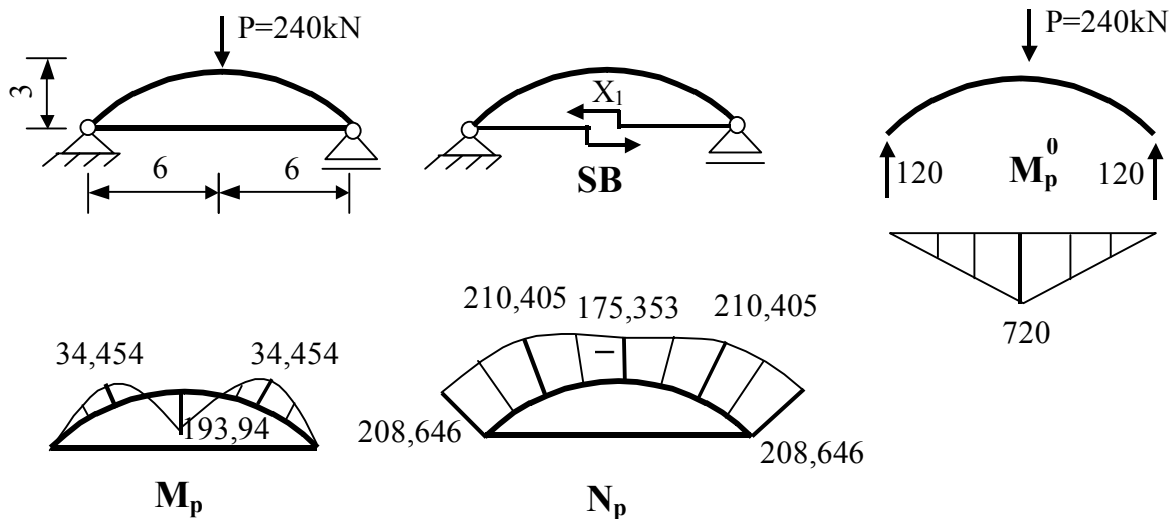
- secțiunea B  $\cos \varphi_A = 0,707$ ;  $\sin \varphi_A = 0,707$

$$N_B = -30 \sin \varphi_A - 56,627 \cos \varphi_A = -61,254 \text{ kN}$$

Diagramele de eforturi sunt date în figura 11.14.

**Problema 11.15 (fig.11.15)** Arcul parabolic cu tirant are următoarele caracteristici:

- Arcul  $E_b=300000\text{daN/cm}^2$ ,  $b \times h=40 \times 60\text{cm}^2$ .
- Tirantul  $E_t=2100000\text{daN/cm}^2$ ,  $A_t=34\text{cm}^2$ .



- Fig.11.15 -

Arcul este același de la aplicația 11.13. În acest caz având tirant se modifică coeficientul necunoscutei.

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds + \int \frac{n_1^2}{EA} ds + \int \frac{n_t^2}{E_t A_t} dx$$

unde  $m_1 = -y$ ,  $n_1 = -\cos \varphi$ ,  $n_t = +1$

$$EI_0 \delta_{11} = \int \frac{I_0}{I} y^2 ds + \int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds + \int \frac{EI_0}{E_t A_t} 1^2 dx$$

Deoarece arcul are secțiune constantă  $I_0=I$  rezultă

$$\int y^2 ds = 2 \int_0^{L/2} \left[ \frac{4fx(L-x)}{L^2} \right]^2 dx = 57,6$$

$$\int \frac{I_0}{A} \cos^2 \varphi ds = L \cdot i_0^2 = 0,36$$

$$\int \frac{EI_0}{E_t A_t} 1^2 ds = L \cdot i_t^2 = 12 \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 72 \cdot 10^{-4}}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 34 \cdot 10^{-4}} = 3,63$$

$$EI_0 \Delta_{1p} = -\int y M_p^0 ds = -10800$$

Necunoscuta, efortul din tirant, este

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{10800}{57,60 + 0,36 + 3,63} = 175,353 \text{ kN}$$

Se constată că în cazul arcului cu tirant, efortul în tirant este mai mic decât reacțiunea orizontală a arcului dublu articulat, și aceasta deoarece tirantul este un element deformabil.

Calculul momentelor încovoietoare

$$M_c = 120 \cdot 6 - 3 \cdot 175,353 = 193,94 \text{ kNm}$$

$$M_s = 120 \cdot 3 - \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 175,353 = -34,544 \text{ kNm}$$

Calculul forțelor axiale

$$N_A = -120 \sin \varphi_A - 175,353 \cos \varphi_A = -208,846 \text{ kN}$$

unde  $\cos \varphi_A = 0,707$ ;  $\sin \varphi_A = 0,707$

$$N_s = -120 \sin \varphi_s - 175,353 \cos \varphi_s = -210,405 \text{ kN}$$

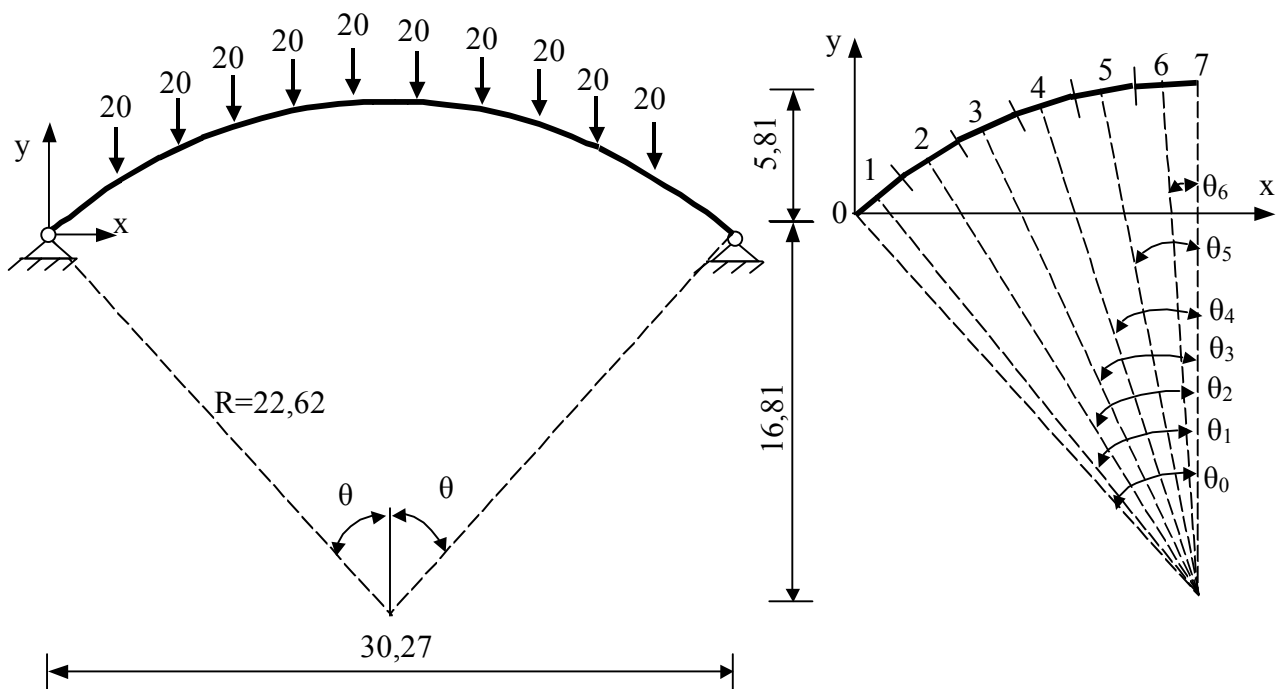
unde  $\cos \varphi_s = 0,894$ ;  $\sin \varphi_s = 0,447$

$$N_c = -X_1 = -175,353 \text{ kN}$$

$$N_t = +X_1 = +175,353 \text{ kN}$$

**Problema 11.16 (fig.11.16)** Se va utiliza calculul prin boltari. Arcul este circular din beton armat, având secțiunea transversală constantă,  $b \times h = 40 \times 70 \text{ cm}^2$ , raza  $R = 22,62 \text{ m}$  și unghiul la centru  $2\theta = 84^\circ$ .

Forțele sunt aplicate simetric în secțiunile 2,3,4,5 și 6.



- Fig.11.16 -

Calculul elementelor geometrice

$$L = 2R \sin \alpha = 2 \cdot 22,62 \cdot 0,669 = 30,27 \text{ m}$$

$$f = R(1 - \cos \alpha) = 22,62 \cdot (1 - 0,743) = 5,81 \text{ m}$$

Arcul se împarte în 12 elemente de lungime constantă  $\Delta s = \frac{n\pi}{180} \cdot R = 2,76m$ .

Calculul se dezvoltă pe jumătate de arc. Coordonatele centrelor de greutate ale bolțarilor precum și ale secțiunilor 0 și 7 sunt date în tabelul 11.16.1. Relațiile de calcul sunt  $x_i = R \sin \alpha - R \sin \theta_i$ ;  $y_i = R \cos \theta_i - R \cos \alpha$

Tabelul 11.16.1

Sectiunea	$\theta_i$	$\sin\theta_i$	$\cos\theta_i$	$x_i$	$y_i$
0	$42^\circ$	0,669	0,743	0	0
1	$38^\circ 30'$	0,622	0,784	1,065	0,924
2	$31^\circ 30'$	0,522	0,853	3,327	2,485
3	$24^\circ 30'$	0,415	0,910	5,748	3,774
4	$17^\circ 30'$	0,301	0,954	8,327	4,769
5	$10^\circ 30'$	0,182	0,983	11,018	5,425
6	$3^\circ 30'$	0,061	0,998	13,755	5,764
7	0	0	1,000	15,135	5,810

Expresia necunoscutii, în condiția  $\Delta s = ct.$ ,  $I=ct.$ , este

$$X_1 = \frac{\sum yM_p^0 \Delta s}{\sum y^2 \Delta s + L \cdot i_0^2} = \frac{\sum yM_p^0}{\sum y^2 + L \cdot i_0^2 / \Delta s}$$

Momentele încovoietoare  $M_p^0$  și eforturile axiale  $N_p^0$  calculate cu relațiile

$$M_{p_i}^0 = V_0 \cdot x_i - \sum P_j d_i$$

unde  $d_i$  este distanța de la forța curentă la secțiunea  $i$ .

$$N_{p_i}^0 = -V_0 \sin \theta_i - \sum P_j \sin \theta_i$$

sunt date în tabelul 11.16.2.

Tabelul 11.16.2

Sectiunea	$M_p^0$	$y$	$yM_p^0$	$y^2$	$\sin\theta_i$	$N_p^0$
1	106,50	0,924	98,406	0,854	0,622	-62,20
2	332,70	2,485	826,759	6,175	0,522	-52,20
						-41,76
3	526,38	3,774	1986,558	14,243	0,415	-33,20
						-24,90
4	681,12	4,769	3248,261	22,743	0,301	-18,06
						-12,04
5	788,76	5,425	4279,023	29,431	0,182	-7,28
						-3,64
6	834,50	5,764	4810,058	33,224	0,061	-1,22
						0

Termenii din expresia necunoscutii se calculează pe arcul întreg deoarece sistemul de bază este arc simplu rezemat

$$2\sum yM_p^0 = 2 \cdot 15249,065 = 30498,13 \quad 2\sum y^2 = 2 \cdot 106,67 = 213,34$$



$$L \cdot i_0^2 / \Delta s = \frac{Lh^2}{12\Delta s} = \frac{30,270 \cdot 0,70^2}{12 \cdot 2,76} = 0,448$$

Necunoscuta  $X_1$  este:

$$X_1 = \frac{30498,130}{213,34 + 0,448} = 142,656 \text{ kN}$$

Eforturile finale (fig.11.17) au fost calculate cu relațiile

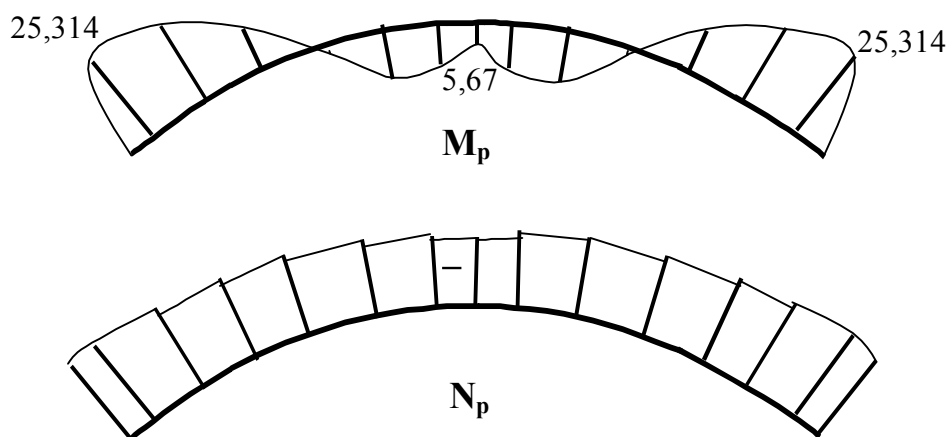
$$M_p = M_p^0 - yX_1 \quad N_p = N_p^0 - X_1 \cos \varphi$$

și sunt înscrise în tabelul 11.16.3.

Deoarece încărcarea este simetrică eforturile au fost calculate pe jumătate de arc.

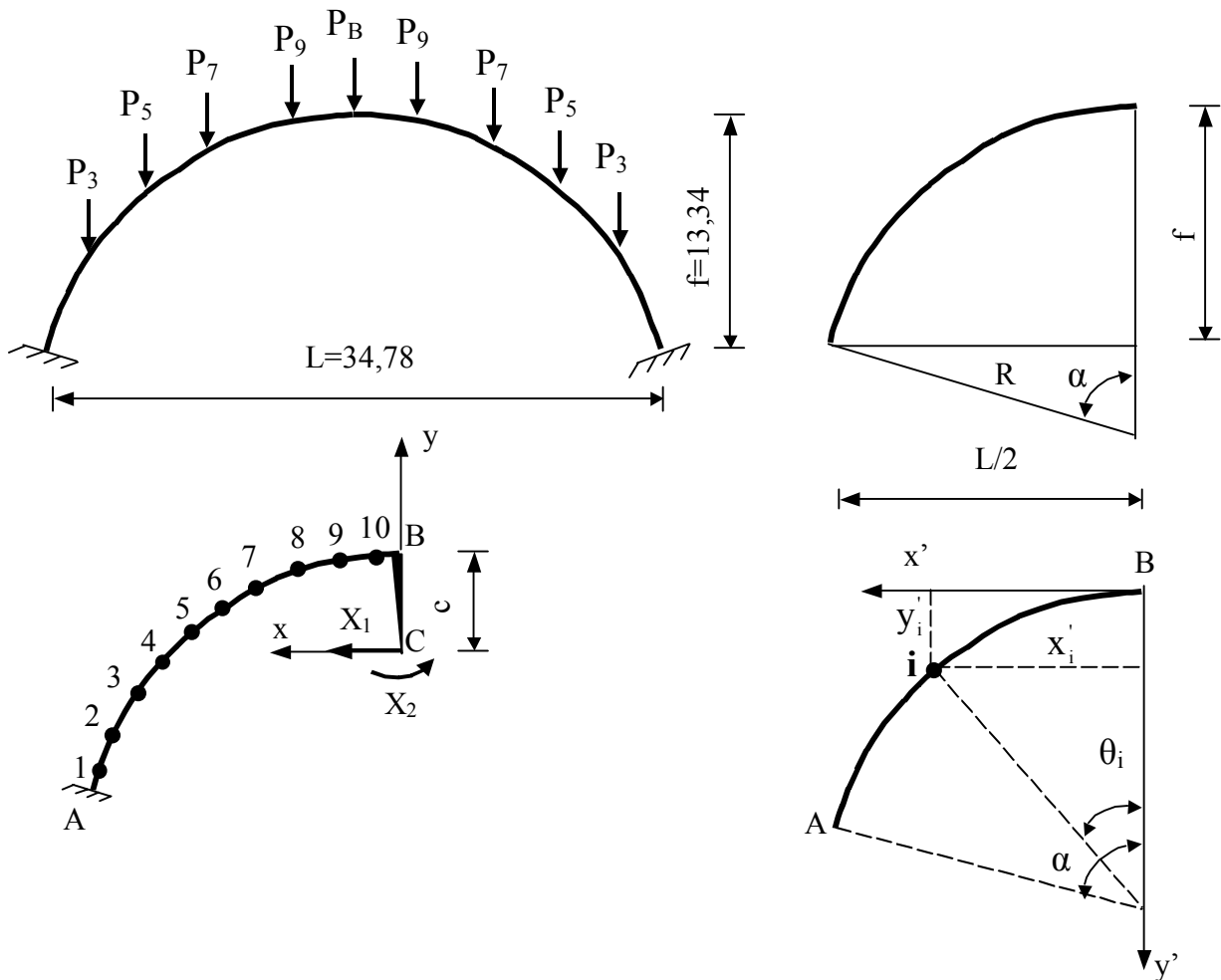
Tabelul 11.16.3

Sectiunea	$M_p^0$	y	$-yX_1$	$M_p$	$N_p^0$	$\cos\theta_i$	$-X_1\cos\theta_i$	$N_p$
0	0	0	0	0	-66,90	0,743	-105,993	-172,893
1	106,50	0,924	-131,814	-25,314	-62,20	0,784	-111,842	-174,042
2	332,70	2,485	-354,500	-22,800	-52,20	0,853	-121,685	-173,885
					-41,76			-163,445
3	526,38	3,774	-538,384	-12,004	-33,20	0,910	-129,817	-163,017
					-24,90			-154,717
4	681,12	4,769	-608,326	0,794	-18,06	0,954	-136,094	-154,154
					-12,04			-148,134
5	788,76	5,425	-773,908	14,852	-7,28	0,983	-140,230	-147,510
					-3,64			-143,870
6	834,50	5,764	-822,269	11,231	-1,22	0,998	-142,370	-143,590
					0			-142,370
7	844,50	5,810	-828,830	5,670	0	1,000	-142,656	-142,656



- Fig.11.17 -

**Problema 11.17 (fig.11.18)** Arcul este circular și realizat din beton armat având secțiunea  $b \times h = 120 \times 60 \text{ cm}^2$ . Deschiderea arcului este  $L = 34,78 \text{ m}$  iar săgeata este  $f = 13,34 \text{ m}$ . Se va efectua calculul prin bolțari.



- Fig.11.18 -

Calculul elementelor geometrice ale arcului. Cunoscând deschiderea și săgeata se determină raza arcului și unghiul la centru.

$$R^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + (R - f)^2 \quad R = \frac{L^2}{8f} + \frac{f}{2} = 18,00 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = \frac{L}{2R} = 0,966 \quad \alpha = 75^\circ$$

Arcul fiind simetric calculul se va efectua pe semistructură prin transferarea necunoscutelor în centrul elastic. Semiarcul se împarte în zece bolțari de lungime egală.

Coordonatele centrelor de greutate ale bolțarilor precum și ale secțiunilor A și B sunt date în tabelul 11.17.1

Relațiile de calcul pentru coordonatele centrelor de greutate sunt:

$$x'_i = R \sin \theta_i; \quad y'_i = R(1 - \cos \theta_i)$$

$$x_i = R \sin \alpha - R \sin \theta_i; \quad y_i = R \cos \theta_i - R \cos \alpha$$

Tabelul 11.17.1

Sectiunea	$\theta_i$	$\sin \theta_i$	$\cos \theta_i$	$x'_i$	$y'_i$
A	$75^0$	0,966	0,259	17,390	13,340
1	$71^015'$	0,947	0,321	17,046	12,222
2	$63^045'$	0,897	0,442	16,146	10,040
3	$56^015'$	0,831	0,555	14,958	8,000
4	$48^045'$	0,752	0,659	13,356	6,138
5	$41^015'$	0,659	0,752	11,862	4,464
6	$33^045'$	0,555	0,831	10,000	3,042
7	$26^015'$	0,442	0,897	7,956	1,854
8	$18^045'$	0,321	0,947	5,778	0,954
9	$11^015'$	0,195	0,980	3,510	0,360
10	$3^045'$	0,065	0,998	1,170	0,036
B	0	0	1	0	0

Poziția centrului elastic ( de coordonată c) se determină cu relația

$$c = \frac{\sum y'W}{\sum W} \text{ unde } W = \frac{I_0}{I} \Delta s = \Delta s$$

deoarece secțiunea transversală a arcului este constantă, iar lungimea bolțarului este

$$\Delta s = \frac{n\pi}{180} \cdot R = 2,356m$$

Calculul coordonatei centrului elastic “c”, coordonatele centrelor de greutate ale bolțarilor, în sistemul de axe xCy precum și termenii  $yW$  și  $y^2W$ , necesari în calculul necunoscutelor este prezentat în tabelul 11.17.2.

Tabelul 11.17.2

Sectiunea	$y'$	W	$y'W$	y	$yW$	$y^2W$
10	0,036	2,356	0,085	4,674	11,012	51,470
9	0,360	2,356	0,850	4,350	10,249	44,581
8	0,954	2,356	2,247	3,756	8,849	33,237
7	1,854	2,356	4,368	2,856	6,728	19,217
6	3,042	2,356	7,167	1,668	3,930	6,555
5	4,464	2,356	10,517	0,246	0,579	0,142
4	6,138	2,356	14,461	-1,428	-3,364	4,804
3	8,000	2,356	18,848	-3,290	-7,751	25,501
2	10,040	2,356	23,654	-5,330	-12,557	66,931
1	12,222	2,356	28,795	-7,512	-17,698	132,949

$$\sum W = 23,56 \quad \sum y'W = 110,992 \quad c = \frac{\sum y'W}{\sum W} = \frac{110,992}{23,56} = 4,710\text{m}$$

Momentele încovoietoare  $M_p^0$  și eforturile axiale  $N_p^0$  pe sistemul de bază sunt calculate în tabelul 11.17.3.

Forțele concentrate sunt aplicate în secțiunile 3,5,7,9,B și au valorile  $P_3=180\text{kN}$ ,  $P_5=150\text{kN}$ ,  $P_9=180\text{kN}$ ,  $P_B=200\text{kN}$ . Pentru calculul pe semistructură se ia  $\frac{P_B}{2} = 100\text{kN}$ .

Tabelul 11.17.3

Secțiunea	$M_i = M_{i+1} + (x'_{i+1} - x'_i) \cdot \sum P_{i+1}$	$\sum P_i$	$\sin\theta_i$	$N_p^0$
B	$M_B=0$	100	0	0
10	$M_{10} = 0 - 100 \cdot 1,170 = -117$	100	0,065	-6,50
9	$M_9 = -117 - 100 \cdot 2,34 = -351$	280	0,195	-19,50 -54,60
8	$M_8 = -351 - 280 \cdot 2,268 = -986,04$	280	0,321	-89,88
7	$M_7 = -986,04 - 280 \cdot 2,178 = -1595,88$	430	0,442	-123,76 -190,06
6	$M_6 = -1595,88 - 430 \cdot 2,044 = -2474,80$	430	0,555	-238,65
5	$M_5 = -2474,80 - 430 \cdot 1,862 = -3275,46$	580	0,659	-283,87 -383,22
4	$M_4 = -3275,46 - 580 \cdot 1,674 = -4246,38$	580	0,752	-436,16
3	$M_3 = -4246,38 - 580 \cdot 1,422 = -5071,14$	760	0,831	-481,98 -631,56
2	$M_2 = -5071,14 - 760 \cdot 1,188 = -5974,02$	760	0,897	-681,72
1	$M_1 = -5974,02 - 760 \cdot 0,90 = -6658,02$	760	0,947	-719,72
A	$M_A = -6658,02 - 760 \cdot 0,344 = -6919,46$	760	0,966	-734,16

Expresiile necunoscutelor sunt

$$X_1 = \frac{\sum yM_p^0 W}{\sum y^2 W + L \cdot i_0^2}; \quad X_2 = -\frac{\sum M_p^0 W}{\sum W}$$

Din tabelul 11.17.2 rezultă

$$\sum W = 23,56$$

$$\sum y^2 W = 385,327$$

Termenul liber  $L \cdot i_0^2$  pe semistructură are valoarea

$$\frac{1}{2} L \cdot i_0^2 = \frac{1}{2} 34,78 \cdot \frac{0,60^2}{12} = 0,522$$

Cealalți termeni din expresiile necunoscutelor sunt calculați în tabelul 11.17.4.

Tabelul 11.17.4

Sectiunea	W	y	yW	M <sub>p</sub> <sup>0</sup>	M <sub>p</sub> <sup>0</sup> W	yM <sub>p</sub> <sup>0</sup> W
10	2,356	4,674	11,012	-117,00	-275,652	-1288,404
9	2,356	4,350	10,249	-351,00	-826,956	-3597,400
8	2,356	3,756	8,849	-986,04	-2323,110	-8725,468
7	2,356	2,856	6,728	-1595,88	-3759,893	-10737,08
6	2,356	1,668	3,930	-2474,80	-5830,629	-9725,964
5	2,356	0,246	0,579	-3275,44	-7716,984	-1896,491
4	2,356	-1,428	-3,364	-4246,38	-10004,47	+14284,822
3	2,356	-3,290	-7,751	-5071,14	-11947,606	+39306,406
2	2,356	-5,330	-12,557	-5974,02	-14074,791	+75015,769
1	2,356	-7,512	-17,698	-6658,02	-15686,295	+117833,673

$$\sum M_p^0 W = -72446,386$$

$$\sum y M_p^0 W = 210469,863$$

Cu aceste rezultate necunoscutele capătă valorile

$$X_1 = \frac{210469,863}{424,726 + 0,522} = 494,934 \text{ kN} \quad X_2 = -\frac{-72446,386}{23,56} = 3074,974 \text{ kNm}$$

Eforturile finale calculate cu relațiile

$$M_p = M_p^0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 = M_p^0 - y X_1 + X_2$$

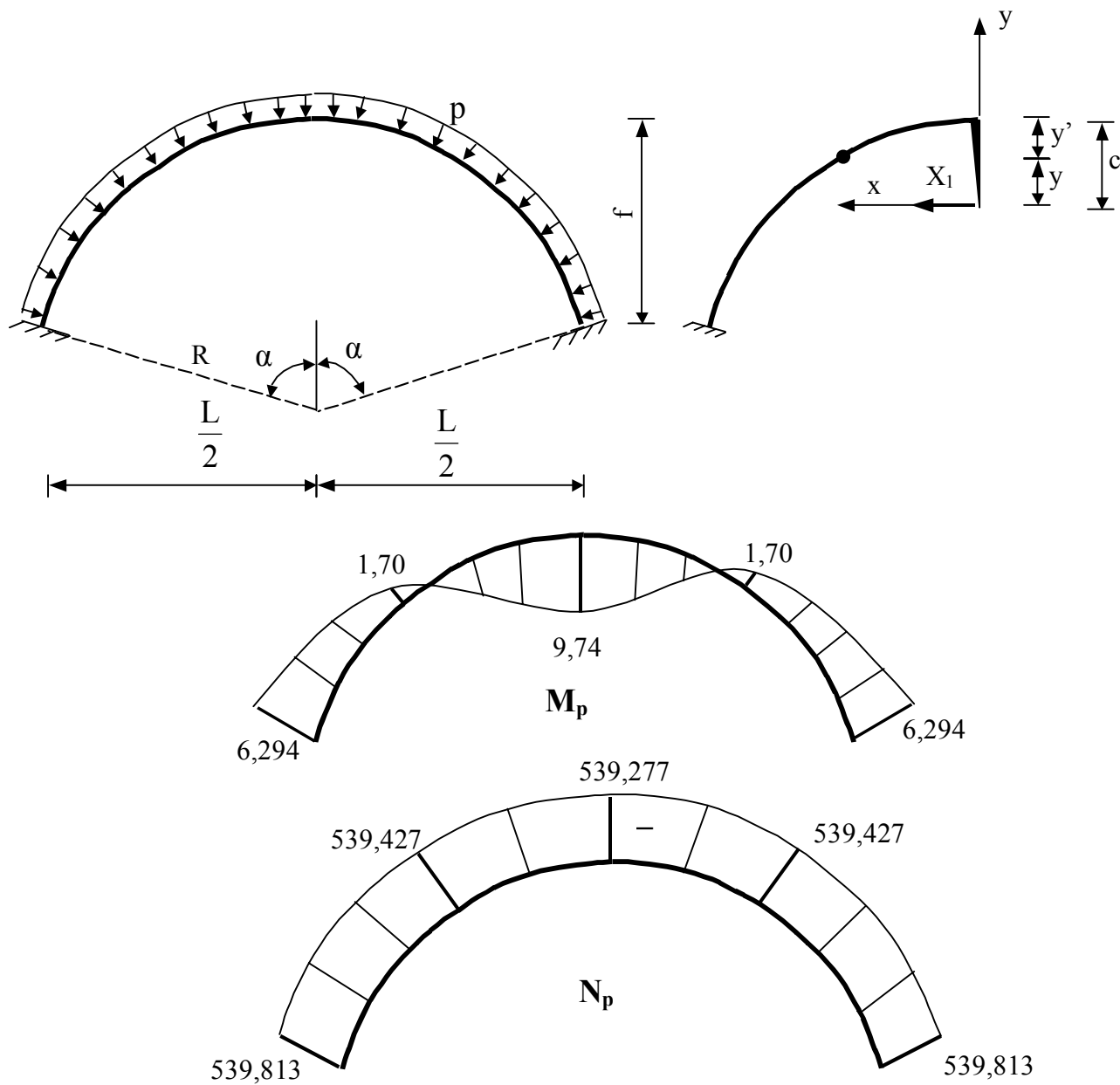
$$N_p = N_p^0 + n_1 X_1 + n_2 X_2 = N_p^0 - X_1 \cos \varphi$$

sunt date în tabelul 11.17.5.

Tabelul 11.17.5

Sectiunea	y	-yX <sub>1</sub>	M <sub>p</sub> <sup>0</sup>	M <sub>p</sub>	N <sub>p</sub> <sup>0</sup>	cosθ <sub>i</sub>	-X <sub>1</sub> cosθ <sub>i</sub>	N <sub>p</sub>
B	4,771	-2331,139	0	+743,834	0	1	-494,934	-494,934
10	4,674	-2313,321	-117,00	+644,652	-6,50	0,998	-493,944	-500,444
9	4,350	-2152,963	-351,00	+571,011	-19,50 -54,60	0,980	-485,035	-504,535 -539,635
8	3,756	-1858,972	-986,04	+229,962	-89,88	0,947	-468,702	-558,580
7	2,856	-1413,531	-1595,88	+65,567	-123,76 -190,06	0,897	-443,955	-567,715 -634,016
6	1,668	-825,550	-2474,80	-225,376	-238,65	0,831	-411,290	-649,940
5	0,246	-121,753	-3275,44	-322,240	-283,87 -383,22	0,752	-372,190	-655,560 -754,410
4	-1,428	+706,765	-4246,38	-464,640	-436,16	0,659	-326,161	-762,321
3	-3,290	+1628,333	-5071,14	-367,833	-481,98 -631,56	0,555	-274,688	-756,668 -906,248
2	-5,330	+2638,00	-5974,02	-261,047	-681,72	0,442	-218,760	-900,480
1	-7,512	+3717,944	-6658,02	+134,900	-719,72	0,321	-158,874	-878,594
A	-8,630	+4271,280	-6919,46	+426,794	-734,16	0,259	-128,188	-862,348

**Problema 11.18 (fig.11.19)** Se consideră arcul circular de la problema 11.17, supus presiunii hidrostactice  $p_n=30\text{kN/m}$ . Se cunosc  $\alpha = 75^\circ$ ,  $R=18,00\text{ m}$ .



- Fig.11.19 -

Cu datele geometrice prevăzute rezultă  $L=34,78\text{m}$  și  $f=13,34\text{m}$ .

Poziția centrului elastic este dată de relația

$$c = \frac{\int y' ds}{\int ds} = \frac{\int_0^\alpha R(1 - \cos\theta) d\theta}{\int_0^\alpha R d\theta} = R \left( 1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)$$

$$c = 18 \left( 18 - \frac{0,9659}{1,309} \right) = 4,718\text{m}$$

Calculată prin bolțari, poziția centrului elastic a fost dată de valoarea  $c=4,710\text{m}$  (deci o bună aproximație).

Considerând ca sistem de bază pentru încărcarea „p” arcul cu trei articulații – care este arc de coincidență – rezultă în arc numai forță axială de compresiune  $N_p^0 = -pR$ . În aceste condiții  $M_p^0 \equiv 0$  și rezultă  $X_1 \neq 0$ ,  $X_2 = 0$ .

Ecuția de condiție va fi

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

Calculul coeficientului necunoscutei  $X_1$  este

$$EI\delta_{11} = \int m_1^2 ds + i^2 \int n_1^2 ds = \int y^2 ds + i^2 \int \cos^2 \theta ds$$

Deoarece  $y = c - y' = R\left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right) - R(1 - \cos \theta) = R\left(\cos \theta - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$ , iar

$ds = Rd\theta$  se obține

$$EI\delta_{11} = \alpha R^3 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{2\sin^2 \alpha}{\alpha^2}\right) + \alpha Ri^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) = 775,90$$

Calculul termenului liber

$$EI\Delta_{1p} = i^2 \int n_1 N_p^0 ds = 2i^2 \int_0^\alpha (-\cos \theta) \cdot (-pR) Rd\theta = 2pR^2 i^2 \sin \alpha = 563,32$$

Expresia necunoscutei

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{2pR^2 i^2 \sin \alpha}{\alpha R^3 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - \frac{2\sin^2 \alpha}{\alpha^2}\right) + \alpha Ri^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)} = -\frac{563,32}{775,90} = -0,723$$

Calculul momentelor încovoietoare finale

- la cheie

$$M_c = m_1 X_1 = -y_c X_1 = -4,718 \cdot 0,723 = 9,74 \text{ kNm}$$

- la nașteri

$$M_n = m_1 X_1 = -y_n X_1 = -(13,34 - 4,718) \cdot 0,723 = -6,294 \text{ kNm}$$

- la sfertul deschiderii

$$M_s = m_1 X_1 = -y_s X_1 = -2,322 \cdot 0,723 = -1,70 \text{ kNm}$$

Calculul forței axiale

- la cheie

$$N_c = -pR + X_1 = -30 \cdot 18 + 0,723 = -539,277 \text{ kN}$$

- la nașteri

$$N_n = -pR + X_1 \cos \alpha_n = -30 \cdot 18 + 0,723 \cdot 0,259 = -539,813 \text{ kN}$$

- la sfertul deschiderii

$$N_s = -pR + X_1 \cos \alpha_s = -30 \cdot 18 + 0,723 \cdot 0,793 = -539,427 \text{ kN}$$

Diagramele de eforturi sunt date în figura 11.19.

# METODA DEPLASĂRILOR

## CAPITOLUL XII

### PRINCIPIILE METODEI DEPLASĂRILOR

Metoda deplasărilor este o metodă generală pentru calculul structurilor alcătuite din bare: cadre, grinzi continue sau grinzi cu zăbrele având noduri rigide. Starea de eforturi care se dezvoltă într-o bară a unei structuri poate fi determinată dacă se cunosc forțele ce acționează asupra barei, precum și deplasările secțiunilor de la capete – translații și rotații. Această observație constituie baza calculului structurilor prin metoda deplasărilor. Se reamintesc aici caracteristicile nodurilor unei structuri alcătuite din bare:

- secțiunile de capăt ale barelor ce converg într-un nod rigid se rotesc cu același unghi și au aceeași translație;
- secțiunile de capăt ale barelor ce converg într-un nod articulată au aceeași translație, rotația relativă fiind liberă.

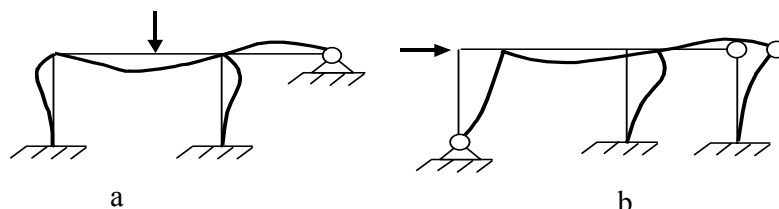
În formularea clasică a principiilor metodei deplasărilor – în vederea reducerii numărului de necunoscute se admite prin ipoteză că lungimile barelor nu variază prin trecerea din poziția inițială în poziția deformată.

Prin această condiție structurile se clasifică în două categorii: structuri cu noduri fixe și structuri cu noduri deplasabile.

Structurile cu noduri fixe sunt acele structuri la care prin deformare sub acțiunea forțelor exterioare, nodurile efectuează numai rotații, translațiile fiind blocate de legăturile exterioare. (fig. XII.1,a).

Structurile cu noduri deplasabile sunt acele structuri la care prin deformare, sub acțiunea forțelor exterioare, nodurile efectuează atât rotații cât și translații (fig. XII.1,b).

- Fig.XII.1 -



Pentru a stabili că o structură face parte dintr-o categorie sau alta se procedează în modul următor:

- nodurile rigide se transformă în noduri articulate, iar încastrările cu baza se transformă în articulații, obținând structura auxiliară,
- structura auxiliară se analizează din punct de vedere cinematic, utilizând următoarea relație:



$$W = 3B - 2A - S \quad (\text{XII.1})$$

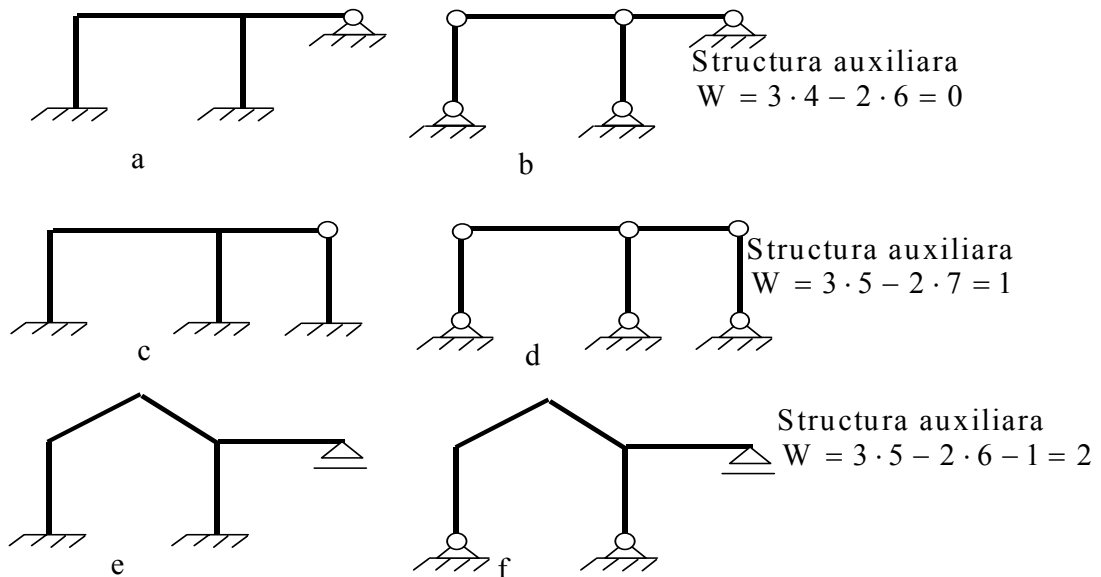
unde B reprezintă numărul de bare, A numărul de articulații simple, iar S numărul de reazeme simple.

- dacă  $W \leq 0$  structura auxiliară nu are grade de libertate cinematică, iar structura reală este o structură cu noduri fixe (fig. XII.2,a și b),
- dacă  $W > 0$ , structura auxiliară are un număr de grade de libertate cinematică, iar structura reală este o structură cu noduri deplasabile, având același număr de grade de libertate elastică (fig. XII.2,c și d).

- Fig. XII.2 -

Excepții de la regula (XII.1) sunt:

- cadrele care au un tirant (fig. XII.3,a). Deoarece tirantul este o bară

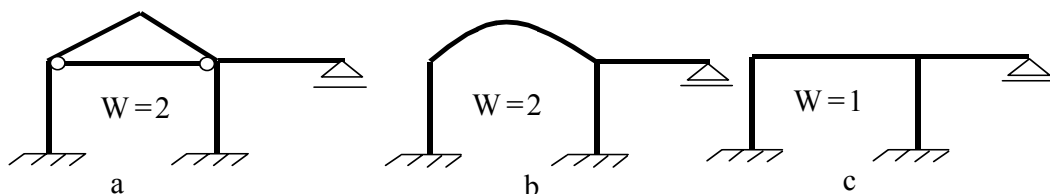


deformabilă axial, el nu suprimă deplasarea pe direcția gradului de libertate, ci o limitează la deformarea sa;

- cadrele care au o riglă curbă, au un grad de libertate în plus, comparativ cu același cadru care ar avea rigla rectilinie (fig. XII.3,b și c).

- Fig. XII.3 -

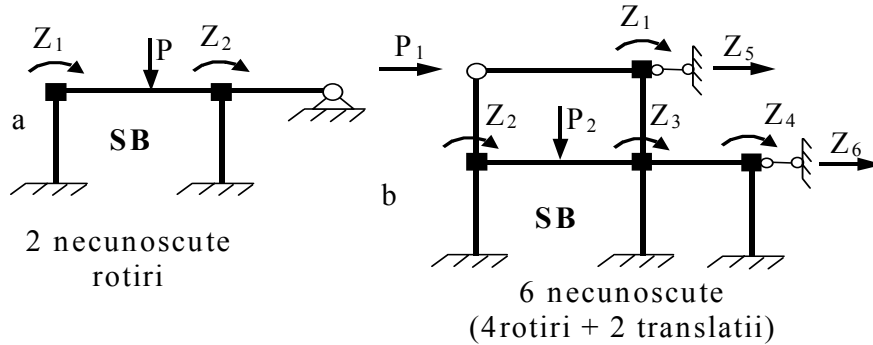
Și în metoda deplasărilor calculul se conduce pe un sistem de bază obținut prin blocarea tuturor deplasărilor posibile ale nodurilor structurii – rotații și translații (fig. XII.4,a și b).



Pentru blocarea rotației unui nod rigid se utilizează blocajul de nod, iar pentru blocarea translației pe direcția unui grad de libertate se utilizează legătura de grad de libertate.

Blocajul de nod este o legătură simplă care suprimă rotirea nodului, dar lasă liberă translația acesteia. Echivalentul mecanic al unui blocaj de nod este o reacțiune moment.

Legătura de grad de libertate este o legătură simplă care suprimă translația nodului și lasă liberă rotirea acesteia. Echivalentul mecanic al unei legături de grad de libertate este o reacțiune forță.



- Fig.XII.4 -

Sistemul de bază, în metoda deplasărilor, are următoarele caracteristici:

- este unic,
- este format din două tipuri de bare: bare dublu încastrate și bare încastrate la o extremitate și articulate la cealaltă,
- este multiplu static nedeterminat comparativ cu structura reală.

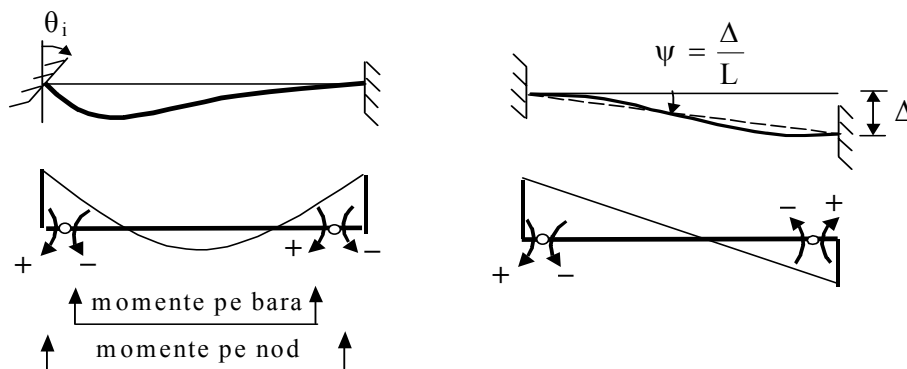
Sistemul de bază va fi încărcat cu forțele reale și cu deplasările nodurilor (inițial necunoscute). Sub acțiunea acestor încărcări în legăturile suplimentare vor apărea reacțiuni. Reacțiunea totală se obține prin suprapunerea de efecte. Deoarece aceste legături suplimentare sunt fictive, condiția ca ele să nu existe este ca echivalentul lor mecanic să fie egal cu zero. Deci  $R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_n = 0$  unde

$$\begin{aligned} R_1 &= r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} = 0 \\ R_2 &= r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} = 0 \\ &\vdots \\ R_n &= r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0 \end{aligned} \tag{XII.2}$$

În sistemul de ecuații (XII.2), elementele componente au următoarele semnificații:

- $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  – sunt deplasările necunoscute ale nodurilor – rotiri și translații,
- $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$  – coeficienții necunoscutelor principale sunt reacțiuni unitare, produse de deplasări egale cu unitatea pe direcția lor când acestea acționează asupra sistemului de bază. Aceste reacțiuni sunt totdeauna pozitive.
- $r_{12}, r_{13}, \dots, r_{ij}$  – coeficienții necunoscutelor secundare sunt reacțiuni unitare. Aceste reacțiuni pot fi pozitive, negative sau egale cu zero.
- $R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{np}$  – termenii liberi sunt reacțiuni produse în legăturile suplimentare de forțele exterioare. Aceste reacțiuni pot fi pozitive, negative sau egale cu zero.

În vederea sistematizării calculului prin metoda deplasărilor se adoptă o convenție de semne, atât pentru rotiri de nod, rotiri de bară cât și pentru momente încovoietoare. Sensul pozitiv este sensul acelor de ceasornic. În figura XII.5 sunt



prezentate câteva exemple.

- Fig.XII.5 -

Momentele încovoietoare produse din încărcarea cu forțe pe barele sistemului de bază sunt date în tabelul 11.1 (paragraful grinzi continue).

Tabelul 11.1

Bara	Diagrama de moment încovoietor	Momentul încovoietor
		$M_{ij} = 4i\theta_i$ $M_{ji} = 2i\theta_i$
		$M_{ij} = M_{ji} = 6i\psi_{ij}$
		$M_{ik} = 3i\theta_i$
		$M_{ik} = 3i\psi_{ik}$

Pentru cazul încărcării cu rotații de nod sau translații de nod eforturile sunt date în tabelul XII.1, unde s-a notat  $i = \frac{EI}{L}$  (rigiditatea practică a barei).

Eforturile, după rezolvarea sistemului de ecuații, se determină astfel:

- pentru structuri cu noduri fixe (momente pe nod)

$$M_{ij} = M_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j$$

$$M_{ji} = M_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j$$

$$M_{ik} = M_{ik} - 3i_{ik}\theta_i$$

- pentru structurile cu noduri deplasabile

$$M_{ij} = M_{ij} - 4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j + 6i_{ij}\psi_{ij}$$

$$M_{ji} = M_{ji} - 2i_{ij}\theta_i - 4i_{ij}\theta_j + 6i_{ij}\psi_{ij}$$

$$M_{ik} = M_{ik} - 3i_{ik}\theta_i + 3i_{ik}\psi_{ik}$$

În relațiile (XII.3) și (XII.4) simbolurile își conțin semnul, deoarece forțe pot avea sensuri diferite.

Structurile simetrice se rezolvă prin metoda deplasărilor utilizând procedee cunoscute și anume procedeul necunoscutelor grupate și procedeul semistructurilor.

Un caz particular, care introduce și elemente specifice metodei – este cazul barei dublu încastrate și în sistemul de bază, intersectate de axa de simetrie la mijlocul deschiderii sale și este încărcată cu rotații grupate simetric și grupate antisimetric (fig.XII.6).

Gruparea simetrică

$$M_{ij} = -4i_{ij}\theta_i + 2i_{ij}\theta_j = -2i_{ij}\theta_i$$

Gruparea antisimetrică

$$M_{ij} = -4i_{ij}\theta_i - 2i_{ij}\theta_j = -6i_{ij}\theta_i$$

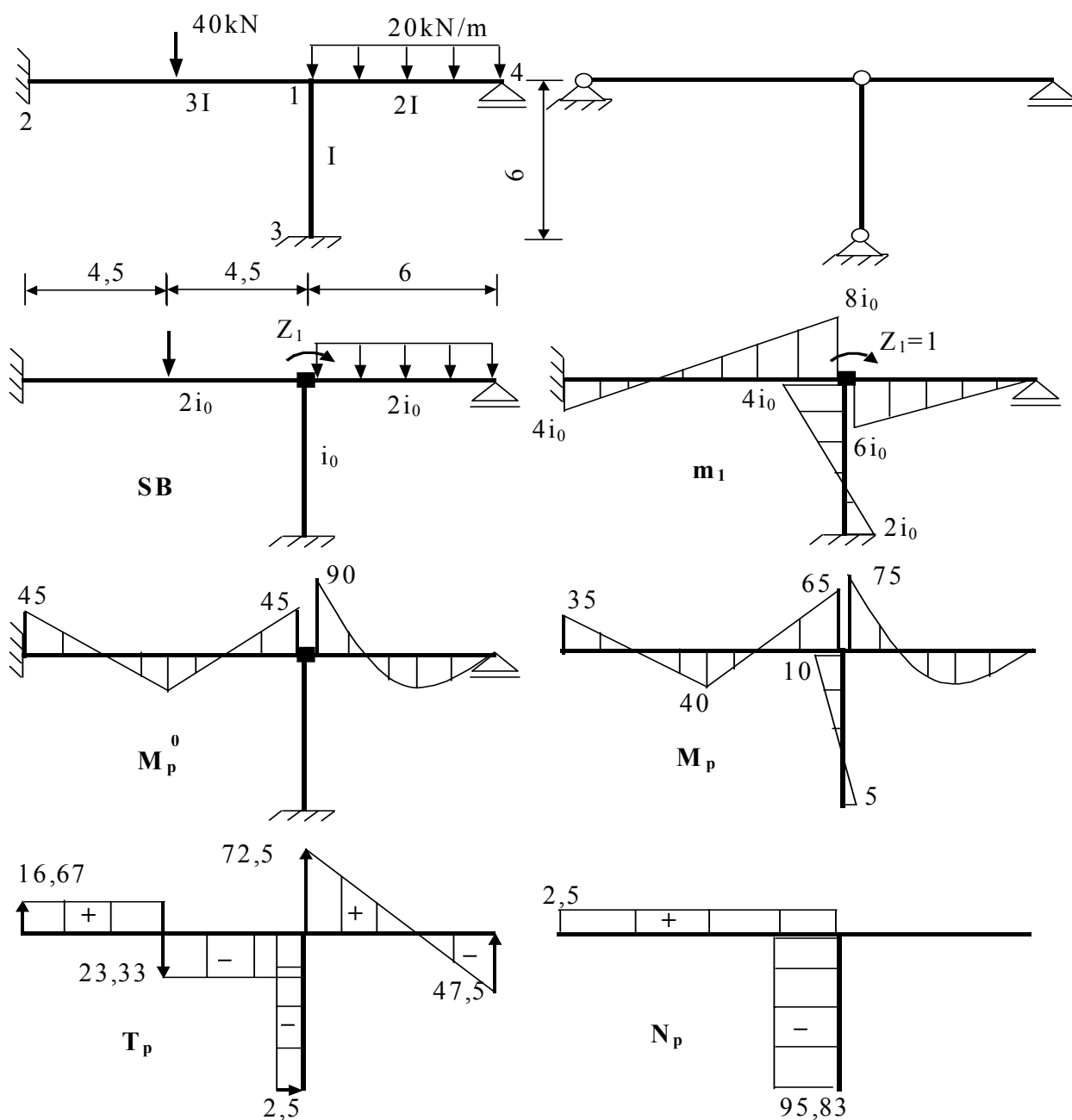
Din cele de mai sus rezultă că, în gruparea simetrică bara se comportă ca având rigiditatea pe jumătate, comparativ cu situația încărcării cu o singură rotire, iar în gruparea antisimetrică bara se comportă ca având rigiditatea o dată și jumătate, comparativ cu situația încărcării cu o singură rotire.

## APLICAȚII

A. STRUCTURI CU NODURI FIXE. La structurile cu noduri fixe, sistemul de bază se obține prin introducerea de blocaje de nod în nodurile rigide. Reacțiunea moment dintr-o asemenea legătură se obține scriind echilibrul momentelor din jurul fiecărui nod, atât din diagramele unitare, cât și din diagrama  $M_p^0$ .

Să se traseze diagramele de eforturi la următoarele structuri cu noduri fixe.

### Problema 12.1 (fig.12.1)



- Fig.12.1 -

Din analiza structurii auxiliare rezultă

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 1 = 0$$

deci nu există grade de libertate cinematice, iar structura reală este o structură cu noduri fixe.

Alegând o rigiditate practică de comparație  $i_0 = \frac{EI}{6}$ , pentru barele sistemului de bază se obține:

$$i_{12} = \frac{3EI}{9} = 2i_0; \quad i_{13} = \frac{EI}{6} = i_0; \quad i_{14} = \frac{2EI}{6} = 2i_0$$

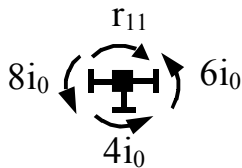
Încărcând sistemul de bază cu rotirea  $Z_1=1$  rezultă diagrama  $m_1$ , iar încărcând cu forțele exterioare rezultă diagrama  $M_p^0$ . Momentele de încastrare perfectă, produse de forțe sunt:

$$M_{12} = -M_{21} = \frac{PL}{8} = \frac{40 \cdot 9}{8} = 45 \text{ kNm}; \quad M_{14} = \frac{pL^2}{8} = \frac{20 \cdot 6^2}{8} = 90 \text{ kNm}$$

Ecuția de condiție are forma

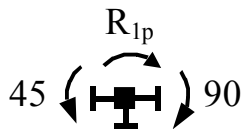
$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

Calculul reacțiunii  $r_{11}$ . Se secționează barele din jurul nodului 1 din diagrama  $m_1$  și se scrie echilibrul momentelor



$$r_{11} - 6i_0 - 4i_0 - 8i_0 = 0; \quad r_{11} = 18i_0$$

Calcul reacțiunii  $R_{1p}$ . Se secționează barele din jurul nodului 1, în diagrama  $M_p^0$  și se scrie echilibrul momentelor



$$R_{1p} + 90 - 45 = 0; \quad R_{1p} = -45$$

Calculul necunoscutei

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{45}{18i_0} = \frac{2,5}{i_0}$$

Momentele încovoietoare finale se obțin prin suprapunerea efectelor:

$$M_p = M_p^0 + m_1Z_1$$

$$M_{12} = -45 - 8i_0 \cdot \frac{2,5}{i_0} = -65 \text{ kNm}; \quad M_{21} = +45 - 4i_0 \cdot \frac{2,5}{i_0} = +35 \text{ kNm}$$

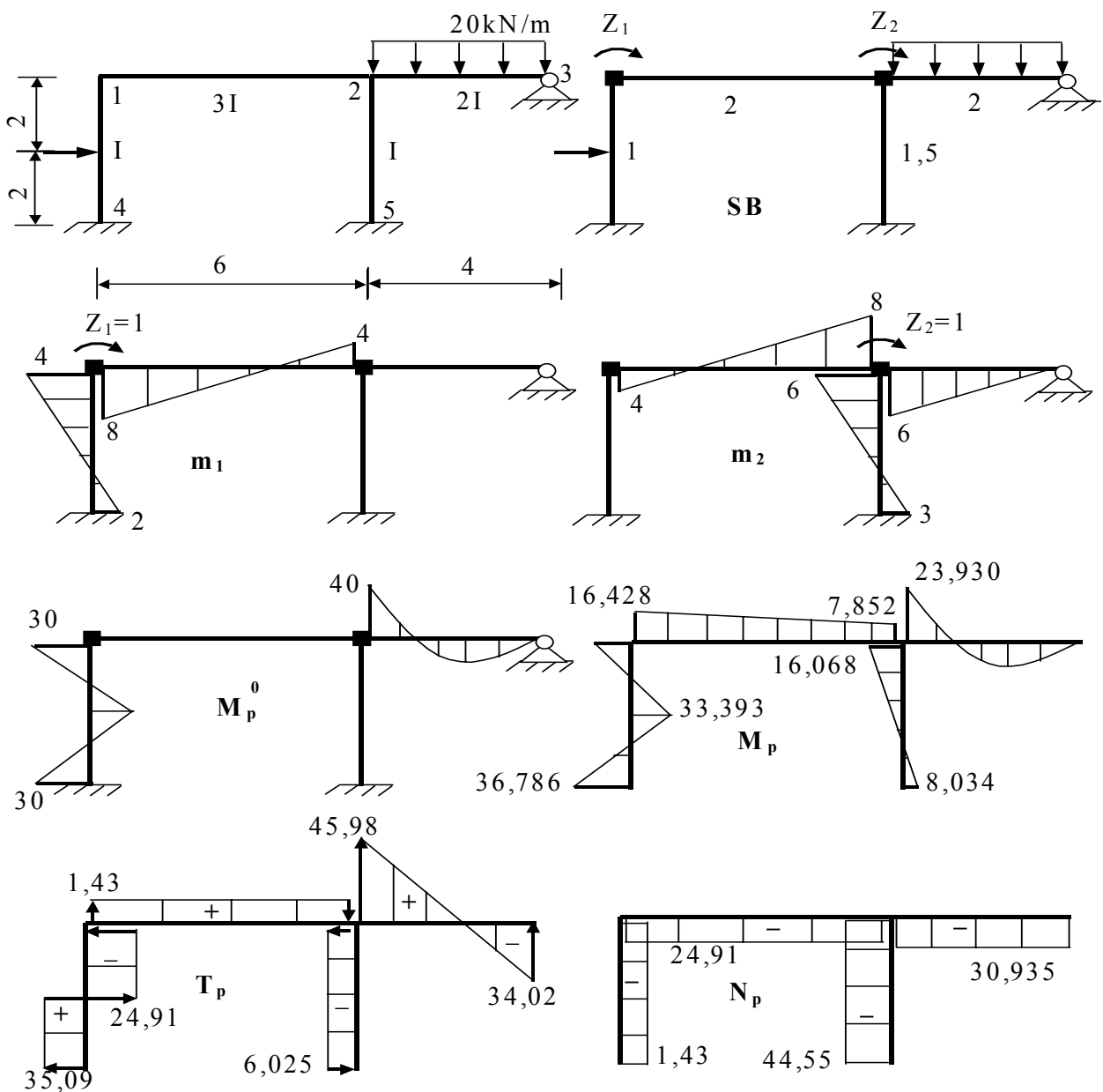
$$M_{13} = -4i_0 \cdot \frac{2,5}{i_0} = -10 \text{ kNm}; \quad M_{31} = -2i_0 \cdot \frac{2,5}{i_0} = -5 \text{ kNm}$$

$$M_{31} = +90 - 6i_0 \cdot \frac{2,5}{i_0} = 75 \text{ kNm}$$

Observații:

- coeficienții necunoscutelor depind numai de caracteristicile structurii și nu depind de încărcare,
- se constată că expresiile cu care au fost determinate momentele încovoietoare sunt expresiile (XII.3),
- momentele încovoietoare - în cazul încărcării structurii cu forțe - nu depind de rigiditatea practică de comparație, care este aleasă arbitrar. Ca urmare în celelalte aplicații se va considera  $i_0 = 1$
- forțele tăietoare și forțele axiale se calculează după metodologia utilizată la metoda eforturilor.

**Problema 12.2 (fig.12.2)**



- Fig.12.2 -

Calculul rigidităților practice ale barelor. Se consideră  $i_0 = \frac{EI}{4} = 1$

$$i_{12} = \frac{3EI}{6} = 2; \quad i_{14} = \frac{EI}{4} = 1; \quad i_{23} = \frac{2EI}{4} = 2; \quad i_{25} = \frac{1,5EI}{4} = 1,5$$

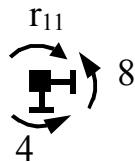
Momentele de încastrare perfectă, produse de forțe sunt:

$$\mathbf{M}_{14} = -\mathbf{M}_{41} = \frac{PL}{8} = \frac{60 \cdot 4}{8} = 30 \text{ kNm}; \quad \mathbf{M}_{23} = \frac{pL^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40 \text{ kNm}$$

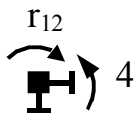
Ecuțiile de condiție sunt

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi



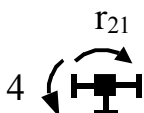
$$r_{11} - 8 - 4 = 0; \quad r_{11} = 12$$



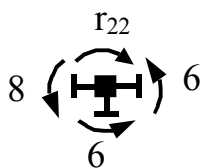
$$r_{12} - 4 = 0; \quad r_{12} = 4$$



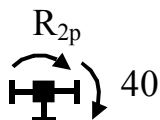
$$R_{1p} - 45 = 0; \quad R_{1p} = 30$$



$$r_{21} - 4 = 0; \quad r_{21} = 4$$



$$r_{22} - 6 - 6 - 8 = 0; \quad r_{22} = 20$$



$$R_{2p} + 40 = 0; \quad R_{2p} = -40$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 12Z_1 + 4Z_2 + 30 = 0 \\ 4Z_1 + 20Z_2 - 40 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = -3,393$  și  $Z_2 = -2,678$

Momentele încovoietoare finale calculate cu relația

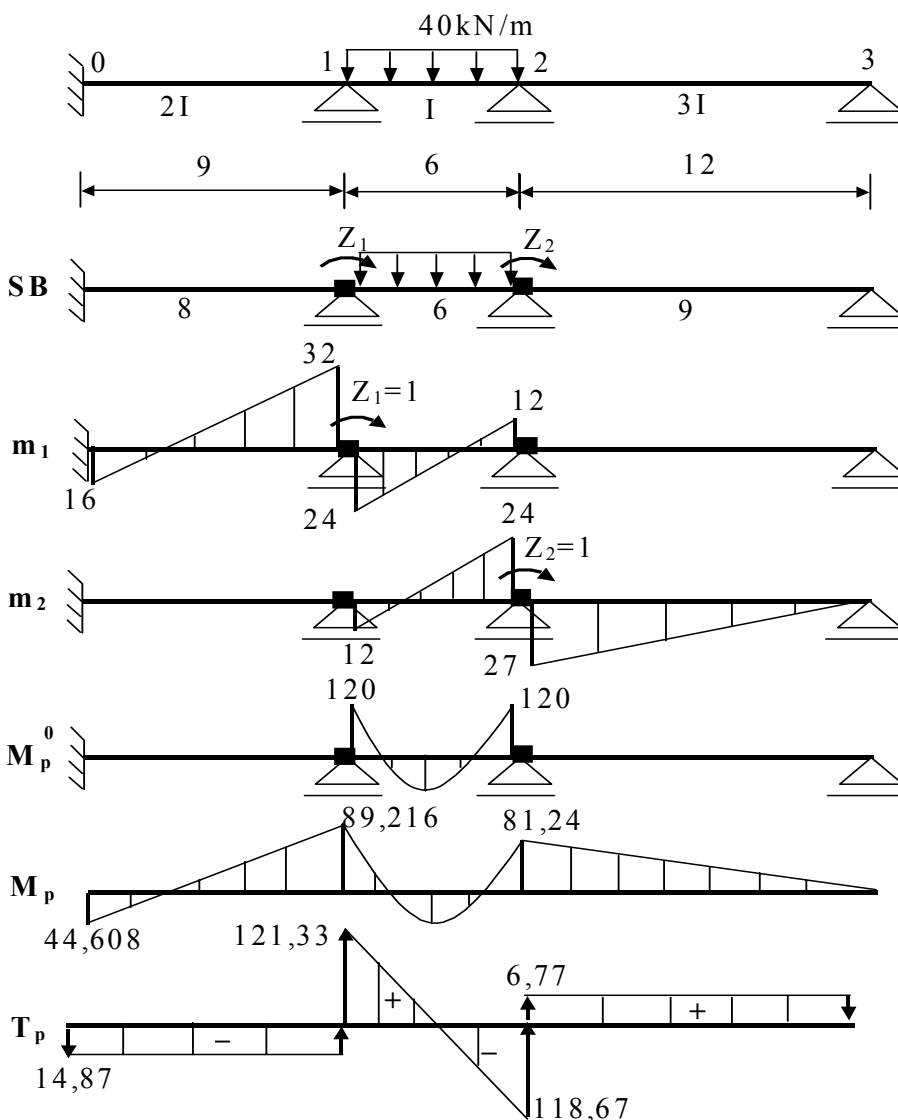
$$M_p = M_p^0 + m_1 Z_1$$



sunt date direct diagrama din figura 12.2. În aceeași figură! Sunt prezentate și diagramele de forță tăietoare și de forță axială.

Observație: În metoda deplasărilor verificarea eficiență a rezultatelor calculelor, este satisfacerea condiției de echilibru static.

**Problema 12.3 (fig.12.3)**



Calculul rigidităților practice ale barelor,

pentru  $i_0 = \frac{EI}{36} = 1$

$$i_{01} = \frac{2EI}{9} = 8$$

$$i_{12} = \frac{EI}{6} = 6$$

$$i_{23} = \frac{3EI}{12} = 9$$

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 56Z_1 + 12Z_2 - 120 = 0 \\ 12Z_1 + 51Z_2 + 120 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele

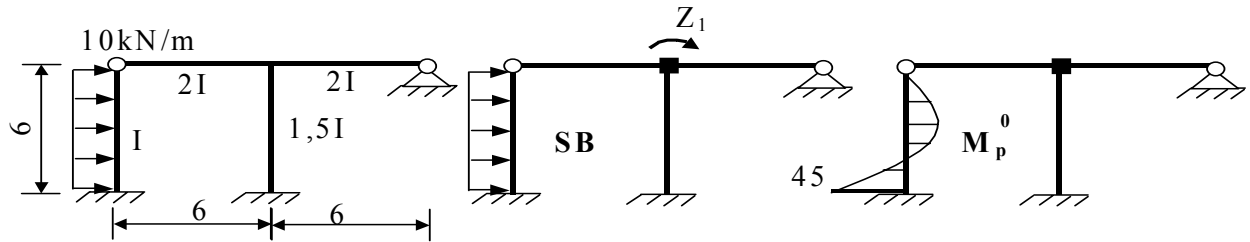
$$Z_1 = 2,788$$

$$Z_2 = -3,009$$

Diagramele de eforturi sunt date în figura 12.3.

- Fig.12.3 -

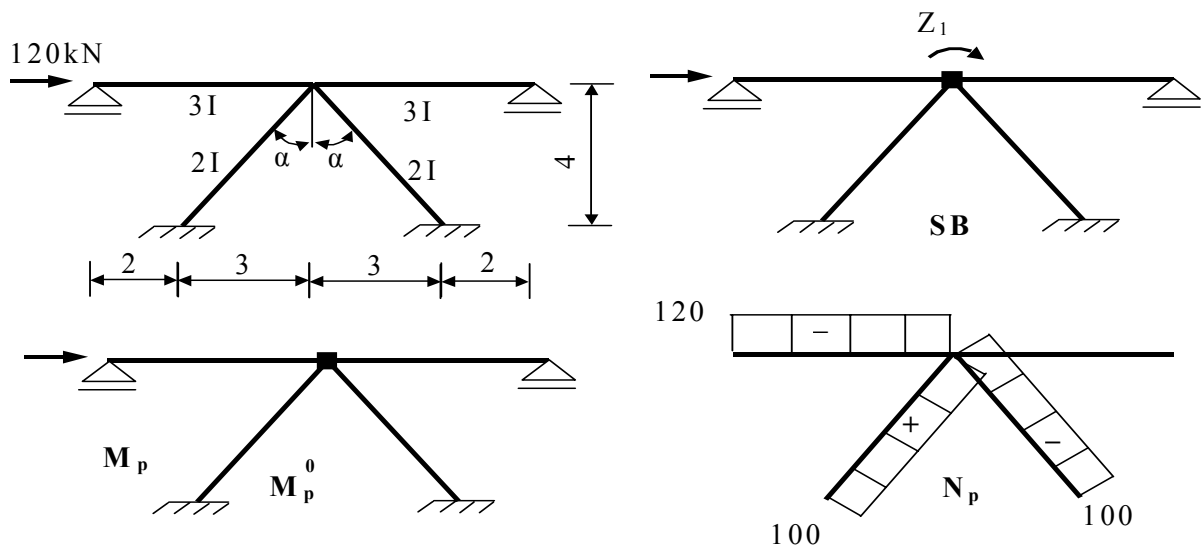
**Problema 12.4 (fig.12.4)**



- Fig.12.4 -

Structura cu această încărcare reprezintă un caz particular. Deoarece în diagrama  $M_p^0$  nu există momente pe barele ce formează nodul rigid rezultă că în ecuația de condiție  $r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$ , termenul liber  $R_{1p} = 0$  și deci  $Z_1 = 0$ . În consecință diagrama  $M_p^0$  reprezintă diagrama finală  $M_p$ .

**Problema 12.5 (fig.12.5)**



- Fig.12.5 -

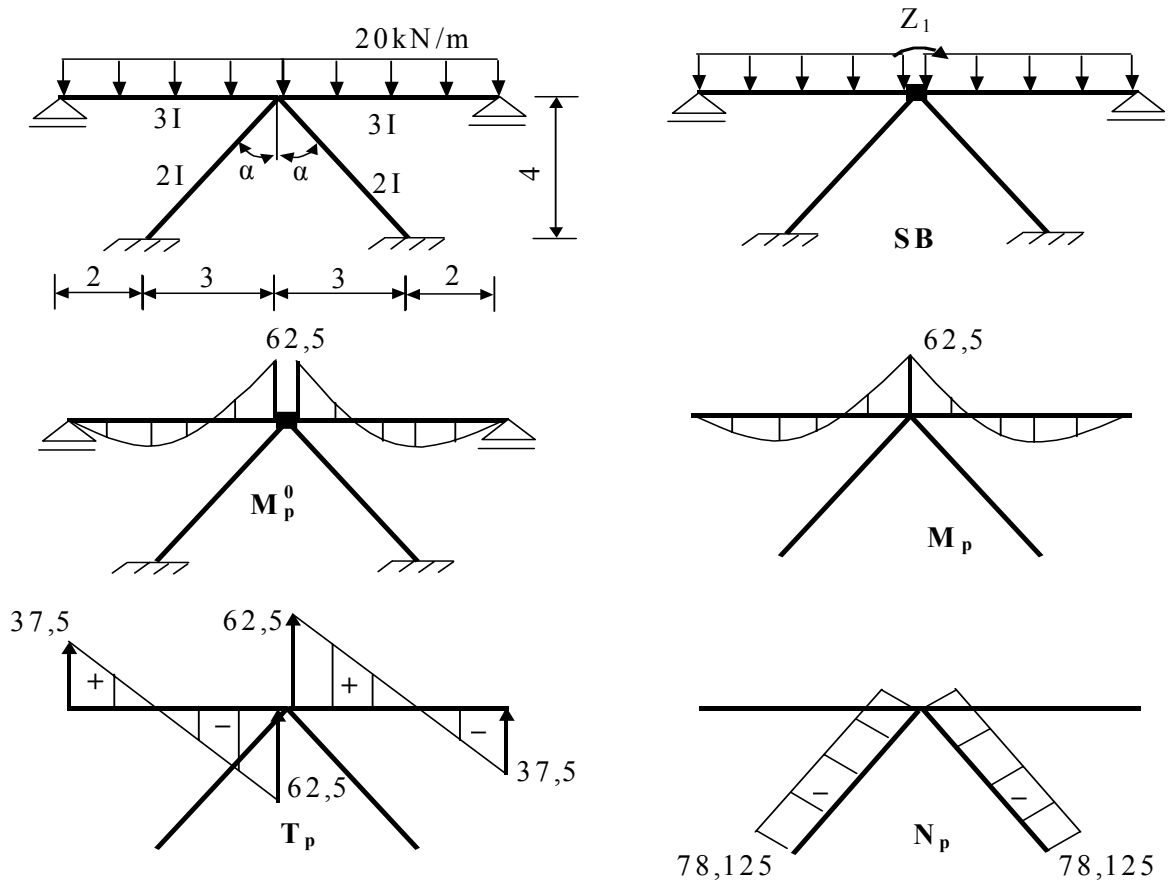
Structura prezintă o singură necunoscută. Deoarece forța exterioară este orizontală, iar direcția ei trece prin nodul rigid, nu produce momente încovoietoare pe sistemul de bază, deci  $M_p^0 \equiv 0$  și în consecință  $Z_1 = 0$  și  $M_p^0 = M_p \equiv 0$

În structură apar numai eforturi axiale. Eforturile din stâlpii înclinați se determină scriind echilibrul nodului sub acțiunea forțelor.

$$\sum X_i = 0; \quad -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0; \quad N_1 = N_2$$

$$\sum Y_i = 0; \quad 120 - N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0; \quad N_1 = N_2 = \frac{120}{2 \sin \alpha} = 100 \text{ kN}$$

**Problema 12.6 (fig.12.6)**



- Fig.12.6 -

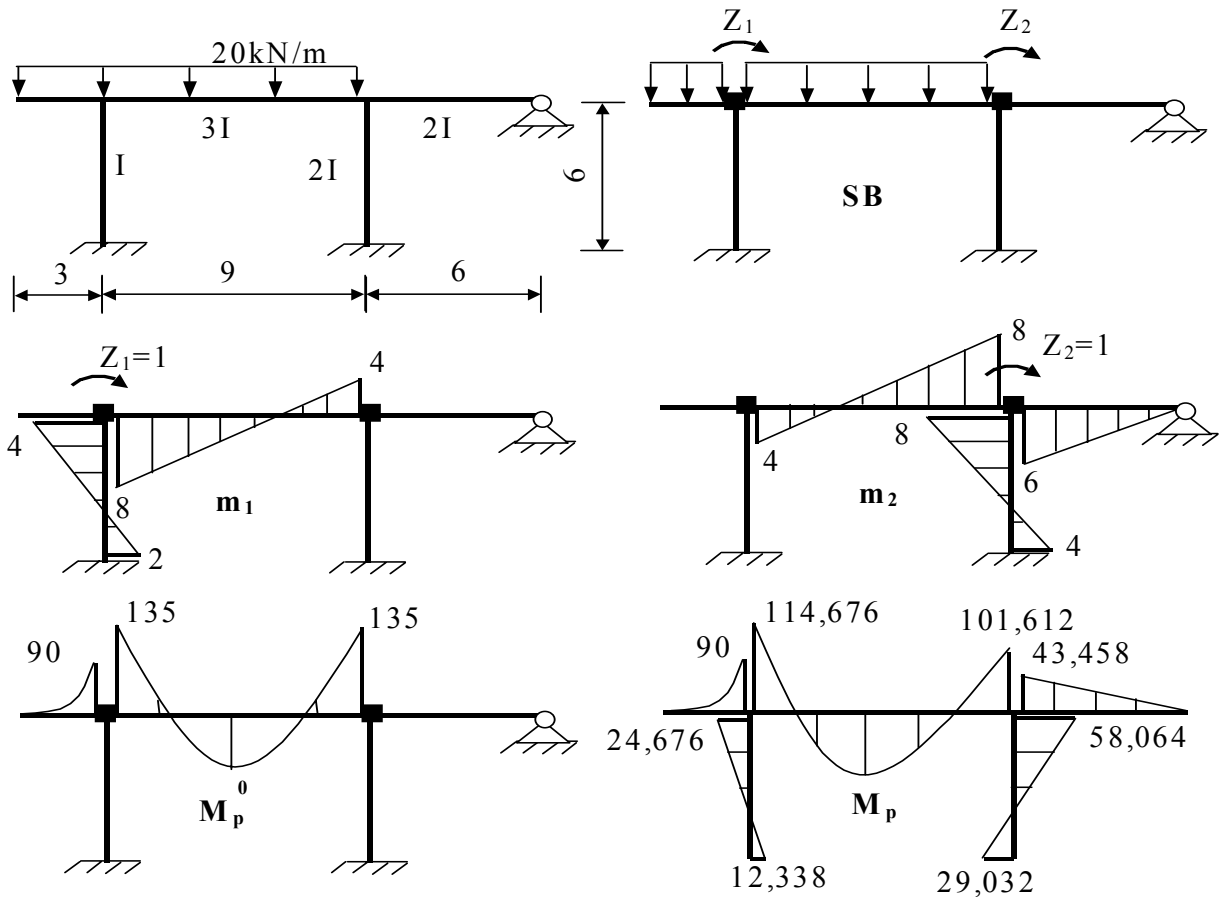
Aceași structură de la aplicația precedentă. În acest caz diagrama  $M_p^0$  este diferită de zero, momentele de încastrare perfectă pe cele două rigle au aceeași valoare. În consecință  $R_{1p} = 0$  și ca urmare  $Z_1 = 0$  și  $M_p \equiv M_p^0$

Eforturile axiale în stâlpii înclinați au fost calculate scriind, ca și în cazul precedent, echilibrul nodului sub acțiunea forțelor

$$\begin{aligned} \sum X_i = 0; & \quad N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0; & \quad N_1 = N_2 \\ \sum Y_i = 0; & \quad N_2 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - 2 \cdot 62,5 = 0; & \quad N_1 = N_2 = 78,125 \text{ kN} \end{aligned}$$

Diagramele de forturi sunt date în figura 12.6

**Problema 12.7 (fig.12.7)**



- Fig.12.7 -

Structura are o consolă. În situația încărcării sistemului de bază cu rotirea  $Z_1 = 1$ , consola, având un capăt liber, se rotește ca un solid rigid, fără să se deformeze și în consecință nu apar eforturi pe consolă.

În schimb, în cazul încărcării cu forțe, pe consolă apare diagrama de moment încovoietor, moment ce intervine în calculul reacțiunii  $R_{1p}$  din blocajul de nod.

Se consideră  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

Ecuțiile de condiție

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Coefficienții necunoscutelor și termenilor liberi sunt:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 12; & r_{12} &= 4; & R_{1p} &= -45 \\ r_{21} &= 4; & r_{22} &= 22; & R_{2p} &= 135 \end{aligned}$$

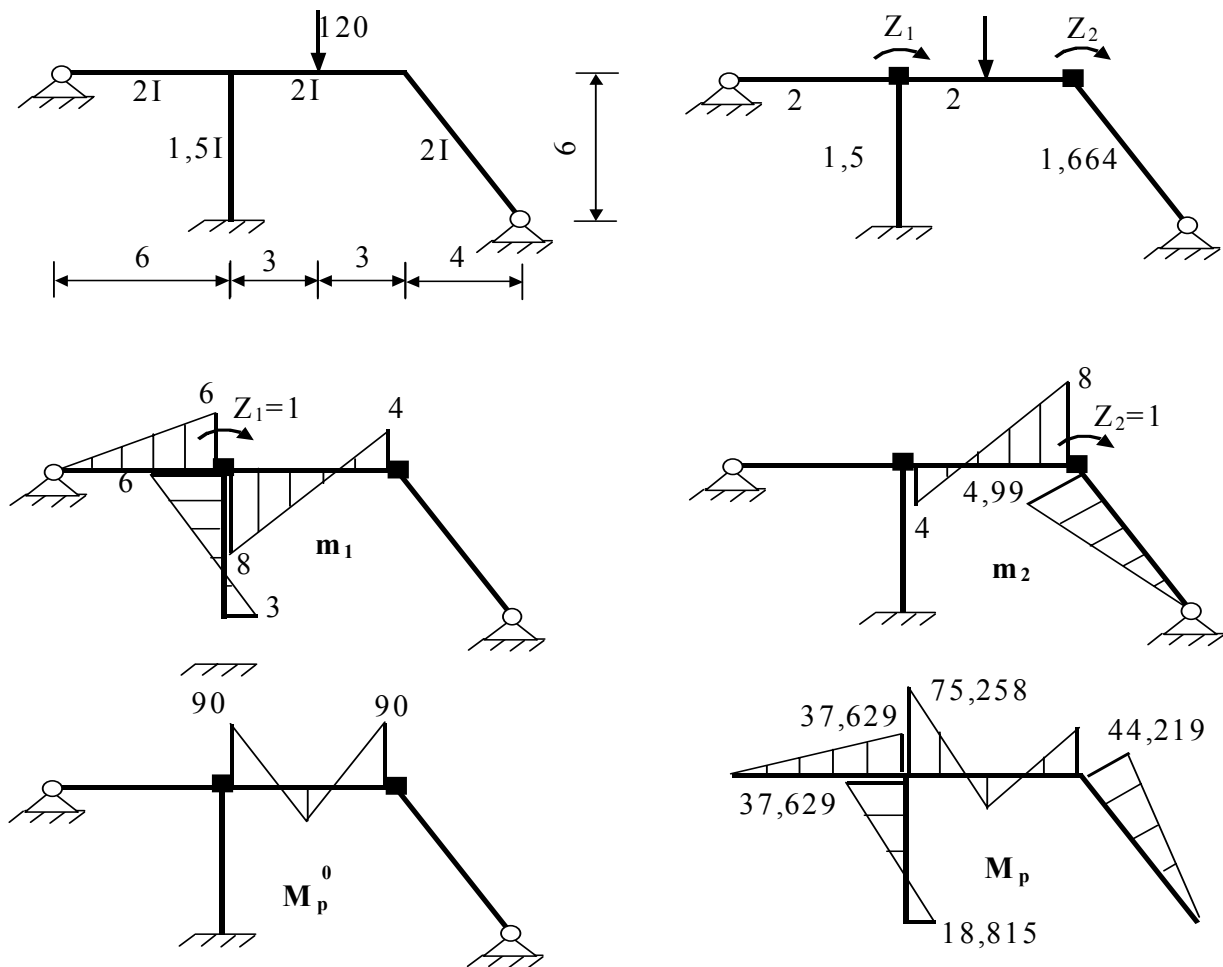
Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 12Z_1 + 4Z_2 - 45 = 0 \\ 4Z_1 + 22Z_2 + 135 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = 6,169$  și  $Z_2 = -7,258$

Diagrama de moment încovoietor este dată în figura 12.7.

**Problema 12.8 (fig.12.8)**



- Fig.12.8 -

Se consideră  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 20Z_1 + 4Z_2 - 90 = 0 \\ 4Z_1 + 12,992Z_2 + 90 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = 6,272$  și  $Z_2 = -8,858$

Momentele încovoietoare finale sunt date în figura 12.8.

B. STRUCTURI CU NODURI DEPLASABILE. Structurile cu noduri deplasabile se împart în două categorii, în funcție de caracteristicile ce intervin în calculul lor. Aceste două categorii sunt:

Structuri cu noduri deplasabile având stâlpii verticali și rigle orizontale;

Structuri cu noduri deplasabile având stâlpi înclinați sau rigle în două pante.

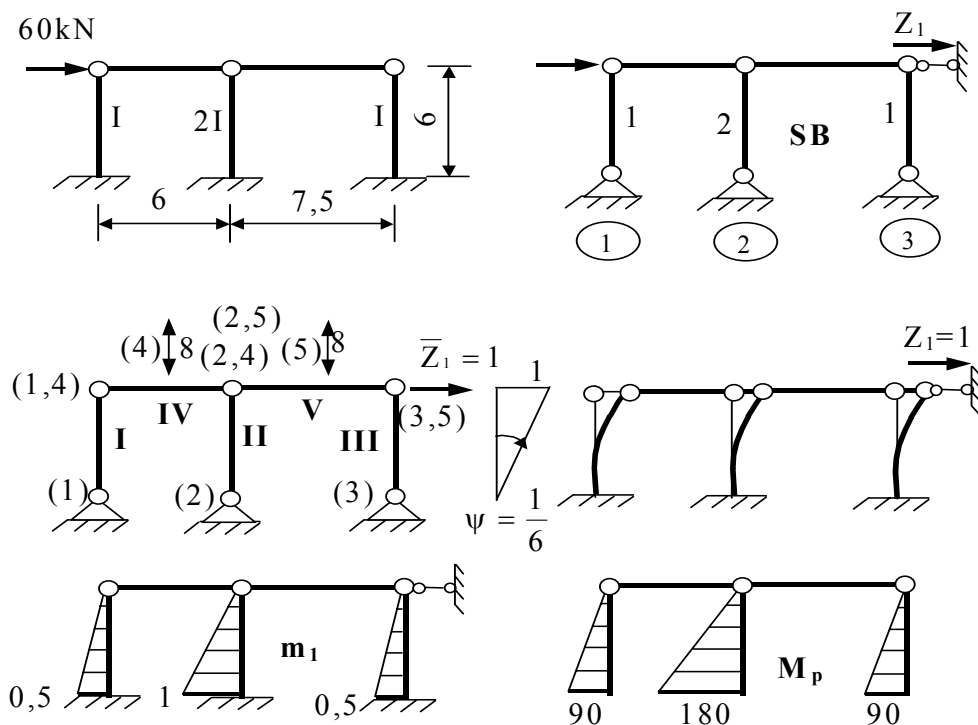
La structurile cu stâlpi verticali și rigle orizontale în cazul încărcării sistemului de bază cu o translație pe direcția unui grad de libertate, riglele se translatează (nu se deformează), iar stâlpii se rotesc deformându-se. În consecință există numai diagramă de deplasări pe orizontală.

Calculul reacțiunii din legătura de grad de libertate se poate efectua exprimând condiția de echilibru static fie printr-o ecuație de proiecție pe orizontală, fie utilizând principiul lucrului mecanic virtual.

La structurile cu stâlpi înclinați sau cu rigle în două ape prin încărcarea sistemului de bază cu o translație pe direcția unui grad de libertate se deformează atât stâlpii cât și unele rigle – funcție de conformația structurii. În consecință există diagramă de deplasări atât pe orizontală cât și pe verticală. Calculul reacțiunii din legătura de grad de libertate se realizează utilizând numai principiul lucrului mecanic virtual.

Să se traseze diagramele de eforturi la următoarele structuri cu noduri deplasabile.

**Problema 12.9 (fig.12.9)**



- Fig.12.9 -

Structura are un singur grad de libertate. Deoarece nodurile sunt articulate problema comportă o singură necunoscută.

Ecuția de condiție este

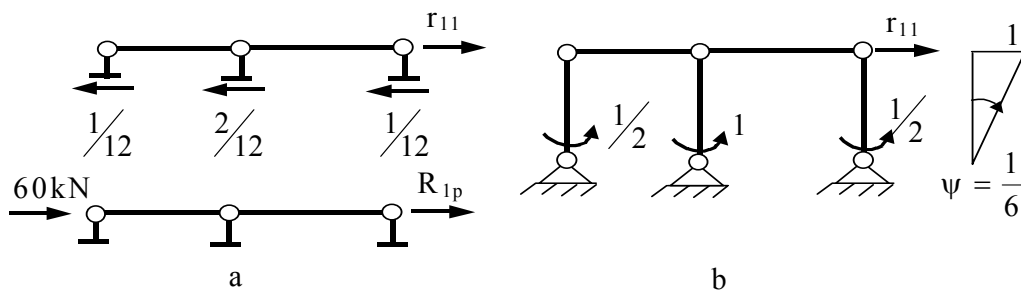
$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

Pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$  rezultă  $i_1=1, i_2=2, i_3=1$ .

Din încărcarea structurii auxiliare cu deplasarea virtuală  $\bar{Z}_1 = 1$  se constată că centrele absolute ale riglelor sunt la infinit, pe verticală, deci se translatează. Stâlpii se rotesc. Există numai diagramă de deplasări pe orizontală. Forma deformată a sistemului de bază permite determinarea fibrei deformație a stâlpilor, pentru reprezentarea diagramei de momente încovoietoare  $m_1$ , momente calculate cu expresia  $3i\psi$ .

Deoarece forța de 60kN este aplicată în nod, în sistemul de bază nu există diagramă de momente încovoietoare  $M_p^0 \equiv 0$ .

Calculul coeficientului necunoscutei și termenului liber utilizând ecuația de proiecție pe orizontală (fig.12.10,a).



- Fig.12.10 -

Reacțiunea  $r_{11}$ . Se secționează stâlpii în vecinătatea nodurilor – în sistemul de bază – și se pun în evidență forțele tăietoare. Forțele axiale – când există – având direcția axei stâlpilor nu intervin în ecuația de proiecție.

$$\sum X_i = 0; \quad r_{11} - \frac{1}{12} - \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = 0; \quad r_{11} = \frac{1}{3}$$

Reacțiunea  $R_{1p}$ .

$$\sum X_i = 0; \quad R_{1p} + 60 = 0; \quad R_{1p} = -60$$

Ecuția de condiție

$$\frac{1}{3}Z_1 - 60 = 0; \quad Z_1 = 180$$

Diagrama finală de momente încovoietoare a fost calculată cu relația

$$M_p = M_p^0 + m_1 Z_1$$

Calculul coeficientului necunoscutei și termenului liber utilizând principiul lucrului mecanic virtual (fig.12.10,b).

Se încarcă structura auxiliară cu reacțiunea ce urmează a fi calculată și cu momentele încovoietoare din diagrama  $m_1$ , reprezentate pe bară. Imprimând deplasarea virtuală  $\bar{Z}_1 = 1$  și exprimând condiția de echilibru static,  $\delta L = 0$ , se obține:

$$r_{11} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6} = 0; \quad r_{11} = \frac{1}{3}$$

Pentru calculul termenului liber se procedează în mod asemănător:

$$R_{1p} \cdot 1 + 60 \cdot 1 = 0; \quad R_{1p} = -60$$

Observație: În cazul acestui tip de structură – având nodurile articulate, stâlpii de lungime egală și forța aplicată în nod – momentele încovoietoare reale se pot calcula cu o relație de forma (vezi aplicația 9.9):

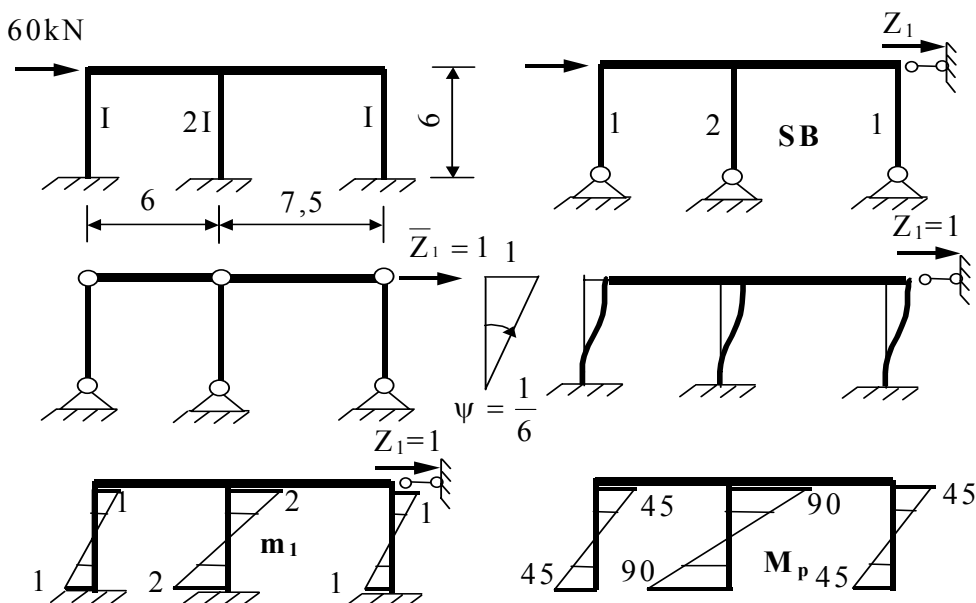
$$M_1 = M_H \cdot \frac{i_1}{\sum i_s} = 360 \cdot \frac{1}{4} = 90 \text{ kNm}$$

$$M_2 = M_H \cdot \frac{i_2}{\sum i_s} = 360 \cdot \frac{2}{4} = 180 \text{ kNm}$$

$$M_3 = M_H \cdot \frac{i_3}{\sum i_s} = 360 \cdot \frac{1}{4} = 90 \text{ kNm}$$

Se constată că momentul forței orizontale, în raport cu secțiunea de încastrare a stâlpilor, moment notat  $M_H$  se distribuie stâlpilor proporțional cu rigiditatea practică a acestora.

**Problema 12.10 (fig.12.11)**



- Fig.12.11 -



Se consideră structura de la aplicația precedentă având nodurile rigide și riglele infinit rigide, comparativ cu rigiditatea stâlpilor

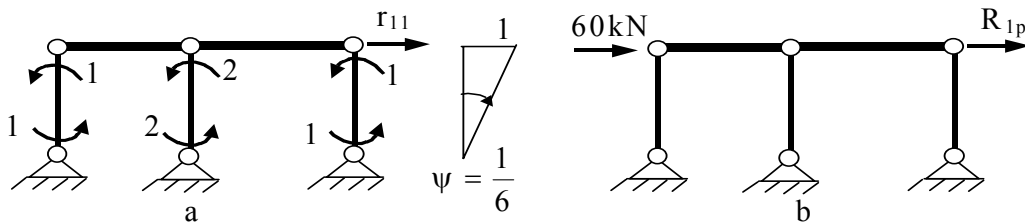
Ecuția de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

Momentele încovoietoare din diagrama  $m_1$ , se calculează cu expresia  $6i\psi$ .

Reacțiunea  $r_{11}$  (fig.12.12,a)  $\delta L = 0$

$$r_{11} \cdot 1 - (1+1) \cdot \frac{1}{6} - (2+2) \cdot \frac{1}{6} - (1+1) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{11} = \frac{4}{3}$$



- Fig.12.12 -

Reacțiunea  $R_{1p}$  (fig.12.12,b)

$$R_{1p} \cdot 1 + 60 \cdot 1 = 0; \quad R_{1p} = -60$$

Ecuția de condiție

$$\frac{1}{3}Z_1 - 60 = 0; \quad Z_1 = 180$$

Diagrama  $M_p$  a fost reprezentată în figura 12.12.

Observație: Se constată că momentul forței orizontale  $M_H$  se distribuie stâlpilor după regula

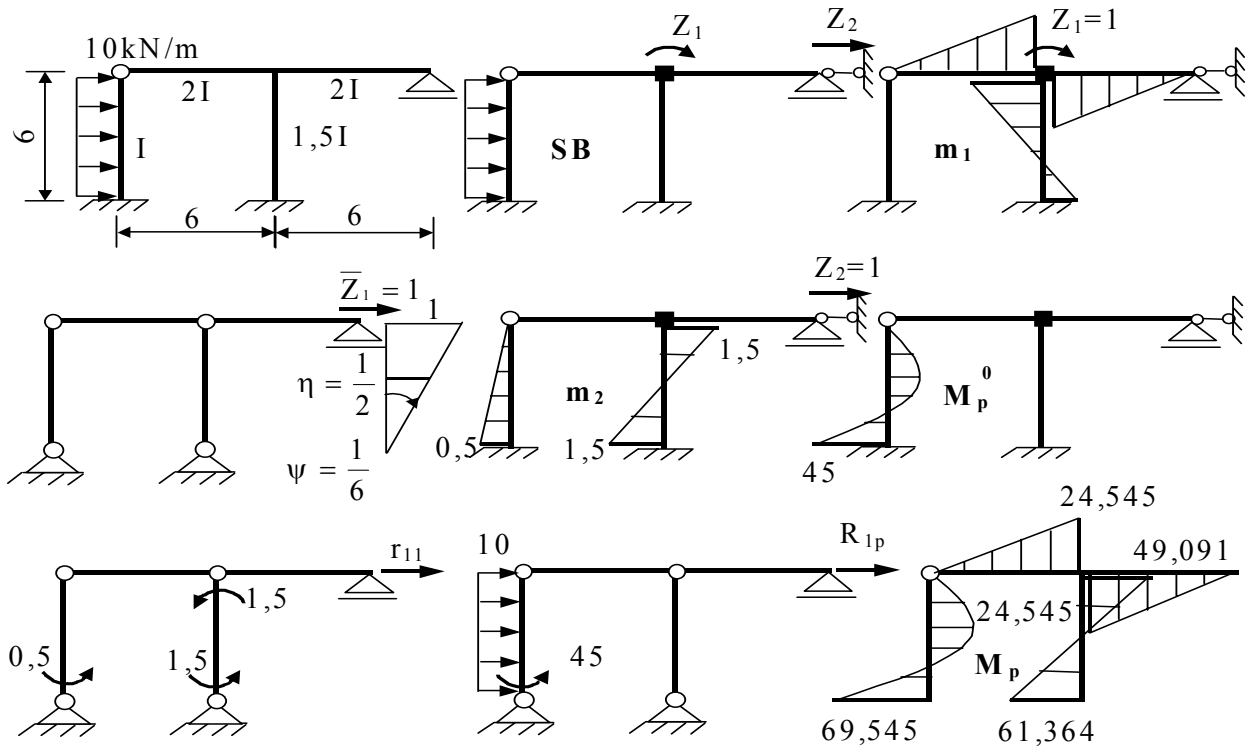
$$M_1 = M_H \cdot \frac{i_1}{2\sum i_s} = 360 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} = 45 \text{ kNm}$$

$$M_2 = M_H \cdot \frac{i_2}{2\sum i_s} = 360 \cdot \frac{2}{2 \cdot 4} = 90 \text{ kNm}$$

$$M_3 = M_H \cdot \frac{i_3}{2\sum i_s} = 360 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} = 45 \text{ kNm}$$

Structurile cu noduri rigide lucrează mai favorabil decât cele cu noduri articulate la astfel de încărcări.

**Problema 12.11 (fig.12.13)**



- Fig.12.13 -

Structura este cu noduri deplasabile având un grad de libertate.

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Momentele încovoietoare din diagramele  $m_1$  și  $m_2$  au fost calculate pentru

$$i_0 = \frac{EI}{6} = 1$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$r_{11} = 18; \quad r_{12} = -1,5; \quad R_{1p} = 0; \quad r_{21} = r_{12} = -1,5$$

$$\delta L = 0 \quad r_{22} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} - (1,5 + 1,5) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{22} = \frac{7}{12}$$

$$\delta L = 0 \quad R_{2p} \cdot 1 + 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - 45 \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad R_{2p} = -22,5$$

Sistemul de ecuații este:

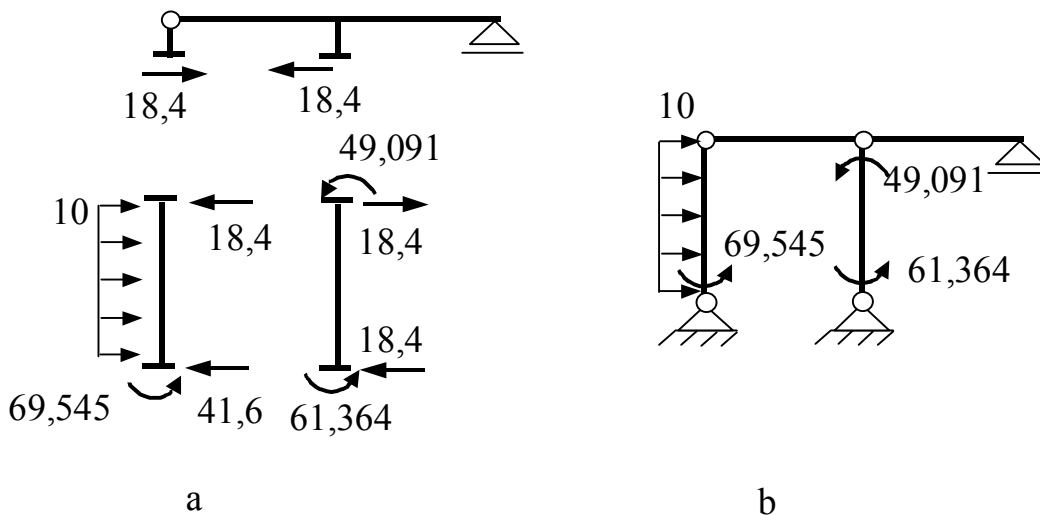
$$\begin{cases} 18Z_1 - 1,5Z_2 = 0 \\ -1,5Z_1 + \frac{7}{12}Z_2 - 22,5 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = 4,091$  și  $Z_2 = 49,091$

Diagrama  $M_p$  este dată în figura 12.13.

Observații: Structura a fost calculată la aplicația 12.3 ca structura cu noduri fixe. A se observa diferența între cele două distribuții de eforturi.

Verificarea rezultatelor se poate efectua scriind echilibrul static al structurii reale – fie echilibrul forțelor pe orizontală (fig.12.14,a), fie utilizând principiul lucrului mecanic virtual (fig.12.14,b)



- Fig. 12.14 -

$$\sum X_i = 0; \quad 18,4 - 18,4 = 0$$

$$\delta L = 0; \quad 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - 69,545 \cdot \frac{1}{6} - (49,091 + 61,364) \cdot \frac{1}{6} = 0;$$

### Problema 12.12 (fig.12.15)

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

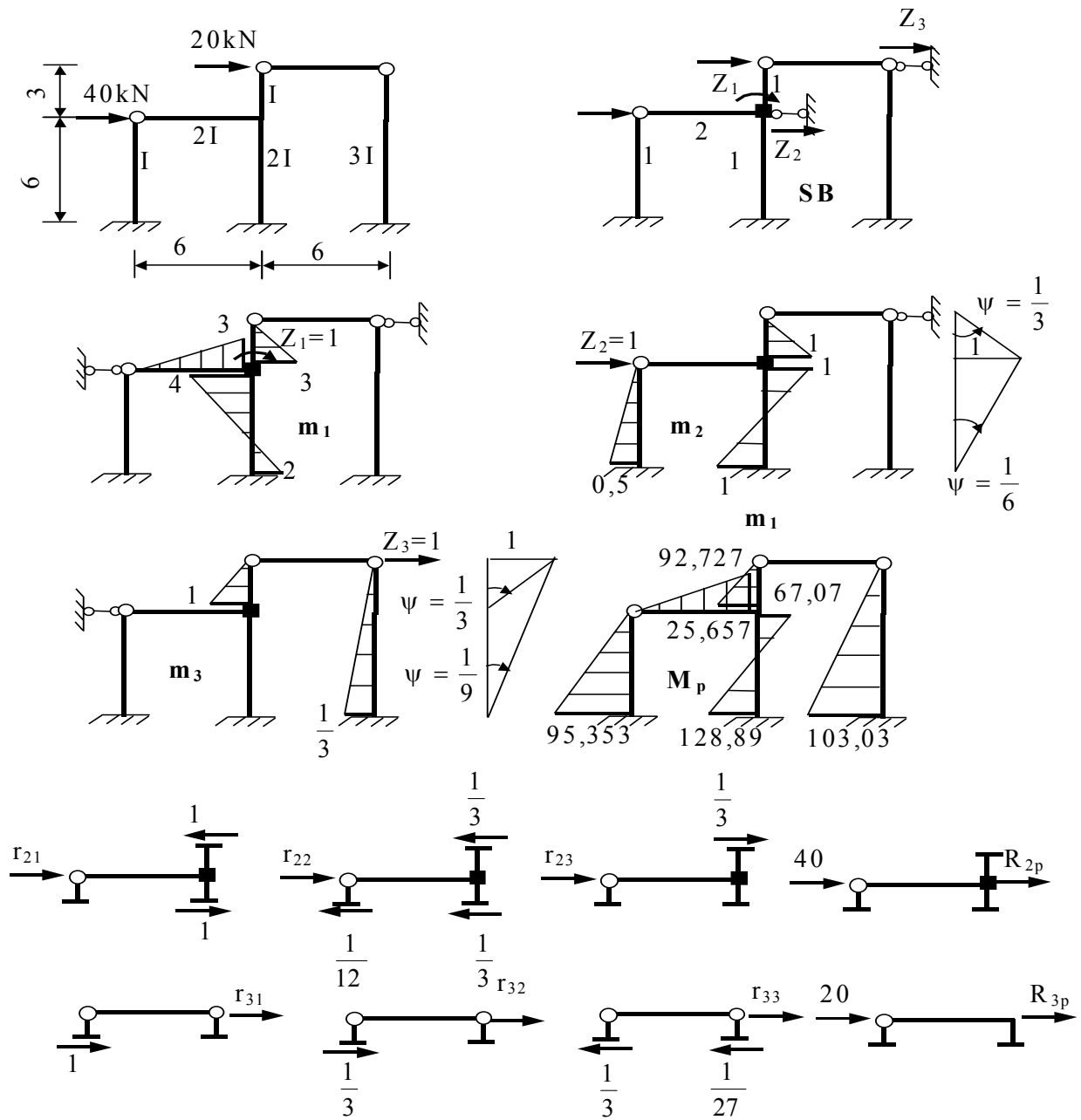
Rigiditățile practice ale barelor au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{3} = 1$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$r_{11} = 10; \quad r_{12} = 0; \quad r_{13} = -1; \quad R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} = 0; \quad r_{22} = \frac{3}{4}; \quad r_{23} = -\frac{1}{3}; \quad R_{2p} = -40$$

$$r_{31} = -1; \quad r_{32} = -\frac{1}{3}; \quad r_{33} = \frac{1}{2,7}; \quad R_{3p} = -20;$$



- Fig.12.15 -

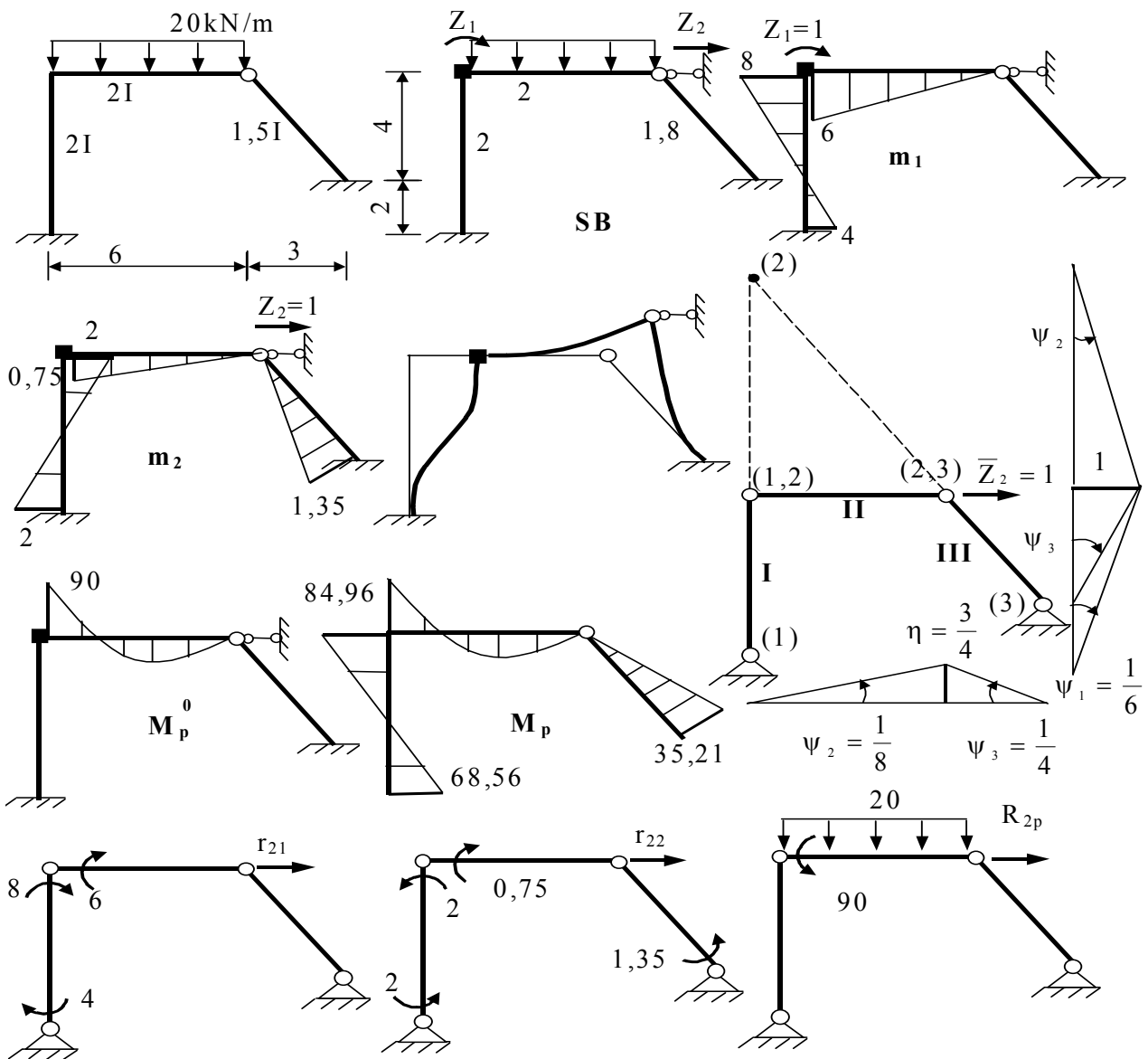
Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 10Z_1 - Z_3 = 0 \\ \frac{3}{4}Z_2 - \frac{1}{3}Z_3 - 40 = 0 \\ -Z_1 - \frac{1}{3}Z_2 + \frac{1}{2,7}Z_3 - 20 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile următoare  $Z_1 = 30,909$ ;  $Z_2 = 190,707$ ;  $Z_3 = 309,091$

Diagrama finală de momente încovoietoare este dată în figura 12.15.

**Problema 12.13 (fig.12.16)**



- Fig.12.16 -

Rigiditățile practice au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$r_{11} = 14; \quad r_{12} = -1,25; \quad R_{1p} = -90;$$

$$r_{21} \cdot 1 + (8 + 4) \cdot \frac{1}{6} - 6 \cdot \frac{1}{8} = 0; \quad r_{21} = -1,25$$

$$r_{22} \cdot 1 - (2 + 2) \cdot \frac{1}{6} - 0,75 \cdot \frac{1}{8} - 1,35 \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{22} = 1,0975$$

$$R_{2p} \cdot 1 - 20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 90 \cdot \frac{1}{8} = 0; \quad R_{2p} = 33,75$$

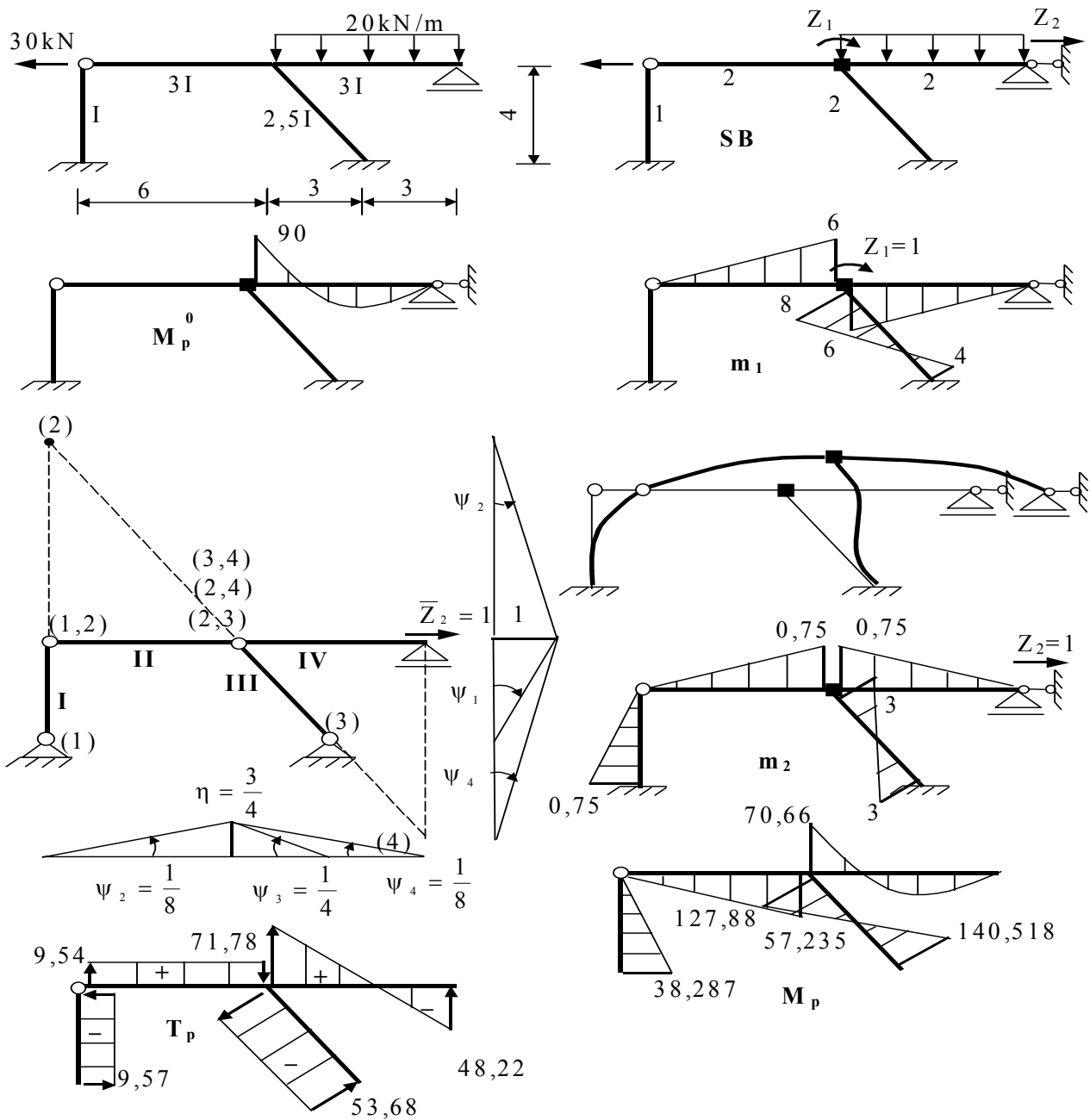
Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 14Z_1 - 1,25Z_2 - 90 = 0 \\ -1,25Z_1 + 1,0975Z_2 + 33,75 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = 4,10$  și  $Z_2 = -26,082$

Diagrama finală de momente încovoietoare este dată în figura 12.16.

**Problema 12.14 (fig.12.17)**



- Fig.12.17-

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Rigiditățile practice au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{4} = 1$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$r_{11} = 20; \quad r_{12} = -3; \quad R_{1p} = -90;$$

$$r_{21} \cdot 1 + (8 + 4) \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{8} = 0; \quad r_{21} = -3$$

$$r_{22} \cdot 1 - 0,75 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} - 0,75 \cdot \frac{1}{8} - 0,75 \cdot \frac{1}{8} = 0; \quad r_{22} = 1,875$$

$$R_{2p} \cdot 1 - 30 \cdot 1 - 90 \cdot \frac{1}{8} - 20 \cdot 6 \cdot \frac{3}{8} = 0; \quad R_{2p} = 86,25$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 20Z_1 - 3Z_2 - 90 = 0 \\ -3Z_1 + 1,875Z_2 + 86,25 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = 3,158$  și  $Z_2 = -51,05$

Diagramele de moment încovoiator și de forță tăietoare sunt date în figura 12.17.

### **Problema 12.15 (fig.12.18)**

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

Rigiditățile practice ale barelor au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

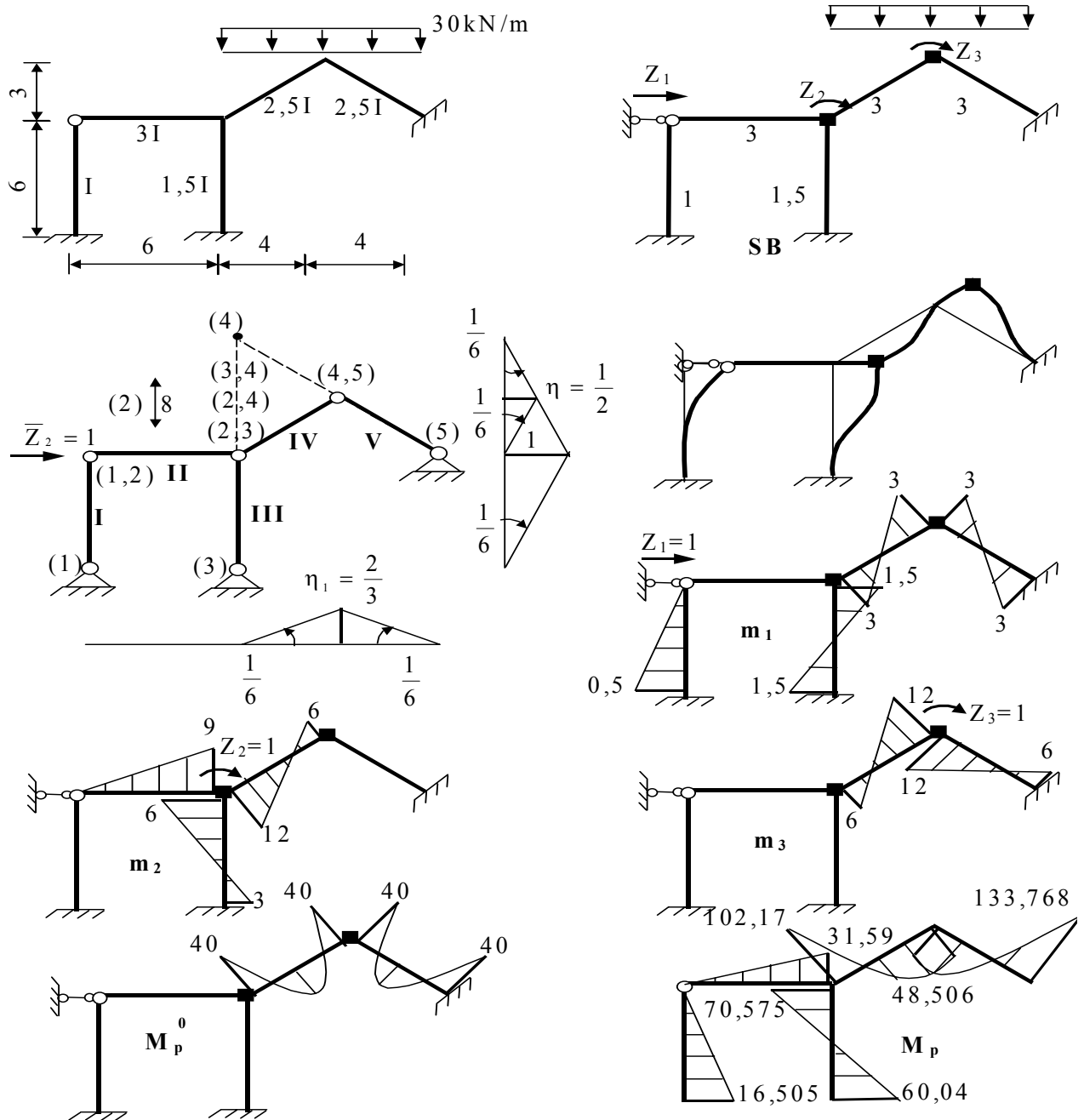
$$r_{11} \cdot 1 - 0,5 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{11} = 2,583$$

$$r_{12} \cdot 1 + (6 + 3) \cdot \frac{1}{6} - (12 + 6) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{12} = 1,5$$

$$r_{13} \cdot 1 - (12 + 6) \cdot \frac{1}{6} + (12 + 6) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{13} = 0$$

$$R_{1p} \cdot 1 - 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} - 30 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad R_{1p} = 80$$

$$\begin{aligned}
 r_{21} &= 1,5; & r_{22} &= 27; & r_{23} &= 6; & R_{2p} &= -40 \\
 r_{31} &= 0; & r_{32} &= 6; & r_{33} &= 24; & R_{3p} &= 0;
 \end{aligned}$$



- Fig. 12.18 -

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases}
 2,583Z_1 + 1,5Z_2 + 80 = 0 \\
 1,5Z_1 + 27Z_2 + 6Z_3 - 40 = 0 \\
 6Z_2 + 24Z_3 = 0
 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile următoare:  $Z_1 = -33,01$ ;  $Z_2 = 3,51$ ;  $Z_3 = -0,877$

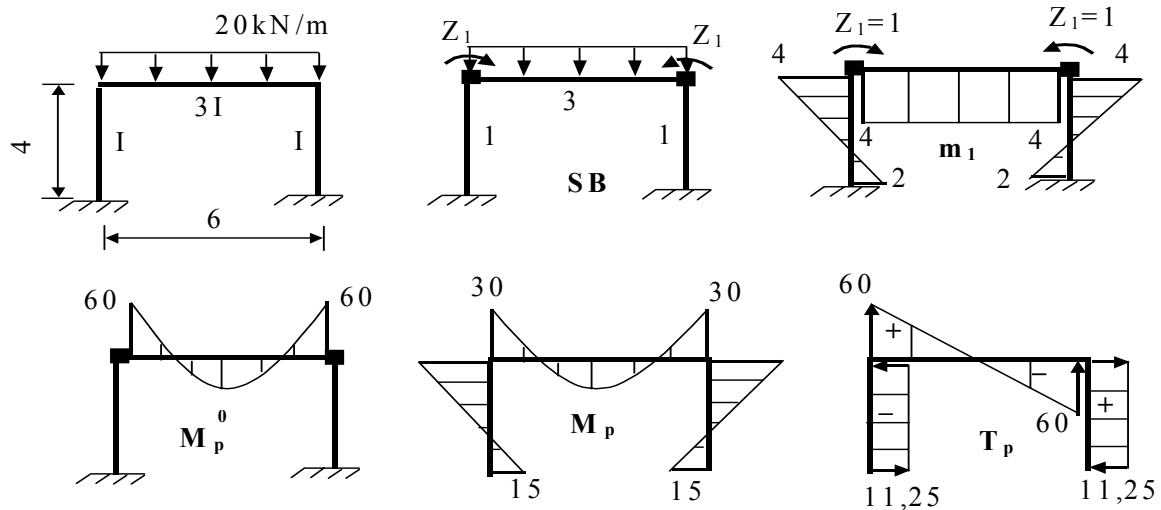
Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 12.18.



## C. STRUCTURI SIMETRICE

Să se traseze diagramele de eforturi la următoarele structuri simetrice

### Problema 12.16 (fig.12.19)



- Fig.12.19 -

Structura fiind simetrică și încărcată simetric va avea deformată simetrică. În consecință – deși este o structură cu noduri deplasabile – la încărcarea simetrică se comportă ca o structură cu noduri fixe. Rezultă o singură necunoscută grupată simetric. În diagrama  $m_1$ , pe riglă, momentul încovoietor este constant și egal cu 2i.

Ecuția de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

unde

$$r_{11} = 2 \cdot (4 + 4) = 16; \quad R_{1p} = 2 \cdot (-60) = -120$$

$$\text{Necunoscuta } Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{120}{16} = 7,5$$

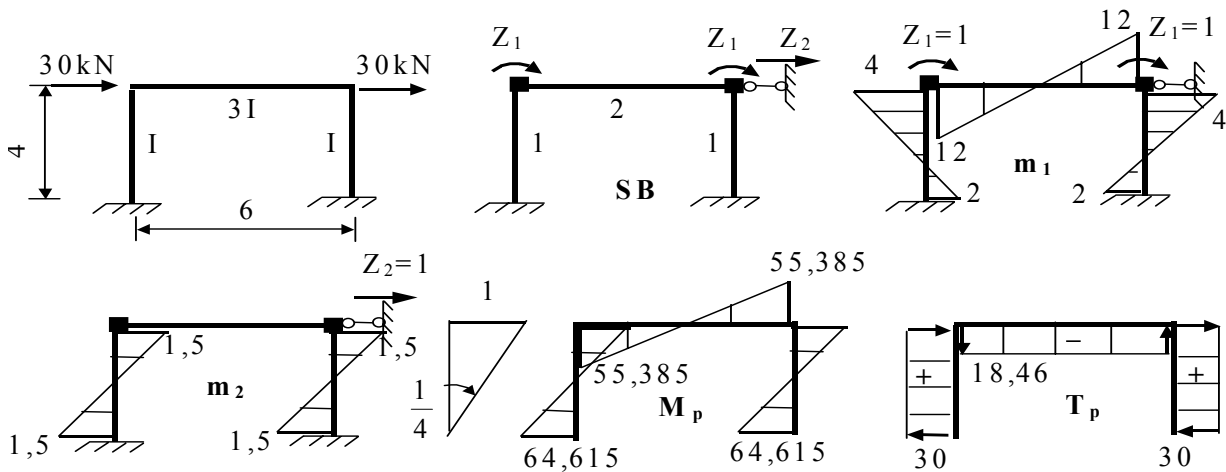
Diagramele finale de eforturi sunt date în figura 12.19.

### Problema 12.17 (fig.12.20)

Structura fiind simetrică și încărcată antisimetric va avea deformată antisimetrică. Rotirile nodurilor se grupează antisimetric. Din încărcarea cu aceste rotiri pe riglă apare o diagramă antisimetrică cu valorile 6i la extremități.

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$



- Fig.12.20 -

Coefficienților necunoscutelor și termenii liberi sunt

$$r_{11} = 2 \cdot (4 + 12) = 32; \quad r_{12} = 2 \cdot (-1,5) = -3; \quad R_{1p} = 0;$$

$$r_{21} \cdot 1 + (4 + 2) \cdot \frac{1}{4} + (4 + 2) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{21} = -3$$

$$r_{22} \cdot 1 - 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad r_{22} = 1,5$$

$$R_{2p} \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 30 \cdot 1 = 0; \quad R_{2p} = -60$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 32Z_1 - 3Z_2 = 0 \\ -3Z_1 + 1,5Z_2 - 60 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = 4,615$  și  $Z_2 = 49,23$

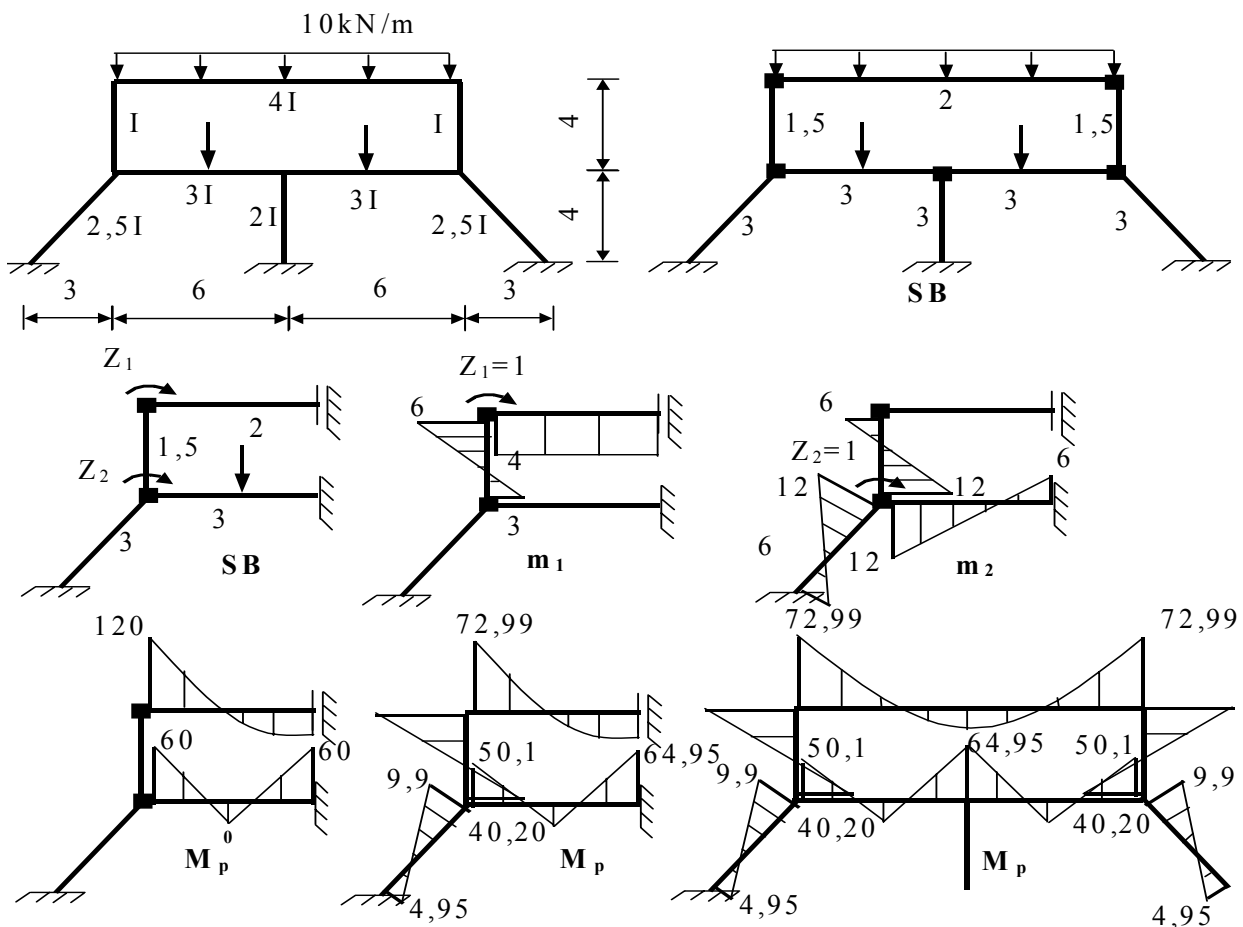
Diagramele de eforturi finale sunt date în figura 12.20.

### **Problema 12.18 (fig.12.21)**

Structura este simetrică și încărcată simetric. Deși are două grade de libertate, sub această încărcare se comportă ca o structură cu noduri fixe. Lucrând pe semistructură numărul de necunoscute se reduce la două rotații de nod.

Rigiditățile practice au fost calculate pentru structura întragă pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

De asemenea și momentele încovoietoare din diagrama  $M_p^0$



- Fig. 12.21 -

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Coefficienții necunoscutelor și termenii liberi sunt:

$$r_{11} = 10; \quad r_{12} = 3; \quad R_{1p} = -120;$$

$$r_{21} = 3; \quad r_{22} = 30; \quad R_{2p} = -60;$$

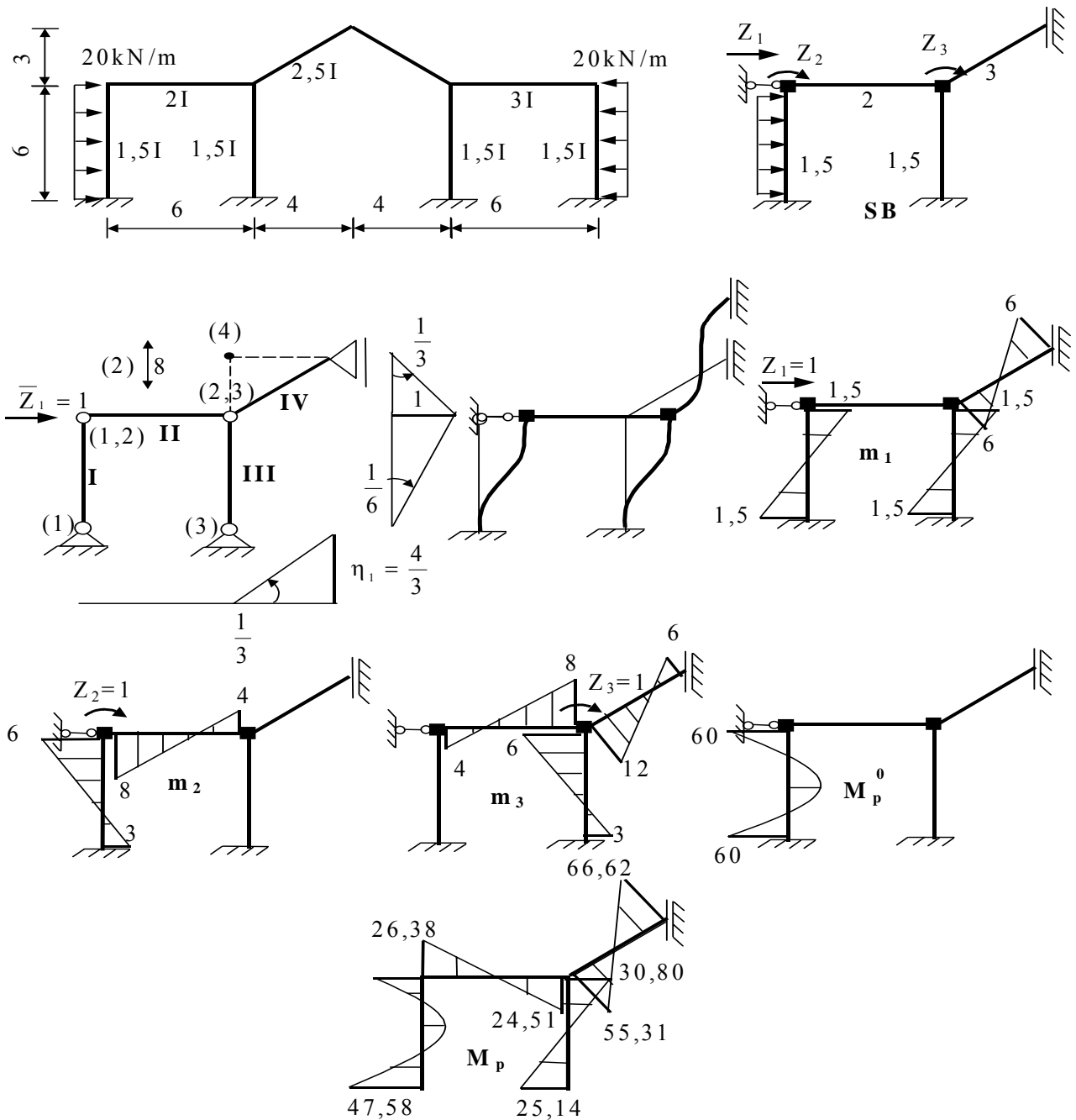
Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 10Z_1 + 3Z_2 - 120 = 0 \\ 3Z_1 + 30Z_2 - 60 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = 11,752$  și  $Z_2 = 0,825$

Diagrama finală de moment încovoietor a fost reprezentată în figura 12.21, atât pe semistructură cât și pe structura întragă.

**Problema 12.19 (fig.12.22)**



- Fig. 12.22 -

Structura este simetrică având rigla centrală în două ape, deci este o structură cu noduri deplasabile, având două grade de libertate. Semistructura corespunzătoare încărcării simetrice are un grad de libertate.

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

Rigiditățile practice ale barelor au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

Coefficienții necunoscutelor și termenii liberi sunt:

$$r_{11} \cdot 1 - (1,5 + 1,5) \cdot \frac{1}{6} - (1,5 + 1,5) \cdot \frac{1}{6} - (6 + 6) \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad r_{11} = 5$$

$$r_{12} \cdot 1 + (6 + 3) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{12} = -1,5$$

$$r_{13} \cdot 1 + (6 + 3) \cdot \frac{1}{6} - (12 + 6) \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad r_{13} = 4,5$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + (60 - 60) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad R_{1p} = -60$$

$$r_{21} = -1,5; \quad r_{22} = 14; \quad r_{23} = 4; \quad R_{2p} = 60$$

$$r_{31} = 4,5; \quad r_{32} = 4; \quad r_{33} = 26; \quad R_{3p} = 0;$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 5Z_1 - 1,5Z_2 + 4,5Z_3 - 60 = 0 \\ -1,5Z_1 + 14Z_2 + 4Z_3 + 60 = 0 \\ 4,5Z_1 + 4Z_2 + 26Z_3 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile:  $Z_1 = 12,99$ ;  $Z_2 = -2,355$ ;  $Z_3 = -1,886$

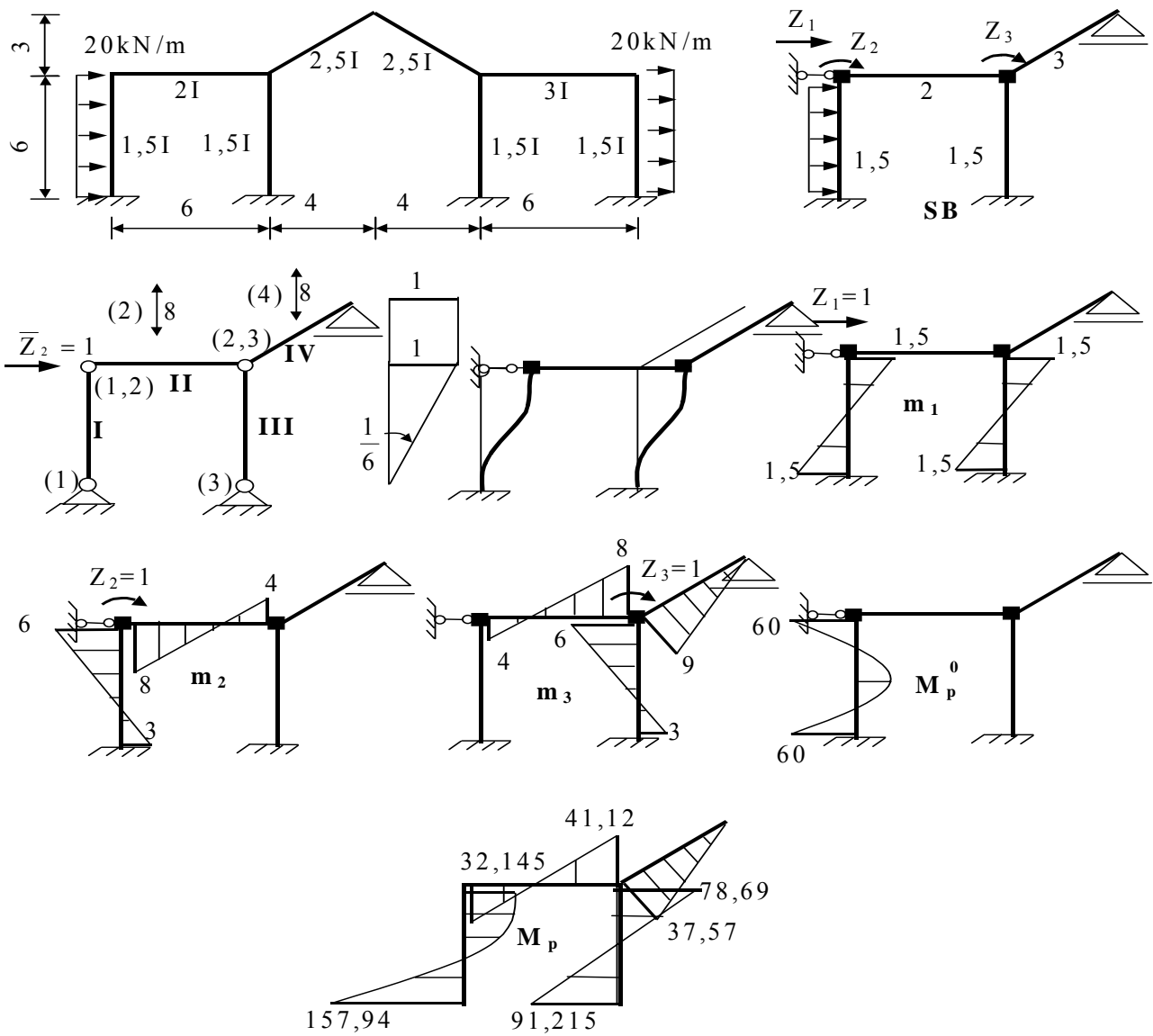
Diagrama finală de moment încovoietor este dată pe semistructură, în figura 12.22.

### **Problema 12.20 (fig.12.23)**

Structura este simetrică și încărcată antisimetric. Semistructura corespunzătoare acestei încărcări are un grad de libertate.

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$



- Fig. 12.23 -

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi sunt:

$$r_{11} \cdot 1 - (1,5 + 1,5) \cdot \frac{1}{6} - (1,5 + 1,5) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{11} = 1$$

$$r_{12} \cdot 1 + (6 + 3) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{12} = -1,5$$

$$r_{13} \cdot 1 + (6 + 3) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{13} = -1,5$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 20 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} + (60 - 60) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad R_{1p} = -60$$

$$r_{21} = -1,5; \quad r_{22} = 14; \quad r_{23} = 4; \quad R_{2p} = 60$$

$$r_{31} = -1,5; \quad r_{32} = 4; \quad r_{33} = 23; \quad R_{3p} = 0;$$

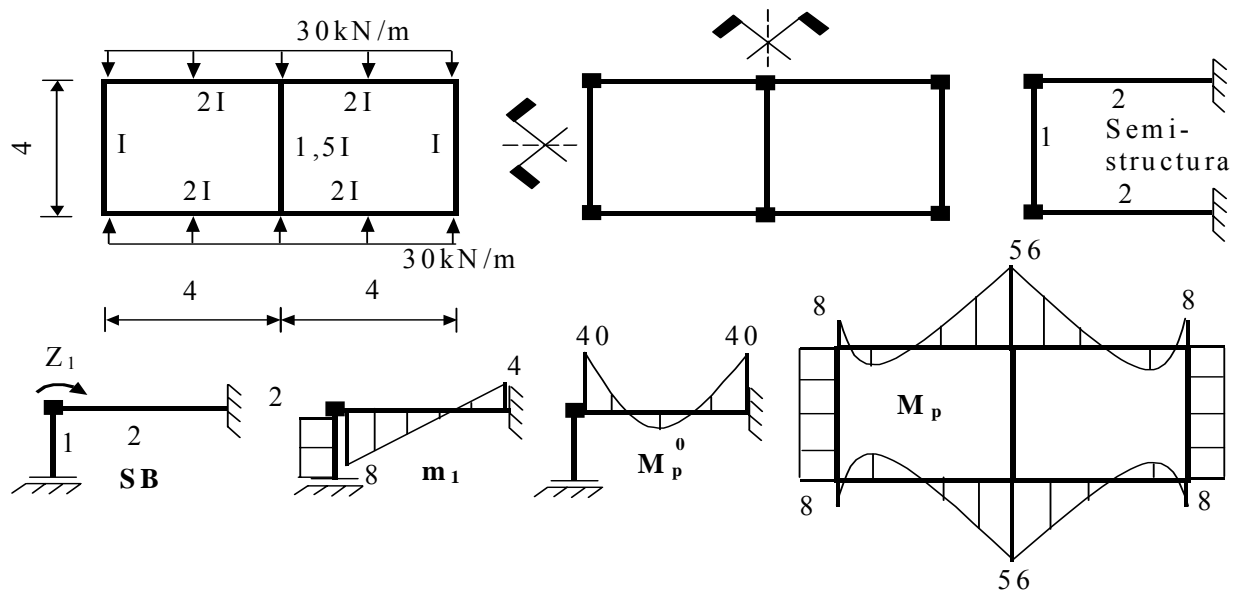
Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} Z_1 - 1,5Z_2 - 1,5Z_3 - 60 = 0 \\ -1,5Z_1 + 14Z_2 + 4Z_3 + 60 = 0 \\ -1,5Z_1 + 4Z_2 + 23Z_3 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile:  $Z_1 = 69,158$ ;  $Z_2 = 1,932$ ;  $Z_3 = 4,174$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată pe semistructură, în figura 12.23.

**Problema 12.21 (fig.12.24)**



- Fig.12.24 -

Structura este dublu simetrică și încărcată simetric astfel încât se poate rezolva lucrând pe un sfert de structură.

Rigiditățile practice au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{4} = 1$ .

Ecuția de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

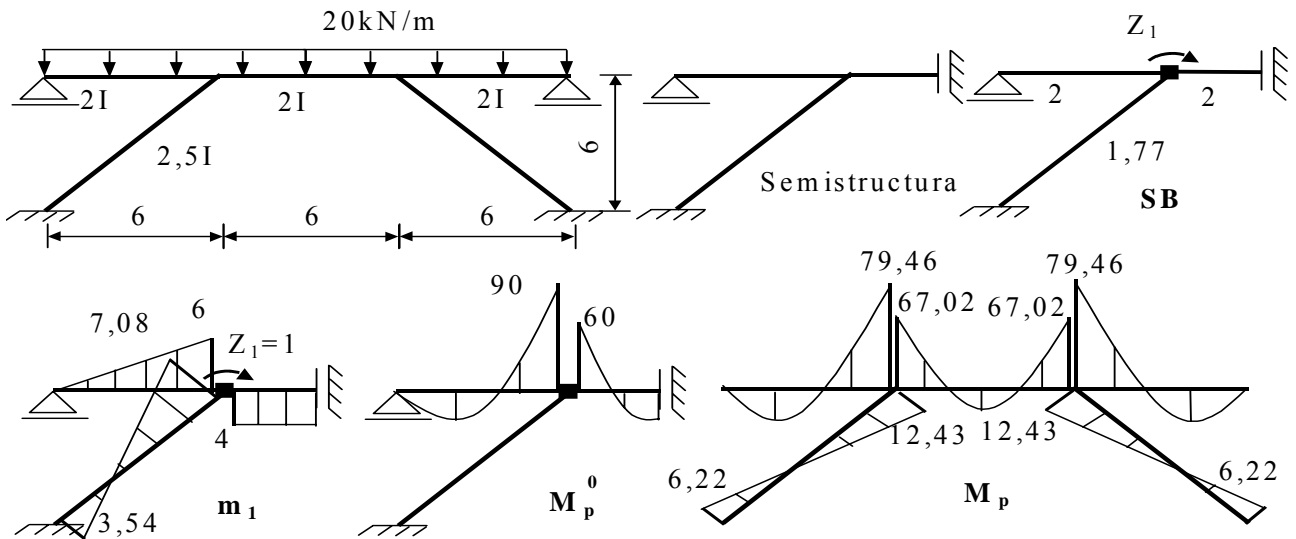
unde  $r_{11} = 10$ ;  $R_{1p} = -40$

Necunoscuta  $Z_1$  are valoarea:

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = 4$$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 12.24.

**Problema 12.22 (fig.12.25)**



- Fig.12.25 -

Ecuția de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

Rigiditățile practice au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$ .

Coeficientul necunoscutei și termenul liber sunt:

$$r_{11} = 17,08; \quad R_{1p} = 30$$

Necunoscuta  $Z_1$  are valoarea:

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{30}{17,08} = -1,756$$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 12.25.

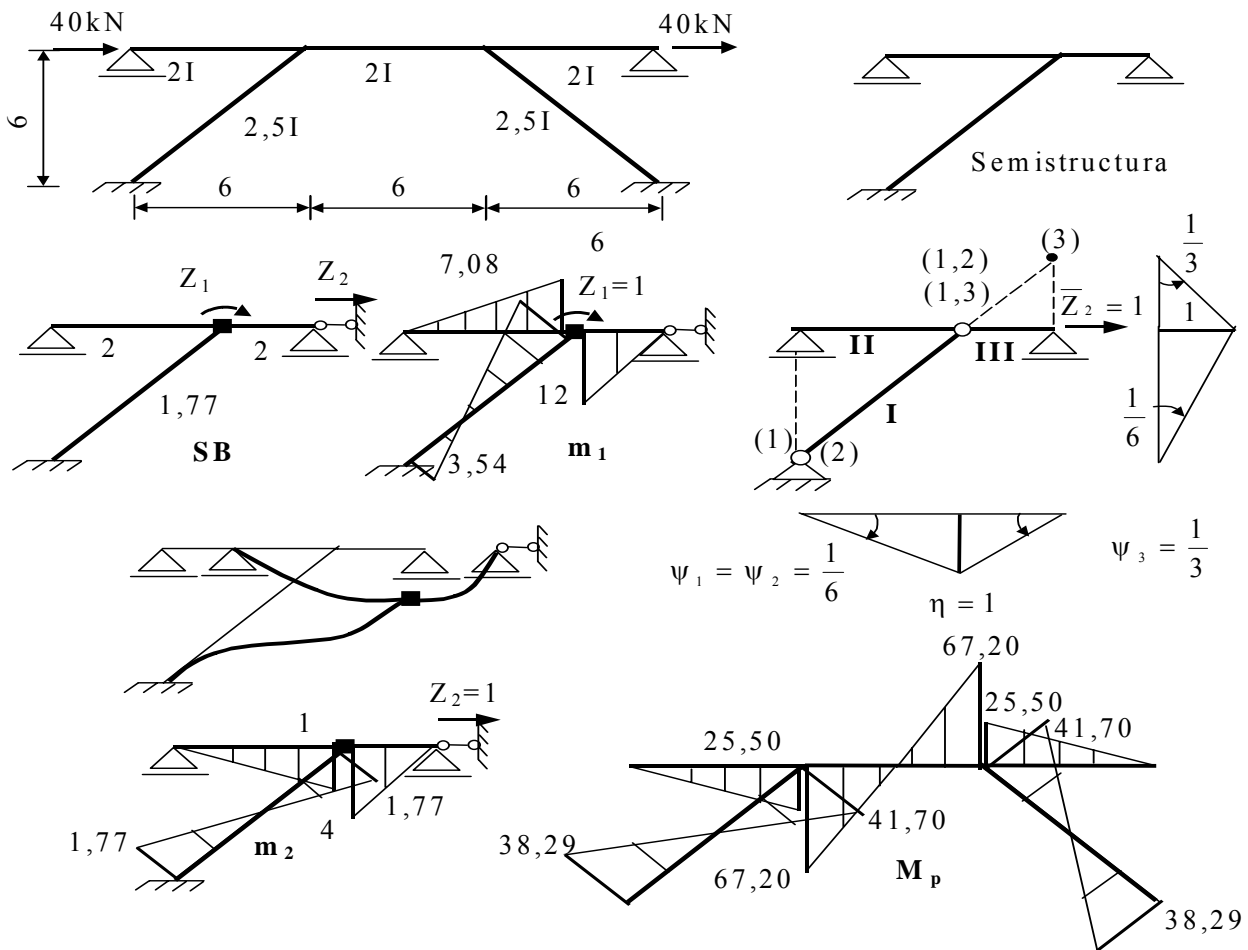
**Problema 12.23 (fig.12.26)**

Ecuțiile de condiție sunt :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

Rigiditățile practice au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$





- Fig.12.26 -

Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi

$$r_{11} = 25,08; \quad r_{12} = 1,23; \quad R_{1p} = 0 \text{ (deoarece forțele sunt aplicate în noduri)}$$

$$r_{21} \cdot 1 + (7,08 + 3,54) \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} - 12 \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad r_{21} = 1,23$$

$$r_{22} \cdot 1 - (1,77 + 1,77) \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{3} = 0; \quad r_{22} = 2,09$$

$$R_{2p} \cdot 1 + 40 \cdot 1 = 0; \quad R_{2p} = -40$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 25,08Z_1 + 1,23Z_2 = 0 \\ 1,23Z_1 + 2,09Z_2 - 40 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile  $Z_1 = -0,966$  și  $Z_2 = 19,70$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 12.26.

## CAPITOLUL XIII

### CALCULUL STRUCTURILOR PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE

Calculul structurilor prin cele două metode generale – metoda eforturilor și metoda deplasărilor necesită alcătuirea și rezolvarea unui sistem de ecuații, operații care implică un consum mare de timp, în cazul structurilor cu număr mare de necunoscute. De aceea, pentru rezolvarea acestor sisteme de ecuații au fost adoptate metode de calcul prin aproximații succesive.

Utilizarea acestor metode este condiționată de existența convergenței procesului iterativ și de asemenea, de rapiditatea convergenței.

În metoda deplasărilor, la cadrele cu noduri fixe convergența este foarte rapidă, deoarece în fiecare ecuație coeficientul necunoscutei principale este mai mare decât suma coeficienților necunoscutelor secundare, luați în valoare absolută ( $r_{ii} > \sum |r_{ij}|$ ).

La structurile cu noduri deplasabile, în ecuațiile de grad de libertate, această condiție nu mai este satisfăcută, dar pe ansamblul sistemului de ecuații condiția este satisfăcută ( $\sum r_{ii} > \sum |r_{ij}|, i \neq j$ ).

În consecință la structurile cu noduri deplasabile convergența procesului iterativ există, dar este mai lentă. Semnificația fizică a calculului prin aproximații succesive – în metoda deplasărilor – este următoarea: are loc trecerea treptată de la sistemul de bază cu toate nodurile blocate, la structura reală. În acest capitol se prezintă procedeul de calcul numit procedeul distribuirii și transmiterii momentelor” – cunoscut – și sub numele de procedeul Cross, după numele celui care l-a elaborat.

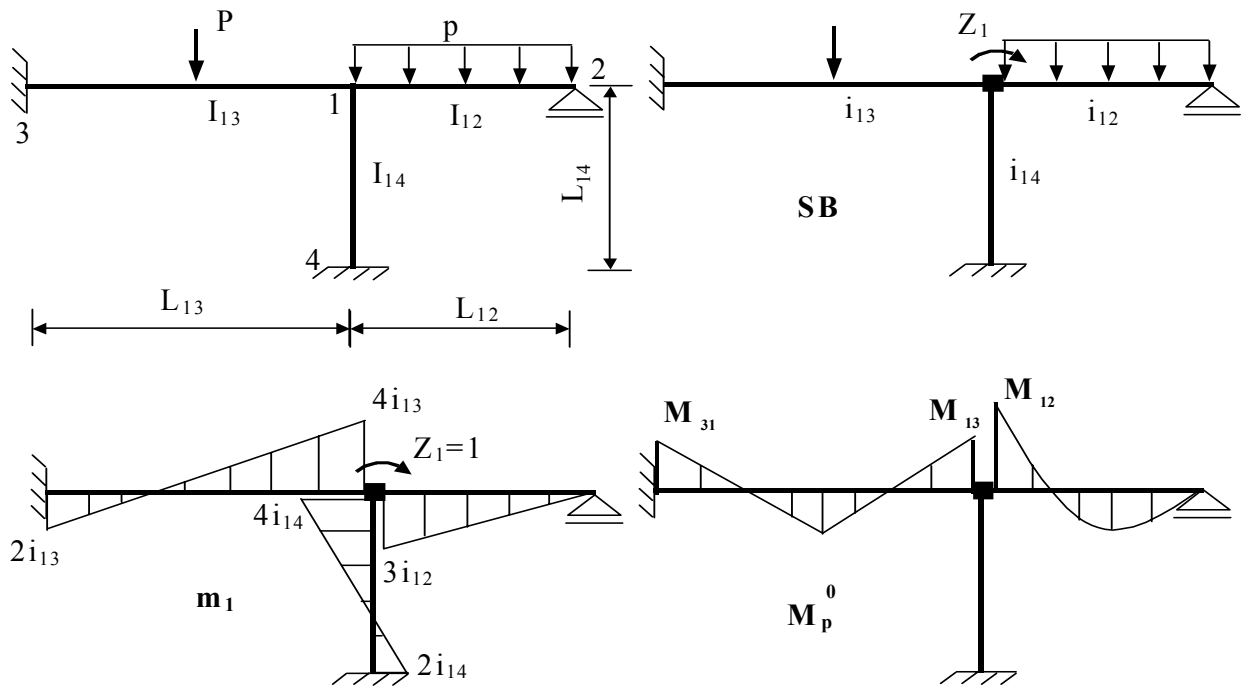
Procedeul Cross operează cu momentele încovoietoare și utilizează ca schemă de calcul, schema structurii. În literatură există un număr mare de procedee de calcul prin aproximații succesive, diferența dintre ele constând fie în elementele cu care operează - eforturi sau deplasări -, fie prin modul de organizare a schemei de calcul.

#### A STRUCTURI CU NODURI FIXE.

Deoarece procedeul Cross operează cu momente, rotirile nodurilor nu mai apar explicit pe parcursul calculului.

În sistemul de bază nodurile sunt blocate. În unele noduri sau în toate, sub acțiunea încărcărilor, apar momente de încadrare perfectă neechilibrate, capabile să producă rotirea nodurilor la deblocarea acestora. Cum calculul iterativ implică deblocarea succesivă a câte unui singur nod, problema se reduce la analiza procesului de calcul necesar în cazul deblocării unui nod și apoi extinderea concluziilor pentru obținerea soluției la structurile cu mai multe noduri.

Fie cadrul din figura XIII.1,a. În metoda deplasărilor acest caz implică o singură necunoscută – rotirea nodului 1.



- Fig.XIII.1 -

Ecuția de condiție este

$$r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

Reacțiunea unitară are expresia:

$$r_{11} = 4i_{13} + 4i_{14} + 3i_{12} = 4i_0 \left( \frac{i_{13}}{i_0} + \frac{i_{14}}{i_0} + \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{12}}{i_0} \right)$$

Notând  $\rho_{13} = \frac{i_{13}}{i_0}$ ;  $\rho_{14} = \frac{i_{14}}{i_0}$ ;  $\rho_{12} = \frac{3}{4} \cdot \frac{i_{12}}{i_0}$  reacțiunea  $r_{11}$  se poate scrie sub forma

$$r_{11} = 4i_0 (\rho_{13} + \rho_{14} + \rho_{12}) = 4i_0 \sum \rho_1$$

unde  $\rho_{13}$  reprezintă coeficientul de rigiditate al barei 1-3, etc, iar  $\sum \rho_1$  reprezintă suma coeficienților de rigiditate ai barelor ce formează nodul 1.

Termenul liber este

$$R_{1p} + M_{12} - M_{13} = 0$$

sau notând  $\bar{M}_1 = M_{12} - M_{13}$  - unde  $\bar{M}_1$  reprezintă momentul neechilibrat din nodul 1, reacțiunea  $R_{1p}$  devine

$$R_{1p} = -\bar{M}_1$$

Necunoscuta  $Z_1$  capătă forma

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1}$$

și reprezintă rotirea nodului 1, produsă de momentul neechilibrat  $\bar{M}_1$ , când nodul 1 este deblocat.

În această poziție, nodul 1 este în echilibru, iar momentele încovoietoare ce apar pe bare sunt:

$$M_{14} = -4i_{14} Z_1 = -4i_{14} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = \mu_{14} \bar{M}_1$$

$$M_{41} = -2i_{14} Z_1 = -2i_{14} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = \frac{1}{2} \mu_{14} \bar{M}_1$$

$$M_{13} = -M_{13} - 4i_{13} Z_1 = -M_{13} - 4i_{13} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = -M_{13} + \mu_{13} \bar{M}_1$$

$$M_{31} = M_{31} - 2i_{13} Z_1 = M_{31} - 2i_{13} \cdot \frac{\bar{M}_1}{4i_0 \sum \rho_1} = M_{31} + \frac{1}{2} \mu_{13} \bar{M}_1$$

Din expresiile de mai sus se desprind următoarele concluzii:

- Momentul neechilibrat se distribuie barelor ce formează nodul proporțional cu coeficientul de rigiditate al fiecărei bare
- La barele dublu încastrate momentul distribuit este transmis la capătul opus cu valoarea pe jumătate și având același semn.
- La structurile cu mai multe noduri, se repetă cele două faze – distribuirea momentului neechilibrat la barele din nod și apoi transmiterea momentului distribuit la capătul opus, pentru barele dublu încastrate – trecând din nod în nod până când momentele neechilibrate devin neglijabile. Efectuând suma momentelor obținute în fiecare nod se obțin valorile finale ale acestora.

Observații:

- Suma coeficienților de distribuție dintr-un nod este egală cu minus unu,  $\sum \mu_{ij} = -1$ .

Această proprietate rezultă scriind echilibrul nodului 1

$$\sum M_1 = 0; \quad M_{12} + M_{13} + M_{14} = 0$$

$$M_{12} + \mu_{12} \bar{M}_1 + \mu_{14} \bar{M}_1 - M_{13} + \mu_{13} \bar{M}_1 = 0$$

Deoarece

$$M_{12} - M_{13} = \bar{M}_1$$

rezultă

$$M_1 (\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14}) = -\bar{M}_1$$

sau

$$M_1(\mu_{12} + \mu_{13} + \mu_{14}) = -\bar{M}_1$$

- Deoarece în acest procedeu se operează cu eforturi și condiția de echilibru static este respectată atât la fiecare deblocare cât și și în final, verificarea rezultatelor se obține verificând satisfacerea condiției de compatibilitate a deformatelor cu legăturile.

Având momentele încovoietoare finale se calculează rotirile secțiunilor din jurul unui nod – rotiri care trebuie să fie egale.

Astfel pentru o bară situată între două noduri rigide i și j expresiile momentelor încovoietoare sunt:

$$M_{ij} = M_{ij} - 4\rho_{ij}\theta_i - 2\rho_{ij}\theta_j$$

$$M_{ji} = M_{ji} - 2\rho_{ij}\theta_i - 4\rho_{ij}\theta_j$$

Deoarece  $M_{ij}$  și  $M_{ji}$  sunt momentele încovoietoare finale rezultă un sistem de două ecuații cu două necunoscute. Notând  $M_{ij}^* = M_{ij} - M_{ij}$  și  $M_{ji}^* = M_{ji} - M_{ji}$  rotirile capătă forma

$$\theta_i = \frac{M_{ji}^* - 2M_{ij}^*}{6\rho_{ij}} \text{ și } \theta_j = \frac{M_{ij}^* - 2M_{ji}^*}{6\rho_{ij}}$$

Pentru o bară încastrată la capătul i și articulată în k rotirea secțiunii I este

$$\theta_i = \frac{M_{ik}^*}{4\rho_{ik}}$$

- La structurile simetrice – la care calculul se conduce pe semistructură trebuie avut în vedere următoarele:

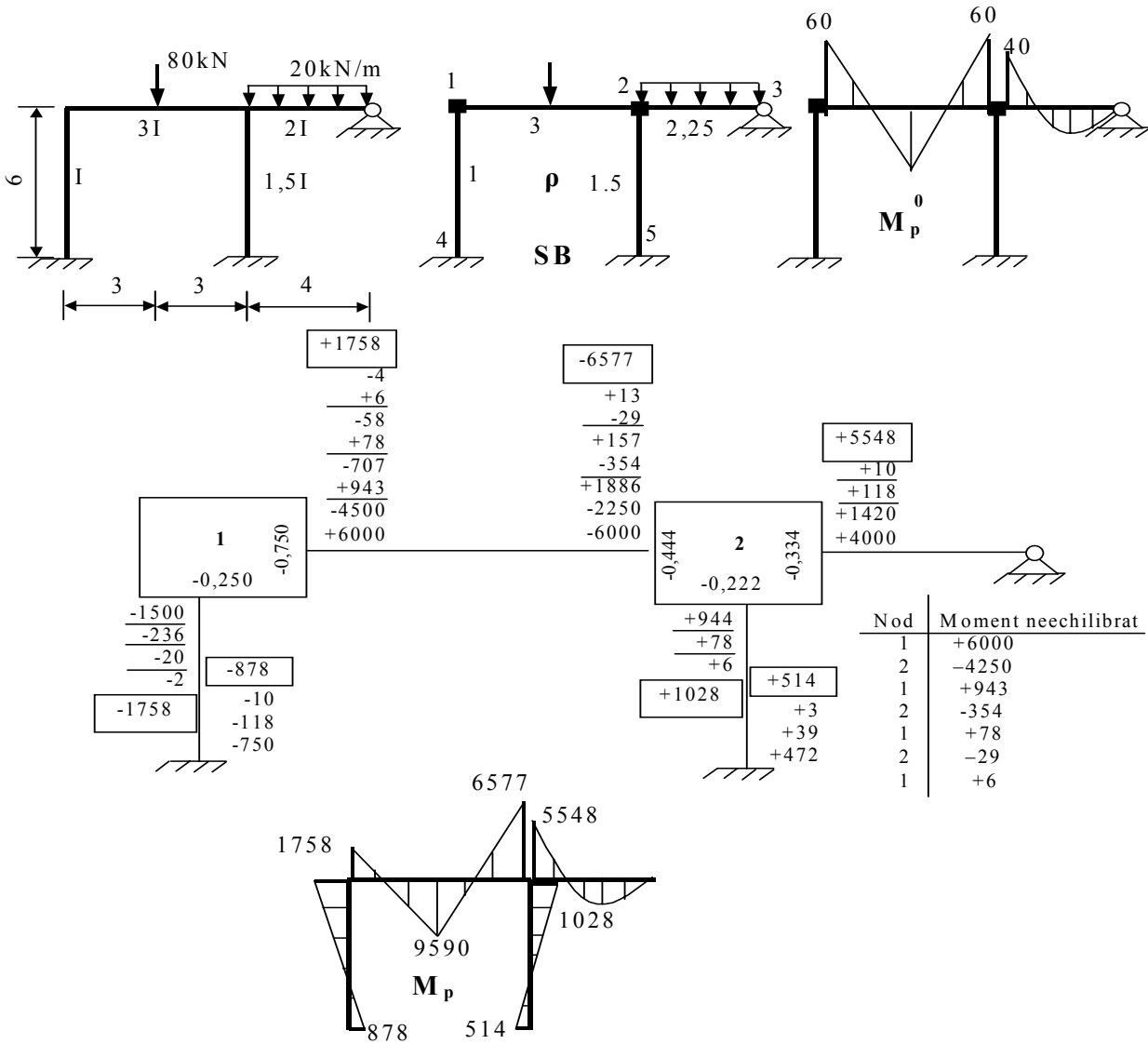
- dacă axa de simetrie intersectează o bară la mijlocul deschiderii atunci în cazul încărcării simetrice se consideră  $\rho_{is} = \frac{1}{2}\rho_{ij}$ , iar în cazul încărcării antisimetrice se consideră  $\rho_{is} = 1,5\rho_{ij}$

- dacă axa de simetrie se suprapune peste axa unei bare atunci în cazul încărcării antisimetrice se consideră  $\rho_{ij}^{as} = \frac{1}{2}\rho_{ij}$ .

## APLICAȚII

Să se calculeze momentul încovoietoare, la următoarele structuri, utilizând procedeul Cross.

### Problema 13.1 (fig.13.1)



- Fig.13.1 -

Ordinea operațiilor este următoarea:

- se trece la sistemul de bază blocând nodurile rigide;
- se calculează rigiditățile practice și coeficienții de rigiditate. Pentru

$$i_0 = \frac{EI}{6} = 1 \text{ rezultă}$$

$$i_{12} = \frac{3EI}{6} = 3;$$

$$i_{14} = \frac{EI}{6} = 1;$$

$$i_{23} = \frac{2EI}{4} = 3;$$

$$i_{15} = \frac{1,5EI}{6} = 1,5$$

$$\rho_{12} = 3; \quad \rho_{14} = 1; \quad \rho_{23} = \frac{3}{4}i_{23} = 2,25; \quad \rho_{25} = 1,5$$

- se calculează suma coeficienților de rigiditate din fiecare nod

$$\sum \rho_1 = 3 + 1 = 4; \quad \sum \rho_2 = 3 + 1,5 + 2,25 = 6,75$$

se calculează coeficienții de distribuție din fiecare nod

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_1} = -\frac{3}{4} = -0,750; \quad \mu_{14} = -\frac{\rho_{14}}{\sum \rho_1} = -\frac{1}{4} = -0,250$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{\rho_{12}}{\sum \rho_2} = -\frac{3}{6,75} = -0,444; \quad \mu_{23} = -\frac{\rho_{23}}{\sum \rho_2} = -\frac{2,75}{6,75} = -0,334;$$

$$\mu_{25} = -\frac{\rho_{25}}{\sum \rho_2} = -\frac{1,5}{6,75} = -0,222$$

- se calculează momentele de încastrare perfectă, din diagrama  $M_p^0$

$$\mathbf{M}_{12} = -\mathbf{M}_{21} = \frac{PL}{8} = \frac{80 \cdot 6}{8} = 60 \text{ kNm}; \quad \mathbf{M}_{23} = \frac{pL^2}{8} = \frac{20 \cdot 4^2}{8} = 40 \text{ kNm}$$

- se echilibrează pe rând nodurile astfel:

În nodul 1 momentul neechilibrat este de +6000 daNm (se lucrează în daNm pentru a nu folosi numere zecimale). Multiplicând momentul neechilibrat cu coeficienții de distribuție se obține

$$M_{12} = \mu_{12} \bar{M}_1 = -0,75 \cdot 6000 = -4500 \text{ daNm}$$

$$M_{14} = \mu_{14} \bar{M}_1 = -0,25 \cdot 6000 = -1500 \text{ daNm}$$

Momentele distribuite se transmit la capetele opuse ale ambelor bare, pentru că sunt bare dublu încastrate.

Acum nodul 1 este în echilibru – în schemă valorile existente au fost barate cu o linie orizontală – dar în nodul 2 există un moment neechilibrat  $\bar{M}_2 = -4250 \text{ daNm}$ .

Distribuind acest moment neechilibrat, barelor din nodul 2 se obține

$$M_{21} = \mu_{21} \bar{M}_2 = -0,444 \cdot (-4250) = +1886 \text{ daNm}$$

$$M_{23} = \mu_{23} \bar{M}_2 = -0,334 \cdot (-4250) = +1420 \text{ daNm}$$

$$M_{25} = \mu_{25} \bar{M}_2 = -0,222 \cdot (-4250) = +944 \text{ daNm}$$

În continuare se echilibrează succesiv cele două noduri în ordinea și sub acțiunea momentelor neechilibrate înscrise în tabelul privind ordinea de iterare.

Operația de echilibrare a fost oprită, când după echilibrarea nodului 1 sub acțiunea momentului neechilibrat de +6 daNm, pe bara 1-2 se obțin numai 4 daNm – valoare foarte mică comparativ cu valoarea de pornire de 6000 daNm.

Verificarea diagramei  $M_p$ . Se verifică rotirile secțiunilor din nodul 1 ale barelor 1-2 și 1-4.

$$\theta_{1-2} = \frac{M_{21}^* - 2M_{12}^*}{6\rho_{12}} \text{ și } \theta_{1-4} = \frac{M_{41}^* - 2M_{14}^*}{6\rho_{14}}$$

unde

$$M_{12}^* = +1758 - 6000 = -4242 \text{ daNm}$$

$$M_{21}^* = -6577 - (-6000) = -577 \text{ daNm}$$

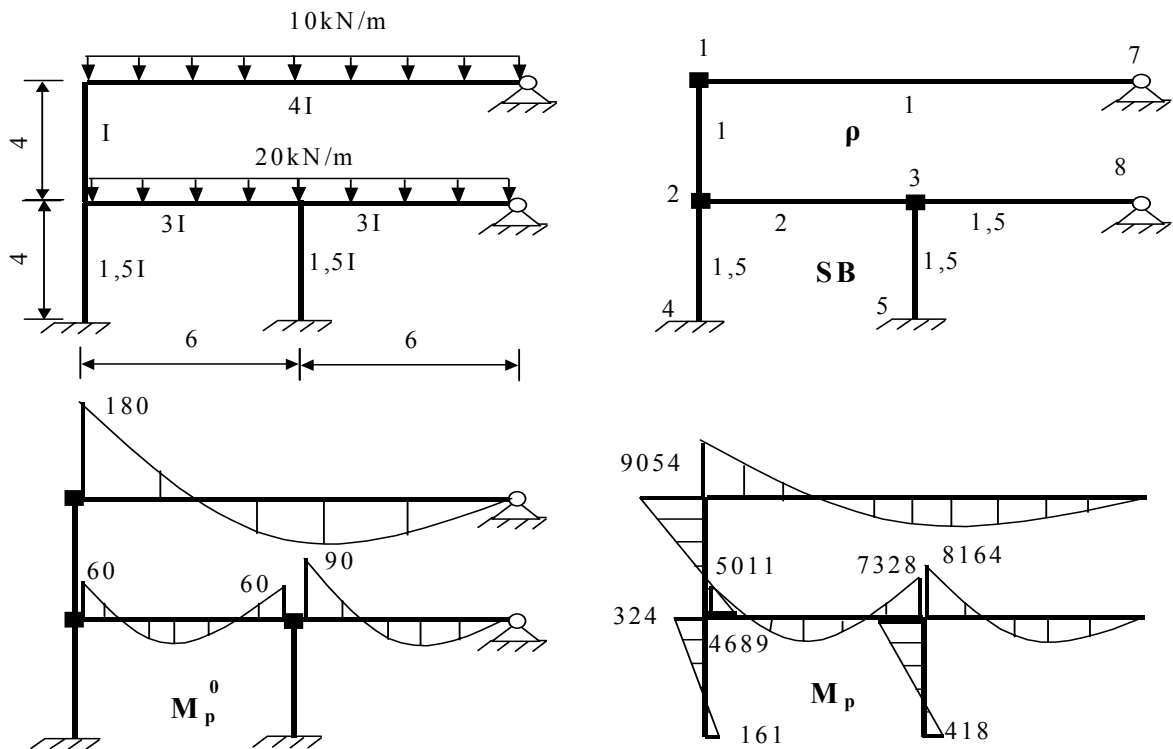
$$M_{14}^* = -1758 - 0 = -1758 \text{ daNm}$$

$$M_{41}^* = -878 - 0 = -878 \text{ daNm}$$

$$\theta_{1-2} = \frac{-577 - 2 \cdot (-4242)}{6 \cdot 3} = +439,277; \quad \theta_{1-4} = \frac{-878 - 2 \cdot (-1758)}{6 \cdot 1} = +439,66$$

Rotirile rezultă aproximativ egale, deci calculul momentelor este corect.

### Problema 13.2 (fig.13.2)



- Fig.13.2 -

Calculul rigidităților practice și al coeficienților de rigiditate.

Pentru  $i_0 = \frac{EI}{4} = 1$  se obține

$$i_{12} = \frac{EI}{4} = 1; \quad i_{17} = \frac{4EI}{12} = \frac{4}{3}; \quad i_{23} = \frac{3EI}{6} = 2; \quad i_{24} = \frac{1,5EI}{4} = 1,5;$$

$$i_{35} = \frac{1,5EI}{4} = 1,5; \quad i_{36} = \frac{3EI}{6} = 2$$

$$\rho_{12} = 1; \quad \rho_{17} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1; \quad \rho_{23} = 2; \quad \rho_{24} = 1,5; \quad \rho_{35} = 1,5; \quad \rho_{36} = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5$$



Calculul suma coeficienților de distribuție având

$$\sum \rho_1 = 2; \quad \sum \rho_2 = 4,5; \quad \sum \rho_3 = 5$$

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{1}{2} = -0,500; \quad \mu_{17} = -\frac{1}{2} = -0,500$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{1}{4,5} = -0,222; \quad \mu_{23} = -\frac{2}{4,5} = -0,444; \quad \mu_{24} = -\frac{1,5}{4,5} = -0,334$$

Nodul 3

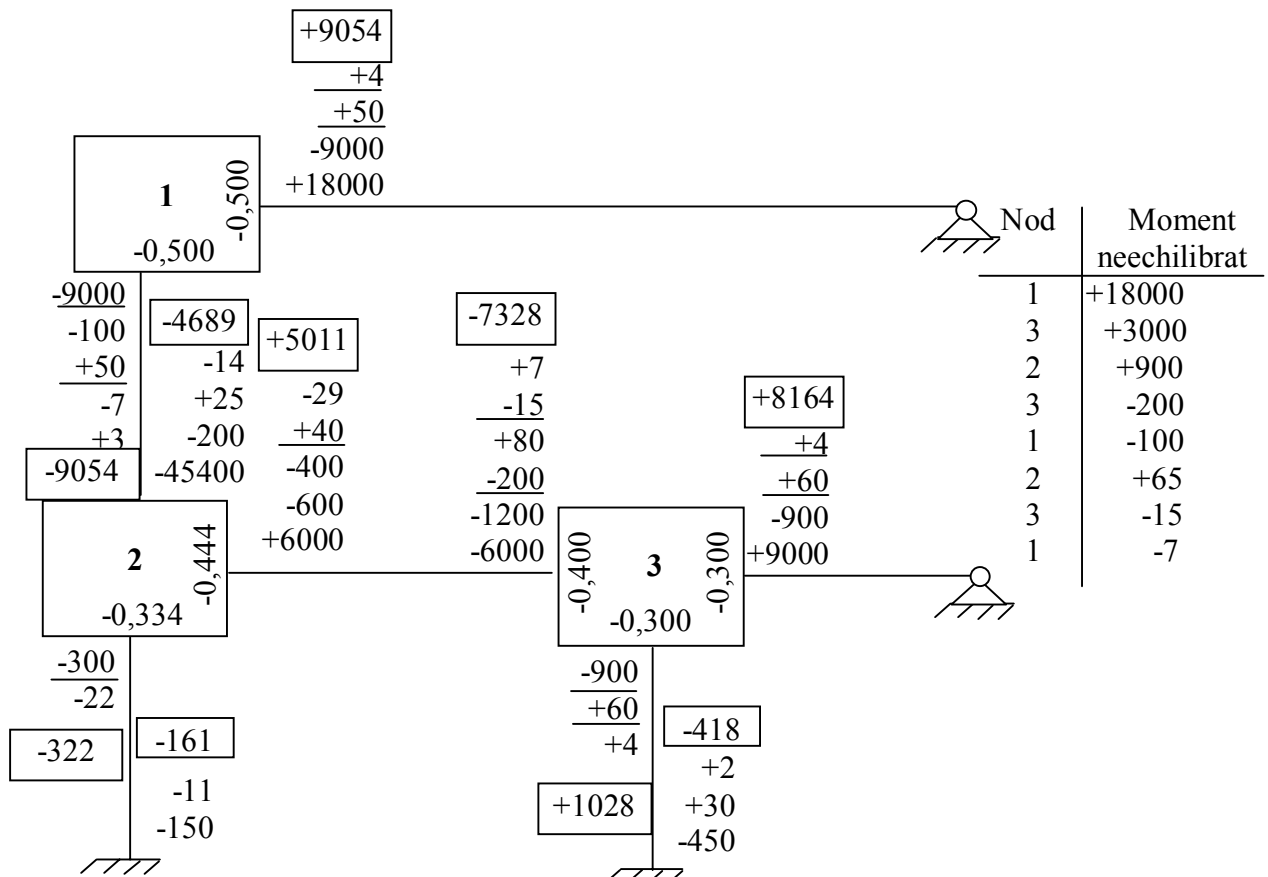
$$\mu_{32} = -\frac{2}{5} = -0,400; \quad \mu_{35} = -\frac{1,5}{5} = -0,300; \quad \mu_{36} = -\frac{1,5}{5} = -0,300$$

Calculul momentelor de încastare perfectă

$$M_{17} = \frac{pL^2}{8} = \frac{10 \cdot 12^2}{8} = 180 \text{ kNm}; \quad M_{23} = -M_{32} = \frac{pL^2}{12} = \frac{20 \cdot 6^2}{12} = 60 \text{ kNm}$$

$$M_{36} = \frac{pL^2}{8} = \frac{20 \cdot 6^2}{8} = 90 \text{ kNm}$$

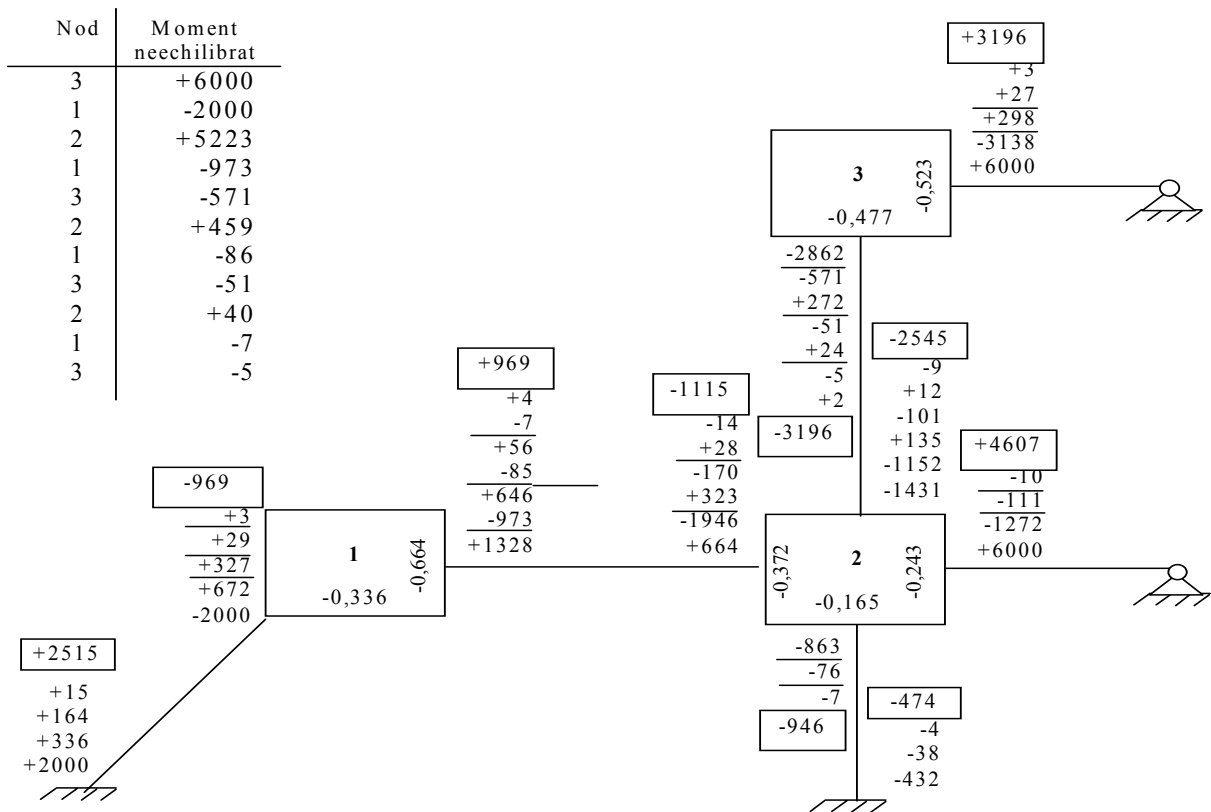
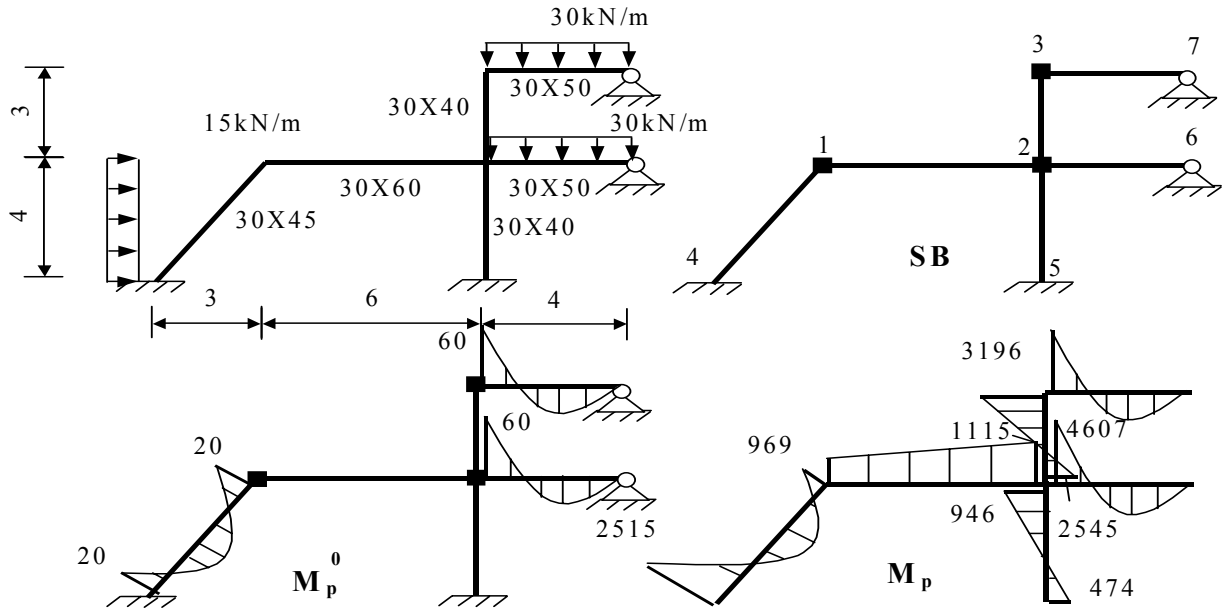
Echilibrarea nodurilor este prezentată în figura 13.3.



- Fig.13.3 -

Diagrama finală este prezentată în figura 13.2.

**Problema 13.3 (fig.13.4)**



- Fig.13.4 -

Calculul momentelor de inerție

$$I_{12} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54 \text{dm}^4; I_{14} = \frac{3 \cdot 4,5^3}{12} = 22,78 \text{dm}^4; I_{23} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{dm}^4;$$

$$I_{25} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{dm}^4; I_{26} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31,25 \text{dm}^4; I_{37} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31,25 \text{dm}^4$$

Calculul coeficienților de rigiditate

$$\rho_{12} = \frac{I_{12}}{L_{12}} = \frac{54}{60} = 0,9; \rho_{14} = \frac{I_{14}}{L_{14}} = \frac{22,78}{50} = 0,456; \rho_{23} = \frac{I_{23}}{L_{23}} = \frac{16}{30} = 0,534$$

$$\rho_{25} = \frac{I_{25}}{L_{25}} = \frac{16}{40} = 0,4; \rho_{26} = \frac{3}{4} \cdot \frac{I_{26}}{L_{26}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{31,25}{40} = 0,586; \rho_{37} = \rho_{26} = 0,586$$

Suma coeficienților de rigiditate în fiecare nod

$$\sum \rho_1 = 0,9 + 0,456 = 1,356$$

$$\sum \rho_2 = 0,9 + 0,534 + 0,400 + 0,586 = 2,420$$

$$\sum \rho_3 = 0,534 + 0,586 = 1,120$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{0,90}{1,356} = -0,664; \quad \mu_{14} = -\frac{0,456}{1,356} = -0,336$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{0,90}{2,420} = -0,372; \quad \mu_{23} = -\frac{0,534}{2,420} = -0,220$$

$$\mu_{25} = -\frac{0,40}{2,420} = -0,165; \quad \mu_{26} = -\frac{0,586}{2,420} = -0,243$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{0,534}{1,120} = -0,477; \quad \mu_{37} = -\frac{0,586}{1,120} = -0,523$$

Calculul momentelor de încastrare perfectă

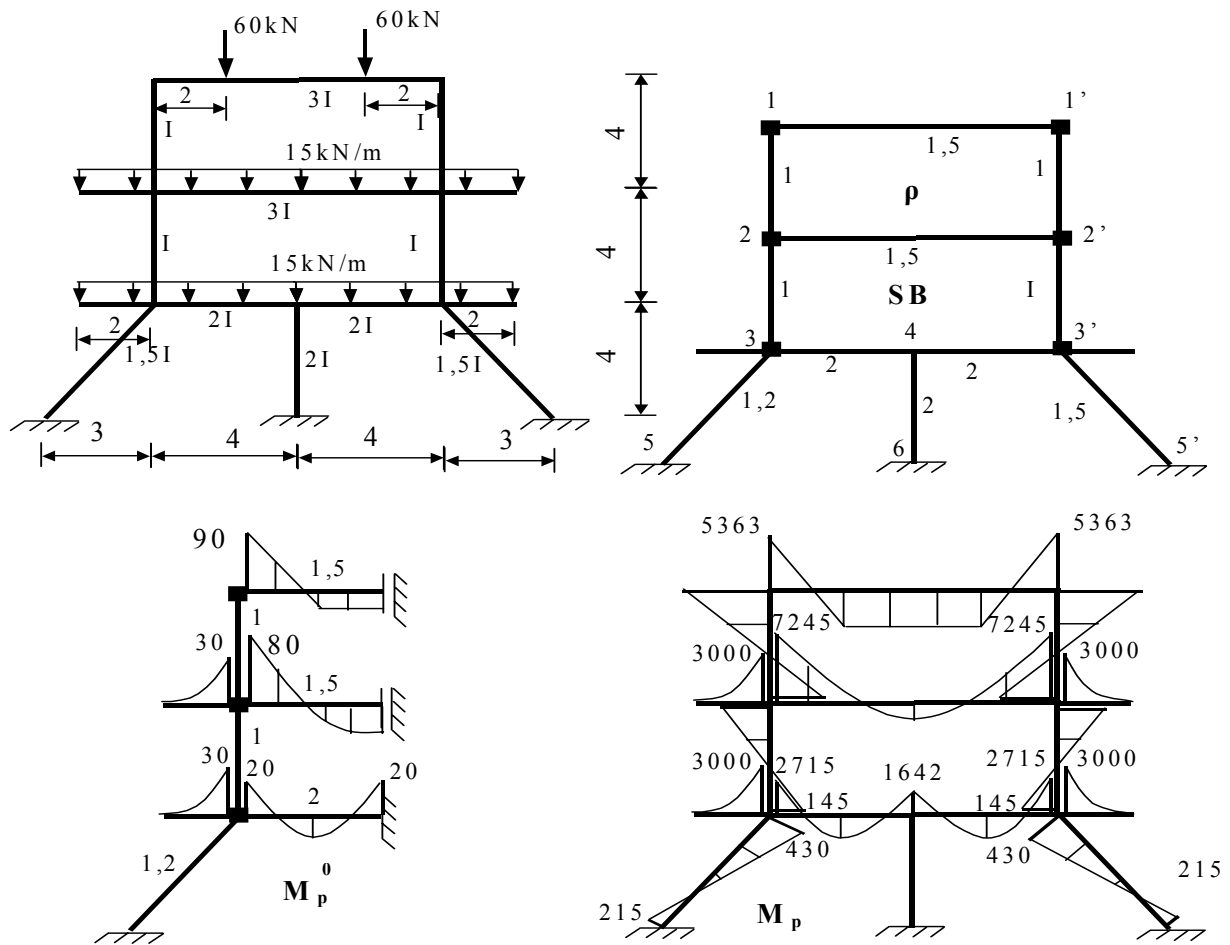
$$\mathbf{M}_{14} = -\mathbf{M}_{41} = \frac{pL^2}{12} = \frac{15 \cdot 4^2}{12} = 20 \text{kNm}$$

$$\mathbf{M}_{26} = \frac{pL^2}{8} = \frac{30 \cdot 4^2}{8} = 60 \text{kNm}$$

$$\mathbf{M}_{37} = \frac{pL^2}{8} = \frac{30 \cdot 4^2}{8} = 60 \text{kNm}$$

Schema de calcul și diagrama finală sunt date în figura 13.4.

**Problema 13.4 (fig.13.5)**



- Fig. 13.5 -

Structura este simetrică și încărcată simetric. Se comportă ca o structură cu noduri fixe. Coeficienții de rigiditate și momentele de încastrare perfectă se calculează pe structura întragă.

Calculul iterativ se va efectua pe semistructură. Pe riglele superioare – intersectate de axa de simetrie – coeficienții de rigiditate se corectează  $\rho_{is} = \frac{1}{2}\rho_{ii'}$

Suma coeficienților de distribuție în noduri

$$\sum \rho_1 = 1,75; \quad \sum \rho_2 = 2,75; \quad \sum \rho_3 = 4,2$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{1s} = -\frac{0,75}{1,75} = -0,428;$$

$$\mu_{12} = -\frac{1}{1,75} = -0,572$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{1}{2,75} = -0,364$$

$$\mu_{2s} = -\frac{0,75}{2,75} = -0,272$$

$$\mu_{23} = -\frac{1}{2,75} = -0,364$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{1}{4,2} = -0,238$$

$$\mu_{34} = -\frac{2}{4,2} = -0,476$$

$$\mu_{35} = -\frac{1,2}{4,2} = -0,286$$

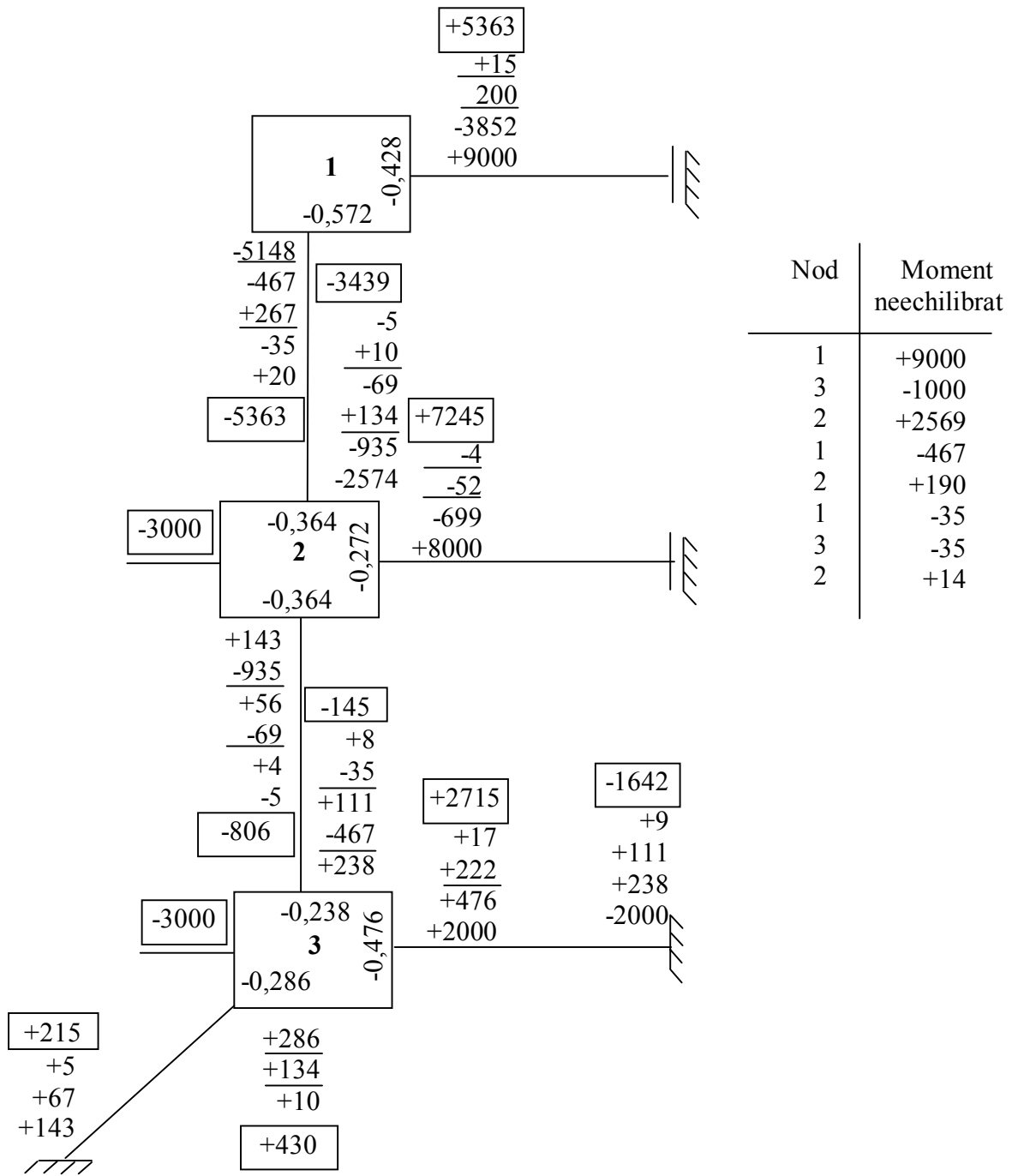
Calculul momentelor de încastrare perfectă

$$\text{Momentul pe consolă } M_c = \frac{pL^2}{2} = \frac{15 \cdot 2^2}{2} = 30 \text{ kNm}$$

$$M_{11'} = -M_{1'1} = \frac{Pa(L-a)}{L} = \frac{60 \cdot 2 \cdot (8-2)}{8} = 90 \text{ kNm}$$

$$M_{22'} = -M_{2'2} = \frac{pL^2}{12} = \frac{15 \cdot 8^2}{12} = 80 \text{ kNm}$$

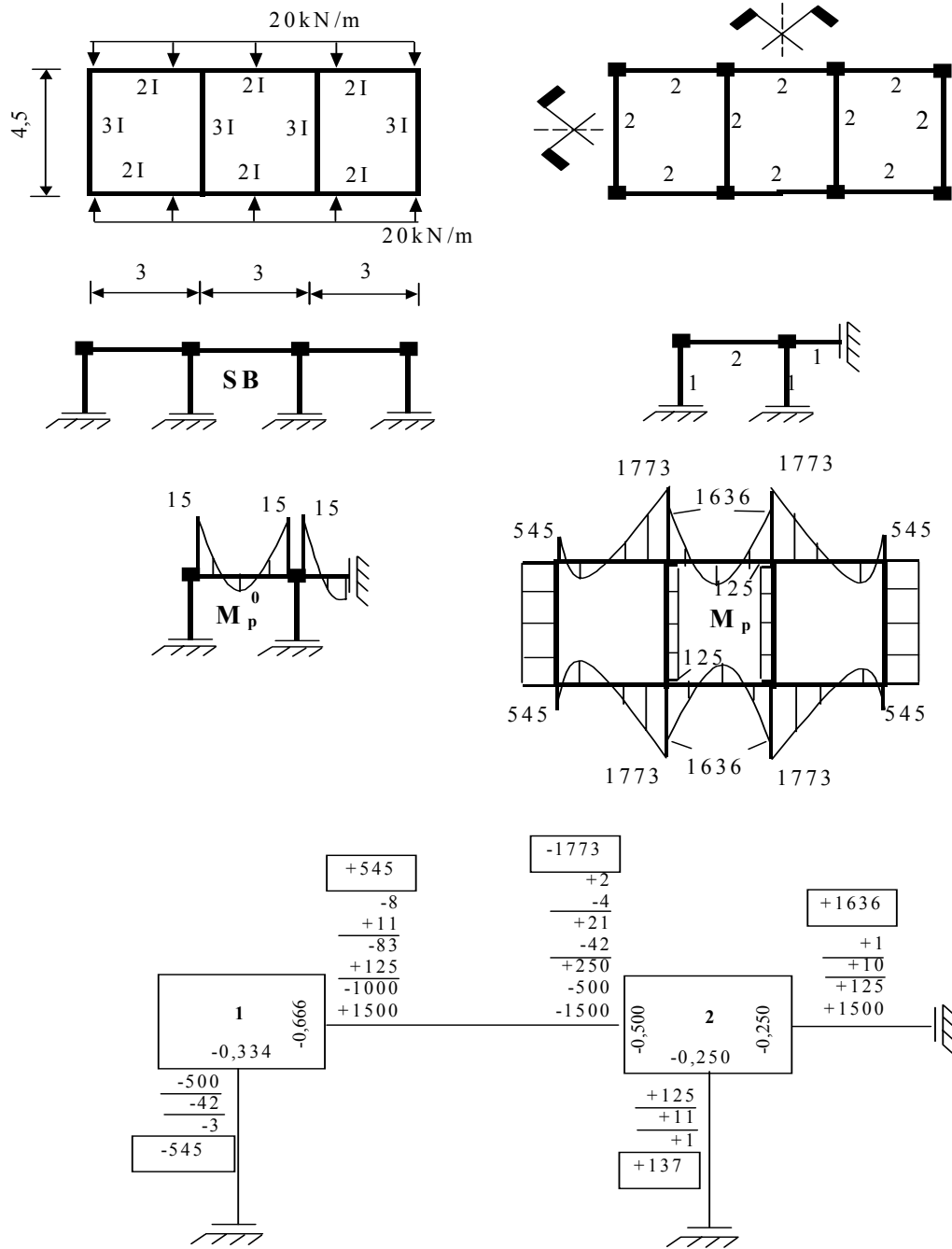
$$M_{34} = -M_{43} = \frac{pL^2}{12} = \frac{15 \cdot 4^2}{12} = 20 \text{ kNm}$$



- Fig.13.6 -

Schema de iterare este dată în figura 13.6, iar diagrama finală este dată în figura 13.5.

**Problema 13.5 (fig.13.7)**



- Fig.13.7 -

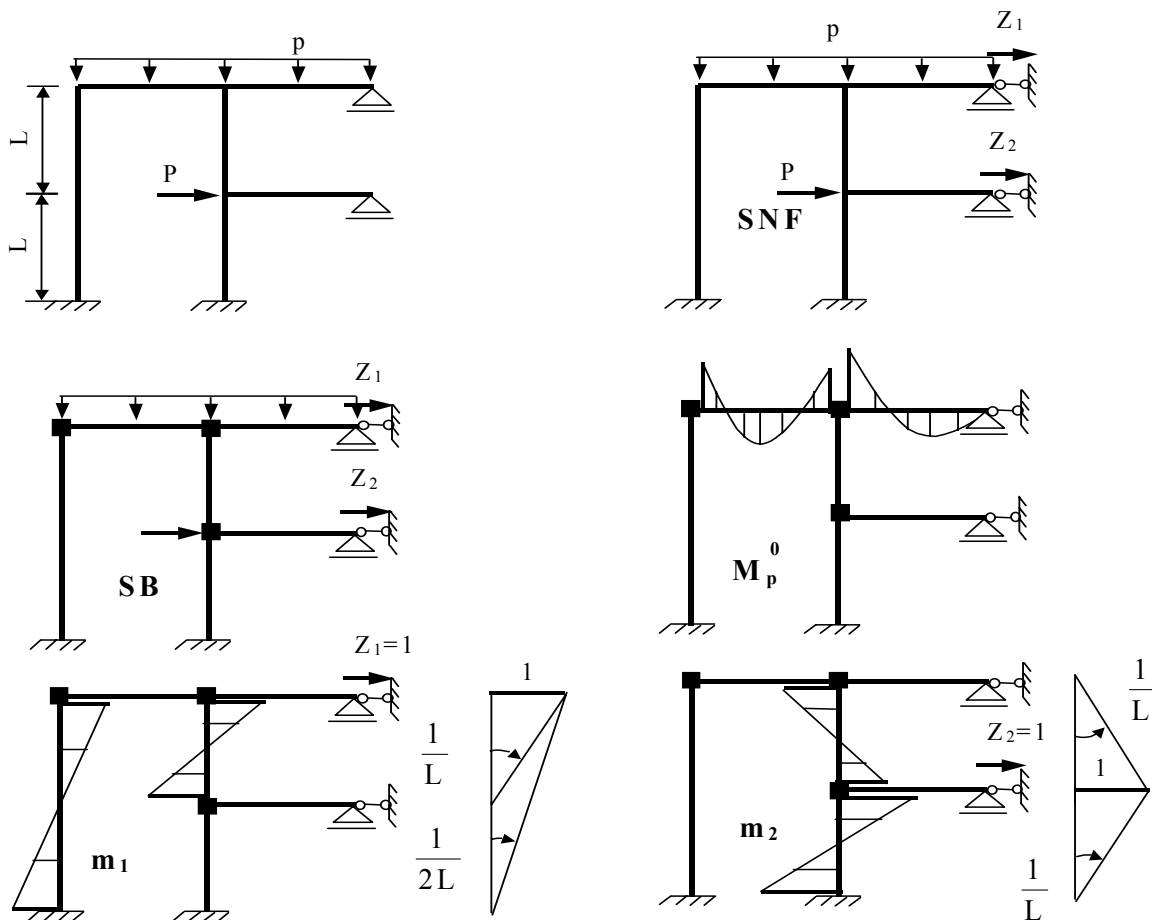
Structura fiind dublu simetrică și încărcată simetric operația de iterare se dezvoltă pe un sfert de structură. Pe barele intersectate de axele de simetrie se efectuează corectarea coeficienților de rigiditate.

## B. STRUCTURI CU NODURI DEPLASABILE PROCEDEUL DE OPERARE ÎN DOUĂ ETAPE

Procedeul de operare în două etape reprezintă aplicarea procedurii Cross în calculul structurilor cu noduri deplasabile.

Pentru a utiliza convergența bună a procedurii Cross aplicat structurilor cu noduri fixe, în calculul structurilor cu noduri deplasabile se procedează în modul următor:

- Structura cu noduri deplasabile (fig.XIII.2,a) se transformă în structură cu noduri fixe prin blocarea translațiilor pe direcțiile gradelor de libertate (fig.XIII.2,b)



- Fig.XIII.2 -

- Structura cu noduri fixe va fi încărcată cu forțele exterioare și cu translațiile pe direcțiile gradelor de libertate  $Z_1$  și  $Z_2$ .

Etapa I<sup>a</sup> Structura cu noduri fixe este rezolvată pentru încărcările ce intervin.

- Se trece la sistemul de bază al metodei deplasărilor și se alcătuiește schema Cross.



- Se încarcă sistemul de bază cu forțele exterioare și se obține diagrama  $M_p^0$ . Momentele de încastare perfectă din diagrama  $M_p^0$  se echilibrează prin procedeul Cross și se obține diagrama  $M_p^f$ , pe structura cu noduri fixe – cu nodurile rigide deblocate și în echilibru

- Se încarcă sistemul de bază cu translațiile  $Z_1=1$  și se obține diagrama  $m_1$ . Momentele din diagrama  $m_1$  se echilibrează prin procedeul Cross și se obține diagrama  $m_1^f$  - pe structura cu noduri fixe.

- Se încarcă sistemul de bază cu translația  $Z_2=1$  și se obține diagrama  $m_2$ . Momentele din diagrama  $m_2$  se echilibrează prin procedeul Cross și se obține diagrama  $m_2^f$  - pe structura cu noduri fixe.

Dacă structura are mai multe grade de libertate se continuă operațiile asupra diagramelor unitare.

Etapa II<sup>a</sup> Etapa a doua constă în revenirea de la structura cu noduri fixe la structura reală cu noduri deplasabile punând condiția ca reacțiunea totală din fiecare legătură de grad de libertate să fie egală cu zero, deoarece aceste legături nu există în realitate.

$$R_1=0, R_2=0$$

Reacțiunile totale se obțin prin suprapunere de efecte

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

S-a obținut un sistem de ecuații liniare (în acest caz două ecuații). Coeficienții necunoscutelor și termenii liberi se calculează după regulile utilizate în metoda deplasărilor.

Cu necunoscutele  $Z_1$  și  $Z_2$  determinate se calculează momentele încovoietoare pe structura reală – tot prin suprapunere de efecte

$$M_p = M_p^f + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

Observații:

- Avantajul procedurii constă în faptul că pentru structurile la care se analizează mai multe ipoteze de încărcare, începând cu ipoteza a doua se calculează numai diagrama  $M_p^f$ , termenii liberi din ecuații și se rezolvă sistemul de ecuații.

- Diagramele  $m_1^f$  și  $m_2^f$  sunt unice deoarece momentele unitare depind numai de caracteristicile structurii și nu depind de încărcări.

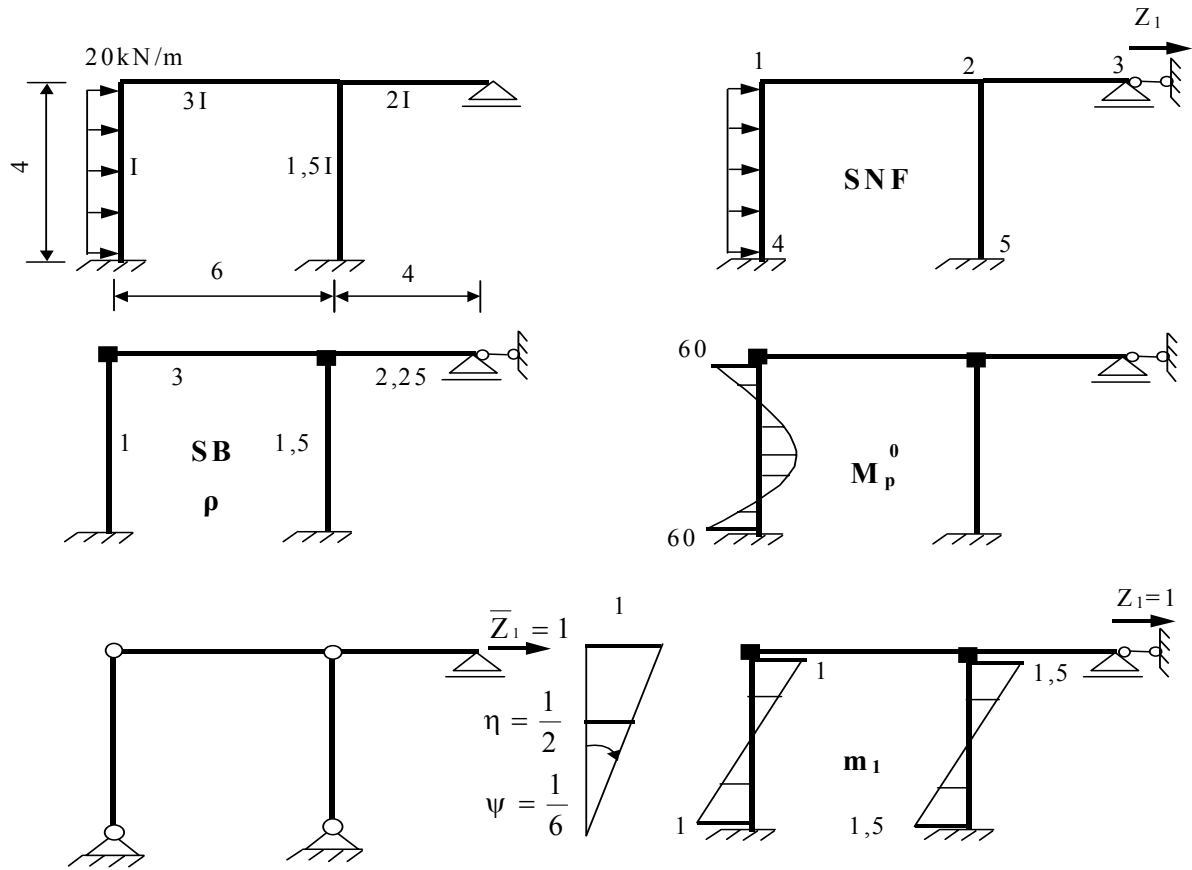
- Dacă forțele sunt forțe concentrate, aplicate în noduri atunci  $M_p^0 \equiv 0$  și  $M_p^f \equiv 0$  - nu se mai efectuează procedeul Cross pentru forțe.

- Dezavantajul procedurii constă în aceea că la un număr mare de grade de libertate, în prima ipoteză de calcul se efectuează  $n+1$  operații de echilibrarea momentelor prin procedeul Cross, iar în toate ipotezele de calcul trebuie alcătuit și rezolvat un sistem cu multe ecuații.

## APLICAȚII

Să se calculeze momentele încovoietoare, la următoarele structuri cu noduri deplasabile, utilizând procedeul de operare în două etape.

### Problema 13.6 (fig.13.8)



- Fig.13.8 -

#### Etapa I<sup>a</sup>

Calculul coeficienților de rigiditate pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

$$\rho_{12} = 3; \quad \rho_{14} = 1; \quad \rho_{23} = \frac{3}{4} \cdot 3 = 2,25; \quad \rho_{25} = 1,5;$$

Suma coeficienților de rigiditate în noduri având

$$\sum \rho_1 = 4; \quad \sum \rho_2 = 6,75;$$

Calculul coeficienților de distribuție

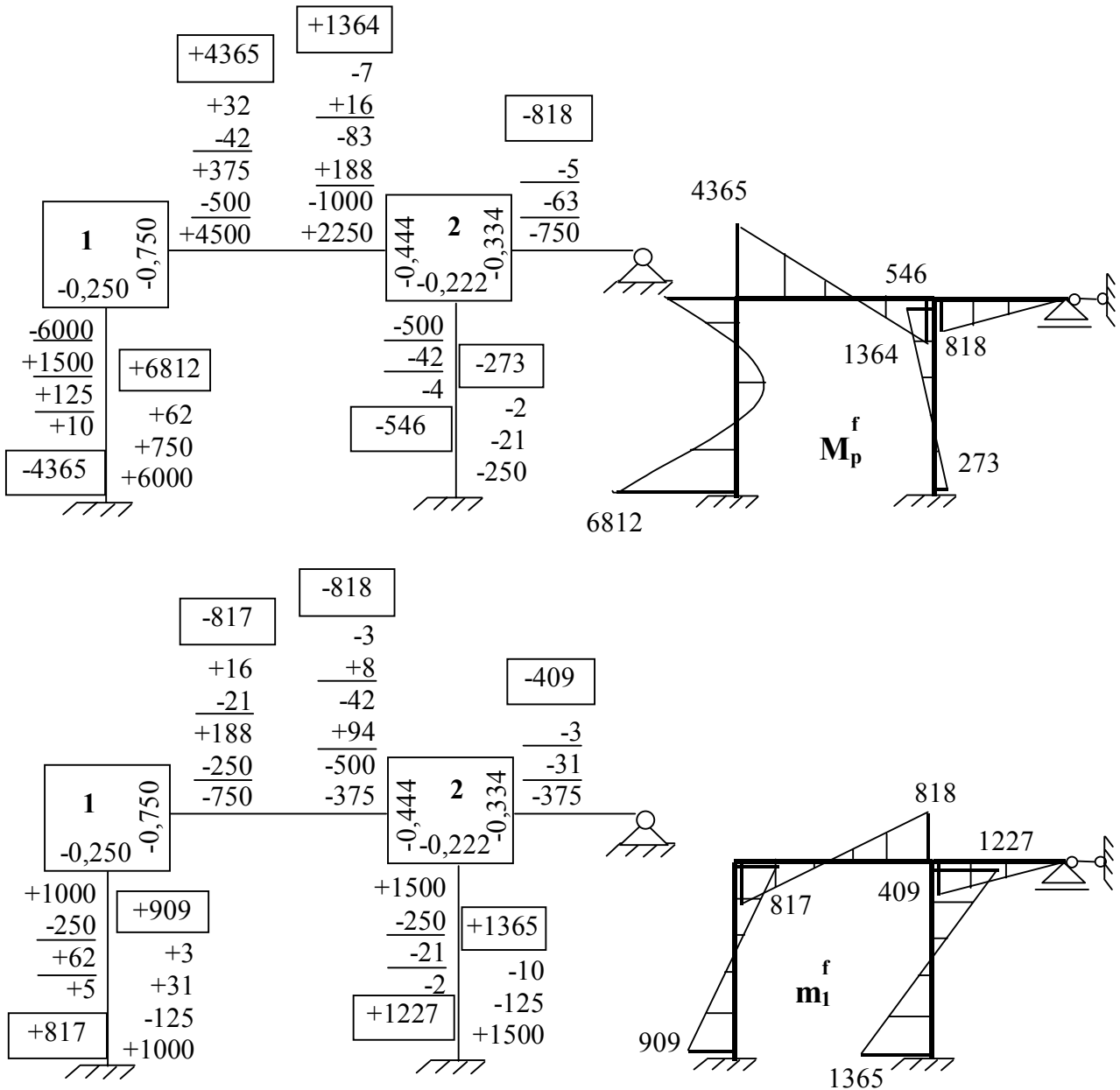
Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{3}{4} = -0,750; \quad \mu_{14} = -\frac{1}{4} = -0,250$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{3}{6,75} = -0,444; \mu_{23} = -\frac{2,25}{6,75} = -0,334; \mu_{25} = -\frac{1,5}{6,75} = -0,222$$

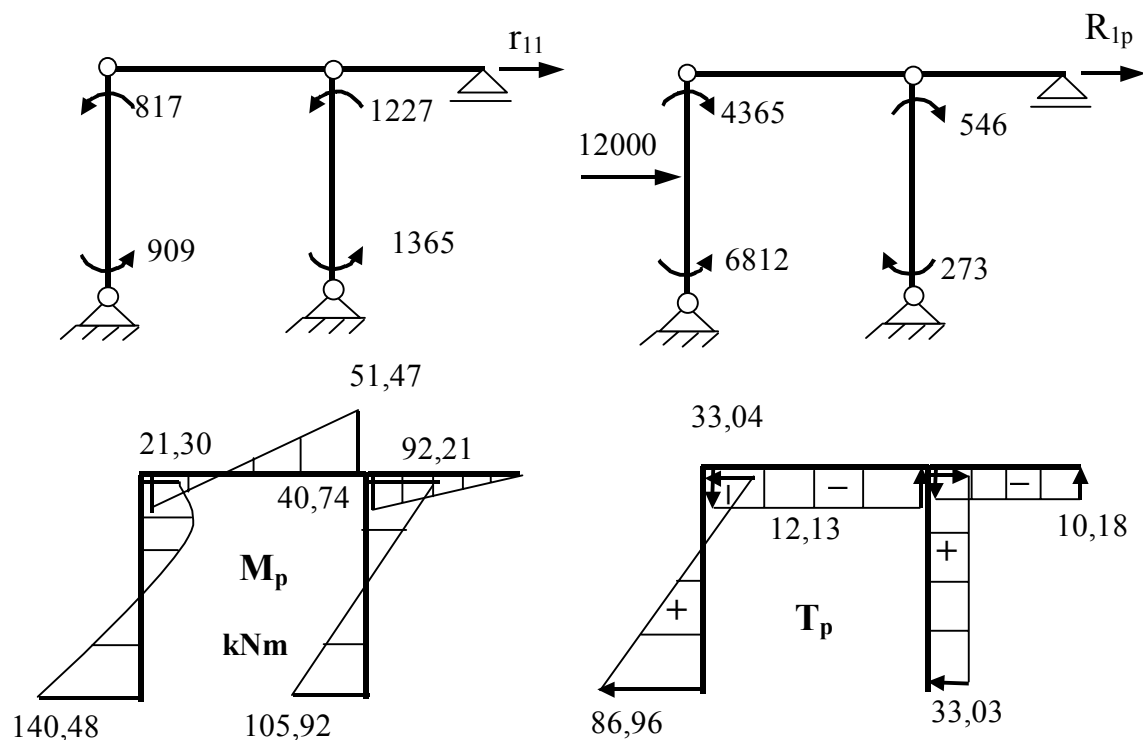
Operațiile de echilibrare a momentelor prin procedeul Cross și diagramele obținute  $M_p^f$  și  $m_1^f$ , sunt date în figura 13.9.



- Fig.13.9 -

Etapa a - II<sup>a</sup>

Se trece de la structura cu noduri fixe la structura reală cu noduri deplasabile, punând condiția ca reacțiunea totală din legătura de grad de libertate să fie egală cu zero.



- Fig.13.9 -

$$R_1=0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

$$\delta L = 0$$

$$r_{11} \cdot 1 - (909 + 817) \cdot \frac{1}{6} - (1365 + 1227) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{11} = 719,67$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 12000 \cdot \frac{1}{2} + (4365 - 6812) \cdot \frac{1}{6} + (546 + 273) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad R_{1p} = -5728,67$$

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{5728,67}{719,67} = 7,96$$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_p = M_p^f + m_1^f Z_1$$

precum și forțele tăietoare sunt date în figura 13.10.



Etapa I<sup>a</sup>. Structura este încărcată cu forțe concentrate plicate în nod. Deci  $M_p^0 \equiv 0$  și  $M_p^f \equiv 0$ . Rezultă că vor fi echilibrate prin procedeul Cross numai momentele încovoietoare produse de deplasarea  $Z_1=1$ , pe sistemul de bază.

Rigiditățile practice au fost calculate pentru  $i_0 = \frac{EI}{4} = 1$

$$\begin{aligned}
 i_{12} &= \frac{EI}{3} = \frac{4}{3}; & \rho_{12} &= \frac{4}{3}; \\
 i_{14} &= \frac{4EI}{8} = 2; & \rho_{14} &= \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5; & \sum \rho_1 &= 2,833 \\
 i_{23} &= \frac{3EI}{5} = 2,4; & \rho_{23} &= 2,4; \\
 i_{26} &= \frac{2EI}{4} = 2; & \rho_{26} &= 2; & \sum \rho_2 &= 5,73 \\
 i_{35} &= \frac{2,5EI}{5} = 2; & \rho_{35} &= 2; & \sum \rho_3 &= 4,4
 \end{aligned}$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{4}{3 \cdot 2,833} = -0,471; \quad \mu_{14} = -\frac{1,5}{2,833} = -0,529$$

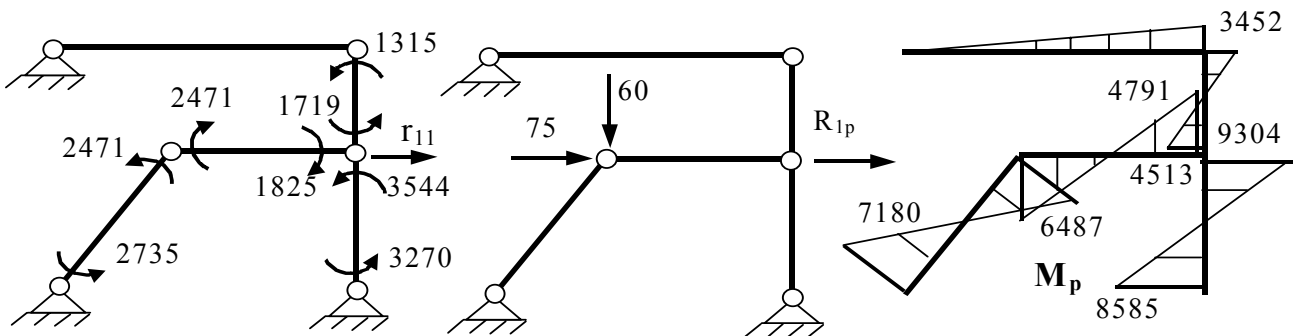
Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{4}{3 \cdot 5,73} = -0,232; \quad \mu_{23} = -\frac{2,4}{5,73} = -0,419; \quad \mu_{26} = -\frac{2}{5,73} = -0,349$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{2,4}{4,4} = -0,545; \quad \mu_{35} = -\frac{2}{4,4} = -0,455$$

Etapa a - II<sup>a</sup> Se impune condiția de trecere de la structura cu noduri fixe, la structura reală cu noduri deplasabile.



- Fig.13.12 -

$$R_1=0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

$$\delta L = 0$$

$$r_{11} \cdot 1 - (2375 + 2471 + 3270 + 3544) \cdot \frac{1}{4} - (2471 + 1825) \cdot \frac{3}{20} - (1719 + 1315) \cdot \frac{1}{3} = 0;$$

$$r_{11} = 4570,7$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 75 \cdot 1 + 60 \cdot \frac{3}{4} = 0; \quad R_{1p} = -120 \text{ kN} = -12000 \text{ daN}$$

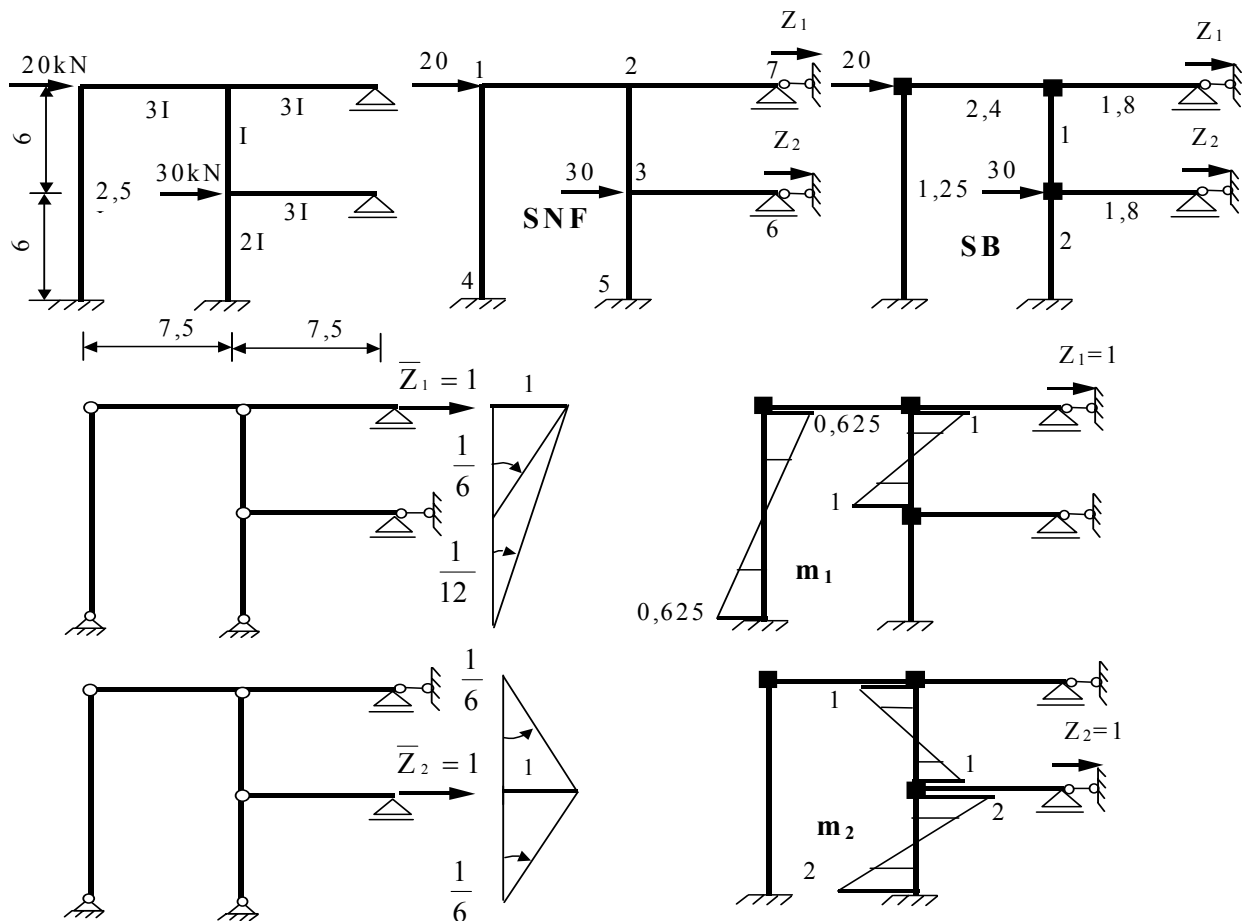
$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{12000}{4570,7} = 2,6254$$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_p = M_p^f + m_1^f Z_1$$

sunt date în figura 13.12.

### Problema 13.8 (fig.13.13)



- Fig.13.13 -

Etapa I<sup>a</sup>.

Calculul rigidităților practice și coeficienților de rigiditate

Pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$  se obține:

$$i_{12} = \frac{3EI}{7,5} = 2,4; \quad \rho_{12} = 2,4;$$

$$i_{14} = \frac{2,5EI}{12} = 1,25; \quad \rho_{14} = 1,25; \quad \sum \rho_1 = 3,65$$

$$i_{23} = \frac{EI}{6} = 1; \quad \rho_{23} = 1;$$

$$i_{27} = \frac{3EI}{7,5} = 2,4; \quad \rho_{27} = \frac{3}{4} \cdot 2,4 = 1,8; \quad \sum \rho_2 = 5,2$$

$$i_{35} = \frac{2EI}{6} = 2; \quad \rho_{35} = 2;$$

$$i_{36} = \frac{3EI}{7,5} = 2,4; \quad \rho_{36} = \frac{3}{4} \cdot 2,4 = 1,8; \quad \sum \rho_3 = 4,8$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{2,4}{3,65} = -0,657;$$

$$\mu_{14} = -\frac{1,25}{3,65} = -0,343$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{2,4}{5,2} = -0,462;$$

$$\mu_{23} = -\frac{1}{5,2} = -0,192;$$

$$\mu_{27} = -\frac{1,8}{5,2} = -0,346$$

Nodul 3

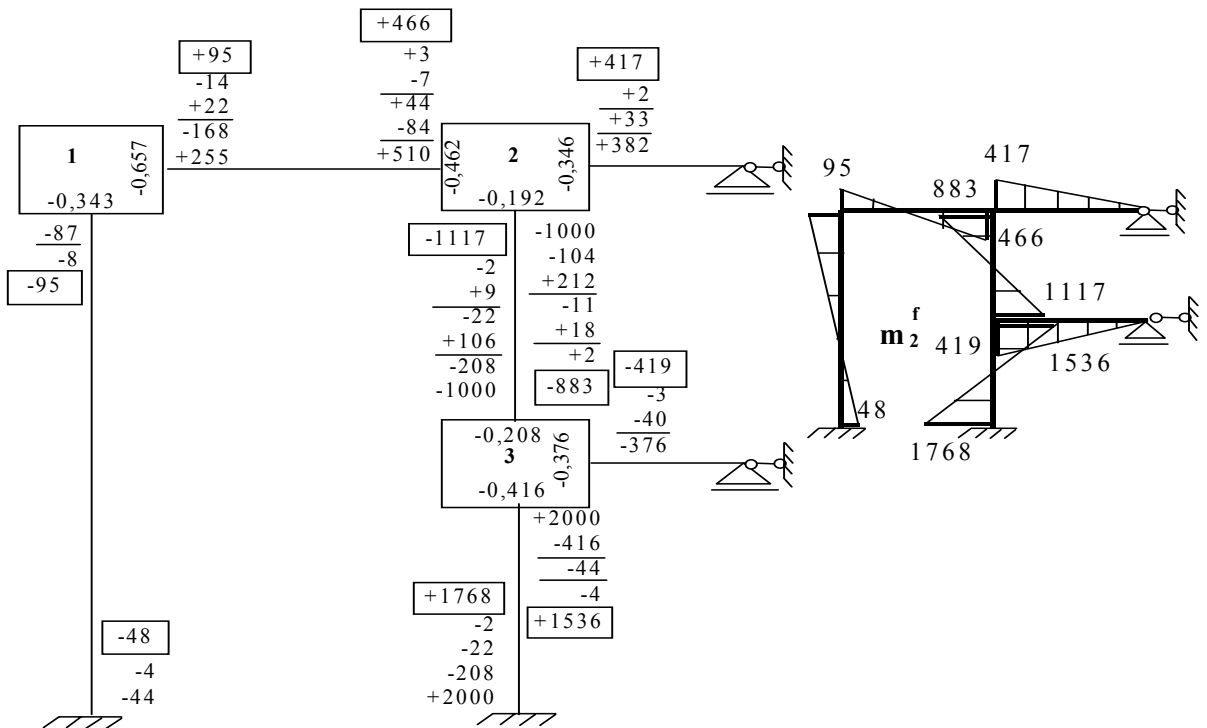
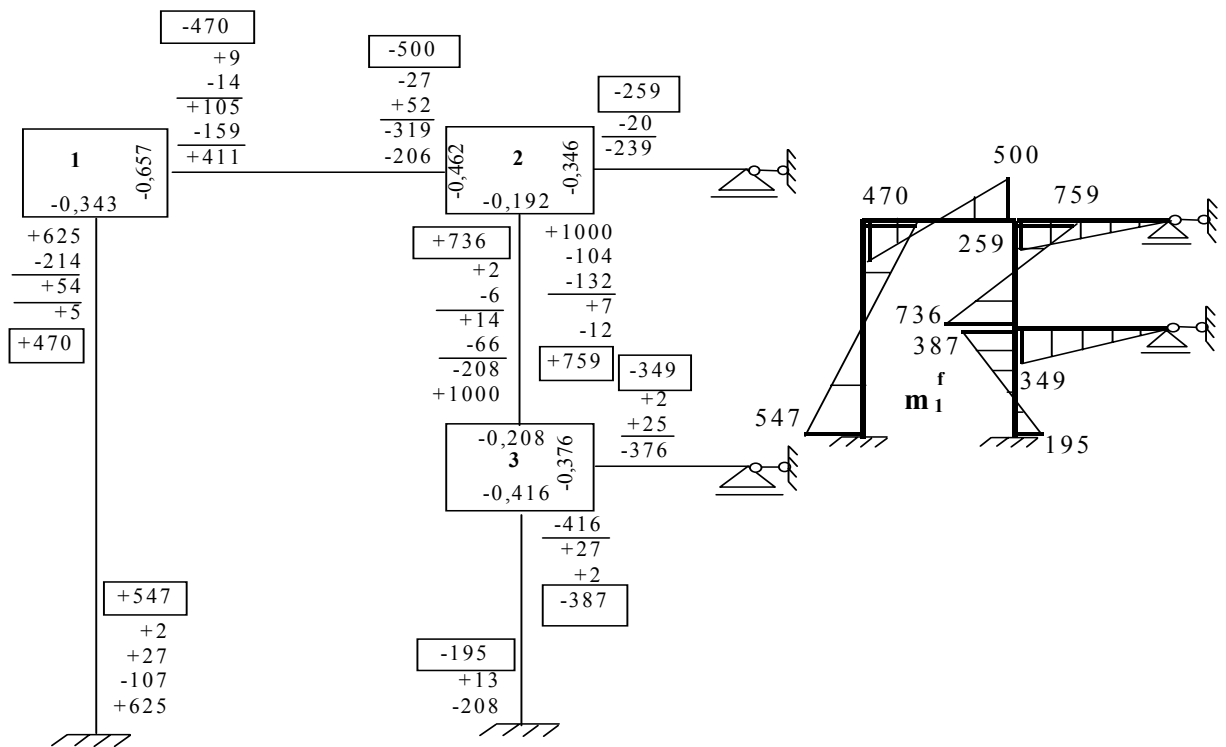
$$\mu_{32} = -\frac{1}{4,8} = -0,208;$$

$$\mu_{35} = -\frac{2}{4,8} = -0,416;$$

$$\mu_{36} = -\frac{1,8}{4,8} = -0,376$$

Forțele fiind aplicate în noduri diagrama  $M_p^0 \equiv 0$  și  $M_p^f \equiv 0$ . Vor fi echilibrate prin procedeul Cross numai momentele din diagramele unitare  $m_1$  și  $m_2$  (fig. 13.14).





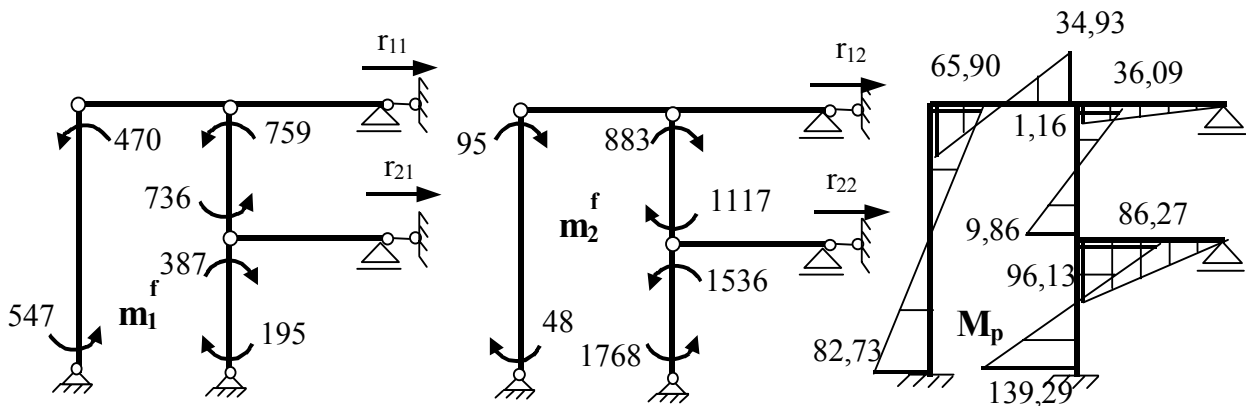
- Fig.13.14 -

Etapa a - II<sup>a</sup>

Trecerea de la sistemul cu noduri fixe, la structura reală cu noduri deplasabile.

$$R_1=0; \quad R_2=0$$

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$



- Fig.13.15 -

$$r_{11} \cdot 1 - (470 + 547) \cdot \frac{1}{12} - (759 + 735) \cdot \frac{1}{6} = 0;$$

$$r_{11} = 333,92$$

$$r_{12} \cdot 1 + (95 + 48) \cdot \frac{1}{12} + (883 + 1117) \cdot \frac{1}{6} = 0;$$

$$r_{12} = -345,25$$

$$r_{21} \cdot 1 + (759 + 736) \cdot \frac{1}{6} + (387 + 195) \cdot \frac{1}{6} = 0;$$

$$r_{21} = -346,17$$

$$r_{22} \cdot 1 - (883 + 1117) \cdot \frac{1}{6} - (1536 + 1768) \cdot \frac{1}{6} = 0;$$

$$r_{22} = 884$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{1p} = -20$$

$$R_{2p} \cdot 1 + 30 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{2p} = -30$$

Pentru  $r_{12} = r_{21}$  se alege valoarea medie  $r_{12} = -345,70$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 333,92Z_1 - 345,70Z_2 - 20 = 0 \\ -345,70Z_1 + 884Z_2 - 30 = 0 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor

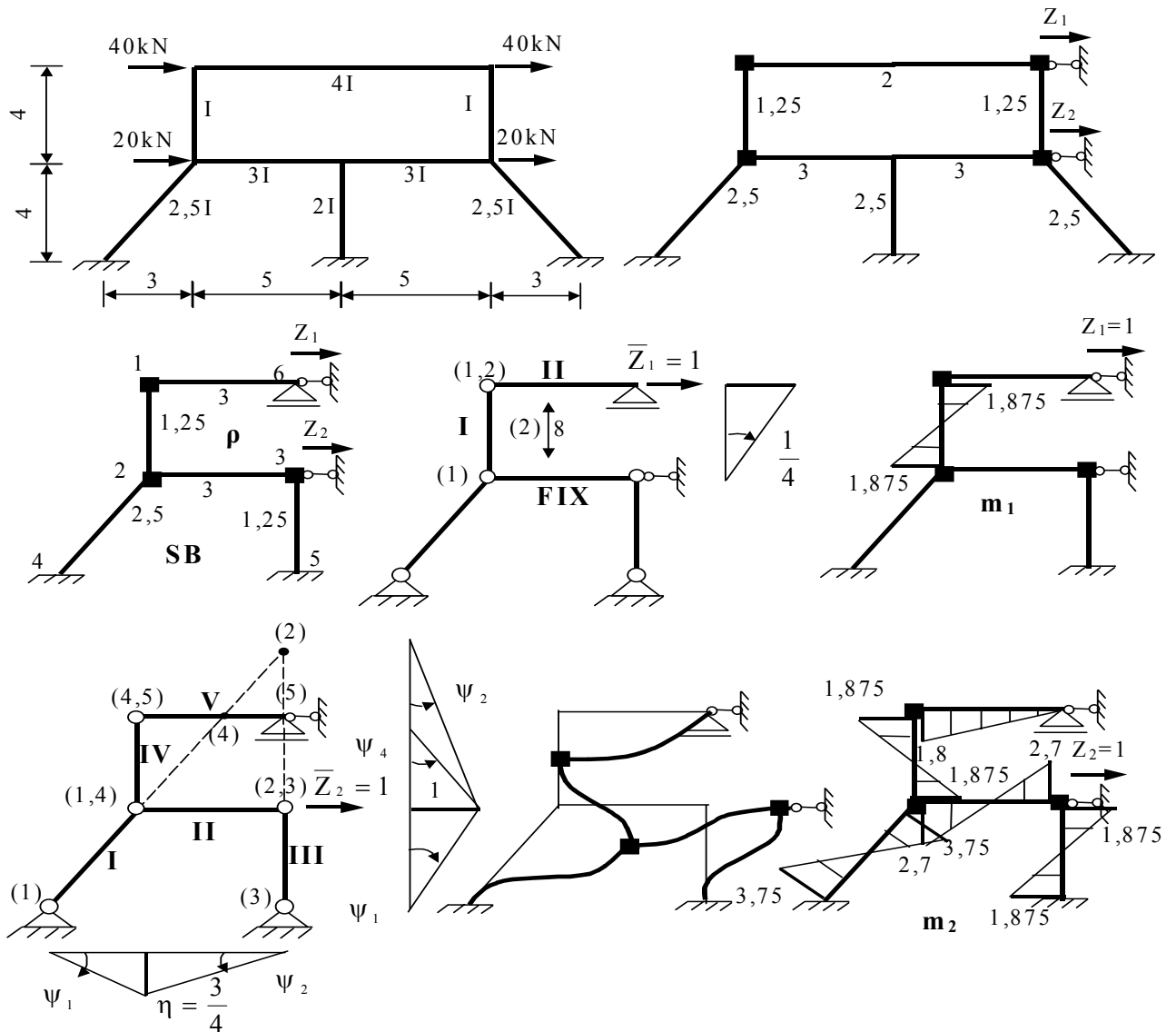
$$Z_1 = 0,1597 \text{ și } Z_2 = 0,0964$$

Diagrama finală de momente încovoietoare, calculate cu relația

$$M_p = M_p^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2$$

sunt date în figura 13.15.

**Problema 13.9 (fig.13.16)**



- Fig.13.15 -

Etapa I<sup>a</sup>. Încărcarea este antisimetrică. Se va lucra pe semistructură care are două grade de libertate.

Coeficienții de rigiditate au fost calculați pentru  $i_0 = \frac{EI}{5} = 1$

Schema Cross

$$\sum \rho_1 = 4,25; \quad \sum \rho_2 = 6,75; \quad \sum \rho_3 = 4,25$$

Coeficienții de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{1,25}{4,25} = -0,294; \quad \mu_{16} = -\frac{3}{4,25} = -0,706$$

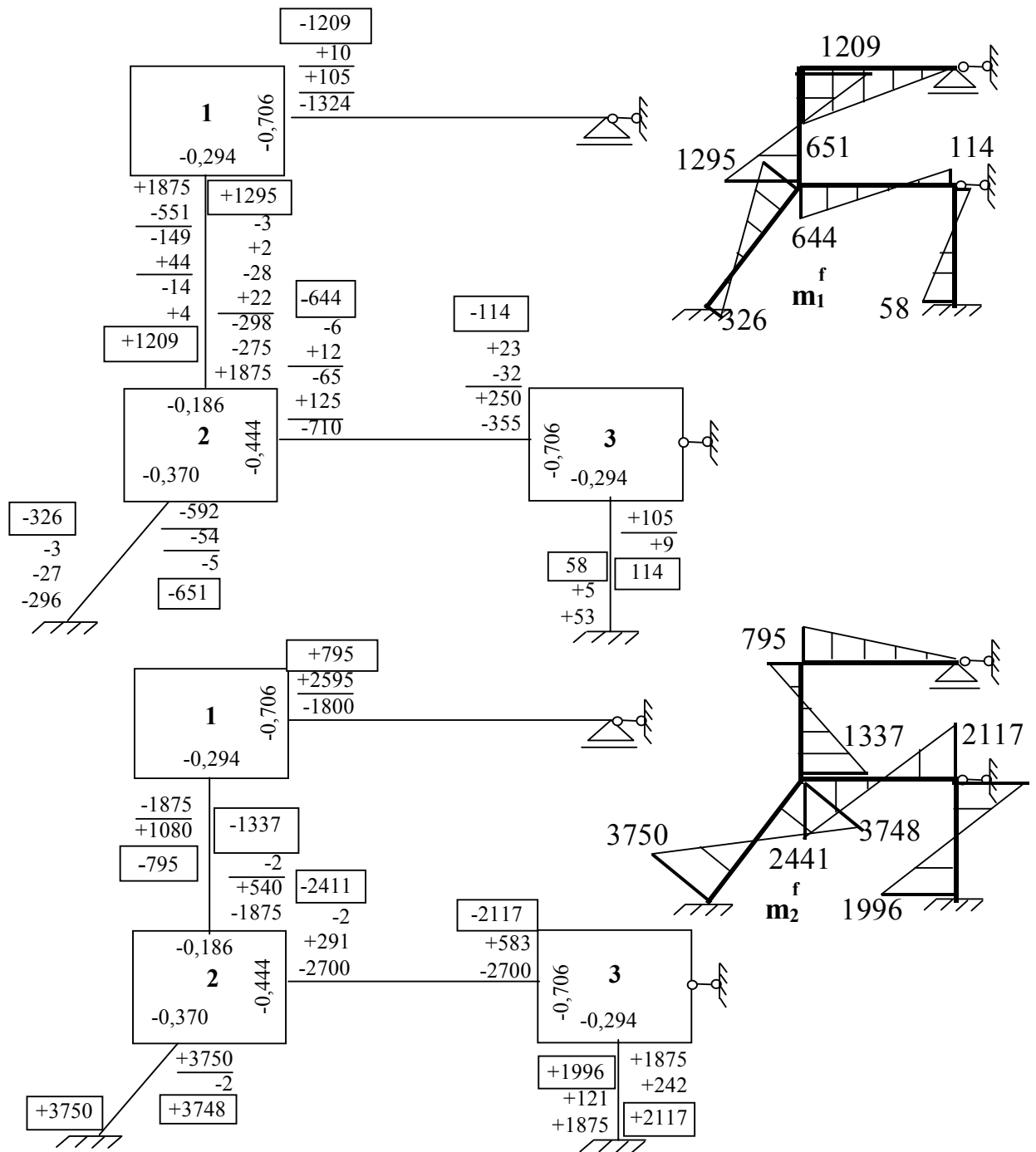
Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{1,25}{6,75} = -0,186; \quad \mu_{23} = -\frac{3}{6,75} = -0,444; \quad \mu_{24} = -\frac{2,5}{6,75} = -0,370$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{3}{4,25} = -0,706; \quad \mu_{35} = -\frac{1,25}{4,25} = -0,294$$

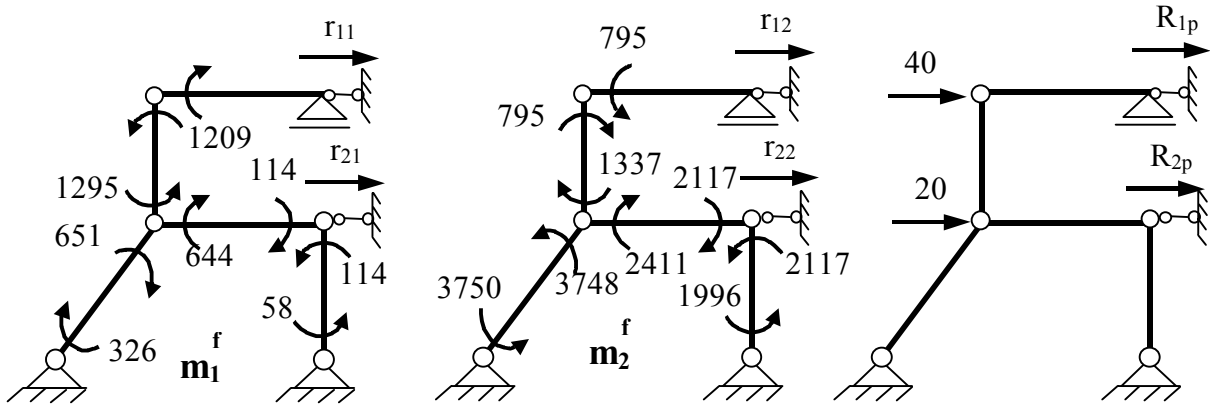
Forțele fiind aplicate în noduri diagrama  $M_p^0 \equiv 0$  și  $M_p^f \equiv 0$ . Se echilibrează numai momentele din diagramele  $m_1$  și  $m_2$  (fig. 13.17).



- Fig.13.17 -

Etapa a - II<sup>a</sup> Se trece de structura cu noduri fixe, la structura cu noduri deplasabile, impunând condițiile:  $R_1=0$ ;  $R_2=0$

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$



- Fig.13.18 -

$$r_{11} \cdot 1 - (1209 + 1295) \cdot \frac{1}{4} = 0;$$

$$r_{11} = 626$$

$$r_{12} \cdot 1 + (795 + 1337) \cdot \frac{1}{4} = 0;$$

$$r_{12} = -533$$

$$r_{21} \cdot 1 + (326 + 651) \cdot \frac{1}{4} - (114 + 58) \cdot \frac{1}{4} - (644 + 114) \cdot \frac{3}{20} + (1295 + 795) \cdot \frac{1}{4} = 0;$$

$$r_{21} = -532,20$$

$$r_{22} \cdot 1 - (3750 + 3748) \cdot \frac{1}{4} - (1996 + 2117) \cdot \frac{1}{4} - (2411 + 2117) \cdot \frac{3}{20} -$$

$$- (1337 + 795) \cdot \frac{1}{4} + 795 \cdot \frac{3}{20} = 0;$$

$$r_{22} = 3995,70$$

$$R_{1p} \cdot 1 + 40 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{1p} = -40$$

$$R_{2p} \cdot 1 + 20 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{2p} = -30$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} 626Z_1 - 533Z_2 - 40 = 0 \\ -533Z_1 + 3995,70Z_2 - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 626Z_1 - 533Z_2 - 40 = 0 \\ -533Z_1 + 3995,70Z_2 - 20 = 0 \end{cases}$$

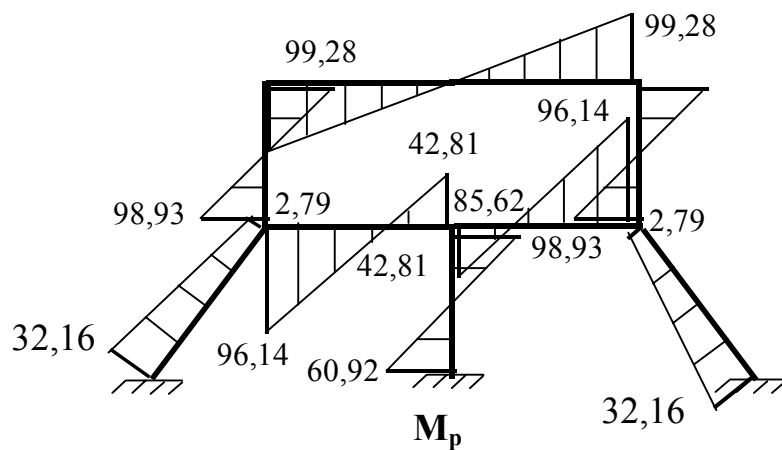
cu următoarele valori ale necunoscutelor

$$Z_1 = 0,07689 \text{ și } Z_2 = 0,01526$$

Momentele încovoietoare finale calculate cu relația

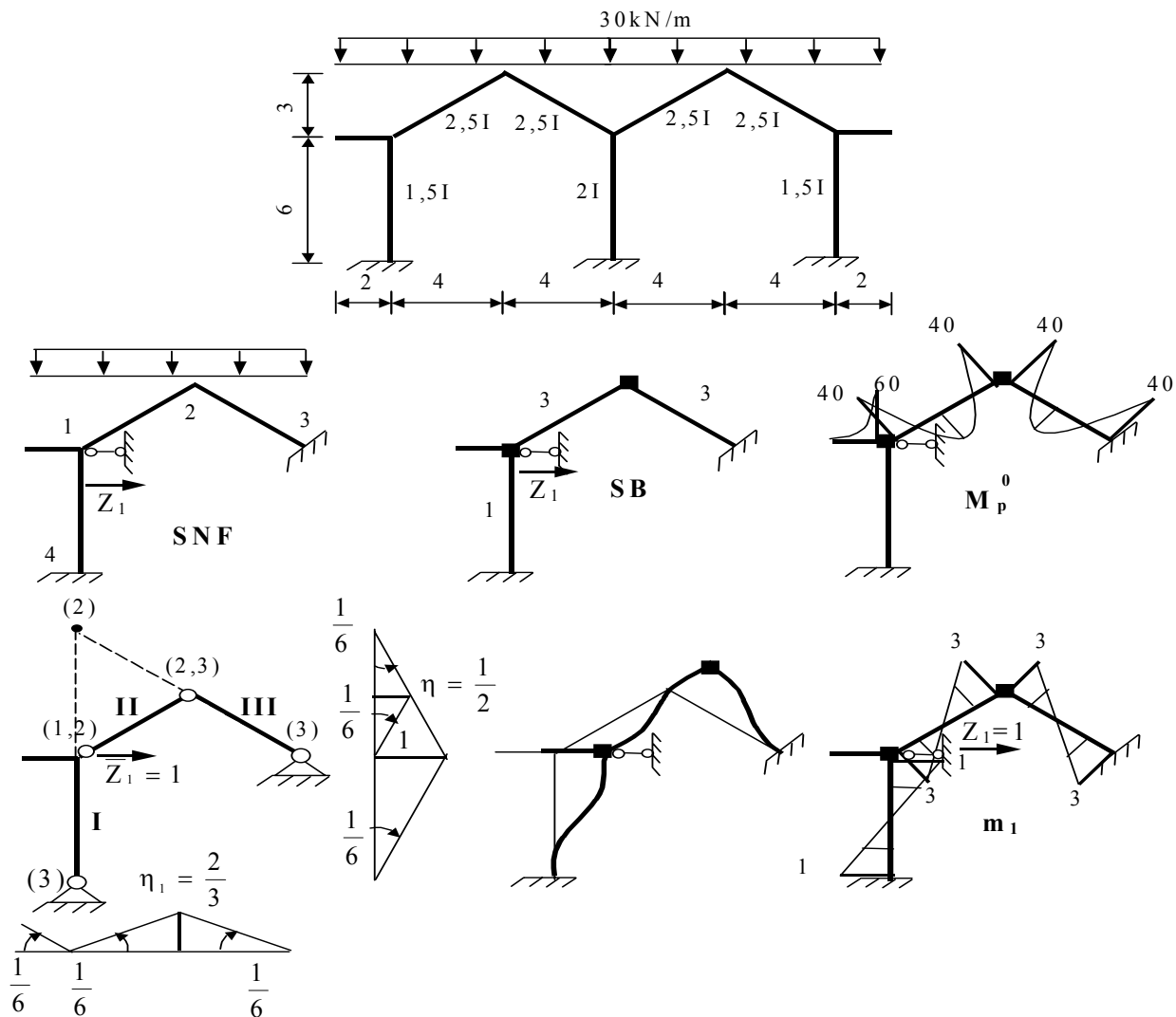
$$M_p = M_p^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2$$

sunt date în figura 13.19.



- Fig.13.19 -

**Problema 13.10 (fig.13.20)**



- Fig.13.20 -

Structura este simetrică și încărcată simetric.

Semistructura prezintă un grad de libertate. Structura cu noduri fixe va fi încărcată cu forțele exterioare și cu deplasarea pe direcția gradului de libertate.

### Etapa I<sup>a</sup>.

Echilibrarea momentelor din sistemul de bază prin procedeul Cross (fig.13.21)

Pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$  rezultă

$$i_{12} = \frac{2,5EI}{5} = 3; \quad \rho_{12} = 3;$$

$$i_{14} = \frac{EI}{6} = 1; \quad \rho_{14} = 1; \quad \sum \rho_1 = 4$$

$$i_{23} = \frac{2,5EI}{5} = 3; \quad \rho_{23} = 3; \quad \sum \rho_2 = 6$$

Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{3}{4} = -0,750;$$

$$\mu_{16} = -\frac{1}{4} = -0,250$$

Nodul 2

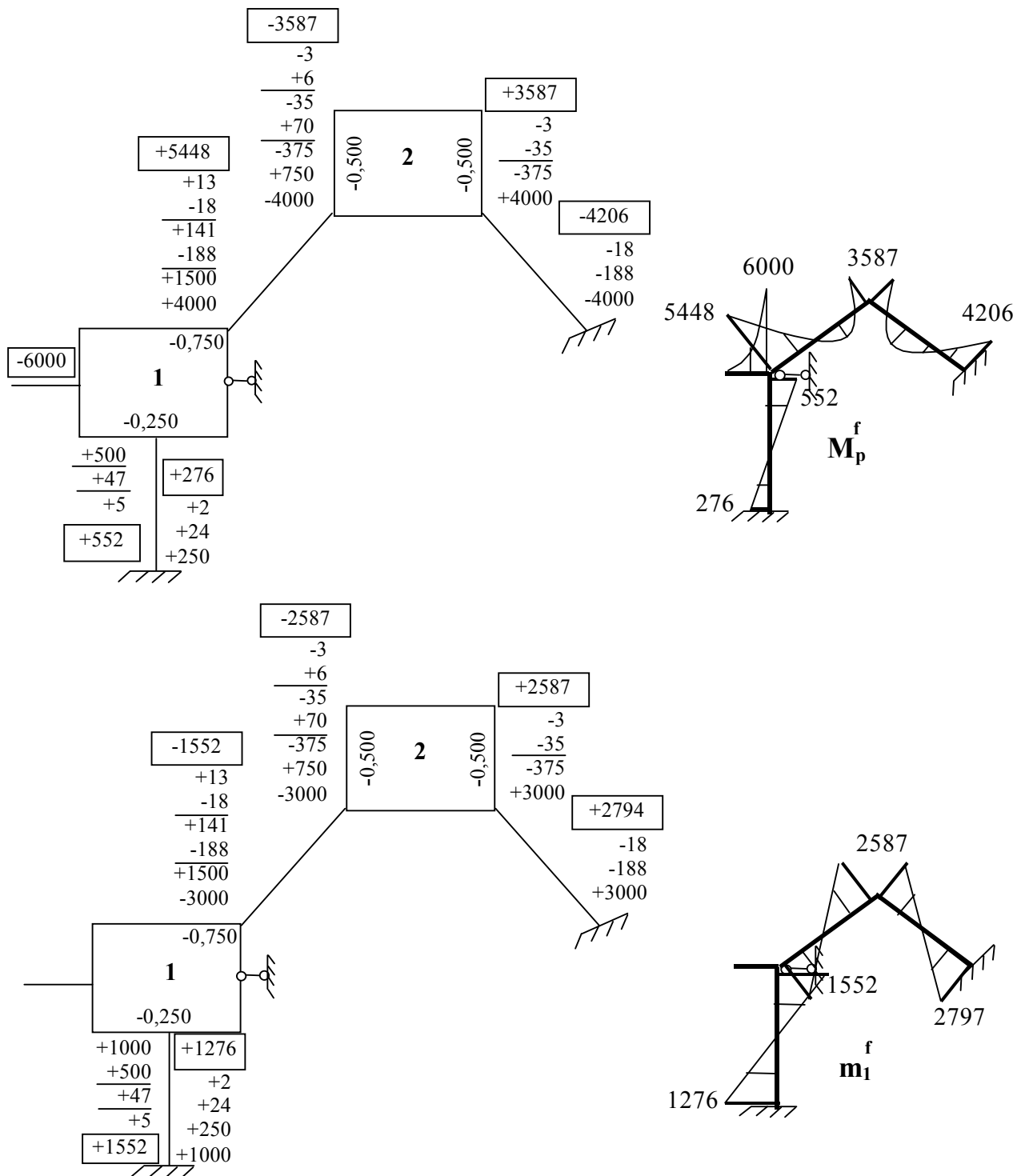
$$\mu_{21} = -\frac{3}{6} = -0,500$$

$$\mu_{23} = -\frac{3}{6} = -0,500$$

### Etapa a - II<sup>a</sup>

Trecerea de la structura cu noduri fixe, la structura reală, cu noduri deplasabile

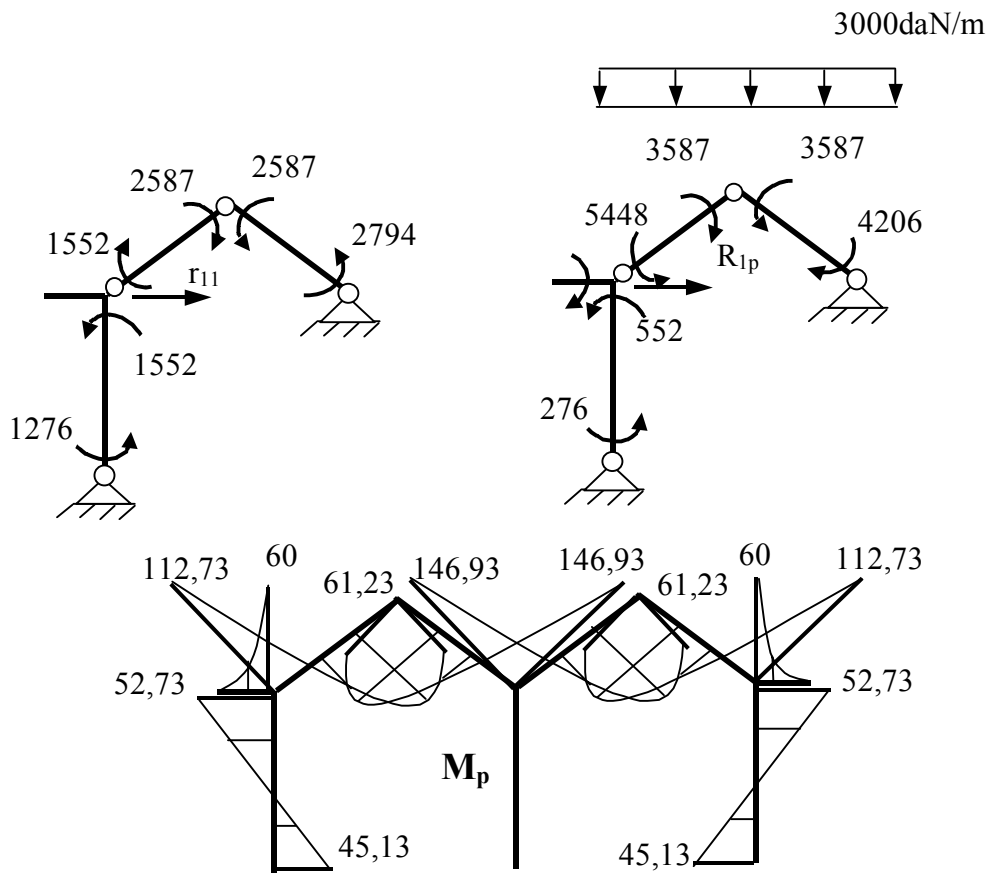
$$R_1=0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$



- Fig.13.21 -



Calculul reacțiunii  $r_{11}$  și  $R_{1p}$  (fig.13.22).



- Fig.13.22 -

$$r_{11} \cdot 1 - (1276 + 1552) \cdot \frac{1}{6} - (1552 + 2587) \cdot \frac{1}{6} - (2587 + 2794) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad r_{11} = 2058$$

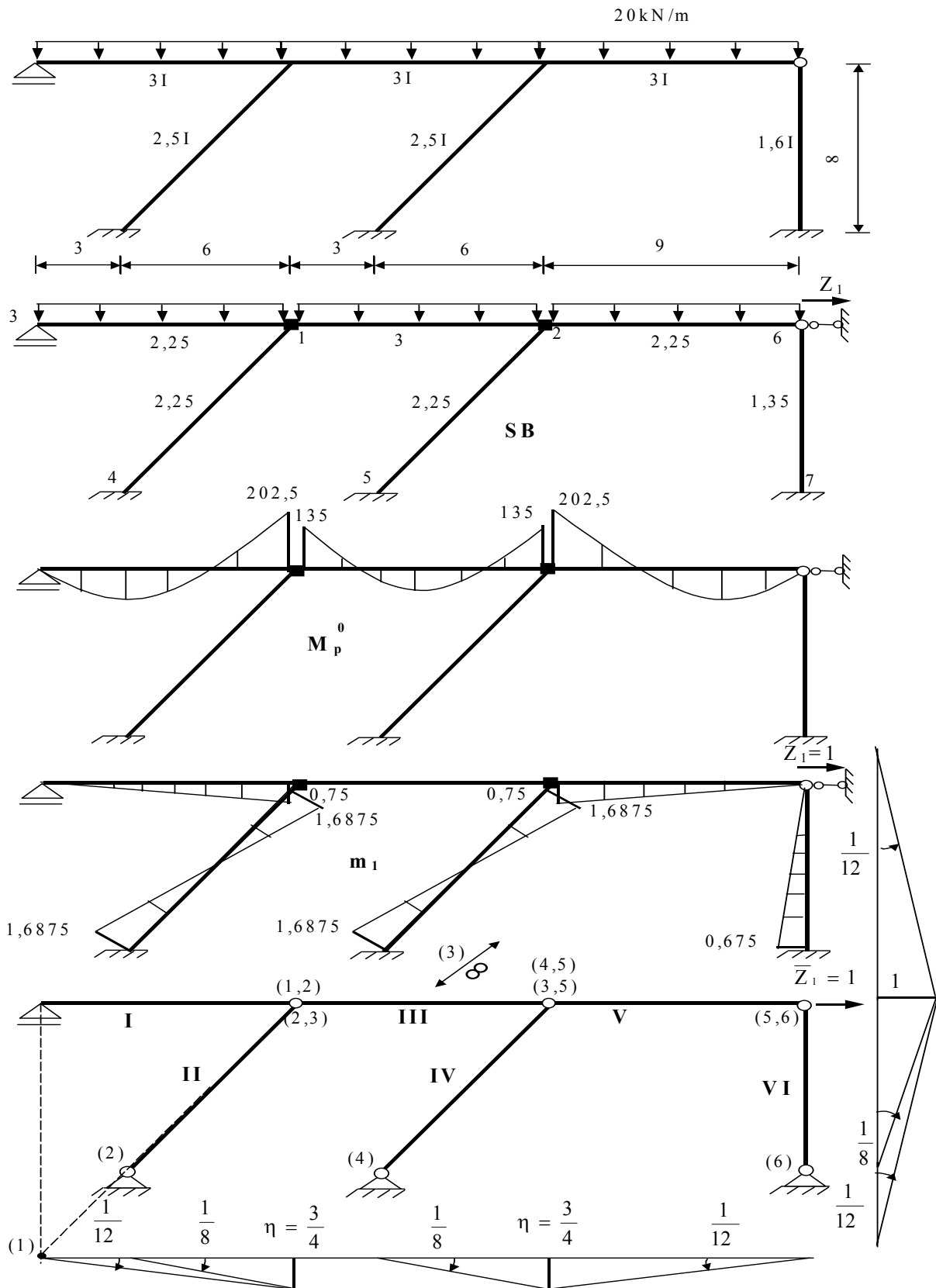
$$R_{1p} \cdot 1 + 6000 \cdot \frac{1}{6} - 3000 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} - (276 + 552) \cdot \frac{1}{6} + (-5448 + 3587) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) -$$

$$- 3000 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + (-3587 + 4206) \cdot \frac{1}{6} - 3000 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0; \quad R_{1p} = +7724,67$$

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{7724,67}{2058} = -3,7535$$

Diagrama finală de momente încovoietoare este dată în figura 13.21.

**Problema 13.11 (fig.13.23)**



- Fig.13.23 -

Etapa I<sup>a</sup>. Pentru  $i_0 = \frac{EI}{9} = 1$  au rezultat coeficienții de rigiditate  $\rho_{ij}$  înscriși pe sistemul de bază

$$\sum \rho_1 = \sum \rho_2 = 2,25 + 2,25 + 3 = 7,5$$

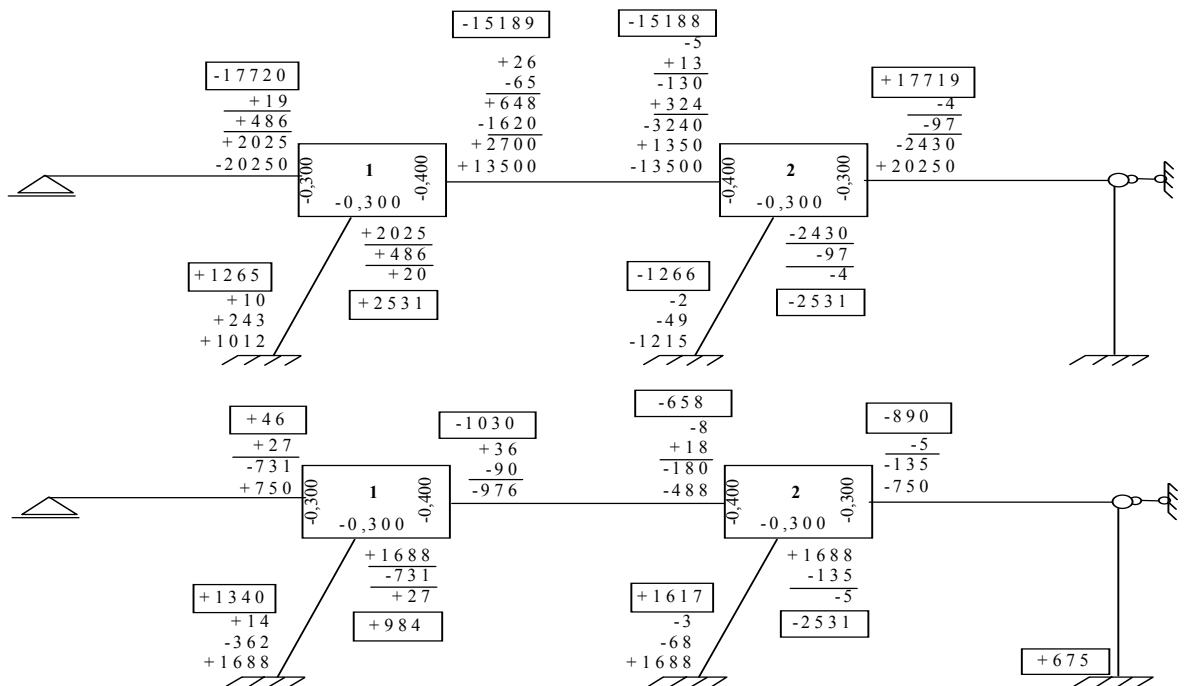
Coeficienții de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{3}{7,5} = -0,400; \quad \mu_{13} = -\frac{2,25}{7,5} = -0,300; \quad \mu_{14} = -\frac{2,25}{7,5} = -0,300$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{3}{7,5} = -0,400; \quad \mu_{25} = -\frac{2,25}{7,5} = -0,300; \quad \mu_{26} = -\frac{2,25}{7,5} = -0,300$$



- Fig.13.24 -

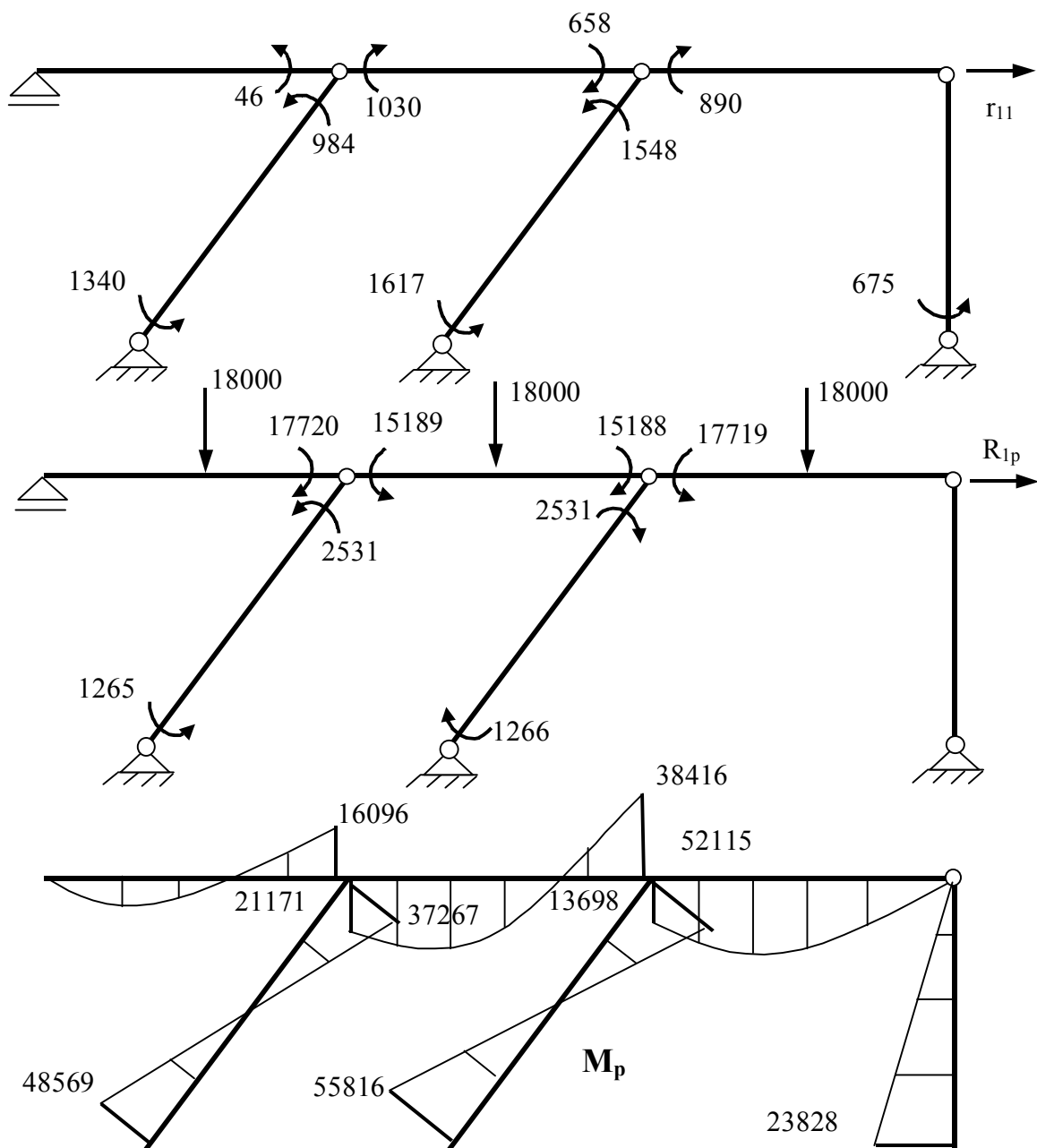
Etapa a - II<sup>a</sup> Trecerea de la sistemul cu noduri fixe, la structura reală, cu noduri deplasabile

Ecuția de condiție:

$$R_1=0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1p} = 0$$

$$r_{11} \cdot 1 - 46 \cdot \frac{1}{12} - (984 + 1340) \cdot \frac{1}{8} - (1548 + 1617) \cdot \frac{1}{8} - 890 \cdot \frac{1}{12} - 675 \cdot \frac{1}{8} = 0;$$

$$r_{11} = 848,5$$



- Fig.13.25 -

$$R_{1p} \cdot 1 + 18000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 17720 \cdot \frac{1}{12} + 18000 \cdot \frac{3}{4} - (2531 + 1265) \cdot \frac{1}{8} +$$

$$+ (2531 + 1266) \cdot \frac{1}{8} + 18000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 17719 \cdot \frac{1}{12} = 0; \quad R_{1p} = -29953,33$$

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{29953,33}{848,5} = 35,3015$$

Diagrama finală de momente încovoietoare este dată în figura 13.25.

## CAPITOLUL XIV

### EFECTUL VARIAȚIEI DE TEMPERATURĂ

În capitolele precedente a fost prezentată – prin exemple - comportarea structurilor de rezistență – static determinate și static nedeterminate – supuse acțiunii forțelor. În realitate asupra construcțiilor pot acționa și alte tipuri de încărcări, printre care și variația de temperatură.

Particularitatea efectului variației de temperatură este următorul:

- la structurile static determinate variația de temperatură produce numai modificarea configurației geometrice a structurii, dar nu produce eforturi (aceasta datorită numărului minim de legături pe care le are structura);

- la structurile static nedeterminate – existând mai multe legături decât numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice – deformarea structurii sub acțiunea variației de temperatură nu mai este liberă și din această cauză apar și eforturi. Aceste eforturi depind de natura materialului și de dimensiunile secțiunilor transversale, prin momentul de inerție.

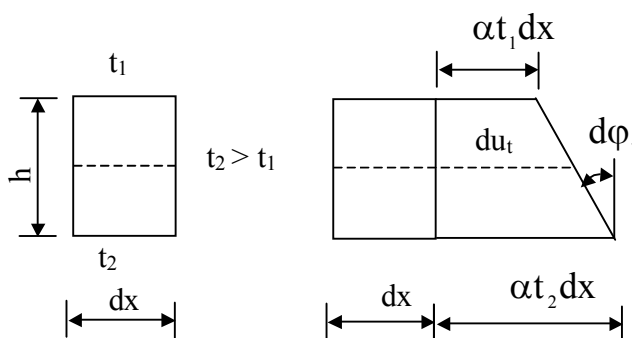
#### STRUCTURI STATIC DETERMINATE

În cazul unei bare, supusă unei variații de temperatură  $t^0$  Celsius, variația lungimii barei este

$$\Delta L_t = \alpha \cdot t \cdot L \quad (\text{XIV.1})$$

unde  $\alpha$  reprezintă coeficientul de dilatare termică liniară, iar  $L$  lungimea barei. Pentru coeficientul  $\alpha$  se va utiliza valoarea  $\alpha = 10^{-5}$ .

Efectul unei variații de temperatură – diferită la cele două extremități ale secțiunilor transversale a unei bare se obține din analiza unui element infinit mic de lungime  $dx$  (fig.XIV.1)



- Fig.XIV.1 -

Notând  $t_m = \frac{t_2 - t_1}{2}$  și  $\Delta t = t_2 - t_1$ , din figura XIV.1 se obține

$$du_t = \alpha \cdot t_m \cdot dx \text{ și } d\varphi_t = \frac{1}{h} \cdot \alpha \cdot \Delta t \cdot dx \quad (\text{XIV.2})$$

Dacă asupra structurii acționează un sistem de forțe  $P_i$  care are ca efecte momentul încovoietor  $M_i$  și o forță axială  $N_i$  și peste această situație se suprapune o variație de temperatură rezultă următoarele lucruri mecanice

$$L_{\text{ext}} = \sum P_i \Delta_{it} \text{ și } L_{\text{ef}} = \alpha \int N_i \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot M_i \cdot dx \quad (\text{XIV.3})$$

Deoarece  $L_{\text{TOT}} = L_{\text{ext}} - L_{\text{ef}} = 0$  rezultă  $L_{\text{ext}} = L_{\text{ef}}$  și

$$\sum P_i \Delta_{it} = \alpha \int N_i \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot M_i \cdot dx \quad (\text{XIV.4})$$

Această relație poate fi utilizată pentru calculul deplasărilor secțiunilor structurilor static determinate dacă se face particularizarea  $P_i = 1$  și efectele sale sunt  $n_i$  și  $m_i$ . Expresia deplasării este

$$\Delta_{it} = \alpha \int n_i \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_i \cdot dx \quad (\text{XIV.5})$$

## STRUCTURI STATIC NEDETERMINATE

### A. Metoda eforturilor

Forma sistemului de ecuații este următoarea:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2t} = 0 \\ \vdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} = 0 \end{cases} \quad (\text{XIV.6})$$

unde termenii liberi au expresia (XIV.5), deoarece sistemul de bază în această metodă este un sistem static determinat.

Coeficienții necunoscutelor nu depind de încărcare, deci se calculează cu relațiile obișnuite acestei metode. Deoarece sistemul de bază este static determinat nu există – în această metodă – diagramă  $M_t^0$  și ca urmare diagrame finală se obține astfel:

$$M_t = m_1X_1 + m_2X_2 + \dots + m_nX_n \quad (\text{XIV.7})$$

În cazul particular al grinzilor continue, ecuația celor trei momente capătă forma:

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k = -3EI_0\alpha\left(\frac{1_{ij}}{h_{ij}}\Delta t_{ij} + \frac{1_{jk}}{h_{jk}}\Delta t_{jk}\right) \quad (\text{XIV.8})$$

La arcele dublu articulate expresia necunoscutei – împingerea arcului – este

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha \left( \int \frac{\Delta t}{h} y ds + L \cdot t_m \right)}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (\text{XIV.9})$$

La arcul cu tirant necunoscuta are expresia

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha \left( \int \frac{\Delta t}{h} y ds + L \cdot t_m - L \cdot t_0 \right)}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2 + L \cdot i_t^2} \quad (\text{XIV.10})$$

unde  $t_0$  reprezintă variația de temperatură la care este supus tirantul.

La arcul dublu încastrat – simetric și încărcat simetric – cu necunoscutele transferate în centrul elastic, expresiile acestora sunt:

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha \left( \int \frac{\Delta t}{h} y ds + L \cdot t_m \right)}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \text{ și } X_2 = - \frac{EI_0 \alpha \int \frac{\Delta t}{h} y ds}{\int \frac{I_0}{I} ds} \quad (\text{XIV.11})$$

Dacă arcul are secțiunea constantă și  $\Delta t$  este constant (așa cum este în realitate) atunci  $\int y ds = 0$  (din condiția pentru transferul necunoscutelor în centrul elastic) și necunoscuta  $X_1$  capătă forma:

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha L t_m}{\int y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (\text{XIV.12})$$

## B. Metoda deplasărilor

Forma sistemului de ecuații este:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1t} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2t} = 0 \\ \vdots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nt} = 0 \end{cases} \quad (\text{XIV.13})$$

Termenii liberi se determină din efectul temperaturii medii și a diferenței de temperatură  $\Delta t$  asupra sistemului de bază, pe care se obține diagrama

$$M_t^0 = M_{tm}^0 + M_{\Delta t}^0 \quad (\text{XIV.13})$$

și aceasta deoarece sistemul de bază în această metodă este static nedeterminat.

Diagrama finală de moment încovoietor se determină prin suprapunerea obișnuită de efecte

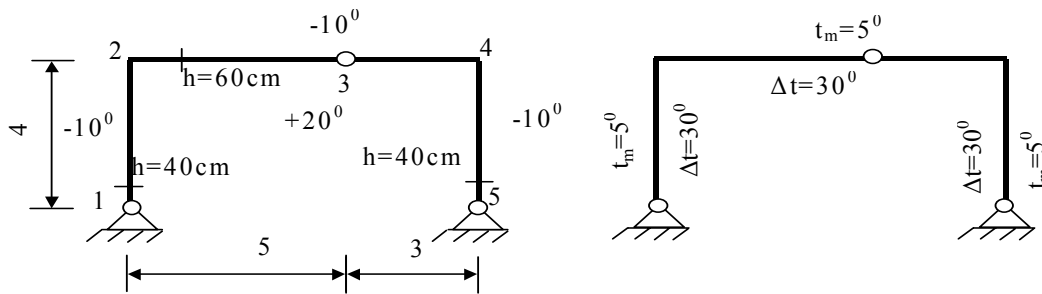
$$M_t = M_t^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n \quad (\text{XIV.14})$$

Observație: Pornind de la diagrama  $M_t^o$  se pot obține eforturile finale utilizând procedeul Cross.

## APLICAȚII

Să se calculeze deplasările sau eforturile produse de variația de temperatură, specificate în fiecare caz în parte.

**Problema 14.1 (fig.14.1)** Să se calculeze deplasările  $u_4$  și  $v_4$  la structura static determinată din figura 14.1.



- Fig.14.1 -

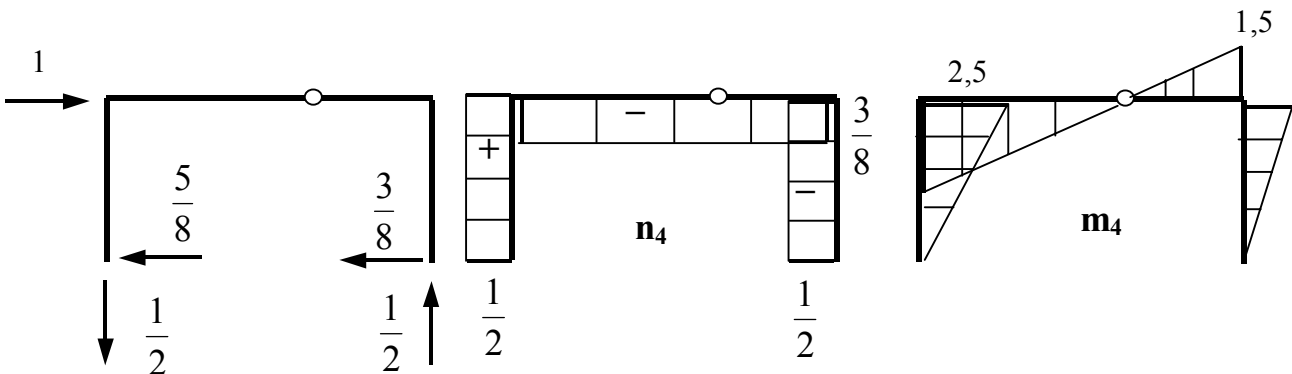
Inițial se determină temperatura medie  $t_m$  și diferența de temperatură  $\Delta t$  pentru fiecare bară. Aceste mărimi reprezintă de fapt încărcarea structurii.

Calculul deplasării  $u_4$  (fig.14.2)

Expresia deplasării este

$$u_4 = \alpha \int n_4 \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_4 \cdot dx$$

unde  $n_4$  și  $m_4$  sunt eforturile din figura 14.2.



- Fig.14.2 -

Semnul termenilor din integrale se stabilește în modul următor:

- dacă efortul axial are același efect ca temperatura medie (alungire sau scurtare a barei) semnul este plus. În caz contrar semnul este minus.



- dacă momentul încovoietor întinde fibra mai cald atunci semnul este plus. În caz contrar semnul este minus.

De observat că  $\int n_i dx$  reprezintă aria diagramei de forță axială pe o bară, iar  $\int m_i dx$  aria diagramei de moment încovoietor pe o bară.

$$u_4 = \alpha \left[ 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 5 \cdot \frac{3}{8} \cdot 8 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] + \alpha \left[ \frac{30}{0,40} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,5 + \frac{30}{0,60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 - \frac{30}{0,60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 - \frac{30}{0,40} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,5 \right]$$

$$u_4 = \alpha [-15 + 375 + 250 - 112,5 - 225]$$

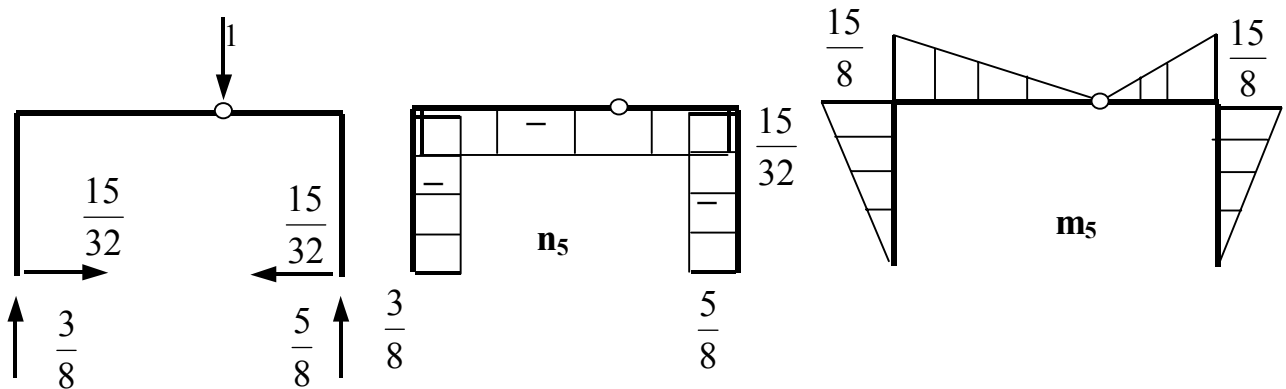
$$u_4 = \alpha [-15 + 287,5] = 272,5\alpha = 0,002725m = 2,725mm$$

Din expresia deplasării  $u_4$  se constată că efectul forței axiale este de  $15\alpha$  în timp ce efectul momentului încovoietor este mult mai mare  $287,5\alpha$  (de aproape 20 de ori mai mare).

#### Calculul deplasării $v_3$ (fig.14.3)

Expresia deplasării  $v_3$  este

$$v_3 = \alpha \int n_3 \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_3 \cdot dx$$

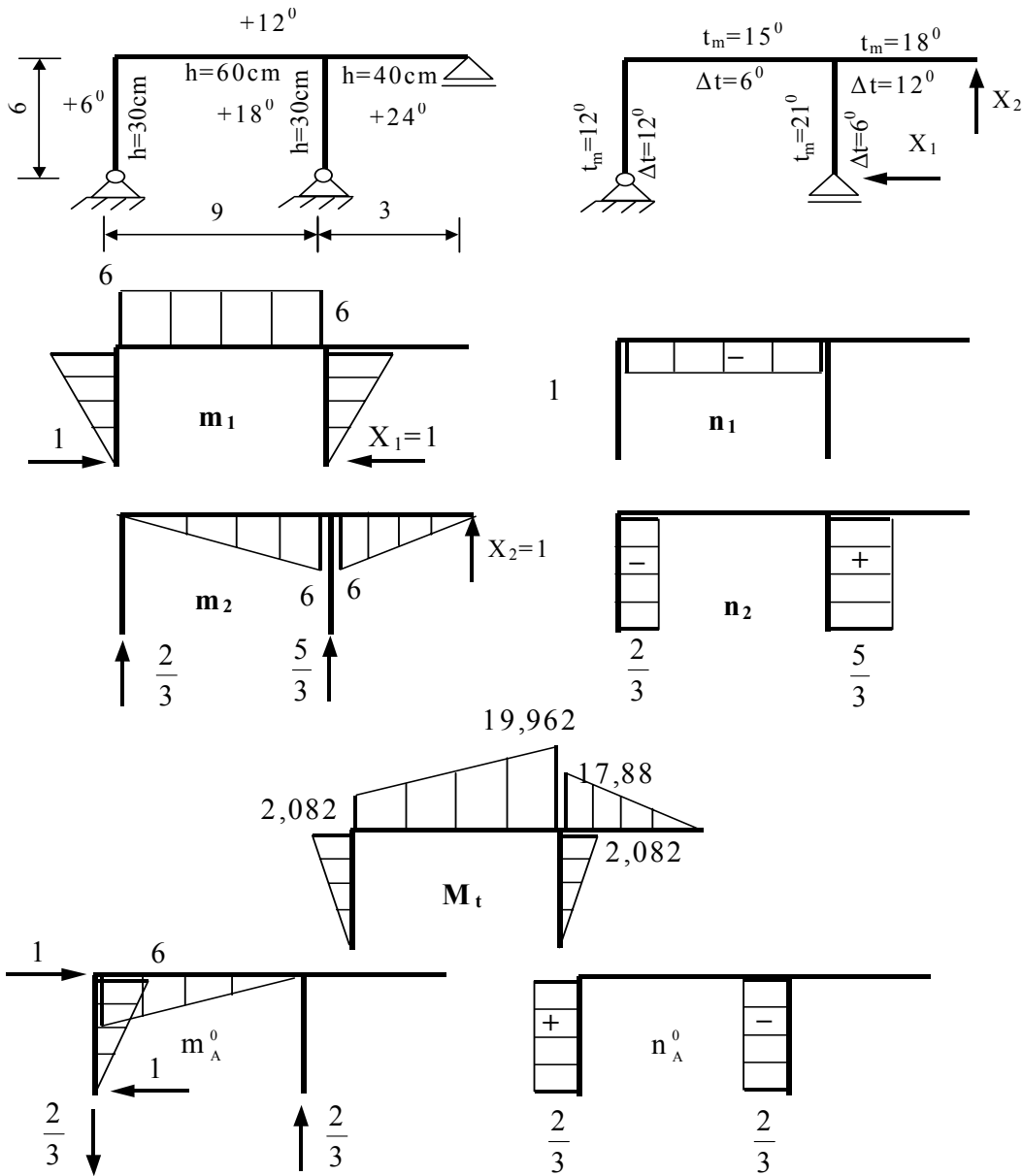


- Fig.14.3 -

$$v_3 = \alpha \left[ -5 \cdot \frac{3}{8} \cdot 4 - 5 \cdot \frac{15}{32} \cdot 8 - 5 \cdot \frac{5}{8} \cdot 4 \right] + \alpha \left[ -\frac{30}{0,40} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{15}{8} - \frac{30}{0,60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{15}{8} - \frac{30}{0,60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{15}{8} - \frac{30}{0,40} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{15}{8} \right]$$

$$v_3 = \alpha [-38,75 - 937,5] = -976,25\alpha = -0,0097625m = -9,7625mm$$

**Problema 14.2 (fig.14.4)** Să se calculeze diagrama de momente încovoietoare la structura din figură precum și deplasarea  $u_A$ . Se cunoaște  $EI=24000kNm^2$ .



- Fig. 14.4 -

Structura a fost analizată în capitolul 9 la problema 9.5, astfel că vor fi utilizați coeficienții necunoscutelor calculați la acea aplicație.

Ecuțiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0 \end{cases}$$

unde termenii liberi se calculează cu expresia (XIV.5)

Coeficienții necunoscutelor sunt:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{252}{EI}; \delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{54}{EI}; \delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{72}{EI}$$

Termenii liberi sunt:

$$\Delta_{1t} = \alpha \int n_1 \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_1 \cdot dx$$

$$\Delta_{1t} = \alpha [-15 \cdot 1 \cdot 9] + \alpha \left[ -\frac{12}{0,30} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 - \frac{6}{0,60} \cdot 6 \cdot 9 + \frac{6}{0,30} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right] =$$

$$= -1035\alpha$$

$$\Delta_{2t} = \alpha \int n_2 \cdot t_m \cdot dx + \alpha \int \frac{\Delta t}{h} \cdot m_2 \cdot dx$$

$$\Delta_{2t} = \alpha \left[ -12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 21 \cdot \frac{5}{3} \cdot 6 \right] + \alpha \left[ \frac{6}{0,60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 + \frac{12}{0,40} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right] = 972\alpha$$

Sistemul de ecuații este

$$\begin{cases} \frac{252}{EI} X_1 - \frac{54}{EI} X_2 - 1035 \cdot 10^{-5} = 0 \\ -\frac{54}{EI} X_1 + \frac{72}{EI} X_2 + 972 \cdot 10^{-5} = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 252X_1 - 54X_2 - 248,4 = 0 \\ -54X_1 + 72X_2 + 233,28 = 0 \end{cases}$$

cu următoarele valori ale necunoscutelor

$$X_1 = 0,347 \text{ și } X_2 = -2,980$$

Momentele încovoietoare au fost calculate cu relația

$$M_t = m_1 X_1 + m_2 X_2$$

și sunt date în figura 14.4.

Diagrama  $M_t$  indică faptul că la structurile static nedeterminate, supuse acțiunii variației de temperatură, fibra întinsă de momentele încovoietoare este fibra mai rece.

Calculul deplasării unei secțiuni, în cazul acțiunii variației de temperatură se realizează cu relația

$$\Delta_i = \Delta_i^0 + \int \frac{m_i^0 M_t}{EI} dx$$

unde  $\Delta_i^0$  reprezintă deplasarea pe sistemul de bază utilizat în calculul deplasării respective, iar  $m_i^0$  este diagrama de momente încovoietoare produsă pe același sistem de bază de forța egală cu unitatea.

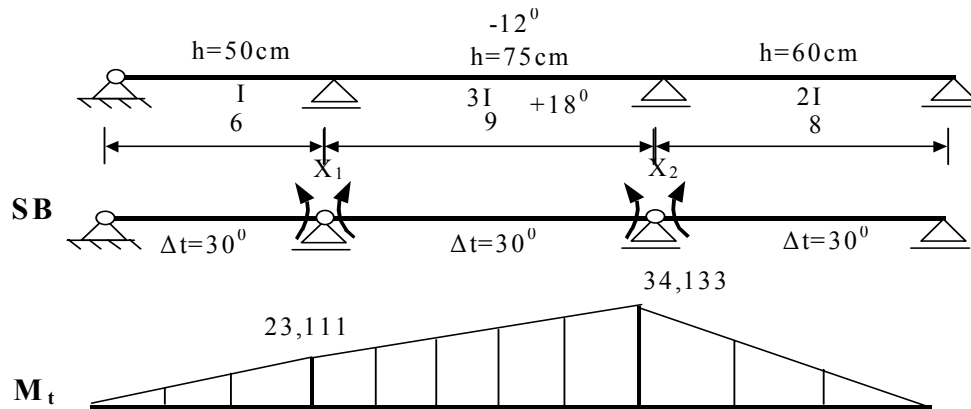
$$u_A = \alpha \left[ 12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - 21 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right] + \alpha \left[ \frac{12}{0,30} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 + \frac{6}{0,60} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \right] -$$

$$- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,082 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2,082 + \frac{1}{3} \cdot 19,962 \right)$$

$$u_A = \alpha [-36 + 720 + 270] - \frac{24,984}{EI} - \frac{72,378}{EI} = 954\alpha - \frac{97,362}{EI} =$$

$$u_A = 0,00548m = 5,48mm$$

**Problema 14.3 (fig.14.5)** Diagrama de momente încovoietoare la grinda continuă din figură. Temperatura exterioară este  $-12^{\circ}$ , temperatura interioară  $+18^{\circ}$ , produsul  $EI=24000\text{kNm}^2$ .



- Fig. 14.5 -

Lungimile transformate calculate pentru  $I_0=I$

$$\lambda_{01} = 6; \quad \lambda_{12} = 3; \quad \lambda_{23} = 4$$

Ecuțiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2(6+3)X_1 + 3X_2 = -3 \cdot 24000 \cdot \alpha \left( \frac{30}{0,50} \cdot 6 + \frac{30}{0,75} \cdot 9 \right) \\ 3X_1 + 2(3+4)X_2 = -3 \cdot 24000 \cdot \alpha \left( \frac{30}{0,75} \cdot 9 + \frac{30}{0,60} \cdot 8 \right) \end{cases}$$

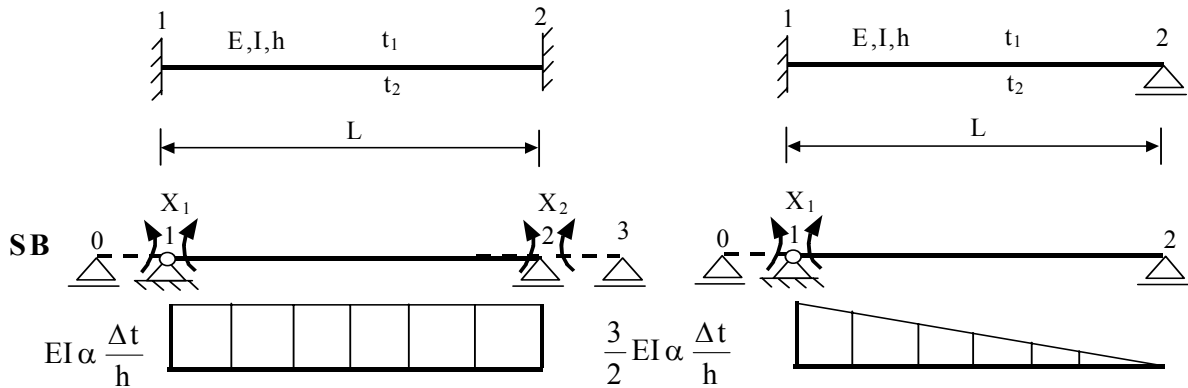
sau

$$\begin{cases} 18X_1 + 3X_2 = -518,40 \\ 3X_1 + 14X_2 = -547,20 \end{cases}$$

cu valorile necunoscutelor  $X_1 = -23,111$  și  $X_2 = -34,133$

Diagrama finală de moment încovoietor este dată în figura 14.5. Se constată că fibra mai rece este fibra întinsă.

**Problema 14.4 (fig.14.6)** Diagrama de momente încovoietoare pentru grinzile cu o singură deschidere ( $t_2 > t_1$ ).



- Fig.14.6 -

Ecuțiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2LX_1 + LX_2 = -3 \cdot EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot L \\ LX_1 + 2LX_2 = -3 \cdot EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot L \end{cases}$$

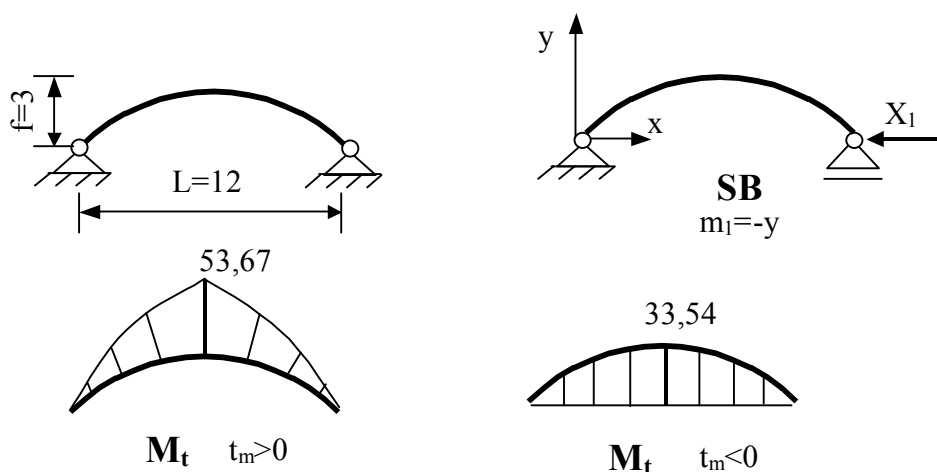
$$X_1 = X_2 = -EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h}$$

Ecuția de condiție este:

$$2LX_1 = -3 \cdot EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot L$$

$$X_1 = -\frac{3}{2} EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h}$$

**Problema 14.5 (fig.14.7)** Să se calculeze eforturile la arcul parabolic dublu articular ce este acționat de o variație uniformă de temperatură, în două situații  $t_m = +40^\circ$ ,  $t_m = -25^\circ$ . Se cunosc  $b \times h = 40 \times 60 \text{ cm}^2$  și  $E_b = 300000 \text{ daN/cm}^2$ .



- Fig. 14.7 -

Expresia necunoscutei este (vezi relația XIV.9)

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha L t_m}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2}$$

Cazul  $t_m = +40^\circ \text{C}$

$$EI_0 \alpha L t_m = 30000000 \cdot 72 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot 12 \cdot 40 = 1036,80$$

$$\int \frac{I_0}{I} y^2 ds = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{4fx}{L^2} (L-x) \right]^2 dx = \frac{8f^2 L}{15} = \frac{8 \cdot 3^2 \cdot 12}{15} = 57,60$$

$$L \cdot i_0^2 = 12 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 0,36$$

$$X_1 = \frac{1036,80}{57,6 + 0,36} = 17,89 \text{ kN}$$

Cazul  $t_m = -25^\circ \text{C}$

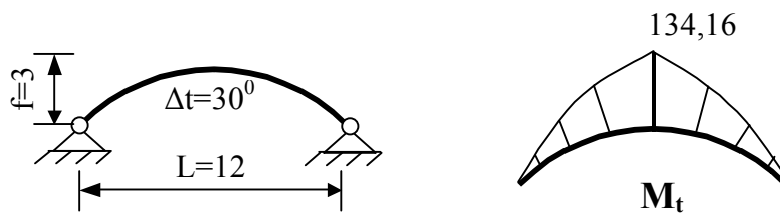
$$EI_0 \alpha L t_m = -30000000 \cdot 72 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot 12 \cdot 25 = -648$$

$$X_1 = \frac{-648}{57,6 + 0,36} = -11,18 \text{ kN}$$

Momentele încovoietoare finale au fost calculate cu relația  $M_t = m_1 X_1$ .

Diagramele de momente încovoietoare pentru cele două cazuri de încărcare sunt date în figura 14.7.

**Problema 14.6 (fig.14.8)** Același arc de la aplicația 14.5 supus acțiunii unei diferențe de temperatură  $\Delta t = 30^\circ$ , fibra mai caldă fiind fibra de la intrados.



- Fig. 14.8 -

Expresia necunoscutei este (vezi relația XIV.9)

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha \frac{\Delta t}{h} \int y ds}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2}$$

Calculul termenului de la numărătorul expresiei necunoscutei

$$\int y ds = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{4fx}{L^2} (L-x) dx = \frac{2}{3} fL$$

$$EI_0 \alpha \frac{\Delta t}{h} \int y ds = 3 \cdot 10^7 \cdot 72 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 12 = 2592$$

Numitorul, calculat la exemplul precedent este 57,96

Necunoscuta  $X_1$  este:

$$X_1 = \frac{2592}{57,6 + 0,36} = 44,72 \text{ kN}$$

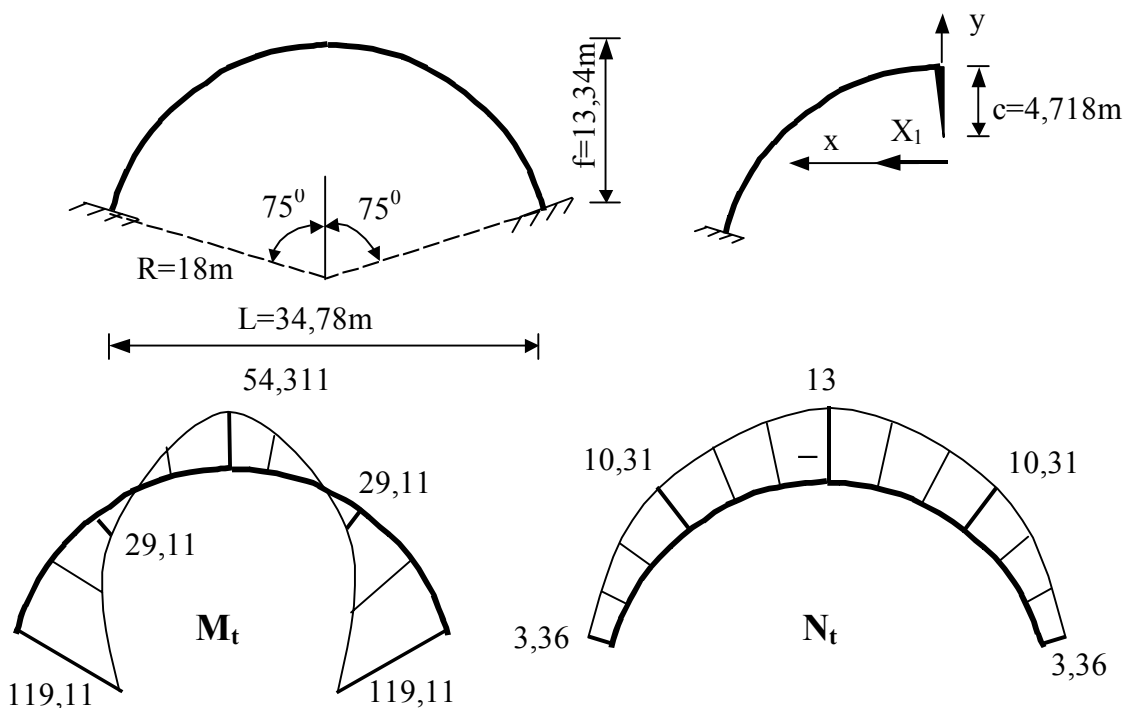
Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația  $M_t = m_1 X_1$  sunt date în diagrama din figura 14.8.

$$M_c = -f X_1 = -3 \cdot 44,72 = 134,16 \text{ kNm}$$

$$M_s = -\frac{3}{4} f X_1 = -2,25 \cdot 44,72 = -100,62 \text{ kNm}$$

Observație: Dacă fibra mai caldă este fibra de la extrados, diagrama de momente încovoietoare va fi inversă celei din figura 14.8.

**Problema 14.7 (fig.14.9)** Se consideră arcul de la aplicația 11.18 supus acțiunii unei creșteri de temperatură de  $45^\circ$ . Se consideră  $E_b = 300000 \text{ daN/cm}^2$ .



- Fig. 14.9 -

Deoarece arcul este considerat în aer liber și este acționat de o creștere de temperatură  $t_m = 45^\circ$  din (XIV.11) rezultă că  $X_1 \neq 0$  și  $X_2 = 0$ .

Expresia necunoscutei  $X_1$  este

$$X_1 = \frac{EI_0 \alpha L t_m}{\int y^2 ds + L \cdot i_0^2}$$

Numitorul calculat la aplicația 11.18 este

$$\int \frac{I_0}{I} y^2 ds = 779,90$$

Termenul de la numărător este

$$EI_0 \alpha L t_m = 3 \cdot 10^7 \cdot 216 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot 34,78 \cdot 45 = 10141,848$$

Necunoscuta capătă valoarea

$$X_1 = \frac{10141,848}{779,90} = 13,00 \text{ kN}$$

Calculul momentelor încovoietoare  $M_t = m_1 X_1 = -y X_1$

$$M_c = -c \cdot X_1 = -4,718 \cdot 13 = 54,314 \text{ kNm}$$

$$M_n = +(13,34 - 4,718) \cdot 13 = 119,1 \text{ kNm}$$

$$M_s = 2,239 \cdot X_1 = 29,11 \text{ kNm}$$

Calculul forțelor axiale  $N_t = n_1 X_1 = -X_1 \cos \theta$

$$N_c = -X_1 = -13 \text{ kN}$$

$$N_n = -X_1 \cos 75^\circ = -3,36 \text{ kN}$$

$$N_s = -X_1 \cos 37,5^\circ = -10,31 \text{ kN}$$

Diagramele de eforturi sunt date în figura 14.9

Observație: Dacă arcul ar fi încărcat cu o diferență de temperatură  $\Delta t$  atunci  $X_1 = 0$  și  $X_2 \neq 0$ . Necunoscuta  $X_2$ , în cazul arcului cu secțiune constantă are expresia

$$X_2 = -EI_0 \cdot \alpha \frac{\Delta t}{h}$$

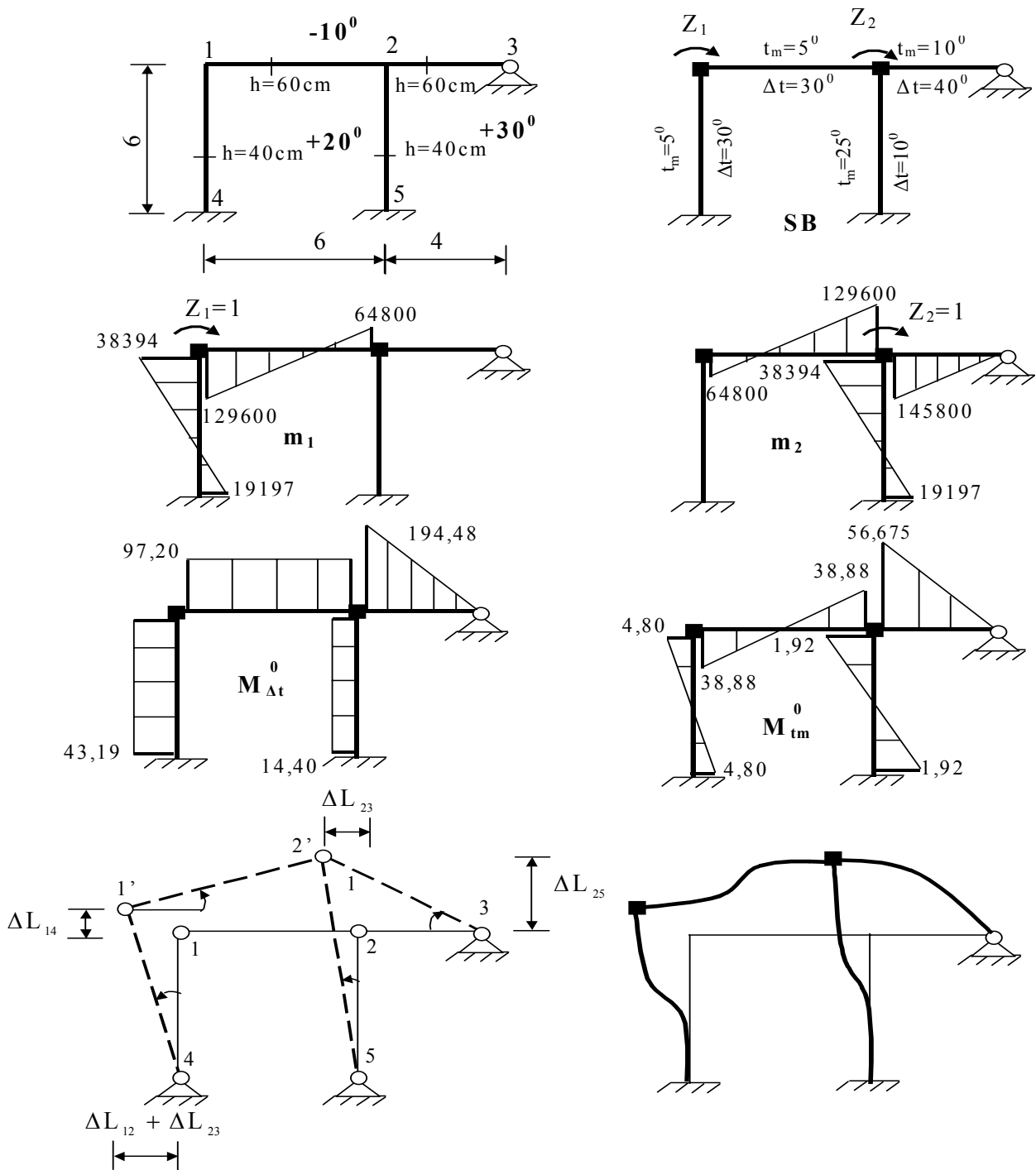
Dacă fibra mai încălzită este la extrados atunci fibra întinsă este la intrados și invers.

**Problema 14.8 (fig.14.10)** Să se calculeze momentele încovoietoare utilizând metoda deplasărilor.  $E_b = 270000 \text{ daN/cm}^2$ , iar secțiunile transversale au aceeași lățime de 40cm.

Structura este cu noduri fixe și comportă două necunoscute, rotirile de nod. Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1t} = 0 \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2t} = 0 \end{cases}$$





- Fig.14.10 -

Calculul rigidităților practice ale barelor:

$$i_{12} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} = \frac{2,7 \cdot 10^7 \cdot 72 \cdot 10^{-4}}{6} = 32400 \text{ kNm}$$

$$i_{14} = \frac{EI_{14}}{L_{14}} = \frac{2,7 \cdot 10^7 \cdot 21,33 \cdot 10^{-4}}{6} = 9598,5 \text{ kNm}$$

$$i_{23} = \frac{EI_{23}}{L_{23}} = \frac{2,7 \cdot 10^7 \cdot 72 \cdot 10^{-4}}{4} = 48600 \text{ kNm}$$

$$i_{25} = \frac{EI_{25}}{L_{25}} = \frac{2,7 \cdot 10^7 \cdot 21,33 \cdot 10^{-4}}{6} = 9598,5 \text{ kNm}$$

Deoarece sistemul de bază este static nedeterminat, în această metodă există diagramă de momente încovoietoare produse de variația de temperatură  $M_t^0 = M_{tm}^0 + M_{\Delta t}^0$ .

Diagrama  $M_{\Delta t}^0$  se obține ușor, deoarece se regăsesc cele două diagrame tip, prezentate la aplicația 14.4

$$M_{12}^{\Delta t} = EI\alpha \frac{\Delta t}{h} = 2,7 \cdot 10^7 \cdot 72 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{30}{0,60} = 97,20 \text{ kNm}$$

$$M_{14}^{\Delta t} = EI\alpha \frac{\Delta t}{h} = 2,7 \cdot 10^7 \cdot 21,33 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{30}{0,40} = 43,19 \text{ kNm}$$

$$M_{23}^{\Delta t} = \frac{3}{2} EI\alpha \frac{\Delta t}{h} = \frac{3}{2} \cdot 2,7 \cdot 10^7 \cdot 72 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{40}{0,60} = 194,48 \text{ kNm}$$

$$M_{25}^{\Delta t} = EI\alpha \frac{\Delta t}{h} = 2,7 \cdot 10^7 \cdot 21,33 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10}{0,40} = 14,40 \text{ kNm}$$

Pentru a determina efectul temperaturii medii este necesar studiul structurii auxiliare supuse variației lungimii barelor sub acțiunea acestei temperaturi

$$\Delta L_{12} = \alpha \cdot t_m \cdot L_{12} = \alpha \cdot 5 \cdot 6 = 30\alpha$$

$$\Delta L_{14} = \alpha \cdot t_m \cdot L_{14} = \alpha \cdot 5 \cdot 6 = 30\alpha$$

$$\Delta L_{23} = \alpha \cdot t_m \cdot L_{23} = \alpha \cdot 10 \cdot 4 = 20\alpha$$

$$\Delta L_{25} = \alpha \cdot t_m \cdot L_{25} = \alpha \cdot 25 \cdot 6 = 150\alpha$$

Cu aceste alungiri ale barelor se stabilește noua poziție a nodurilor și rotirile barelor, cu care se calculează momentele încovoietoare.

Unghiurile de rotire ale barelor sunt:

$$\psi_{12}^{t_m} = \frac{\Delta l_{25} - \Delta l_{14}}{L_{12}} = \frac{150\alpha - 30\alpha}{6} = 20\alpha$$

$$\psi_{14}^{t_m} = \frac{\Delta l_{12} + \Delta l_{23}}{L_{14}} = \frac{30\alpha + 20\alpha}{6} = \frac{25}{3}\alpha$$

$$\psi_{23}^{t_m} = \frac{\Delta l_{25}}{L_{23}} = \frac{150\alpha}{4} = 37,5\alpha$$

$$\psi_{25}^{t_m} = \frac{\Delta l_{23}}{L_{25}} = \frac{20\alpha}{6} = \frac{10}{3}\alpha$$

Momentele încovoietoare produse de temperatura medie sunt

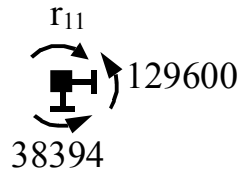
$$M_{12}^{t_m} = M_{21}^{t_m} = 6 \frac{EI_{12}}{L_{12}} \psi_{12}^{t_m} = 6 \cdot 32400 \cdot 20 \cdot 10^{-5} = 38,88 \text{ kNm}$$

$$\mathbf{M}_{14}^{t_m} = \mathbf{M}_{41}^{t_m} = 6 \frac{EI_{14}}{L_{14}} \psi_{14}^{t_m} = 6 \cdot 9598,5 \cdot \frac{25}{3} \cdot 10^{-5} = 4,80 \text{ kNm}$$

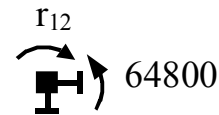
$$\mathbf{M}_{23}^{t_m} = 3 \frac{EI_{23}}{L_{23}} \psi_{23}^{t_m} = 3 \cdot 48600 \cdot 37,5 \cdot 10^{-5} = 54,675 \text{ kNm}$$

$$\mathbf{M}_{25}^{t_m} = \mathbf{M}_{52}^{t_m} = 6 \frac{EI_{25}}{L_{25}} \psi_{25}^{t_m} = 6 \cdot 9598,5 \cdot \frac{10}{3} \cdot 10^{-5} = 1,92 \text{ kNm}$$

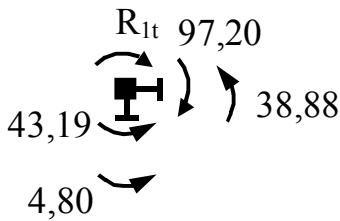
Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi



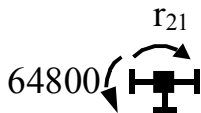
$$r_{11} - 129600 - 38394 = 0; \quad r_{11} = 167994$$



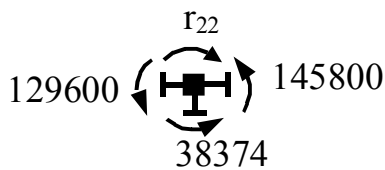
$$r_{12} - 64800 = 0; \quad r_{12} = 64800$$



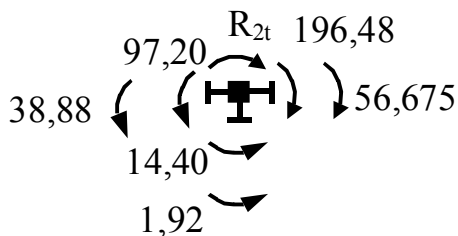
$$R_{1t} + 97,20 - 38,88 - 4,80 - 43,19 = 0; \\ R_{1t} = -10,33$$



$$r_{21} - 64800 = 0; \quad r_{21} = 64800$$



$$r_{22} - 145900 - 38394 - 129600 = 0; \\ r_{22} = 313894$$



$$R_{2t} + 194,48 + 56,675 - 14,40 - 1,92 - \\ - 97,20 - 38,88 = 0;$$

$$R_{2t} = -98,755$$

Sistemul de ecuații are forma

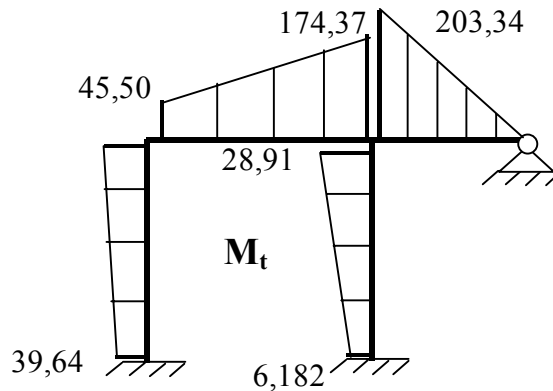
$$\begin{cases} 167994Z_1 + 64800Z_2 - 10,33 = 0 \\ 64800Z_1 + 313894Z_2 - 98,755 = 0 \end{cases}$$

cu necunoscutele  $Z_1 = -6,500 \cdot 10^{-5}$  și  $Z_2 = 32,793 \cdot 10^{-5}$

Diagrama de momente încovoietoare calculată cu relația

$$M_t = M_t^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

este dată în figura 14.11



- Fig.14.11 -

**Problema 14.9 (fig.14.12)** Structura este supusă unei creșteri uniforme de temperatură,  $t_m = +30^0$ . Să se calculeze mementele încovoietoare utilizând operarea în două etape. Se dă  $EI = 30000 \text{ kNm}^2$ .

Etapa I<sup>a</sup>

Calculul rigidităților practice ale barelor și al coeficienților de rigiditate s-a

făcut pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$

$$i_{12} = \frac{EI}{6} = 1$$

$$\rho_{12} = 1$$

$$i_{14} = \frac{3EI}{9} = 2$$

$$\rho_{14} = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5$$

$$\sum \rho_1 = 2,5$$

$$i_{26} = i_{35} = \frac{1,5EI}{6} = 1,5$$

$$\rho_{26} = \rho_{35} = 1,5$$

$$\sum \rho_2 = 4,5$$

$$i_{23} = \frac{2EI}{6} = 2$$

$$\rho_{23} = 2$$

$$\sum \rho_3 = 3,5$$



## Calculul coeficienților de distribuție

Nodul 1

$$\mu_{12} = -\frac{1}{2,5} = -0,400 \qquad \mu_{14} = -\frac{1,5}{2,5} = -0,600$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{1}{4,5} = -0,222 \qquad \mu_{23} = -\frac{2}{4,5} = -0,444 \qquad \mu_{26} = -\frac{1,5}{4,5} = -0,334$$

Nodul 3

$$\mu_{32} = -\frac{2}{3,5} = -0,571 \qquad \mu_{35} = -\frac{1,5}{3,5} = -0,429$$

Calculul momentelor de încastrare perfectă produse de variația de temperatură

$$\Delta L_{12} = \Delta L_{23} = \Delta L_{26} = \Delta L_{35} = \alpha \cdot t_m \cdot L = \alpha \cdot 30 \cdot 6 = 180\alpha$$

$$\Delta L_{14} = \alpha \cdot 30 \cdot 9 = 270\alpha$$

$$\psi_{14}^{t_m} = \frac{\Delta l_{12} + \Delta l_{26}}{L_{14}} = \frac{360\alpha}{9} = 40\alpha$$

$$\psi_{12}^{t_m} = \frac{\Delta l_{14}}{L_{12}} = \frac{270\alpha}{6} = 45\alpha$$

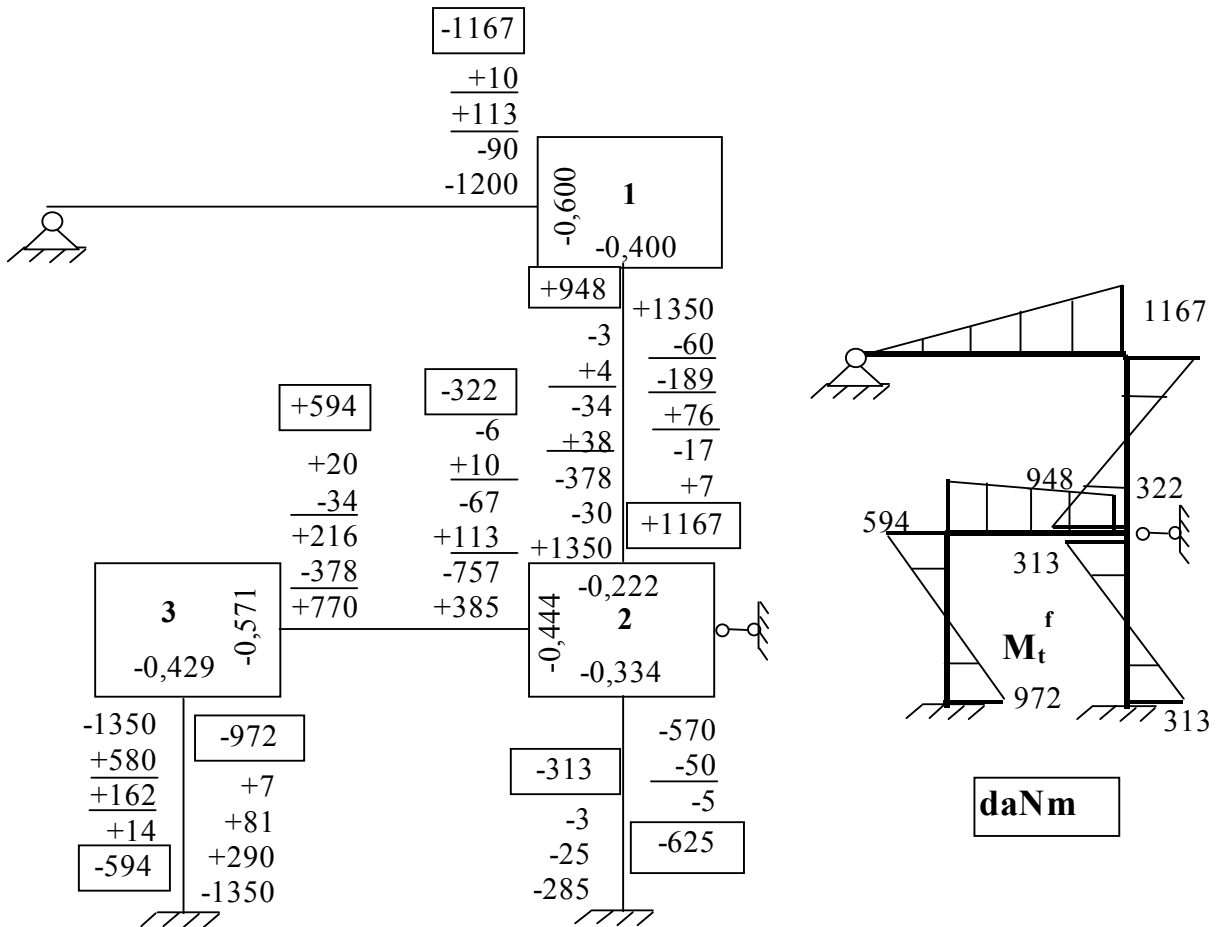
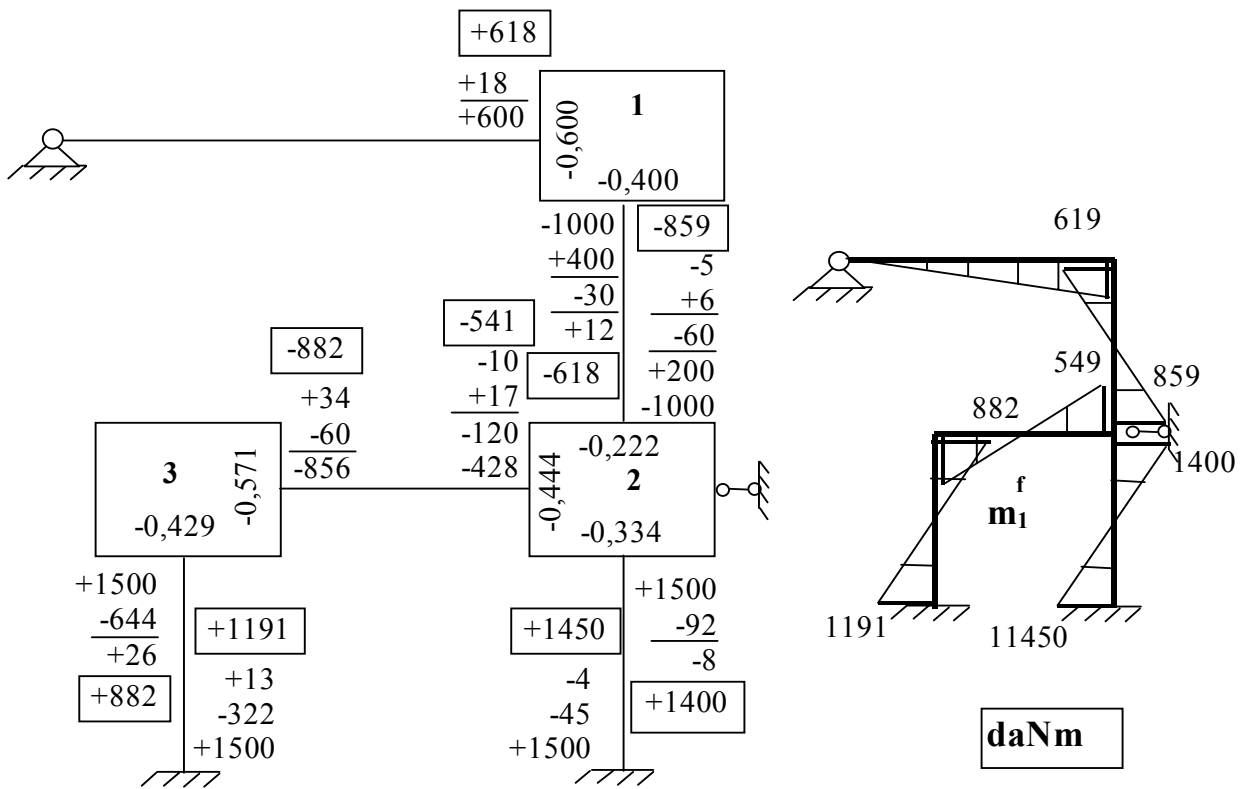
$$\psi_{35}^{t_m} = \frac{\Delta l_{23}}{L_{35}} = \frac{180\alpha}{6} = 30\alpha$$

$$\mathbf{M}_{14}^{t_m} = 3 \frac{EI_{14}}{L_{14}} \psi_{14}^{t_m} = 3 \cdot \frac{3 \cdot 30000}{9} \cdot 40\alpha = 12\text{kNm}$$

$$\mathbf{M}_{12}^{t_m} = \mathbf{M}_{21}^{t_m} = 6 \frac{EI_{12}}{L_{12}} \psi_{12}^{t_m} = 6 \cdot \frac{30000}{6} \cdot 45\alpha = 13,5\text{kNm}$$

$$\mathbf{M}_{35}^{t_m} = \mathbf{M}_{53}^{t_m} = 6 \frac{EI_{35}}{L_{35}} \psi_{35}^{t_m} = 6 \cdot \frac{1,5 \cdot 30000}{6} \cdot 30\alpha = 13,5\text{kNm}$$

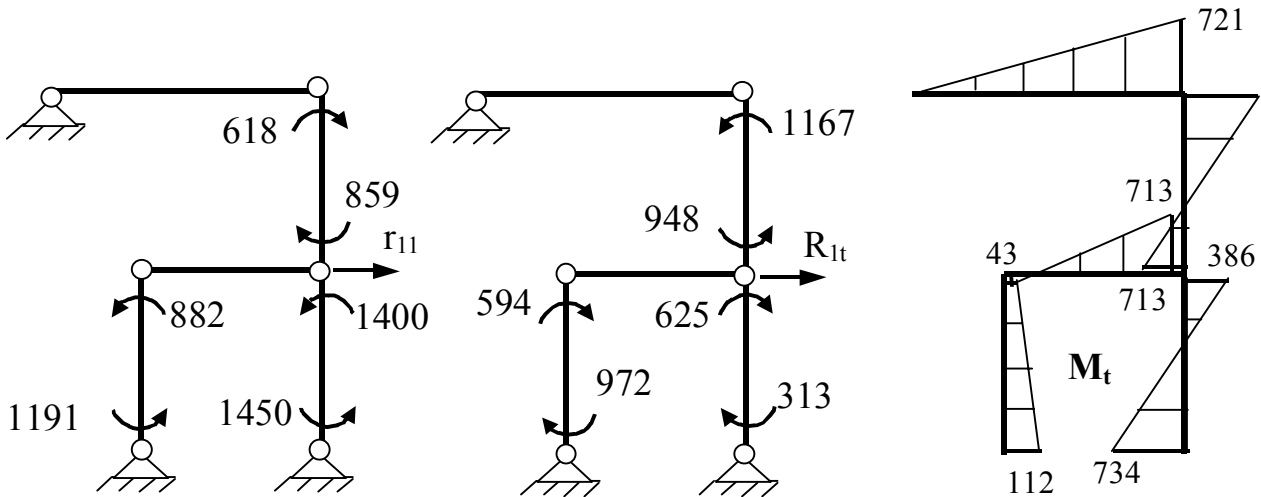
Schemele pentru echilibrarea momentelor din diagramele  $m_1$  și  $M_1^0$  sunt prezentate în figura 14.13.



- Fig.14.13 -  
- 167 -

- Etapa II<sup>a</sup> Trecerea de la structura cu noduri fixe la structura cu noduri deplasabile

$$R_1 = 0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1t} = 0$$



- Fig.14.14 -

$$\delta L = 0$$

$$r_{11} \cdot 1 - (618 + 859) \cdot \frac{1}{6} - (882 + 1191) \cdot \frac{1}{6} - (1400 + 1450) \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$r_{11} = 1066,67$$

$$\delta L = 0$$

$$R_{1t} \cdot 1 + (1167 + 948) \cdot \frac{1}{6} + (594 + 972) \cdot \frac{1}{6} + (625 + 313) \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$R_{1t} = -769,83$$

$$Z_1 = -\frac{R_{1t}}{r_{11}} = \frac{769,83}{1066,67} = 0,722$$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_t = M_t^f + m_1^f Z_1$$

sunt prezentate în figura 14.14.



## CAPITOLUL XV

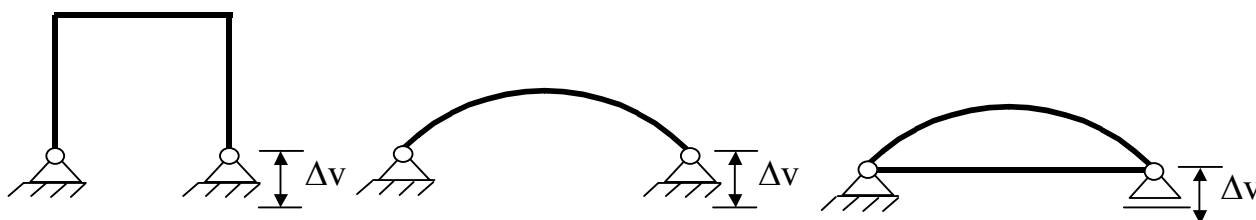
### EFECTUL DEPLASĂRILOR IMPUSE (CEDĂRILOR DE REAZEME)

O altă categorie de acțiuni ce se exercită asupra structurilor de rezistență – în afara forțelor și a variației de temperatură – este reprezentată de deplasările impuse (sau cedările de reazeme).

Particularitatea efectului deplasărilor impuse este următoarea:

- la structurile static determinate – care au un număr minim de legături – deplasările impuse produc numai modificarea configurației geometrice a structurii, dar nu produc eforturi;

- la structurile static nedeterminate – care au un număr de legături mai mare decât numărul minim necesar asigurării invariabilității geometrice – deplasările impuse produc atât modificarea configurației geometrice cât și a eforturilor, Excepție fac cadrele dublu articulate cu reazemele la același nivel, arcele dublu articulate și arcele cu tirant (fig XV.1) supuse unei singure cedări de reazem pe verticală, la care nu apar eforturi deoarece articulația rămasă fixă permite rotirea liberă. (deplasările fiind foarte mici în raport cu dimensiunile structurii).



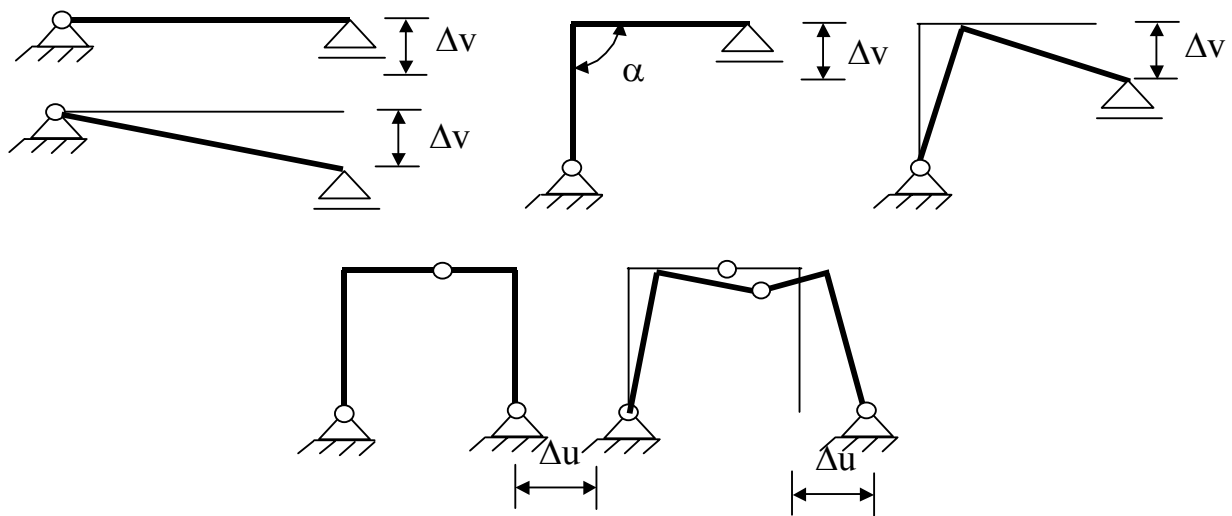
- Fig.XV.1 -

De asemenea nu produc deformații și eforturi deplasările pe verticală, egale, ale reazemelor. Structura, în acest caz are deplasări de corp rigid.

Eforturile produse de deplasările impuse depind de natura materialului și de dimensiunile secțiunilor transversale, prin momentul de inerție.

#### STRUCTURI STATIC DETERMINATE.

În fig. XV.2 sunt prezentate exemple de elemente și structuri static determinate supuse acțiunii unor deplasări de reazeme. Se constată că elementele își schimbă poziția, iar structurile își modifică configurația geometrică. În aceste situații secțiunile transversale își schimbă poziția prin rotire sau translație .



- Fig.X2.1 -

Dacă asupra structurii static determinate acționează un sistem de forțe  $P_i$  care are ca efecte reacțiunile  $R_{ki}$  și ulterior intervine deplasarea unui reazem care produce deplasările  $\Delta_{i\Delta}$  pe direcția forței și deplasările  $\Delta_k$  pe direcțiile reacțiunilor  $R_{ki}$  atunci atât forțele cât și reacțiunile vor produce lucru mecanic.

$$L_{\text{ext}} = \sum P_i \Delta_{ik} + \sum R_{ki} \Delta_k \quad (\text{XV.1})$$

Deoarece nu au loc deformații ale elementelor sau structurii lucrul mecanic al eforturilor este egal cu zero. Din expresia lucrului mecanic total rezultă

$$L_{\text{TOT}} = L_{\text{ext}} - L_{\text{ef}} = 0 \quad (\text{XV.2})$$

sau

$$L_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{XV.3})$$

deci

$$\sum P_i \Delta_{i\Delta} + \sum R_{ki} \Delta_k = 0 \quad (\text{XV.4})$$

Expresia (XV.4) poate fi utilizată pentru calculul deplasărilor secțiunilor transversale dacă se face următoarea particularizare: sistemul de forțe  $P_i$  este redus la o singură forță și aceea egală cu unitatea  $P_i=1$ . Efectele acestei forțe sunt reacțiunile unitare  $r_{ki}$ . În aceste condiții relația (XV.4) capătă forma uzuală

$$1 \cdot \Delta_{i\Delta} = - \sum r_{ki} \Delta_k \quad (\text{XV.5})$$

## STRUCTURI STATIC DETERMINATE

### A Metoda eforturilor

În sistemul de ecuații de condiție se schimbă numai termenul liber, deoarece acesta depinde de încărcare. Forma generală a sistemului de ecuații este:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1\Delta} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2\Delta} = 0 \\ \vdots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{n\Delta} = 0 \end{cases} \quad (\text{XV.6})$$

unde termenii liberi se calculează cu relația (XV.5). deoarece sistemul de bază, în această metodă, este static determinat (nu există diagramă  $M_{\Delta}^0$ ).

Momentele încovoietoare finale se obțin prin suprapunere de efecte astfel:

$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^0 + m_1X_1 + m_2X_2 + \dots + m_nX_n \quad (\text{XV.7})$$

În cazul grinzilor continue la care reazemele au deplasările  $\Delta_i$ ,  $\Delta_j$  și  $\Delta_k$ , ecuația celor trei momente capătă forma:

$$\lambda_{ij}X_i + 2(\lambda_{ij} + \lambda_{jk})X_j + \lambda_{jk}X_k = -6EI_0 \left( \frac{\Delta_j - \Delta_i}{L_{ij}} + \frac{\Delta_j - \Delta_k}{L_{jk}} \right) \quad (\text{XV.8})$$

La arcul dublu articulată necunoscuta  $X_1$  are expresia

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = \frac{EI_0 \sum r_{k1} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \quad (\text{XV.9})$$

Pentru arcul dublu încastrat necunoscutele transferate în centrul elastic, au expresiile:

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = \frac{EI_0 \sum r_{k1} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} y^2 ds + L \cdot i_0^2} \\ X_2 &= \frac{\Delta_{2\Delta}}{\delta_{22}} = \frac{EI_0 \sum r_{k2} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} ds} \\ X_3 &= \frac{\Delta_{3\Delta}}{\delta_{33}} = \frac{EI_0 \sum r_{k3} \Delta_k}{\int \frac{I_0}{I} x^2 ds} \end{aligned} \quad (\text{XV.10})$$

## B. Metoda deplasărilor

În această metodă sistemul de bază fiind static nedeterminat, deplasările reazemelor produc eforturi, deci există diagramă  $M_{\Delta}^0$ .

Sistemului de ecuații are forma:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1t} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2t} = 0 \\ \vdots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nt} = 0 \end{cases} \quad (\text{XV.11})$$

Momentele încovoietoare finale se determină cu relația

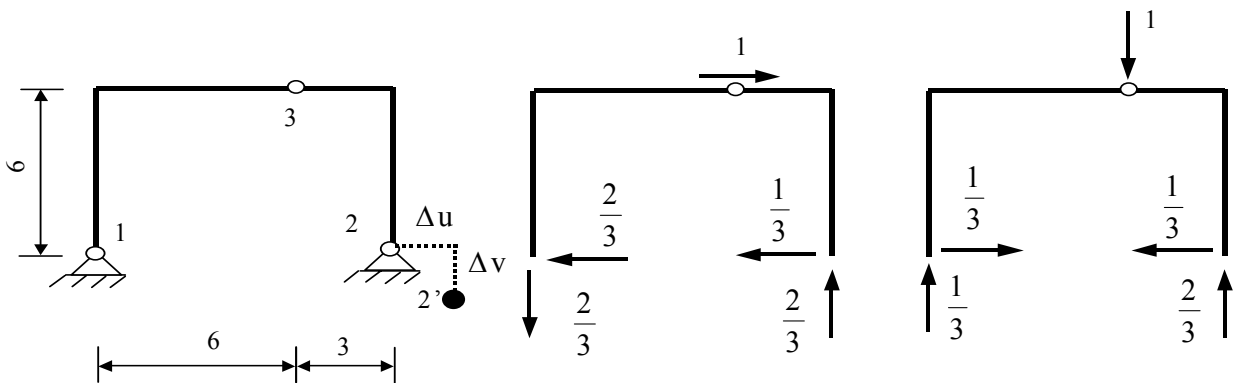
$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2 + \dots + m_n Z_n \quad (\text{XIV.12})$$

Calculul eforturilor poate fi efectuat și prin procedeul Cross aplicat structurilor structurilor cu noduri fixe sau cu noduri deplasabile.

La structurile cu noduri fixe se echilibrează numai diagrama  $M_{\Delta}^0$  pe când la structurile cu noduri deplasabile – în etapa I-a se echilibrează prin procedeul Cross atât momentele din diagrama cât și cele obținute pe sistemul de bază din încărcarea cu translațiile pe direcțiile gradelor de libertate.

## APLICAȚII

**Problema 15.1 (fig.15.1)** Să se determine deplasările  $u_3$  și  $v_3$  la structura din figura 15.1. Se dau  $\Delta u = 2\text{cm}$  și  $\Delta v = 1,5\text{cm}$ .



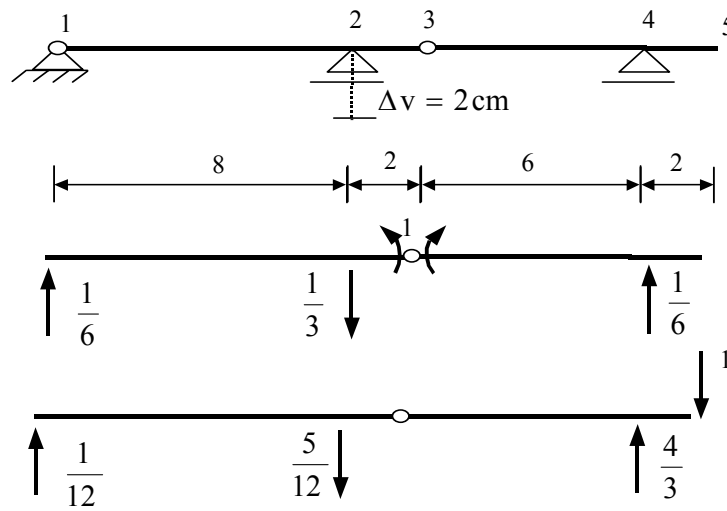
- Fig.15.1 -

Structura este static determinată, iar deplasările se calculează cu relația (XV.3)

$$u_3 = -[-H_2 \cdot \Delta u - V_2 \cdot \Delta v] = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

$$v_3 = -[-H_2 \cdot \Delta u - V_2 \cdot \Delta v] = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1,5 = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

**Problema 15.2 (fig.15.2)** Să se determine rotirea  $\theta_3^{rel}$  și  $v_5$  la grinda Gerber din figura 15.2.

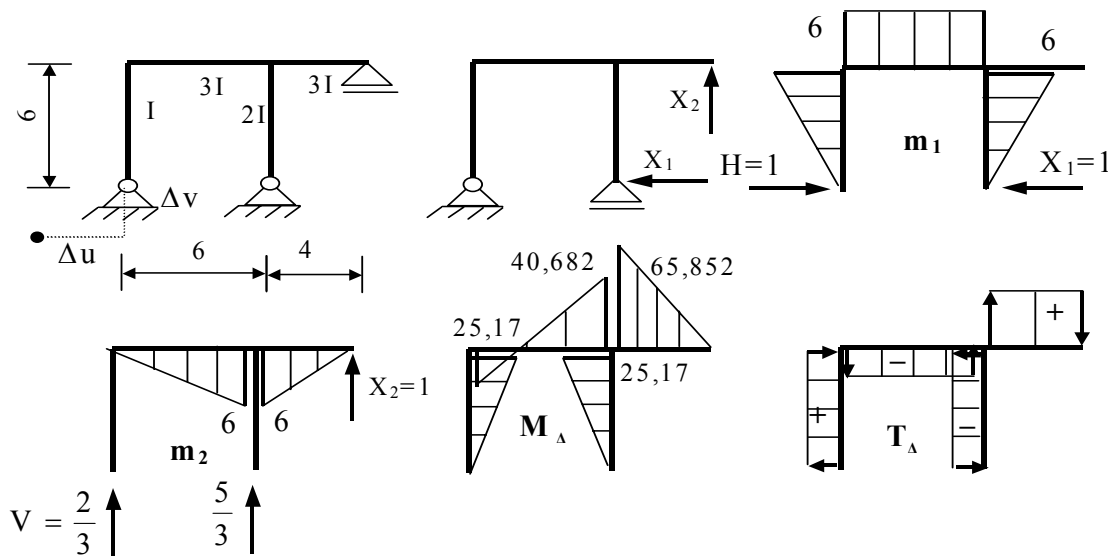


- Fig.15.2 -

$$\theta_3^{rel} = -[V_2 \cdot \Delta v] = -\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3} \text{ radiani}$$

$$v_5 = -[V_2 \cdot \Delta v] = -\frac{5}{12} \cdot 2 = -\frac{5}{6} \text{ cm}$$

**Problema 15.3 (fig.15.3)** Să se calculeze momentele încovoietoare la structura din figură utilizând metoda eforturilor. Se dă  $EI=24000\text{kNm}^2$ ,  $\Delta u=1,5\text{cm}$  și  $\Delta v=1,2\text{cm}$ .



- Fig.15.3 -

Structura este de două ori static nedeterminată. Sistemul ecuațiilor de condiție este:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1\Delta} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{3EI} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{180}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = -\frac{24}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{160}{9EI}$$

$$\Delta_{1\Delta} = -[H \cdot \Delta u] = 1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 1,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta_{2\Delta} = -[-V \cdot \Delta v] = \frac{2}{3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} = 0,8 \cdot 10^{-2}$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} \frac{180}{EI}X_1 - \frac{24}{EI}X_2 + 1,5 \cdot 10^{-2} = 0 \\ -\frac{24}{EI}X_1 + \frac{160}{9EI}X_2 + 0,8 \cdot 10^{-2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 180X_1 - 24X_2 + 360 = 0 \\ -216X_1 + 160X_2 + 1728 = 0 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile

$$X_1 = 4,195; \quad X_2 = -16,463$$

Momentele încovoietoare calculate cu relația  $M_{\Delta} = m_1 X_1 + m_2 X_2$  și forțele tăietoare sunt date în figura 15.3.

Verificarea diagramei de moment încovoietor. Se verifică dacă deplasarea pe direcția necunoscutei  $X_2$  este egală cu zero.

$$v_2 = -\sum r_{k2} \Delta_k + \int \frac{m_2 M_{\Delta}}{EI} dx$$

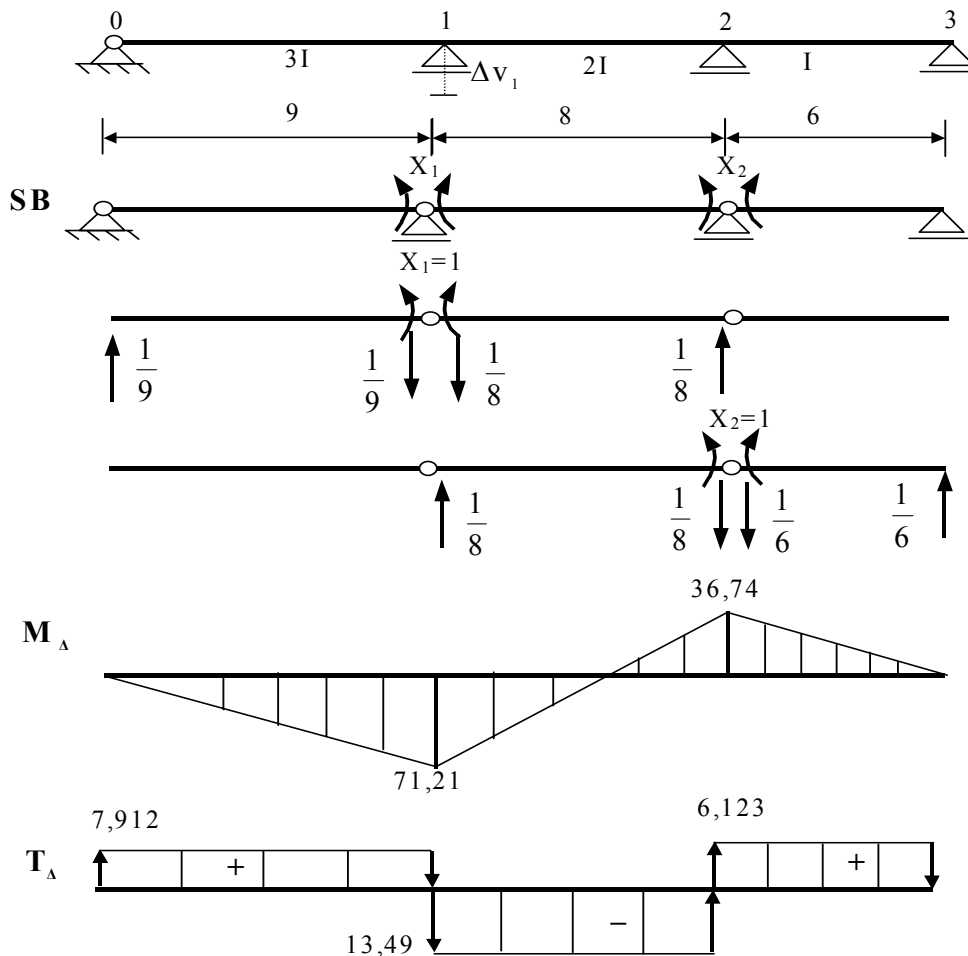
Termenul  $-\sum r_{k2} \Delta_k$  este tocmai  $\Delta_{2\Delta}$  care are valoarea  $\Delta_{2\Delta} = 0,8 \cdot 10^{-2}$

Calculul integralei

$$\begin{aligned} \int \frac{m_2 M_{\Delta}}{EI} dx &= \frac{1}{3EI} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 65,852 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 40,682 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 25,17 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right] = \\ &= -\frac{192}{EI} = -0,799 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Deci  $\Delta_{2\Delta} = (0,8 - 0,799) \cdot 10^{-2} \approx 0$ . În concluzie diagrama  $M_{\Delta}$  este corectă.

**Problema 15.4 (fig.15.4)** Diagramele de eforturi la frinda continuă din figură.  
 $\Delta v_1=2\text{cm}$ ,  $EI=30000\text{kNm}^2$ .



- Fig.15.4 -

Lungimile transformate pentru  $I_0=I$

$$\lambda_{01} = 9 \frac{I}{3I} = 3; \quad \lambda_{12} = 8 \frac{I}{2I} = 4; \quad \lambda_{23} = 6 \frac{I}{I} = 6$$

Ecuțiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} 2(3+4)X_1 + 4X_2 = +6EI \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8}\right) \cdot 2 \cdot 10^{-2} \\ 4X_1 + 2(4+6)X_2 = +6EI \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot 2 \cdot 10^{-2} \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 14X_1 + 4X_2 = +850 \\ 4X_1 + 20X_2 = -450 \end{cases}$$

iar necunoscutele au valorile

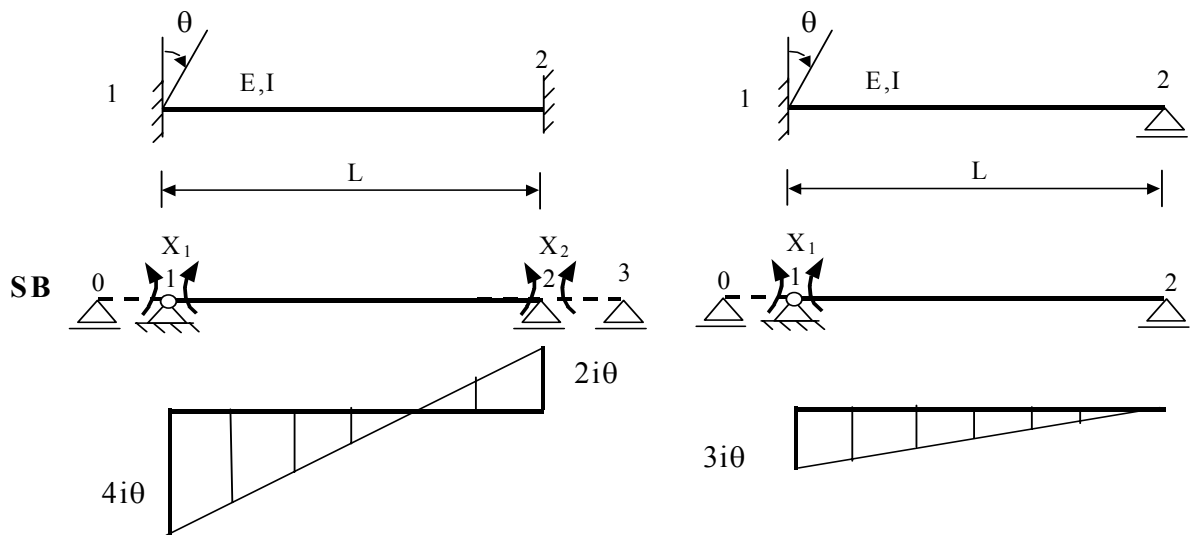
$$X_1 = 71,21 \text{ și } X_2 = -36,74$$

Momentele încovoietoare au fost calculate cu relația

$$M_{\Delta} = m_1 X_1 + m_2 X_2$$

și sunt date, împreună cu forțele tăietoare în figura 15.4.

**Problema 15.5 (fig.15.5)** Diagramele de moment încovoietor pentru grinzile cu o singură deschidere din figură.



- Fig.15.5 -

Bara dublu încastrată

$$\begin{cases} 2LX_1 + LX_2 = 6EI\theta \\ LX_1 + 2LX_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 4 \frac{EI}{L} \theta = 4i\theta$$

$$X_2 = -2 \frac{EI}{L} \theta = -2i\theta$$

Bara încastrat-articulată

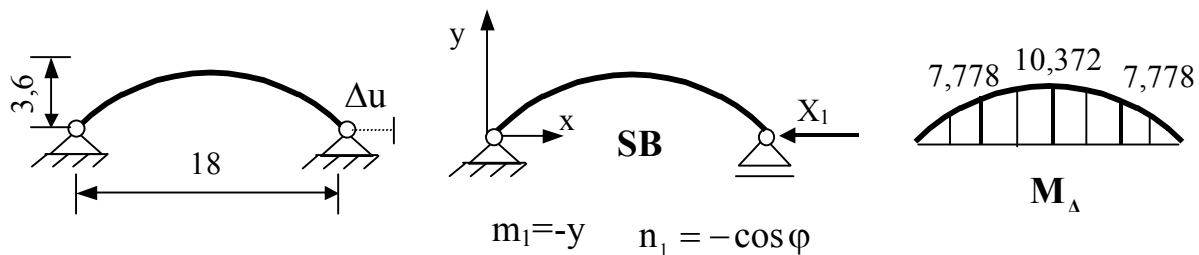
$$2LX_1 = 6EI\theta$$

$$X_1 = 3 \frac{EI}{L} \theta = 3i\theta$$

Se regăsesc expresiile momentelor încovoietoare utilizate în metoda deplasărilor, dar în convenția de semne din metoda eforturilor.



**Problema 15.6 (fig.15.6)** Arcul parabolic cu secțiune constantă  $b \times h = 30 \times 60 \text{ cm}^2$  și  $EI = 24000 \text{ kNm}^2$  este supus cedării de reazem  $\Delta u_2 = 1,5 \text{ cm}$ . Se cere calculul momentelor încovoietoare.



- Fig. 15.6 -

Ecuția de condiție este:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

$$EI \delta_{11} = \int y^2 ds + \int \cos^2 \varphi ds = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{4fx}{L^2} (L-x) \right]^2 dx + L \cdot i_0^2$$

$$EI \delta_{11} = \frac{8f^2 L}{15} + L \cdot i_0^2 = 124,416 + 0,54 = 124,956$$

În sistemul de bază reacțiunea  $H_1 = 1$

$$EI \Delta_{1\Delta} = EI[-(-1 \cdot \Delta u_2)] = 24000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 360$$

Necunoscuta  $X_1$  are valoarea

$$X_1 = -\frac{360}{124,956} = -2,881$$

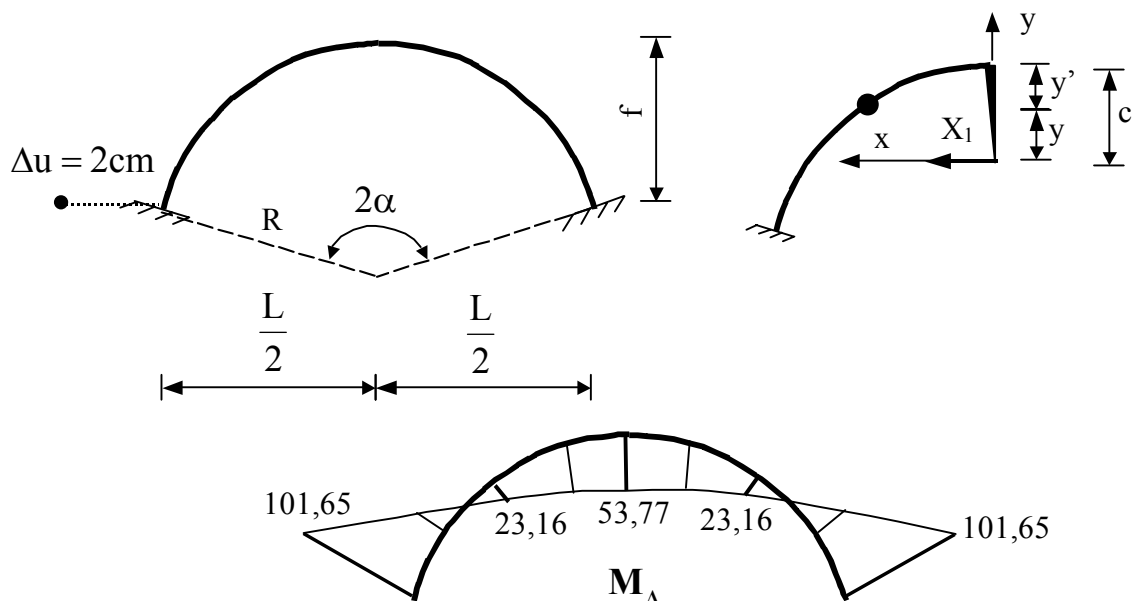
Calculul momentelor încovoietoare  $M_{\Delta} = m_1 X_1 = -y X_1$

$$M_c = -f X_1 = -3,6 \cdot (-2,881) = 10,372 \text{ kNm}$$

$$M_s = -\frac{3}{4} f X_1 = -2,25 \cdot (-2,881) = 7,778 \text{ kNm}$$

Diagrama de momente încovoietoare este dată în figura 15.6.

**Problema 15.7 (fig.15.7)** Arc circular dublu încastrat supus unei deplasări de reazem, pe orizontală de 2cm. Secțiunea arcului este  $b \times h = 30 \times 60 \text{ cm}^2$ , modulul de elasticitate  $E_b = 300000 \text{ daN/cm}^2$ , unghiul la centru  $2\alpha = 120^\circ$  și raza  $R = 12 \text{ m}$ .



- Fig. 15.7 -

Deplasarea de 2 cm poate fi privită ca deplasare relativă între cele două încastrări, ceea ce revine la a considera o încărcare simetrică (câte 1 cm de fiecare parte).

Transferând necunoscutele în centrul elastic, acestea au expresiile (XV.8). Deoarece există reacțiune orizontală în încastrare numai din încărcarea sistemului de bază cu necunoscuta  $X_1=1$ , rezultă că termenii liberi din expresiile necunoscutelor  $X_2$  și  $X_3$  sunt egali cu zero și în concluzie rezultă  $X_1 \neq 0$  și  $X_2 = X_3 = 0$ .

Calculul elementelor geometrice ale arcului

$$L = 2R \sin \alpha = 2 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20,78\text{m}$$

$$f = R(1 - \cos \alpha) = 12 \cdot (1 - 0,5) = 6\text{m}$$

Calcul poziției centrului elastic

$$c = \frac{\int y' ds}{\int ds} = \frac{\int_0^\alpha R(1 - \cos \varphi) R d\varphi}{\int_0^\alpha R d\varphi} = R \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

$$c = 12 \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\pi} \right) = 2,076\text{m}$$

Ecuția de condiție este

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

$$EI \delta_{11} = \int m_1^2 ds + i^2 \int n_1^2 ds$$

$$m_1 = -y = -(c - y') = -\left[ R \cdot \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) - R \cdot (1 - \cos \varphi) \right] = R \cdot \left( \cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

$$n_1 = -\cos \varphi$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^\alpha \left[ R \cdot \left( \cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \right]^2 \cdot R d\varphi + \int_0^\alpha i^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot R d\varphi$$

$$EI\delta_{11} = \alpha \cdot R^3 \cdot \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) + \alpha \cdot R \cdot i^2 \cdot \left( 1 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = 83,385$$

$$EI\Delta_{1\Delta} = EI \cdot \left[ - \left( -H \cdot \frac{\Delta u_2}{2} \right) \right] = 216000 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 2160$$

Expresia necunoscutei  $X_1$  este

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1\Delta}}{\delta_{11}} = -\frac{2160}{83,385} = -25,904$$

Calculul momentelor încovoietoare finale  $M_\Delta = m_1 X_1 = -y X_1$

$$M_c = -c \cdot X_1 = -2,076 \cdot (-25,904) = 53,776 \text{ kNm}$$

$$M_n = -y_n X_1 = +(6 - 2,076) \cdot (-25,904) = -101,647 \text{ kNm}$$

$$M_s = -y_s X_1 = -(2,076 - 1,182) \cdot (-25,904) = 23,158 \text{ kNm}$$

Diagrama finală este dată în figura 15.7

**Problema 15.8 (fig.15.8)** să se determine eforturile la structura din figură utilizând metoda deplasărilor. Se dau  $\theta = 1^\circ$ ,  $\Delta u = 1,5 \text{ cm}$ ,  $EI = 24000 \text{ kNm}^2$ .

Structura este cu noduri fixe. Ecuațiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1\Delta} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

Calculul rigidităților practice ale barelor pentru  $i_o = \frac{EI}{4} = 1$

$$i_{12} = \frac{3EI}{6} = 2; \quad i_{14} = \frac{EI}{4} = 1; \quad i_{23} = \frac{2EI}{4} = 2; \quad i_{25} = \frac{2EI}{4} = 2$$

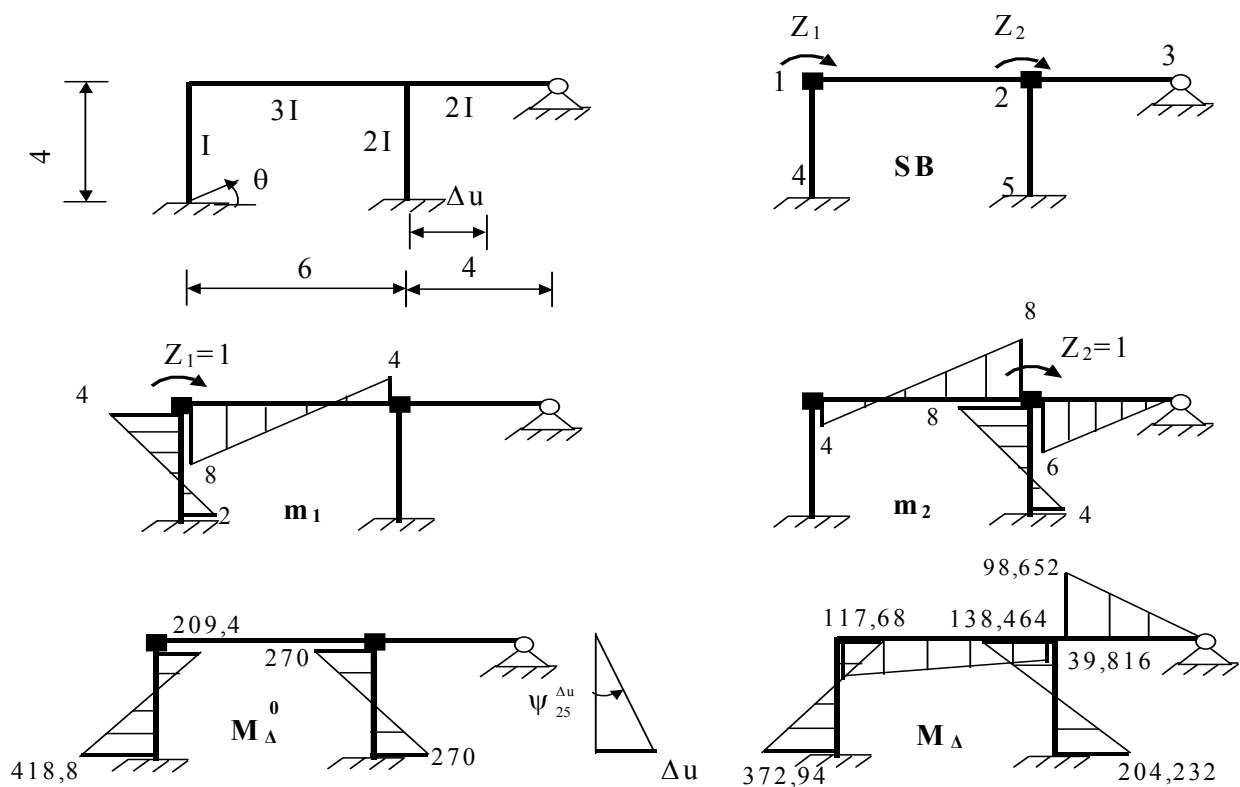
Calculul momentelor încovoietoare produse de deplasările reazemelor

$$(1^\circ = 0,01745 \text{ radiani}, \quad \psi_{25}^{\Delta u} = \frac{\Delta u}{L_{25}} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{4})$$

$$M_{41}^\theta = 4 \frac{EI_{14}}{L_{14}} \theta = 4 \cdot \frac{24000}{4} \cdot 0,01745 = 418,8 \text{ kNm}$$

$$M_{14}^\theta = 2 \frac{EI_{14}}{L_{14}} \theta = 2 \cdot \frac{24000}{4} \cdot 0,01745 = 209,4 \text{ kNm}$$

$$M_{25}^{\Delta u} = M_{52}^{\Delta u} = 6 \frac{EI_{25}}{L_{25}} \psi_{25}^{\Delta u} = 6 \cdot \frac{2 \cdot 24000}{4} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{4} = 270 \text{ kNm}$$



- Fig.15.8 -

Sistemul de bază fiind static nedeterminat există diagramă  $M_{\Delta}^0$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi

$$r_{11} = 12; \quad r_{12} = r_{21} = 4; \quad r_{22} = 22; \quad R_{1\Delta} = -209,4; \quad R_{2\Delta} = 270$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 12Z_1 + 4Z_2 - 209,4 = 0 \\ 4Z_1 + 22Z_2 + 270 = 0 \end{cases}$$

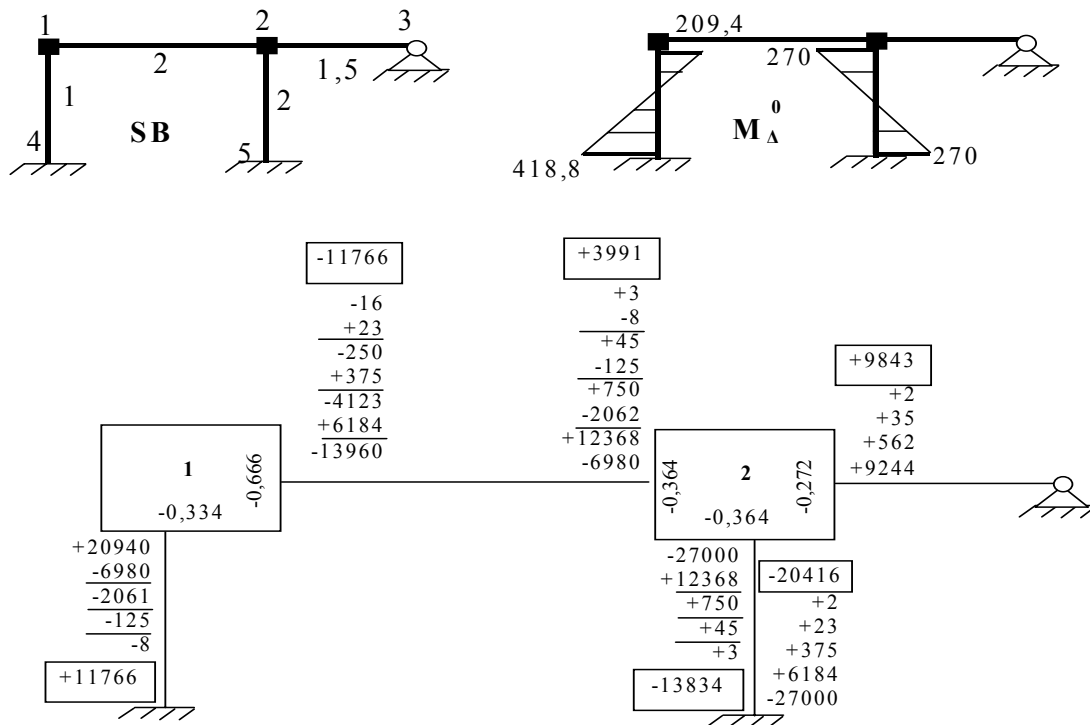
cu următoarele valori ale necunoscutelor  $Z_1 = 22,93$  și  $Z_2 = -16,442$

Momentele încovoietoare calculate cu relația

$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

sunt date în figura 15.8.

**Problema 15.9 (fig.15.9)** Aceeași structură de la aplicația precedentă rezolvată prin procedeul Cross.



- Fig. 15.9 -

Calculul coeficienților de distribuție

$$\sum \rho_1 = 3; \quad \sum \rho_2 = 5,5$$

Nodul 1

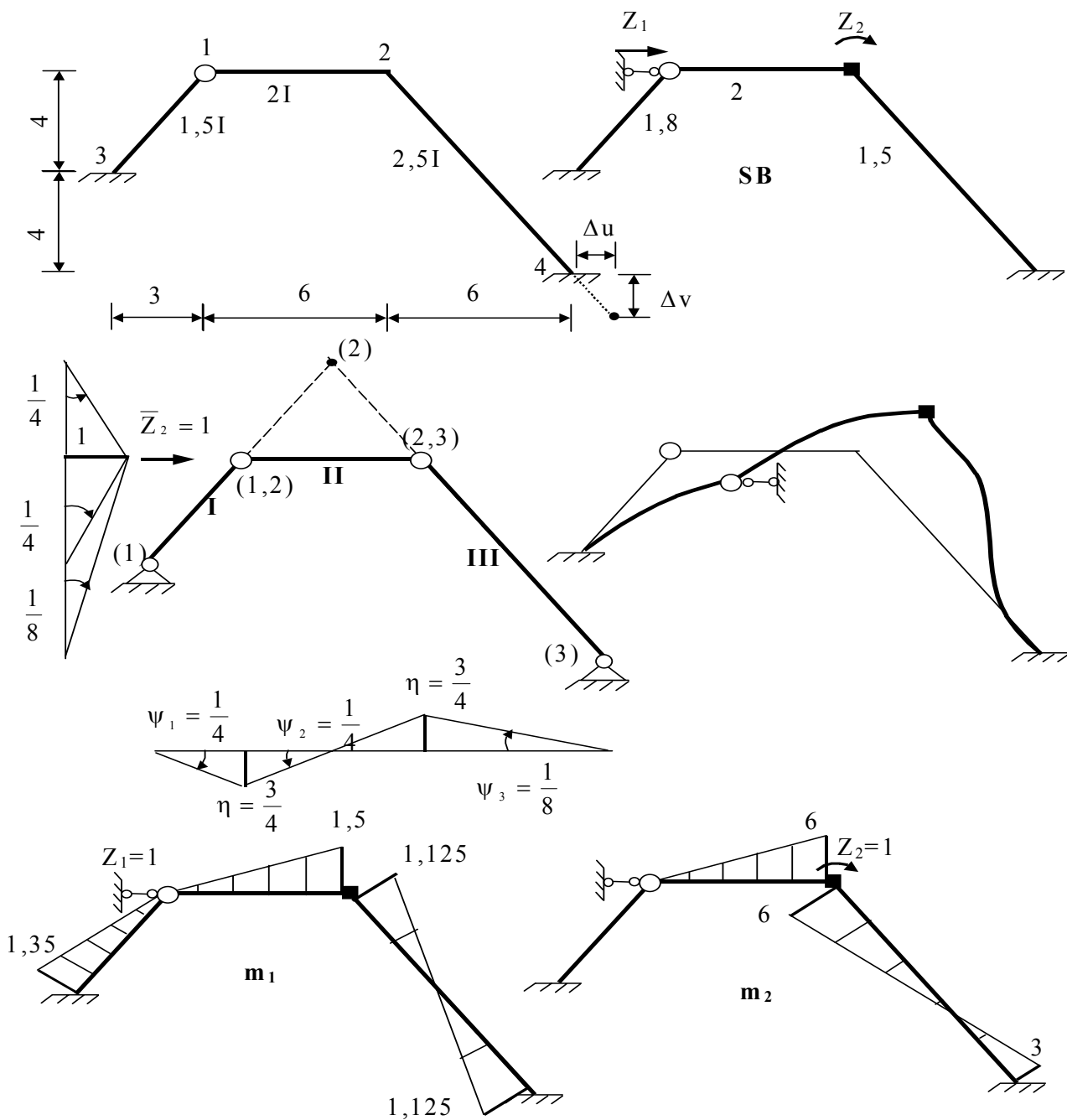
$$\mu_{12} = -\frac{2}{3} = -0,666; \quad \mu_{14} = -\frac{1}{3} = -0,334$$

Nodul 2

$$\mu_{21} = -\frac{2}{5,5} = -0,364; \quad \mu_{25} = -\frac{2}{5,5} = -0,364; \quad \mu_{23} = -\frac{1,5}{5,5} = -0,272$$

Echilibrând momentele din diagrama se obțin aceleași valori (aici în daNm) ca la aplicația precedentă.

**Problema 15.10 (fig.15.10)** Să se determine momentele încovoietoare produse de deplasările reazemelor la structura din figura 15.10. Se dau  $\Delta u = 1,5\text{cm}$ ,  $\Delta v = 2\text{cm}$ ,  $EI = 27000\text{kNm}^2$ .

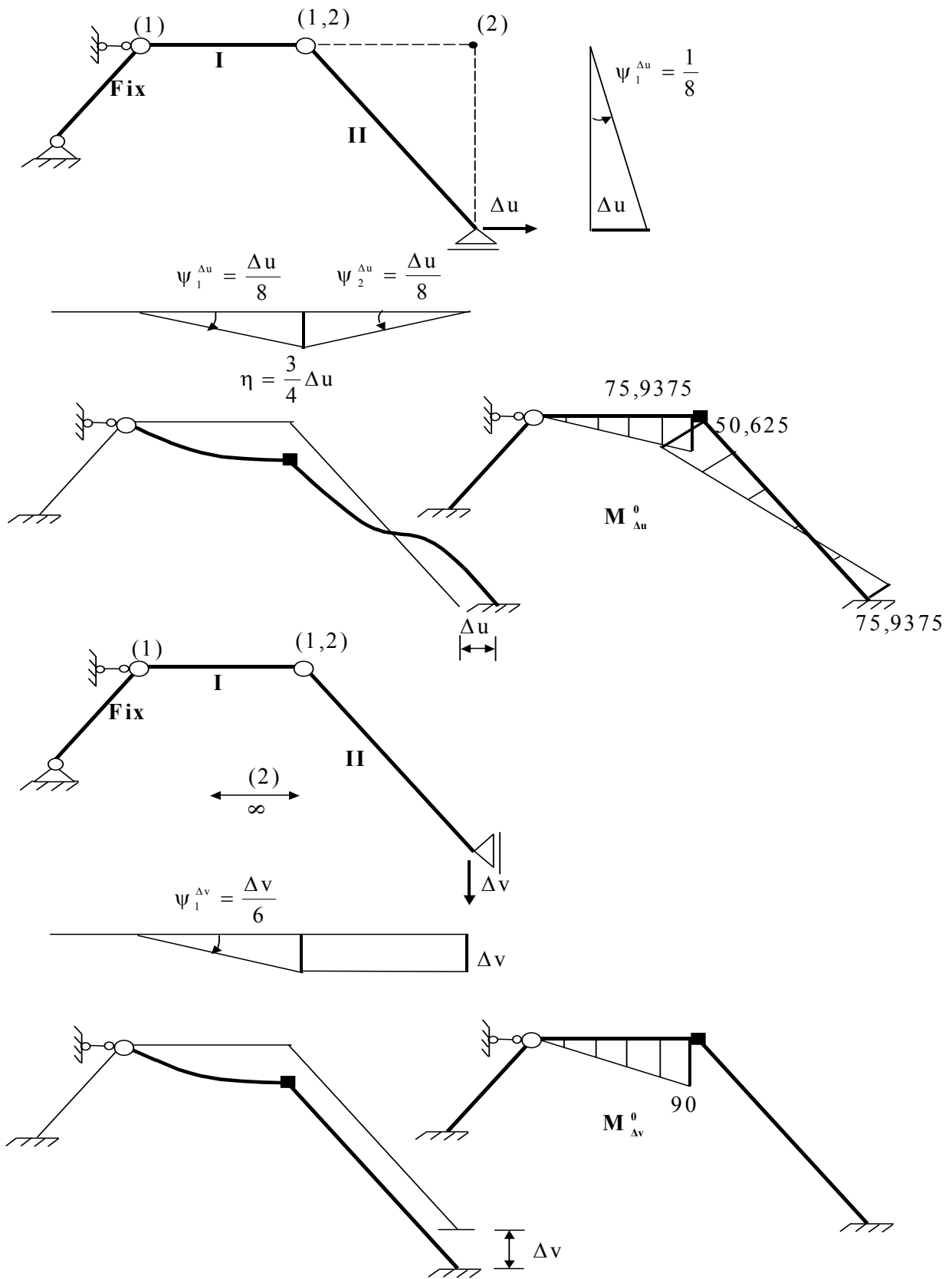


- Fig.15.10 -

Calculul rigidităților practice s-a efectuat pentru  $i_0 = \frac{EI}{6} = 1$ .

Pentru stabilirea diagramei  $M_{\Delta}^0$  se va efectua separat efectul deplasărilor  $\Delta u$  și  $\Delta v$  (fig.15.11), astfel încât  $M_{\Delta}^0 = M_{\Delta u}^0 + M_{\Delta v}^0$ . Rotirile barelor se obțin din analiza structurii auxiliare.

Se menține legătura de grad de libertate, dar se elimină legătura pe direcția pe care se imprimă deplasarea. Se obține tot un mecanism cu un grad de libertate, dar care are o parte fixă.



- Fig.15.11 -

Ecuțiile de condiție sunt:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1\Delta} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

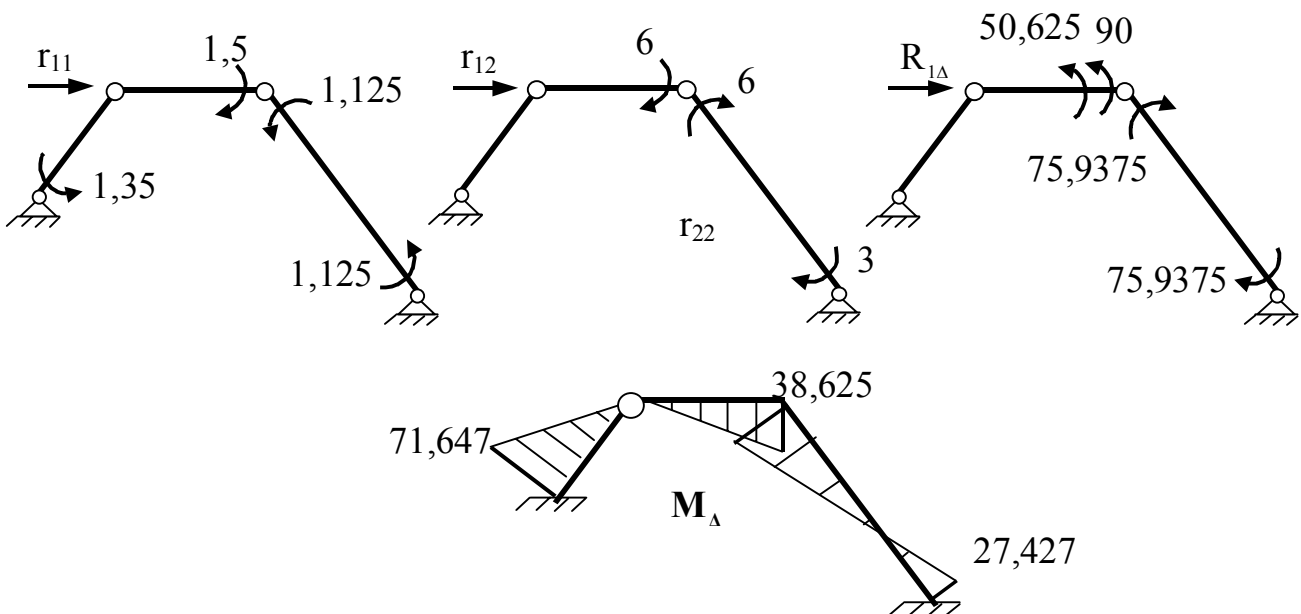
Momentele de încastrare produse de deplasările reazemelor sunt:

$$M_{21}^{\Delta u} = 3 \frac{EI_{12}}{L_{12}} \psi_{12}^{\Delta u} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 27000}{6} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{8} = 50,625 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^{\Delta u} = M_{42}^{\Delta u} = 6 \frac{EI_{24}}{L_{24}} \psi_{24}^{\Delta u} = 6 \cdot \frac{2,5 \cdot 27000}{10} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{8} = 75,9375 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^{\Delta v} = 3 \frac{EI_{12}}{L_{12}} \psi_{12}^{\Delta v} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 27000}{6} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{6} = 90 \text{ kNm}$$

Calculul coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi



- Fig.15.12 -

$$\delta L = 0$$

$$r_{11} \cdot 1 - 1,35 \cdot \frac{1}{4} - 1,5 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 1,125 \cdot \frac{1}{8} = 0;$$

$$r_{11} = 0,994$$

$$r_{12} \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{4} + (6 + 3) \cdot \frac{1}{8} = 0;$$

$$r_{12} = 0,375$$

$$R_{1\Delta} \cdot 1 + 50,625 \cdot \frac{1}{4} + 90 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 75,9375 \cdot \frac{1}{8} = 0;$$

$$R_{1\Delta} = -54,140$$

$$r_{21} + 1,125 - 1,5 = 0;$$

$$r_{21} = 0,375$$

$$r_{22} - 6 - 6 = 0;$$

$$r_{22} = 12$$

$$R_{2\Delta} + 90 + 50,625 - 75,9375 = 0;$$

$$R_{2\Delta} = -64,688$$



Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 0,994Z_1 + 0,375Z_2 - 54,140 = 0 \\ 0,375Z_1 + 12Z_2 - 64,688 = 0 \end{cases}$$

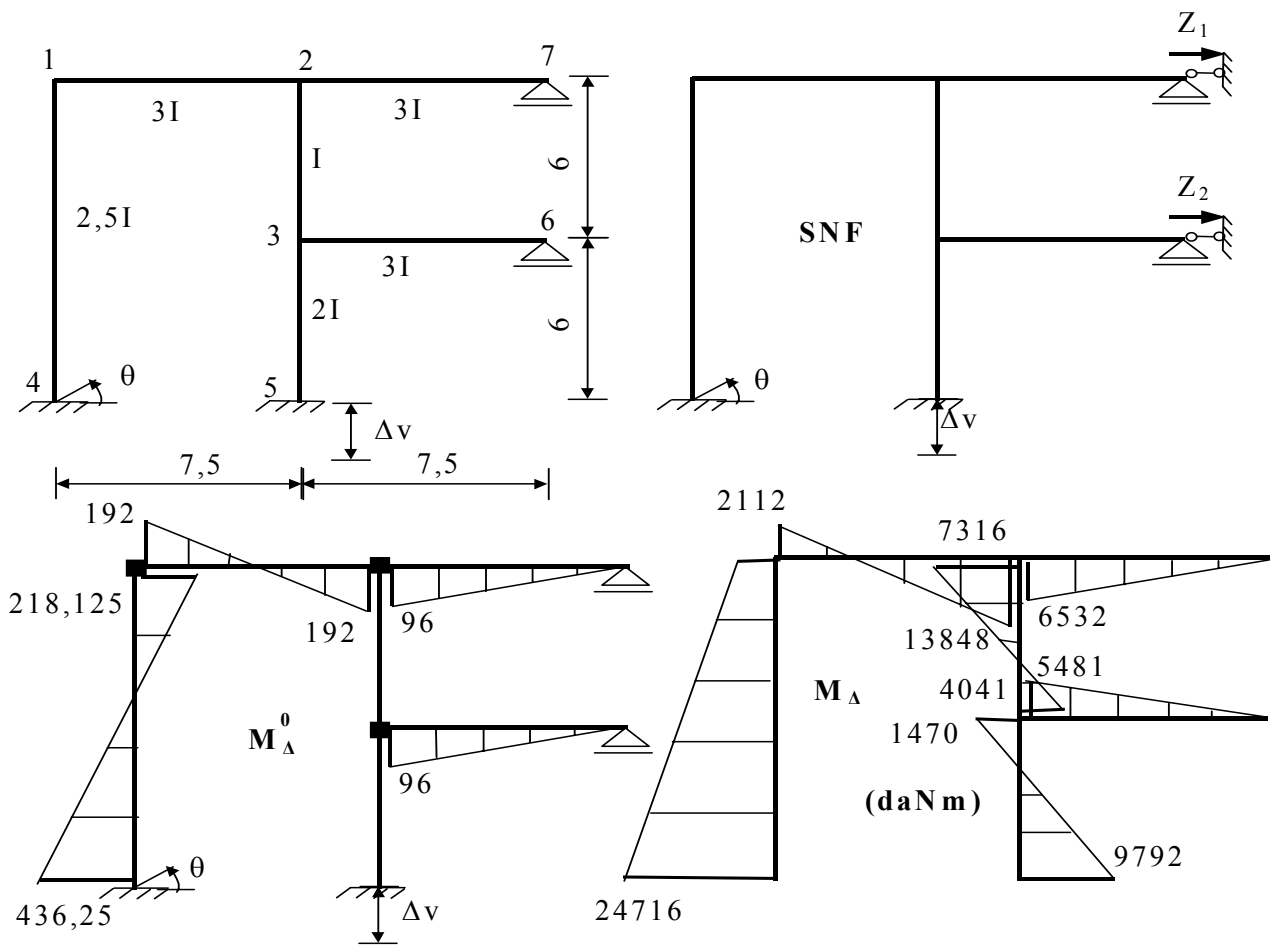
cu următoarele valori ale necunoscutelor  $Z_1 = 53,072$  și  $Z_2 = 3,732$

Momentele încovoietoare finale au fost calculate cu relația

$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^0 + m_1 Z_1 + m_2 Z_2$$

sunt date în figura 15.12.

**Problema 15.11 (fig.15.13)** Se reia structura de la aplicația 13.8, acționată acum de deplasările reazemelor  $\theta = 1^0$  și  $\Delta v = 2\text{cm}$ . Se consideră  $EI=30000\text{kNm}^2$ .



- Fig.15.13 -

Se va utiliza procedeul de operare în două etape.

Etapa I<sup>a</sup> În cadrul etapei I-a, la aplicația 13.8 au fost determinate diagramele  $m_1^f$  și  $m_2^f$  produse de deplasările  $Z_1=1$  și  $Z_2=1$  asupra sistemului cu noduri fixe. Tot în această etapă – în cadrul acestei aplicații – urmează să fie determinate momentele  $M_{\Delta}^0$  și apoi să fie echilibrate prin procedeul Cross, pentru a obține diagrama  $M_{\Delta}^f$  (fig.15.14).

Momentele produse de deplasări asupra sistemului de bază sunt:

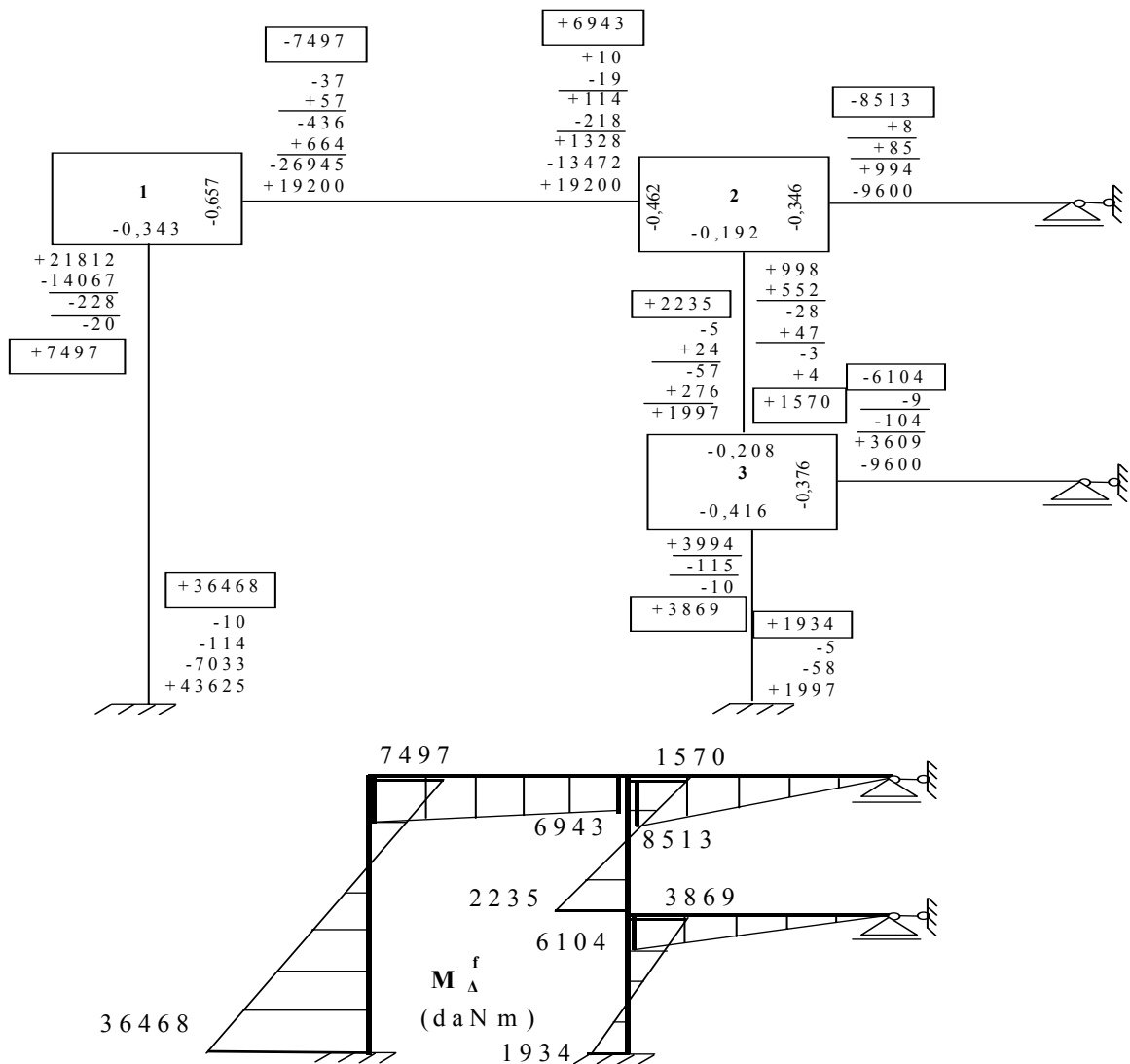
$$M_{41}^{\theta} = 4 \frac{EI_{14}}{L_{14}} \theta = 4 \cdot \frac{2,5 \cdot 30000}{12} \cdot 0,01745 = 436,25 \text{ kNm}$$

$$M_{14}^{\theta} = 2 \frac{EI_{14}}{L_{14}} \theta = 2 \cdot \frac{2,5 \cdot 30000}{12} \cdot 0,01745 = 218,125 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^{\Delta v} = M_{21}^{\Delta v} = 6 \frac{EI_{12}}{L_{12}} \psi_{12}^{\Delta v} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 30000}{7,5} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{7,5} = 192 \text{ kNm}$$

$$M_{27}^{\Delta v} = 3 \frac{EI_{27}}{L_{27}} \psi_{27}^{\Delta v} = 3 \cdot \frac{3 \cdot 30000}{7,5} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{7,5} = 96 \text{ kNm}$$

$$M_{36}^{\Delta v} = 3 \frac{EI_{36}}{L_{36}} \psi_{36}^{\Delta v} = 3 \cdot \frac{3 \cdot 30000}{7,5} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{7,5} = 96 \text{ kNm}$$



- Fig.15.14 -

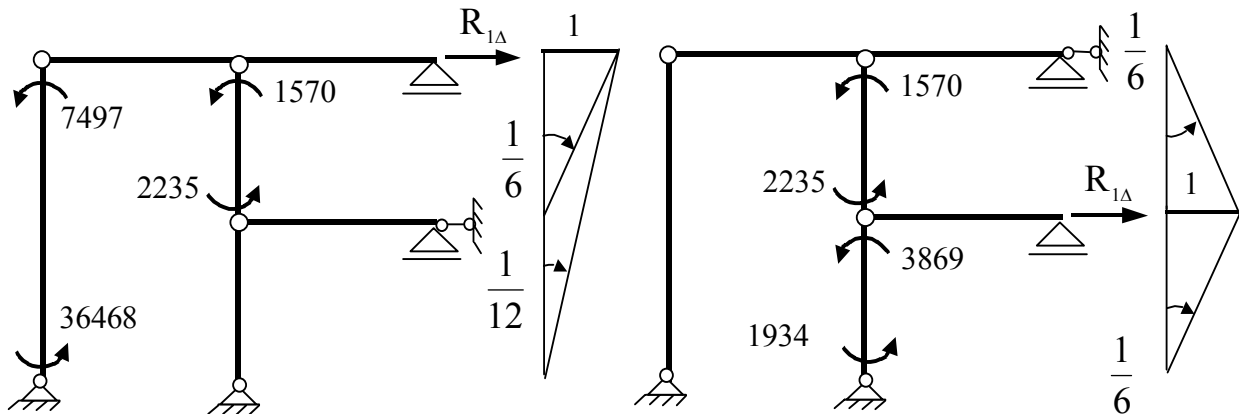
Etapa a II-a. Se trece de la structura cu noduri fixe la structura cu noduri deplasabile, punând condițiile  $R_1=0$ ,  $R_2=0$ .

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1\Delta} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

Coeficienții necunoscutelor au fost calculați la aplicația 13.8 și au valorile

$$r_{11} = 333,92; \quad r_{12} = r_{21} = -345,70; \quad r_{22} = 884$$

Calculul termenilor liberi (fig.15.15)



- Fig.15.15 -

$$R_{1\Delta} \cdot 1 - (36468 + 7497) \cdot \frac{1}{12} - (2235 + 1570) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad R_{1\Delta} = 4297,92$$

$$R_{2\Delta} \cdot 1 + (2235 + 1570) \cdot \frac{1}{6} - (3869 + 1934) \cdot \frac{1}{6} = 0; \quad R_{2\Delta} = 333$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 339,92Z_1 - 345,70Z_2 + 4297,92 = 0 \\ -345,70Z_1 + 884Z_2 + 333 = 0 \end{cases}$$

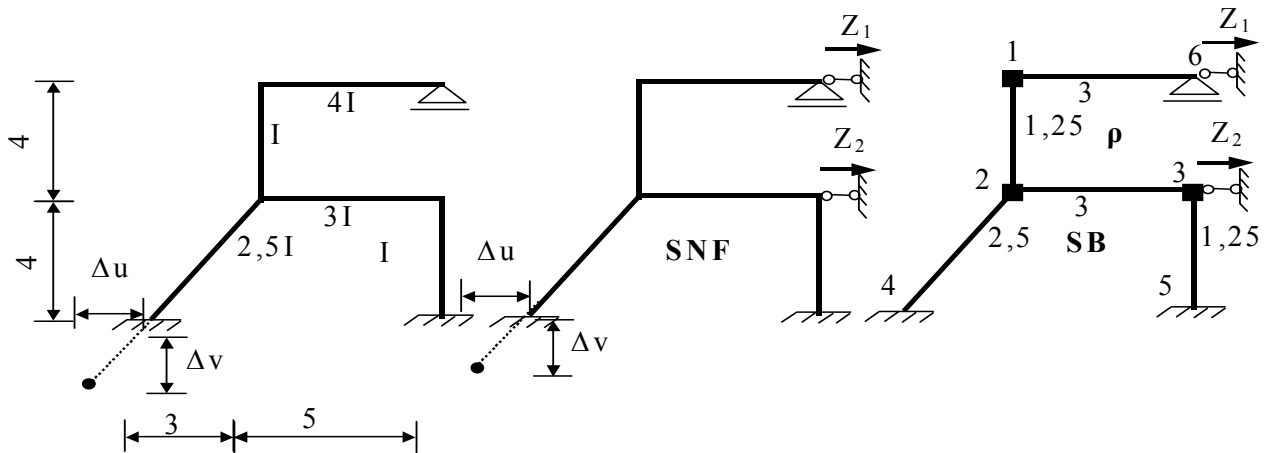
cu următoarele valori ale necunoscutelor  $Z_1 = -22,282$  și  $Z_2 = -9,09$

Momentele încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2$$

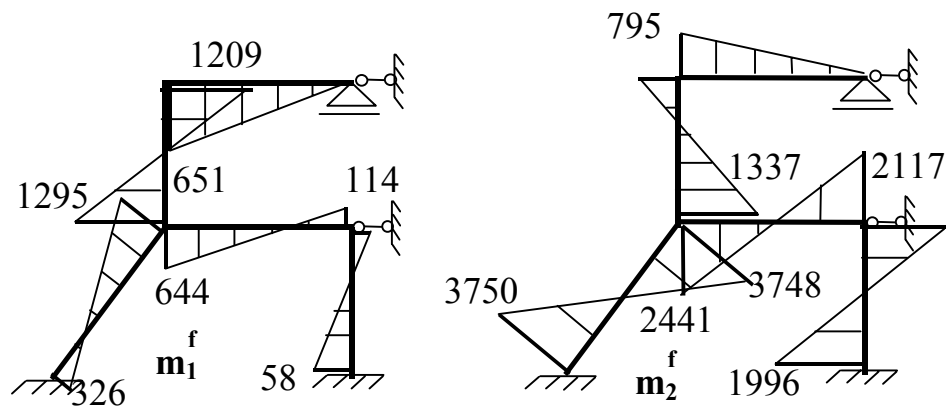
sunt date în figura 15.13.

**Problema 15.12 (fig.15.16)** Să se calculeze momentele încovoietoare la structura din figură. Se dau  $\Delta u = 0,75\text{cm}$ ,  $\Delta v = 1\text{cm}$ ,  $EI=24000\text{kNm}^2$ .



- Fig.15.16 -

Etapa I<sup>a</sup>. Structura cu noduri fixe a fost rezolvată pentru translațiile  $Z_1=1$  și  $Z_2=1$  la aplicația aplicația 13.9, iar diagramele  $m_1^f$  și  $m_2^f$  sunt redată în figura 15.17.



- Fig.15.17 -

Diagrama  $M_{\Delta}^0$  se obține analizând separate efectul deplasărilor de reazem  $\Delta u$  și  $\Delta v$  (fig.15.18).

Calculul momentelor din diagrama  $M_{\Delta u}^0$

$$M_{16}^{\Delta u} = 3 \frac{EI_{16}}{L_{16}} \psi_{16}^{\Delta u} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 24000}{5} \cdot \frac{0,75 \cdot 10^{-2}}{4} = 108 \text{kNm}$$

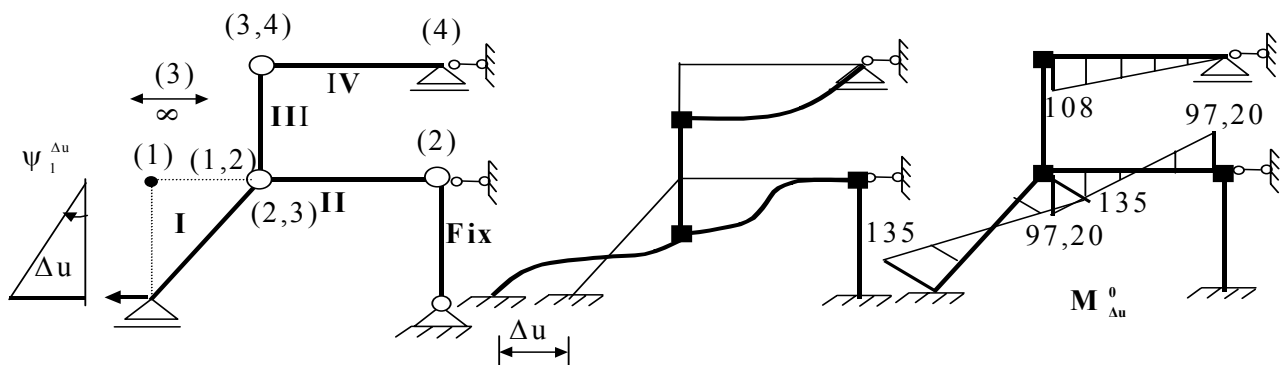
$$M_{23}^{\Delta u} = M_{32}^{\Delta u} = 6 \frac{EI_{23}}{L_{23}} \psi_{23}^{\Delta u} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 24000}{5} \cdot \frac{3 \cdot 0,75 \cdot 10^{-2}}{20} = 97,20 \text{kNm}$$

$$M_{24}^{\Delta u} = M_{42}^{\Delta u} = 6 \frac{EI_{24}}{L_{24}} \psi_{24}^{\Delta u} = 6 \cdot \frac{2,5 \cdot 24000}{5} \cdot \frac{0,75 \cdot 10^{-2}}{4} = 135 \text{ kNm}$$

Calculul momentelor din diagrama  $M_{\Delta v}^0$

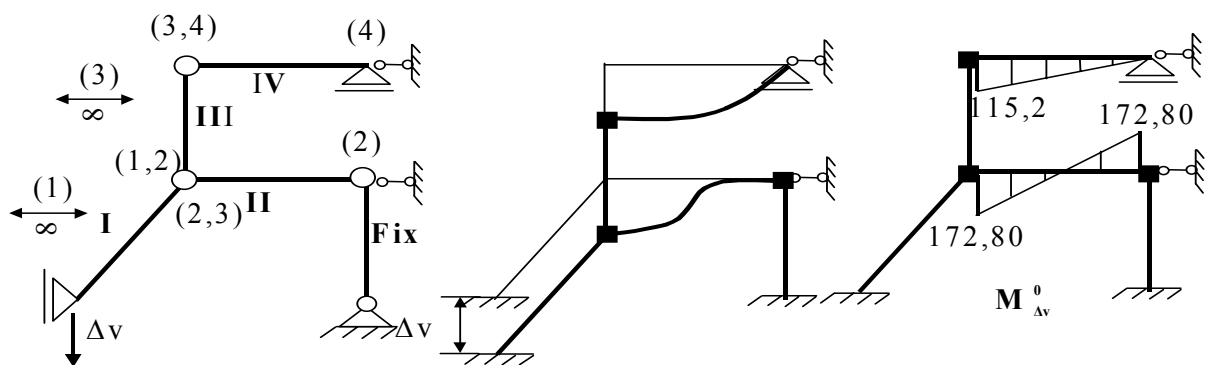
$$M_{16}^{\Delta v} = 3 \frac{EI_{16}}{L_{16}} \psi_{16}^{\Delta v} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 24000}{5} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{5} = 115,20 \text{ kNm}$$

$$M_{23}^{\Delta v} = M_{32}^{\Delta v} = 6 \frac{EI_{23}}{L_{23}} \psi_{23}^{\Delta v} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 24000}{5} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-2}}{5} = 172,80 \text{ kNm}$$



$$\psi_1^{\Delta u} = \frac{\Delta u}{4} \quad \psi_2^{\Delta u} = \psi_4^{\Delta u} = \frac{3\Delta u}{20}$$

$$\eta = \frac{3}{4} \Delta u$$



$$\psi_2^{\Delta u} = \psi_4^{\Delta u} = \frac{\Delta v}{5}$$



- Fig.15.18 -



Etapa a II-a. Trecerea de la structura cu noduri fixe la structura reală, cu noduri deplasabile.

Condițiile sunt  $R_1=0$ ,  $R_2=0$  sau dezvoltat

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1\Delta} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

Coefficienții necunoscutelor au fost calculați la aplicația 13.9 și au valorile

$$r_{11} = 626; \quad r_{12} = r_{21} = -533; \quad r_{22} = 3995,25$$

Calculul termenilor liberi

$$R_{1\Delta} \cdot 1 - (6612 + 3413) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad R_{1\Delta} = 2506,25$$

$$\begin{aligned} R_{2\Delta} \cdot 1 - 6612 \cdot \frac{3}{20} + (6612 + 3413) \cdot \frac{1}{4} + (13439 + 13777) \cdot \frac{1}{4} - \\ - (17190 + 7889) \cdot \frac{3}{20} - (7889 + 3944) \cdot \frac{1}{4} = 0; \quad R_{2\Delta} = -1598,35 \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații este:

$$\begin{cases} 626Z_1 - 533Z_2 + 2506,25 = 0 \\ -533Z_1 + 3995,7Z_2 - 1598,35 = 0 \end{cases}$$

cu următoarele valori ale necunoscutelor  $Z_1 = -4,132$  și  $Z_2 = -0,1512$

Diagrama finală de momente încovoietoare finale, calculate cu relația

$$M_{\Delta} = M_{\Delta}^f + m_1^f Z_1 + m_2^f Z_2$$

este dată în figura 15.19 (în daNm).

## **BIBLIOGRAFIE**

- [1]. Bănuț, V. - Statica, Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor”.  
Curs, ICB, 1988
- [2] Bănuț, V., Socină, G. - Statica, Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor”.  
Aplicații, Vol. 1 și 2, ICB, 1979
- [3] Gheorghiu, Al. - Statica, Stabilitatea și Dinamica Construcțiilor”.  
Editura Didactică și Pedagogică, 1974
- [4] Răutu, S., Bănuț, V. - Statica Construcțiilor”. Editura Didactică și  
Pedagogică, 1972
- [5] Teodorescu, M.E. - Statica Construcțiilor”. Editura Matrix-Rom, 2002



# CUPRINS

<b>INTRODUCERE</b>	3
<b>METODA EFORTURILOR</b>	5
<b>CAPITOLUL IX</b> Principiile metodei eforturilor	5
<b>CAPITOLUL X</b> Procedee pentru reducerea calculului numeric	27
<b>CAPITOLUL XI</b> Aplicații ale metodei eforturilor	45
<b>METODA DEPLASARILOR</b>	80
<b>CAPITOLUL XII</b> Principiile metodei deplasărilor	80
<b>CAPITOLUL XIII</b> Calculul structurilor prin aproximații succesive	114
<b>CAPITOLUL XIV</b> Efectul variației de temperatură	149
<b>CAPITOLUL XV</b> Efectul deplasărilor impuse (cedărilor de reazeme)	169
<b>BIBLIOGRAFIE</b>	192
<b>CUPRINS</b>	193