ΑΪΝΣΤΑΪΝ

ΟΙ ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΙΝΣΤΟΝ

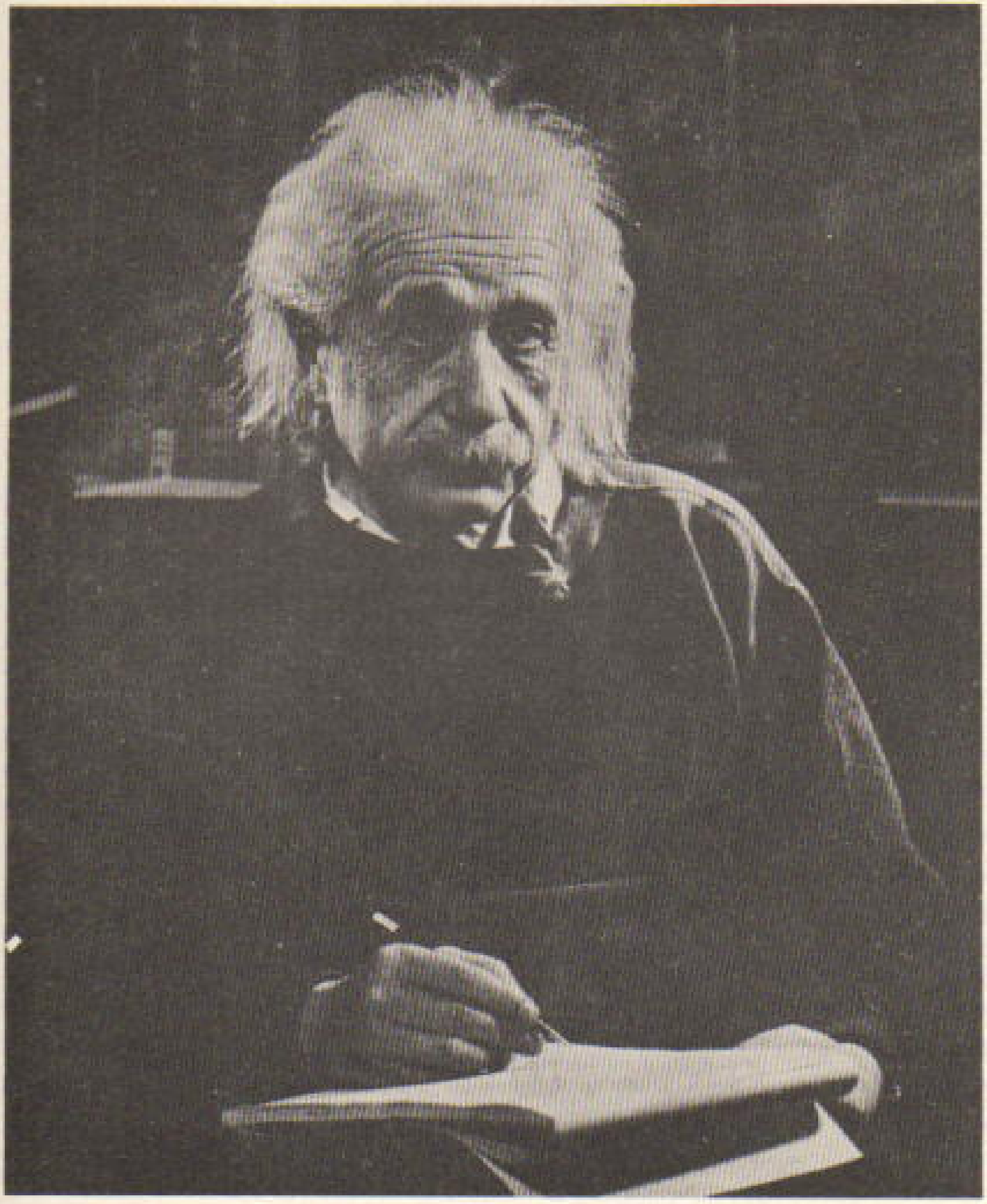
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΟΡΟΝΤΖΗ

Γιά μιά ἱκανοποιητική θεώρηση τοῦ πεδίου $g_{\mu\nu}$ στίς κοσμικές διαστάσεις, πρέπει νά συγκρατήσουμε τό σημαντικό γεγονός ὅτι ἡ σχετική ταχύτητα τῶν ἀστεριῶν εἶναι μικρή ὡς πρός τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἄρα, διαλέγοντας κατάλληλα τίς συντεταγμένες, ἡ g_{44} θά εἶναι σχεδόν σταθερή μέσα στό σύμπαν, τουλάχιστον στό τμῆμα του ὅπου ὑπάρχει ὕλη. Ἐπί πλέον, εἶναι φυσικό νά ὑποθέσουμε ὅτι ὅλες οἱ περιοχές τοῦ σύμπαντος περιέχουν ἀστέρια, ὥστε νά μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι ἡ διακύμανση τῆς g_{44} ὀφείλεται ἀποκλειστικά στό γεγονός ὅτι ἡ ὕλη δέν εἶναι κατανεμημένη κατά τρόπο συνεχῆ, ἀλλά εἶναι συγκεντρωμένη στά οὐράνια σώματα καί στά συστήματα πού αὐτά σχηματίζουν. Ἄν δέν πάρουμε ὑπ' ὄψη μας αὐτές τίς τοπικές ἀνωμαλίες τῆς πυκνότητας τῆς ὕλης καί τοῦ πεδίου $g_{\mu\nu}$ γιά νά πάρουμε μιά ἰδέα τοῦ γεωμετρικοῦ χαρακτήρα τοῦ σύμπαντος στό σύνολό του, φαίνεται φυσικό νά βάλουμε στή θέση τῆς πραγματικῆς κατανομῆς τῶν μαζῶν μιά συνεχῆ κατανομή μέ σταθερή πυκνότητα σ.

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ
ΤΟΥ
ΠΡΙΝΣΤΟΝ

Μετάφραση : Πόπη Ἀραπίνη

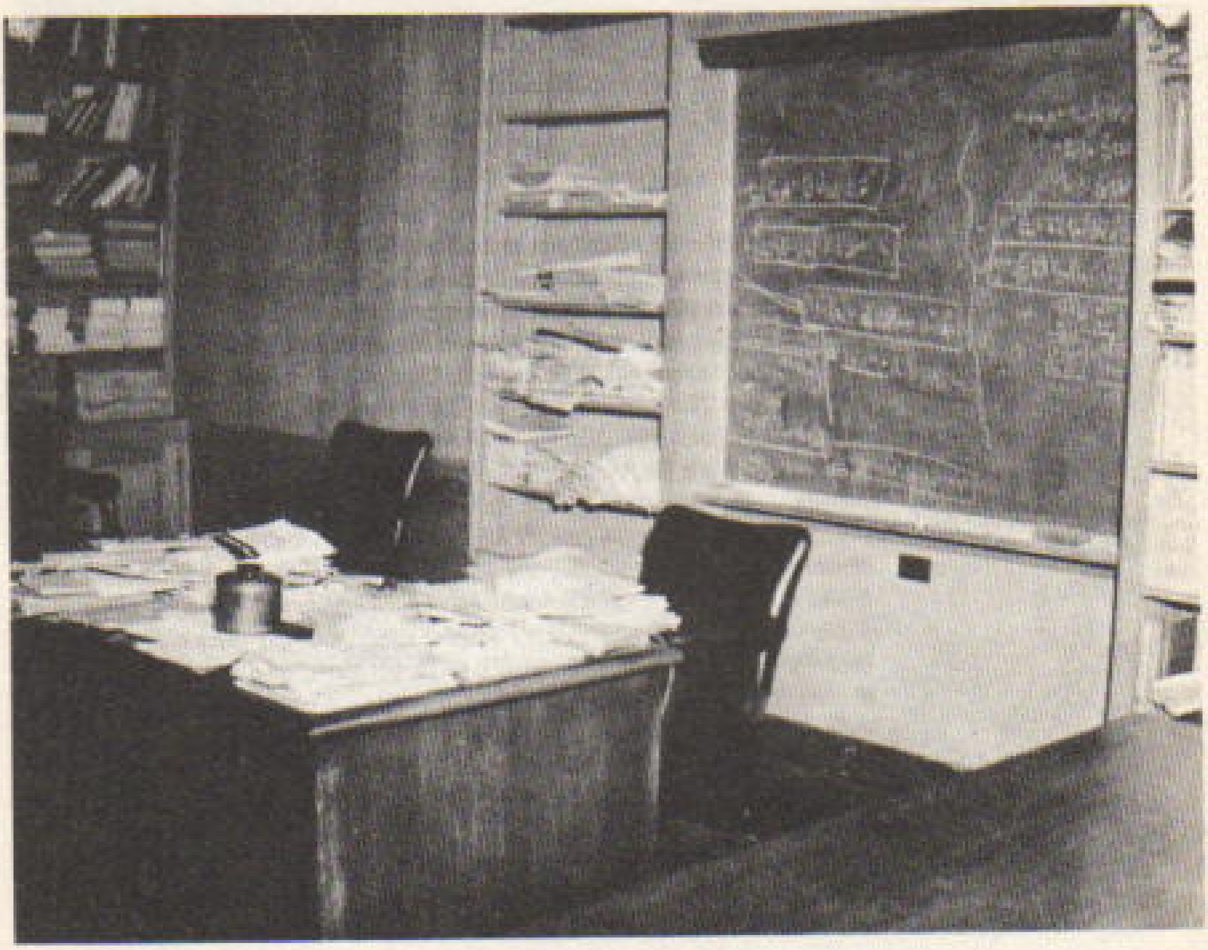
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΟΡΟΝΤΖΗ



'Αϊνστάϊν τό 1950.

ΑΪΝΣΤΑΪΝ

'Από τά μαθήματα πού ἔδωσε ὁ 'Αϊνστάϊν σάν καθηγητής στό Πανεπιστήμιο τοῦ Πρίνστον



Τό γραφεῖο καί ὁ μαυροπίνακας τοῦ 'Αϊνστάϊν
ὅπως τόν ἄφησε στό Πανεπιστήμιο
τοῦ Πρίνστον πρίν πάει στό Νοσοκομεῖο τό 1955

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ξανασυντάσσοντας αὐτές τίς τέσσερις διαλέξεις, πού ἔκανα στό Πανεπιστήμιο τοῦ Πρίνστον τό Μάη τοῦ 1921, σκοπός μου ἦταν ἡ ἀνακεφαλαίωση τῶν σπουδαιοτέρων ἀπόψεων καί μαθηματικῶν μεθόδων τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας. Ἄφησα στήν πάντα τά λιγότερο οὐσιώδη μέρη καί προσπάθησα νά χειρισθῶ τά σπουδαιότερα θέματα, κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε τό σύνολο νά μπορεῖ νά χρησιμεύσει σάν εἰσαγωγή σ' ὅλους ἐκείνους πού κατέχουν τά στοιχεῖα τῶν ἀνωτέρων μαθηματικῶν, ἀλλά πού δέν μποροῦν ν' ἀφιερώσουν πολύ χρόνο καί προσπάθεια σ' αὐτό τό θέμα.

Σ' αὐτή τή σύντομη ἔκθεση, τό θέμα ὅπως ἐξυπακούεται, δέν ἦταν δυνατό νά ἀναλυθεῖ διεξοδικά σ' ὅλες του τίς λεπτομέρειες. Δέν ἀνάφερα γιά παράδειγμα τά πιό λεπτομερειακά ἀναπτύγματα πού βασίζονται στό λογισμό τῶν διακυμάνσεων, πού ὅμως ἀπό μαθηματική ἄποψη εἶναι πιό ἐνδιαφέροντα. Ὁ ἰδιαίτερος στόχος αὐτοῦ τοῦ βιβλίου ἦταν νά φωτίσω ὅσο γίνεται περισσότερο τίς ἀρχές πού στηρίζουν τή θεωρία.

Α. Ἀϊνστάϊν

ΠΡΩΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΣ ΣΤΗΝ ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΙΝ ΤΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ἡ Θεωρία τῆς σχετικότητας εἶναι στενά δεμένη μέ τή Θεωρία τοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου. Γι' αὐτό θάταν καλλίτερα ν' ἀρχίσουμε μέ μιά σύντομη ἀναφορά στήν καταγωγή τῶν ἀντιλήψεων μας ὅσο ἀφορᾶ τό χῶρο καί τό χρόνο, ἄν καί ξέρω ὅτι καταπιάνομαι μέ ἕνα τομέα πού ἔχει προκαλέσει πολλές ἀμφισβητήσεις.

Ὅλες οἱ ἐπιστῆμες προσπαθοῦν νά ταξινομήσουν ὅλες τίς ἐπιμέρους, συνειδητά ἀποκτημένες γνώσεις μας κατά τέτοιο τρόπο ὥστε οἱ μεταξύ τους σχέσεις νά ἀποτελοῦν ἕνα λογικό σύστημα. Καί αὐτό ἰσχύει εἴτε πρόκειται γιά τίς φυσικές ἐπιστῆμες εἴτε πρόκειται γιά τήν ψυχολογία. Ποιά εἶναι ὅμως ἡ σχέση πού συνδέει τίς τρέχουσες ἀντιλήψεις μας γιά τό χῶρο καί τό χρόνο μέ τό χαρακτῆρα τῶν γνώσεων πού ἔχουν καταχωρηθεῖ στήν συνείδησή μας;

Στόν ἄνθρωπο οἱ καταχωρημένες στήν συνείδηση πιά γνώσεις (τά στοιχεῖα τῆς συνείδησης) εἶναι γκρουπαρισμένες σέ μιά σειρά, ὅπου κάθε τέτοια ξεχωριστή γνώση, πού μποροῦμε νά βροῦμε σάν σκαλίσουμε τήν μνήμη μας, φαίνεται νά εἶναι ταχτοποιημένη, νοικοκυρεμένη σύμφωνα μέ τό ἀλάθητο κριτήριο τοῦ «πρίν» ἤ τοῦ «μετά». Ἔτσι λοιπόν, ὑπάρχει γιά τό κάθε ἄτομο ἕνας χρόνος προσωπικός ἤ ὑποκειμενικός. Ὁ χρόνος, αὐτός καθαυτός, δέν ἔχει κανένα ἐσωτερικό τρόπο μέτρησης. Μπορῶ πολύ ὡραῖα νά ἀντιστιχίσω ἕνα ἀριθμό σέ κάθε μιά ἀπ' αὐτές τίς γνώσεις, ἔτσι ὥστε σέ κάθε γνώση πού ἀποκτήθηκε μετά ἀπό μιά ἄλλη νά ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπ' ὅ,τι στήν ἀμέσως προηγούμενη γνώση, ἀλλά ὁ τρόπος, μέ τόν ὁποῖο γίνεται αὐτή ἡ ἀντιστοιχία, ἐκ πρώτης ὄψεως παραμένει σέ μεγάλο βαθμό αὐθαίρετος. Ἐν τούτοις, εἶναι δυνατόν νά καθοριστῆ αὐτή ἡ ἀντιστοιχία μέ περισσότερη ἀκρίβεια μέ τή χρήση ἑνός ρολογιοῦ, συγκρίνοντας τίς γνώσεις πού ἀφοροῦν τίς συγκεκριμένες ἀντιστοιχίες μέ ἄλλες γνώσεις. Λέγοντας ρολόι, πρέπει νά ἐννοοῦμε ἕνα ἀντικείμενο στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἕνας πεπερασμένος ἀριθμός γνώσεων καί πού ἔχει κι ἄλλες ἰδιότητες, πού ὅμως θά τίς δοῦμε παρά–κάτω.

Διάφορα ἄτομα μποροῦν, μέχρι ἕνα βαθμό, νά συγκρίνουν τίς γνώσεις τους μέ τή βοήθεια τῆς γλώσσας. Διαπιστώνουμε λοιπόν ὅτι μποροῦμε νά καθιερώσουμε μιά ἀντιστοιχία μεταξύ ὡρισμένων γνώσεων πού ἀποκτοῦνται μέ τίς αἰσθήσεις καί πού ἀνήκουν σέ διάφορα ἄτομα, ἐνῶ ὑπάρχουν ἄλλες γνώσεις πού δέν μποροῦν νά μποῦν σέ ἀντιστοιχία. Σέ ὅλες τίς διά μέσου τῶν αἰσθήσεων γνώσεις πού μποροῦν νά ἀντιστοιχιθοῦν ἀνάμεσα σέ διάφορα ἄτομα, καί πού εἶναι κατά κάποιο τρόπο ὑπερατομικές, ἀντιστοιχοῦμε μέ τή σκέψη μας μιά ἀλήθεια. Ἡ ἀλήθεια αὐτή, καί ἔμμεσα τό σύνολο αὐτοῦ τοῦ εἴδους τῶν γνώσεων, εἶναι τό ἀντικείμενο τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν, καί ἰδιαίτερα τῆς πιό βασικῆς, τῆς φυσικῆς. Στά σχετικά σταθερά συμπλέγματα γνώσεων αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ἀντιστοιχοῦν οἱ ἔννοιες τοῦ φυσικοῦ σώματος καί τοῦ στερεοῦ σώματος. Μ' αὐτή τήν ἔννοια τό ρολόι εἶναι κι αὐτό ἕνα ὑλικό σῶμα ἤ ἕνα ὑλικό σύστημα. Ἕνα ἄλλο χαρακτηριστικό τοῦ ρολογιοῦ εἶναι ὅτι οἱ ἀκολουθίες τῶν γνώσεων ἤ τά ἐπί μέρους διαστήματα πού μετράει θεωροῦνται ἴσα μεταξύ τους.

Ἡ ὕπαρξη τῶν ἐννοιῶν καί τῶν συστημάτων τῶν ἐννοιῶν δικαιολογεῖται ἀποκλειστικά καί μόνο ἀπ' τό γεγονός ὅτι μᾶς ἐπιτρέπουν ν' ἀγκαλιάσουμε ὅλα μέ μιᾶς τά συμπλέγματα τῶν γνώσεων. Γι' αὐτό καί πιστεύω ὅτι εἶναι ἐπικίνδυνο πράγμα αὐτό πού κάνουν οἱ φιλόσοφοι, ὅταν χρησιμοποιοῦν στόν τομέα τῆς λογικῆς ἀναγκαιότητας (τοῦ a priori) κάποια θεμελιώδη ἔννοια τῆς ἐπιστήμης, πού εἶναι πειραματικά χρήσιμη καί προσιτή στόν ἔλεγχο. Γι' αὐτό, ὅσο σίγουρο εἶναι ὅτι καμιά ἀντίληψη δέν προέρχεται ἀπό συνειδητή γνώση, μέσα ἀπό μιά λογική διαδικασία ἤ καί μέ κάποιον ἄλλο τρόπο, ἀλλά ὅτι (οἱ ἀντιλήψεις) αὐτές εἶναι κατά κάποιο τρόπο ἐλεύθερα δημιουργήματα τοῦ ἀνθρώπινου πνεύματος, τό ἴδιο βέβαιο εἶναι ὅτι εἶναι τόσο ἀνεξάρτητες ἀπό τίς γνώσεις μας ὅσο καί τά ροῦχα ἀπό τό σχῆμα τοῦ ἀνθρώπινου σώματος. Αὐτό εἶναι ἰδιαίτερα ἀληθινό γιά τίς ἀντιλήψεις μας τίς σχετικές μέ τό χρόνο καί τόν χῶρο, πού οἱ φυσικοί — κάτω ἀπό τήν πίεση τῶν γεγονότων — ὑποχρεώθηκαν νά χρησιμοποιήσουν τόν ἀπό μηχανῆς θεό τοῦ a priori, γιά νά μπορέσουν νά τίς κάνουν εὔχρηστες.

Φτάνουμε τώρα στίς ἀντιλήψεις καί τίς κρίσεις γιά τόν χῶρο. Καί ἐδῶ, πάλι εἶναι ἀπαραίτητο νά καθοριστεῖ μέ ἀκρίβεια ἡ σχέση μεταξύ τῆς γνώσης καί τῆς ἀντίληψης. Στόν τομέα αὐτό, μοῦ φαίνεται ὅτι ὁ Poincaré ἐκθέτει πολύ ξεκάθαρα τό θέμα στό βιβλίο του La Science et l Hypothèse. Ἀπό τίς ἀλλαγές πού διαπιστώνουμε στά στερεά σώματα ἰδιαίτερα ἁπλές εἶναι ἐκεῖνες πού μποροῦν νά ἐξουδετερωθοῦν ἀπό ἀνάλογες ἀλλαγές τοῦ σώματός μας. Ὁ Poincaré τίς ὀνομάζει «ἀλλαγές θέσεις». Μέ καθαρές ἀλλαγές θέσης, δύο σώματα μποροῦν νά βρεθοῦν τό ἕνα πλάι στό ἄλλο.

Οἱ βάσεις τῆς Γεωμετρίας (νόμοι τῆς ἰσότητας) ἀνάγονται στούς νόμους πού κυβερνοῦν αὐτές τίς ἀλλαγές θέσης. Σ' ὅ'τι ἀφορᾶ τήν ἔννοια τοῦ χώρου, μᾶς φαίνεται οὐσιῶδες τό παρακάτω σημεῖο: Μποροῦμε, βάζοντας πλάϊ σ' ἕνα σῶμα Α τά σώματα Β, C, ..., νά φτιάξουμε καινούρια σώματα, δηλαδή νά προεκτείνουμε τό σῶμα Α. Μποροῦμε ἀκόμη νά προεκτείνουμε τό σῶμα Α ἔτσι ὥστε νά ἐφάπτεται μέ κάθε σῶμα Χ. Τό σύνολο τῶν προεκτάσεων τοῦ σώματος Α μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν *ὁ χῶρος τοῦ σώματος Α*. Εἶναι φανερό λοιπόν ὅτι ὅλα τά σώματα βρίσκονται μέσα στόν *χῶρο τοῦ σώματος Α* (πού εἶναι αὐθαίρετα διαλεγμένος). Μ' αὐτή τήν ἔννοια δέν μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά τόν *χῶρο αὐτό καθαυτό* ἀλλά μονάχα γιά τόν *χῶρο πού ἀντιστοιχεῖ στό σῶμα Α*. Ἀσφαλῶς, στή καθημερινή Ζωή ὁ ρόλος τοῦ γήινου σώματος εἶναι τόσο πρωταρχικός γιά τήν ἐκτίμηση τῶν σχετικῶν θέσεων τῶν σωμάτων πού ἀναγκαστικά ἔχει ὁδηγήσει στήν ἰδέα τοῦ χώρου αὐτοῦ καθαυτοῦ πού ὅμως δέν μπορεῖ κανένας νά τήν ὑποστηρίξει σοβαρά. Θά θέλαμε, λοιπόν, γιά νά καταρρίψουμε αὐτό τό ἐπικίνδυνο λάθος, νά μιλήσουμε ἀποκλειστικά καί μόνο γιά τό σῶμα ἀναφορᾶς ἤ τόν χῶρο ἀναφορᾶς. Μόνο ἡ γενική θεωρία τῆς σχετικότητας ἔκανε ἀναγκαῖο τό ξεκαθάρισμα αὐτῆς τῆς ἔννοιας, ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα.

Δέν θέλω νά ἐπιμείνω στίς ἰδιότητες τοῦ χώρου ἀναφορᾶς πού ὁδήγησαν στήν παραδοχή· τοῦ σημείου σάν στοιχείου τοῦ χώρου καί στήν ἀντίληψη τοῦ χώρου σάν συνεχοῦς. Οὔτε καί θά ἐπιμείνω στήν ἀνάλυση τῶν ἰδιοτήτων τοῦ χώρου ἀναφορᾶς πού ἀποδείχνουν τήν ἔννοια τῆς συνεχοῦς ἀκολουθίας σημείων ἤ τῆς γραμμῆς. Ἀλλά ἀπό τή στιγμή πού θά θεωρηθοῦν δοσμένες αὐτές οἱ ἔννοιες καί ἡ σχέση τους μέ τό στερεό σῶμα ἀναφορᾶς, εἶναι εὔκολο νά ποῦμε αὐτό πού πρέπει νά ἐννοοῦμε μέ τό τριδιάστατο τοῦ χώρου. Εἶναι ἡ πάρα κάτω πρόταση: σέ κάθε σημεῖο μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε 3 ἀριθμούς x_1, x_2 καί x_3 (συνταγμένες) μέ μονοσήμαντη ἀντιστοιχία καί, ἀντίστροφα, οἱ ἀριθμοί x_1, x_2 καί x_3 ἀλλάζουν κατά συνεχῆ τρόπο ἄν τό ἀντίστοιχο σημεῖο περιγράφει μιά συνεχῆ σειρά ἀπό σημεῖα (γραμμή).

Ἡ εὐκλείδιος γεωμετρία. — Ἡ πρίν ἀπό τή σχετικότητα φυσική ὑποθέτει ὅτι οἱ νόμοι τῆς θέσης τῶν ἰδεωδῶν στερεῶν σωμάτων συμμορφώνονται μέ τήν εὐκλείδιο γεωμετρία. Τό νόημα αὐτῆς τῆς ὑπόθεσης μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο. Δύο σημεῖα σημειωμένα πάνω σ' ἕνα στερεό σῶμα καθορίζουν μιά εὐθεία γραμμή. Αὐτή μπορεῖ νά κατέχει διάφορες θέσεις ὡς πρός τόν χῶρο ἀναφορᾶς. Ἄν παραστήσουμε μέ τίς συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ χώρου μέ τέτοιο τρόπο ὥστε οἱ διαφορές τῶν συντεταγμένων Δx_1, Δx_2, Δx_3 τῶν σημείων τῆς εὐθείας νά παραμένει σταθερό τετράγωνο ἀθροίσματος

(1) $$S^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2,$$

γιά ὁποιαδήποτε θέση τῆς εὐθείας, τότε θεωροῦμε τόν χῶρο ἀναφορᾶς σάν εὐκλείδιο καί τίς συντεταγμένες καρτεσιανές‡. Ἀρκεῖ μάλιστα νά κάνουμε τήν ἴδια ὑπόθεση γιά τήν ὁριακή περίπτωση τῶν ἄπειρα μικρῶν εὐθειῶν. Αὐτή ἡ ὑπόθεση περιλαμβάνει κι ἄλλες γενικότερου χαρακτῆρα, στίς ὁποῖες θά θέλαμε νά σταθοῦμε λόγω τῆς βασικῆς τους σημασίας. Κατά πρῶτο λόγο, ὑποθέτουμε ὅτι ἕνα ἰδεῶδες στερεό σῶμα μπορεῖ νά κινηθεῖ μέ κάθε δυνατό τρόπο. Κατά δεύτερο λόγο, ὑποθέτουμε ὅτι ἡ σχετική θέση δύο ἰδεωδῶν στερεῶν σωμάτων εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ὕλη ἀπό τήν ὁποία ἀποτελοῦνται καί ἀπό τίς ἀλλαγές θέσης τους, ὑπό τήν προϋπόθεση ὅτι 2 εὐθεῖες πού περνοῦν ἀπ' τά 2 σώματα καί πού σέ δεδομένη στιγμή συμπίπτουν θά μποροῦν νά συμπίπτουν πάντοτε καί παντοῦ. Αὐτές οἱ δύο ὑποθέσεις πού ἔχουν κεφαλαιώδη σημασία γιά τή γεωμετρία, καί, γενικά, γιά τήν ποσοτική φυσική, ἔχουν φυσικά πειραματική προέλευση. Ἡ ἰσχύ τους στήν γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας περιορίζεται στά ἄπειρα μικρά σώματα καί χώρους ἀναφορᾶς (συγκριτικά μέ τίς ἀστρονομικές διαστάσεις).

Τό μέγεθος s ὀνομάζεται μῆκος τῆς εὐθείας. Γιά νά ὁριστεῖ αὐτό ἐπακριβῶς, τό μῆκος μιᾶς δοσμένης εὐθείας πρέπει νά ὁριστεῖ αὐθαίρετα, γιά παράδειγμα ἴσο μέ τή μονάδα (μέτρο σύγκρισης). Ἀπό δῶ, καθορίζονται τά μήκη ὅλων τῶν ἄλλων εὐθειῶν. Ἄν θεωρήσουμε ὅτι τά x_ν ἐξαρτῶνται γραμμικά ἀπό μία παράμετρο λ,

$$x_\nu = a_\nu + \lambda b_\nu,$$
$$\Sigma B_\nu^2 = 1.$$

ἔχουμε μία γραμμή πού ἔχει ὅλες τίς ἰδιότητες τῆς εὐθείας τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας. Τό συμπέρασμα εἶναι ὅτι ἐφαρμόζοντας ν φορές τό τμῆμα s σέ μιά εὐθεῖα, παίρνουμε τό τμῆμα νs. Κατά συνέπεια, τό μῆκος δηλώνει τό ἀποτέλεσμα τῆς μέτρησης, πού γίνηκε μέ τή βοήθεια τοῦ μέτρου σύγκρισης, κατά μῆκος μιᾶς εὐθείας γραμμῆς. Ἡ σπουδαιότητα του, καθώς ἐπίσης καί ἡ σπουδαιότητα τῆς εὐθείας γραμμῆς, εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό σύστημα συντεταγμένων, ὅπως θά δοῦμε στή συνέχεια.

Φτάνουμε τώρα σ' ἕνα σκεφτικό πού κατ' ἀνάλογο τρόπο, παίζει ρόλο τόσο στήν εἰδική ὅσο καί στή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας. Τό ἐρώτημα εἶναι: ὑπάρχουν, ἐκτός ἀπό τίς καρτεσιανές συντεταγμένες πού χρησιμοποιήσαμε, κι ἄλλες πού ἔχουν τό ἴδιο πλεονέκτημα; Ἡ φυσική σημασία τῆς εὐθείας εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τῶν συντεταγμένων, ὅπως κατά συνέπεια καί ἡ φυσική σημασία τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, τοῦ τόπου δηλαδή ὅλων τῶν ἄκρων τῶν ἴσων εὐθειῶν πού ξεκινοῦν ἀπό ἕνα κεντρικό αὐθαίρετο σημεῖο τοῦ χώρου ἀναφορᾶς. Ἄν x_ν καθώς καί x'_ν (ὅπου ν: ἀπό 1 ἕως 3) εἶναι οἱ καρτεσιανές συντεταγμένες τοῦ χώρου ἀναφορᾶς μας, ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια θά ἐκφράζεται ὡς πρός αὐτά τά 2 συστήματα συντεταγμένων ἀπό τίς ἐξισώσεις

$$\Sigma\, \Delta x^2{}_\nu = \text{σταθ.}, \tag{2}$$

$$\Sigma\, \Delta x'^2_\nu = \text{σταθ.} \tag{2α}$$

Μέ ποιό τρόπο τά x'_ν νά ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν x_ν ὥστε οἱ ἐξισώσεις (2) καί (2α) νά εἶναι ἰσοδύναμες; Ἄν φανταστοῦμε τά x'_ν

ἐκφρασμένα συναρτήσει τῶν x_ν, μποροῦμε κατά τό θεώρημα τοῦ Taylor, νά βάλουμε γιά Δx_ν ἀρκετά μικρά

$$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\Delta x_\alpha \Delta x_\beta \ldots$$

Ἄν βάλουμε αὐτή τήν τιμή στήν (2α) καί τή συγκρίνουμε μέ τήν (1) βλέπουμε ὅτι τό x'_ν πρέπει νά εἶναι γραμμική ἀνάρτιση τῶν x_ν.

Κατά συνέπεια, ἄν βάλουμε

(3) $$x'_\nu = \alpha_\nu + \sum_\alpha b_{\nu\alpha} x_\alpha,$$

ἤ

(3α) $$\Delta x'_\nu = \sum_\alpha b_{\nu\alpha} \Delta x_\alpha,$$

ἡ ἰσοδυναμία τῶν ἰσοτήτων (2) καί (2α) παριστάνεται ἀπό τή σχέση

(2β) $$\Sigma \Delta x'^2_\nu = \lambda^2 \Sigma \Delta x^2_\nu$$

(ὅπου λ ἀνεξάρτητο τῶν Δx_ν).

Ἀπό δῶ συνεπάγεται πρῶτα ὅτι τό λ εἶναι μιά σταθερά. Ἄν βάλουμε λ=1 οἱ σχέσεις (2β) καί (3α) δείνουν τίς συνθῆκες

(4) $$\sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

ὅπου $\delta_{\alpha\beta}$ = 1 ἤ 0 γιά α=β καί α≠β ἀντίστοιχα.

Οἱ συνθῆκες (4) ὀνομάζονται συνθῆκες ὀρθογωνίου η ὀρθῆς γωνίας καί οἱ μετατροπές (3) καί (4) γραμμικές μετατροπές ὀρθογώνιες. Ἄν ἀπαιτοῦμε

$$S^2 = \Sigma \Delta x^2_\nu$$

δηλαδή, γιά κάθε σύστημα συντεταγμένων, ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ μήκους, καί ἄν κάνουμε πάντα τίς μετρήσεις μέ τόν ἴδιο κανόνα, τότε $\lambda = 1$. Σ' αὐτή τήν περίπτωση οἱ ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές εἶναι οἱ μόνες πού ἐπιτρέπουν τό πέρασμα ἀπό ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων ἑνός χώρου ἀναφορᾶς, σ' ἕνα ἄλλο σύστημα. Βλέπουμε ὅτι μέ τή χρήση τέτοιων μετατροπῶν, οἱ ἐξισώσεις εὐθείας μετατρέπονται πάλι σ' ἐξισώσεις εὐθείας. Ἄς κάνουμε τώρα τήν ἀντιστροφή τῶν ἐξισώσεων (3α), πολλαπλασιάζοντας καί τά 2 μέλη μέ $b_{\nu\beta}$ καί ἀθροίζοντας πρός ν. Ἔχουμε ἔτσι.

$$(5) \qquad \sum b_{\nu\beta} \Delta x'_\nu = \sum_{\nu\alpha} b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \Delta x_\alpha = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \Delta x_\alpha = \Delta x_\beta .$$

Κατά συνέπεια οἱ ἴδιοι συντελεστές b δίνουν καί τήν ἀντίστροφη ὑποκατάσταση τῶν Δx_ν. Γεωμετρικά, τό $b_{\nu\alpha}$ εἶναι τό συνημίτονο τῆς γωνίας μεταξύ τοῦ ἄξονα x'_ν καί τοῦ ἄξονα x_α.

Ἀνακεφαλαιώνοντας μποροῦμε νά ποῦμε: στήν Εὐκλείδια γεωμετρία ὑπάρχουν (σ' ἕνα δοσμένο χῶρο ἀναφορᾶς) συστήματα συντεταγμένων προνομιοῦχα, τά καρτεσιανά, πού συνάγονται τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο μέ ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές τῶν συντεταγμένων. Μέ τέτοιες συντεταγμένες, ἡ ἀπόσταση s μεταξύ 2 κειμένων τοῦ χώρου ἀναφορᾶς πού μπορεῖ νά μετρηθεῖ ἐκφράζεται κατά τρόπο ἐξαιρετικά ἁπλό.

Ὅλη ἡ γεωμετρία μπορεῖ νά βασιστεῖ σ' αὐτή τήν ἔννοια τῆς ἀπόστασης. Σ' αὐτήν τήν ἔκθεση, ἡ γεωμετρία ἀνάγεται στά ἀληθινά ἀντικείμενα (στερεά σώματα), καί οἱ προτάσεις της εἶναι παραδοχές τῆς ὑπόστασης αὐτῶν τῶν ἀντικειμένων, πού μπορεῖ νά εἶναι σωστές ἤ λαθεμένες.

Συνήθως ἡ γεωμετρία διδάσκεται μέ τέτοιο τρόπο πού καμμιά σύνδεση δέν γίνεται μεταξύ τῆς ἔννοιας καί τῶν ἐσωτερικῶν ἐμπειριῶν μας. 'Ασφαλῶς, ὑπάρχει συγκεκριμένο ὄφελος ὅταν ἀπομονώνεται ὅ,τι τό εἰδικά λογικό ὑπάρχει μέσα στή γεωμετρία, καί ἀκόμη ὅ,τι εἶναι κατ' ἀρχή ἀνεξάρτητο ἀπό τό πείραμα. Αὐτό εἶναι ἀρκετό γιά ὅποιον κάνει καθαρά μαθηματικά. Ἱκανοποιεῖται ἄν οἱ προτάσεις του εἶναι σωστές, δηλαδή ἄν ἔχουν βγεῖ ἀπό ἀξιώματα χωρίς λογικό σφάλμα. Τό ἄν ἡ Εὐκλείδια γεωμετρία εἶναι πραγματική ἤ ὄχι, γι' αὐτόν δέν ἔχει σημασία. 'Αλλά, γιά τό σκοπό μας, πρέπει νά συσχετίσουμε τά πραγματικά ἀντικείμενα μέ τίς βασικές ἔννοιες τῆς γεωμετρίας. Χωρίς τέτοια συσχέτιση ἡ γεωμετρία φαίνεται στόν φυσικό χωρίς ἐνδιαφέρον. Γι' αὐτόν, κατά συνέπεια, ἔχει κάποιο ἐνδιαφέρον νά μιλάει γιά τήν ἀλήθεια ἤ τήν ἀκρίβεια τῶν προτάσεων τῆς γεωμετρίας. Μέ τό παρακάτω ἁπλό σκεπτικό, πού ὀφείλεται στόν Helmholtz, μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ Εὐκλείδια γεωμετρία, ὅταν ἐξηγηθεῖ ὅπως πάρα πάνω ἀναφέραμε, δέν δείχνει μονάχα κάτι πού εὔκολα τό καταλαβαίνει κανείς, δηλαδή κάτι πού συνάγεται λογικά ἀπό ὁρισμούς:

Μεταξύ η σημείων τοῦ χώρου, ὑπάρχουν $\frac{1}{2}$ η (η — 1) ἀποστάσεις $s_{\mu\nu}$: 'Ανάμεσα σ' αὐτές καί τίς 3 η συντεταγμένες, ὑπάρχουν οἱ σχέσεις

$$s^2_{\mu\nu} = (x_{1(\mu)} - x_{1(\nu)})^2 + (x_{2(\mu)} - x_{2(\nu)})^2 + (x_{3(\mu)} - x_{3(\nu)})^2$$

'Απ' αὐτές τίς $\frac{\eta(\eta-1)}{2}$

ἐξισώσεις μποροῦμε νά ἀπαλείψουμε τίς 3n συντεταγμένες, κι ἔτσι βγαίνουν τουλάχιστον $\frac{n(n-1)}{2}$ - — 3n ἐξισώσεις μεταξύ τῶν $\delta_{\mu\nu}(1)$.

'Εφ' ὅσον τό $s_{\mu\nu}$ εἶναι μεγέθη μετρήσιμα πού εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἀνεξάρτητα τά μέν ἀπό τά δέ, αὐτές οἱ σχέσεις μεταξύ τῶν $s_{\mu\nu}$ δέν πρέπει νά ὑπάρχουν a priori.

'Απ' ὅ,τι εἴπαμε φαίνεται, ὅτι οἱ ἐξισώσεις μετατροπῆς (3), (4), ἔχουν βασική σημασία γιά τήν εὐκλείδια γεωμετρία, γιατί ἐλέγχουν τό πέρασμα ἀπό ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων σ' ἕνα ἄλλο. Τό σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων διακρίνεται ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ μετρήσιμη ἀπόσταση s ἀνάμεσα σέ 2 σημεῖα ἐκφράζεται, ἀναφορικά πρός τό σύστημα, ἀπό τήν ἐξίσωση.

$$s^2 = \Delta x^2_\nu.$$

Ἄν τά $K_{x\nu}$ καί $K_{x'\nu}$ εἶναι συστήματα καρτεσιανῶν συντεταγμένων, ἔχουμε

$$\Sigma\ \Delta x^2_\nu = \Sigma\ \Delta x'^2_\nu.$$

Τό ἀναλλοίωτο μέγεθος. — Τό πρῶτο μέλος εἶναι ἴσο μέ τό δεύτερο σάν ἀποτέλεσμα τῶν ὀρθογώνιων γραμμικῶν ἐξισώσεων μετατροπῆς πού ὑπάρχουν μεταξύ τῶν x΄ καί τῶν x καί τό πρῶτο μέλος δέν διακρίνεται ἀπό τό δεύτερο παρά μόνο ἀπό τό γεγονός ὅτι τά x_ν ἀντικαθίστανται ἀπό τά x'_ν. Αὐτό τό γεγονός ἐκφράζεται ἔτσι: *τό $\Sigma\ \Delta x^2_\nu$ εἶναι ἀναλλοίωτο ὡς πρός τίς ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές.* Εἶναι φανερό ὅτι στήν εὐκλείδια γεωμετρία, ἀντικειμενική σημασία (δηλαδή ἀνεξάρτητη ἀπό τήν εἰδική ἐκλογή τοῦ καρτεσιανοῦ συστήματος) ἔχουν μόνο τά μεγέθη πού μποροῦν νά ἐκφραστοῦν ἀπό ἕνα ἀναλλοίωτο μέγεθος (σχετικά μέ τίς ὀρθογώνιες γραμμικές συντεταγμένες). Χάρη σ' αὐτό τό γεγονός ἡ θεωρία τῶν ἀναλλοίωτων μεγεθῶν ἔχει σημασία γιά τήν ἀναλυτική γεωμετρία.

Σάν δεύτερο παράδειγμα γεωμετρικοῦ ἀναλλοίωτου μεγέθους θά ἀναφέρω τό μέγεθος ὄγκου. Ἐκφράζεται μέ τή μορφή

$$V = \iiint dx_1 dx_2 dx_3.$$

Πράγματι, σύμφωνα μέ τήν μετατροπή τοῦ Jacobi, ἔχουμε

$$\iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \iiint \frac{\theta(x'_1, x'_2, x'_3)}{\theta(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

ὅπου ἡ ὁλοκληρώσιμη ποσότητα στό τελευταῖο ὁλοκλήρωμα εἶναι ἡ συναρτησιακή ὁρίζουσα τῶν x'_ν ὡς πρός τά x_ν, πού κατά τήν (3), εἶναι ἴση μέ τήν ὁρίζουσα $|b_{\mu\nu}|$ τῶν συντελεστῶν ὑποκατάστασης $b_{\nu\alpha}$. Ἄν φτιάξουμε τήν ὁρίζουσα $|\delta_{\alpha\beta}|$ τῶν σχέσεων (4), ἔχουμε, ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὁριζουσῶν,

$$(6) \qquad 1 = |\delta_{\alpha\beta}| = \left| \sum_\nu b_{\nu\alpha} b_{\nu\beta} \right| = |b_{\mu\nu}|^2; \qquad |b_{\mu\nu}| = \pm 1.$$

Ἄν περιοριστοῦμε στίς μετατροπές πού ἔχουν τήν ὁρίζουσα +1(1).

---

(1) Ὑπάρχουν, κατά συνέπεια, δύο εἴδη συστημάτων καρτεσιανῶν συντεταγμένων, πού ὀνομάζουμε ἀντίστοιχα «δεξιά συστήματα» καί «ἀριστερά συστήματα». Αὐτή ἡ διάκριση εἶναι πολύ γνωστή στούς φυσικούς καί στούς μηχανικούς. Εἶναι ἐνδιαφέρον νά σημειώσουμε ὅτι δέν μποροῦμε νά ὁρίσουμε γεωμετρικά τά δεξιά ἤ ἀριστερά καρτεσιανά συστήματα τόν κάθε τύπο ξεχωριστά, ἀλλά μονάχα τήν ἀντίθεση μεταξύ τῶν 2 τύπων συστημάτων.

(καί ἡ μετατροπή αὐτοῦ μόνο τοῦ εἴδους προέρχεται ἀπό τίς συνεχεῖς μεταβολές τῶν συστημάτων τῶν συντεταγμένων), τότε ὁ ὄγκος V εἶναι ἀναλλοίωτος.

Τό ἄνυσμα. Τό ἀναλλοίωτο δέν εἶναι ἡ μοναδική μορφή πού ἐπιτρέπει νά ἔχουμε προτάσεις, πού νά εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τήν εἰδική ἐκλογή τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Τά ἄλλα μέσα ἔκφρασης εἶναι τά ἀνύσματα καί οἱ τανιστές. Ἄς πάρουμε, γιά παράδειγμα, ὅτι τό σημεῖο τῶν (συνηθισμένων) συντεταγμένων χ_ν βρίσκεται πάνω σέ μιά εὐθεία. Ἔχουμε λοιπόν:

$$\chi_\nu - A_\nu = \lambda B_\nu \quad (\nu \text{ ἀπό } 1 \text{ ἕως } 3)$$

Χωρίς νά περιορίσουμε τή γενική ἰσχύ, μποροῦμε νά βάλουμε:

$$\Sigma B_\nu^2 = 1.$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τίς ἐξισώσεις μέ $b_{\beta\nu}$ (π.χ. τίς ἐξισώσεις (3α) καί (5) καί ἀθροίσουμε ὡς πρός ν, ἔχουμε:

$$x'_\beta - A'_\beta = \lambda B'_\beta,$$

$$B'_\beta = \sum_\nu b_{\beta\nu} B_\nu; \qquad A'_\beta = \sum b_{\beta\nu} A_\nu.$$

Αὐτές εἶναι οἱ ἐξισώσεις εὐθείας σχετικά μ' ἕνα δεύτερο σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων K΄. Ἔχουν τήν ἴδια μορφή ὅπως καί στό ἀρχικό σύστημα συντεταγμένων. Βλέπουμε ὅτι ἄν ἡ σημασία τῆς εὐθείας εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό σύστημα συντεταγμένων. Ἀπό τυπική ἄποψη, αὐτό ἐξηγεῖται ἀπό τό γεγονός ὅτι τά μεγέθη (χ_ν-A_ν) — λB_ν μποροῦν νά μετατραποῦν ὅπως καί οἱ συνιστῶσες μιᾶς εὐθείας $\Delta\chi_\nu$. Ὀνομάζουμε ἄνυσμα, τό σύνολο τριῶν μεγεθῶν, πού ὁρίζονται γιά κάθε σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων, καί πού μετατρέπονται ὅπως καί οἱ ἀνισώσεις μιᾶς εὐθείας. Ἄν οἱ τρεῖς συνιστῶσες ἑνός ἀνύσματος χάνονται ὡς πρός ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων, χάνονται ἐπίσης καί γιά κάθε ἄλλο σύστημα, γιατί οἱ ἐξισώσεις μετατροπῆς εἶναι ὁμοιογενεῖς. Κατ' αὐτόν τόν τρό-

πο, μποροῦμε νά συλλάβουμε τή σημασία τῆς ἔννοιας τοῦ ἀνύσματος, χωρίς νά ἀνατρέξουμε στή γεωμετρική παράσταση. Ἡ χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς ἐξίσωσης τῆς εὐθείας πού ἀναφέραμε, ἐκφράζεται ἔτσι: ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας εἶναι συνδιακυμαινόμενη σχετικά μέ τίς ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές.

Ὁ τανιστής. — Θά ἀποδείξουμε τώρα μέ συντομία, ὅτι ὑπάρχουν γεωμετρικές ἀλήθειες πού ὁδηγοῦν στήν ἔννοια τοῦ τανυστῆ. Ἔστω P_0 τό κέντρο μιᾶς ἐπιφάνειας δεύτερου βαθμοῦ, P ἕνα τυχόν σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας, καί ξ_ν, οἱ προβολές τῆς εὐθείας P_0—P ἐπάνω στούς ἄξονες τῶν συντεταγμένων.

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\Sigma\, \alpha_{\mu\nu}\, \xi_\mu \xi_\nu = 1$$

Γιά τήν παραπάνω σχέση ὅπως καί σέ ὅλες τίς ἀνάλογες περιπτώσεις, μποροῦμε νά καταργήσουμε τό σημεῖο τοῦ ἀθροίσματος, ἄν δεχτοῦμε ὅτι ἡ ἄθροιση εἶναι αὐτονόητη ὅταν γίνεται ὡς πρός δεῖκτες πού φιγουράρουν δύο φορές. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\alpha_{\mu\nu}\, \xi_\mu\, \xi_\nu = 1$$

πού εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειας. Τά μεγέθη $\alpha_{\mu\nu}$, καθορίζουν πλήρως τήν ἐπιφάνεια, μέ μόνη ἐξαίρεση τή θέση τοῦ κέντρου, σχετικά τό σύστημα τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων πού διαλέξαμε. Ἀπό τόν κανόνα μεταβολῆς τῶν ξ_ν [ἐξίσωση 3(α)], γιά τίς ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές, συμπεραίνεται εὔκολα ὁ κανόνας τῆς μετατροπῆς (1) γιά τά $\alpha_{\mu\nu}$.

$$\alpha'_{\sigma\tau} = b_\mu\, b_{\tau\nu}\, \alpha_{\mu\nu}$$

(1) Ἡ ἐξίσωση $\alpha'_{\sigma\tau}\xi'_\sigma\xi'_\tau = 1$, μπορεῖ σάν ἀπόρροια τῶν (5) νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν $\alpha'_{\sigma\tau} b_{\mu\sigma} b_{nt} \xi_\sigma \xi_\tau = 1$, ἐξ' οὗ καί ὁ ἰσχυρισμός μας προκύπτει κατά τρόπον ἄμεσο.

Αὐτός ὁ κανόνας τῆς μετατροπῆς, εἶναι ὁμογενής καί πρώτου βαθμοῦ συναρτήσει τν̃ $\alpha_{\mu\nu}$. Μέ βάση αὐτόν τόν κανόνα μετατροπῆς, ὀνομάζουμε τά $\alpha_{\mu\nu}$ συνιστῶσες ἑνός τανισμοῦ (ἐξαιτίας δύο δεικτῶν).

Ἄν ὅλες οἱ συνιστῶσες $\alpha_{\mu\nu}$ ἑνός τανιστῆ μηδενίζεται σχετικά μ' ἕνα σύστημα συντεταγμένων, μηδενίζονται ἐπίσης καί σχετικό μέ κάθε ἄλλο καρτεσιανό σύστημα. Ἡ ἐπιφάνεια δεύτερου βαθμοῦ καθορίζεται, σ' ὅ,τι ἀφορᾶ τή μορφή της ὅπως καί σ' ὅ,τι ἀφορᾶ τόν προσανατολισμό της, ἀπό αὐτόν τόν τανιστή (α).

Μποροῦμε ἀναλυτικά, νά ὁρίσουμε τανυστές τυχούσας τάξης (ἀριθμός δεικτῶν). Διαπιστώνουμε ἔτσι ὅτι εἶναι δυνατό καί χρήσιμο νά βλέπουμε τά ἀνύσματα σάν τανιστές πρώτης τάξης καί τά ἀναλλοίωτα μεγέθη (βαθμωτά μεγέθη) σάν τανιστές (μηδενιστικῆς τάξης. Τό χρέος τῆς θεωρίας τῶν ἀναλλοίωτων μεγεθῶν μπορεῖ, ἔτσι, νά διατυπωθεῖ μέ τόν πάρα κάτω τρόπο: μέ βάση ποιούς κανόνες μποροῦμε νά φτιάξουμε καινούριους τανιστές, ξεκινώντας ἀπό δοσμένους τανιστές; Αὐτούς, τούς κανόνες θά ἐξετάσουμε γιά νά τούς χρησιμοποιήσουμε στή συνέχεια. Ἄς πάρουμε πρῶτα τούς τανιστές, σχετικά μέ τίς ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές, πού ἀντιστοιχοῦν στό πέρασμα ἀπό ἕνα καρτεσιανό σύστημα σ' ἕνα ἄλλο μέσα στόν ἴδιο χῶρο ἀναφορᾶς. Ἐπειδή οἱ κανόνες εἶναι σέ τελευταία ἀνάλυση, ἀνεξάρτητοι ἀπό τόν ἀριθμό τῶν διαστάσεων, δέν θά ὁρίσουμε γιά τήν ὥρα τόν ἀριθμό τῶν διαστάσεων (n διαστάσεις).

Ὁρισμός.— Ἄν, σχετικά μέ κάθε σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων ἑνός χώρου μέ n διαστάσεις, μιά μορφή ὁρίζεται μέ τούς n° ἀριθμούς: $A_{\mu\nu\varrho}$ .... (α= ὁ ἀριθμός τῶν δεικτῶν), αὐτοί ἀποτελοῦν τότε τίς συνιστῶσες ἑνός τανιστῆ τάξης α ἄν ὁ κανόνας μετατροπῆς τους εἶναι:

$$(7) \qquad A_{\mu'\nu'\varrho'} = b_{\mu'\mu} b_{\nu'\nu} b_{\varrho'\varrho} \ldots A_{\mu\nu\varrho}$$

Παρατήρηση: Ἀπ' αὐτόν τόν ὁρισμό προκύπτει ὅτι τό

$$(8) \qquad A_{\mu\nu\varrho} \ldots B_{\mu} C_{\nu} D_{\varrho} \ldots$$

εἶναι ἀναλλοίωτο ἄν τά (B), (C), (D)... εἶναι ἀνύσματα. Μποροῦμε ἀντίστροφα νά συμπεράνουμε τόν τανιστικό χαρακτήρα τοῦ (A)ν ἄν ἀποδειχτεῖ ὅτι ὁ παραπάνω συνδυασμός καταλήγει σέ ἕνα ἀναλλοίωτο μέγεθος, γιά τυχοῦσα ἐκλογή τῶν ἀνυσμάτων (B), (C), κ.λπ.

Πρόσθεση καί ἀφαίρεση. — Μέ πρόσθεση καί ἀφαίρεση τῶν ἀντίστοιχων συνιστωσῶν δύο ἤ περισσότερων τανιστῶν τῆς ἴδιας τάξης παίρνουμε ἕνα τανιστή πάντα τῆς ἴδιας τάξης:

$$A_{\mu\nu\varrho\dots} \pm B_{\mu\nu\varrho\dots} = C_{\mu\nu\varrho\dots} \tag{9}$$

Ἡ ἀπόδειξη προκύπτει ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ τανιστῆ πού δόθηκε πάρα πάνω.

Πολλαπλασιασμός. — Ἀπό ἕνα τανιστή τάξης α καί ἕνα τανιστή τάξης β παίρνουμε ἕνα τανιστή τάξης α+β πολλαπλασιάζοντας ὅλες τίς συνιστῶσες τοῦ πρώτου μέ ὅλες τίς συνιστῶσες τοῦ δεύτερου:

$$T_{\mu\nu\varrho\dots\alpha\beta\gamma\dots} = A_{\mu\nu\varrho\dots}B_{\alpha\beta\gamma\dots} \tag{10}$$

Συστολή. — Ἀπό ἕνα τανιστή α τάξης παίρνουμε ἕνα τανιστή τάξης α−2 παίρνοντας τίς συνιστῶσες γιά τίς ὁποῖες δύο ὁρισμένοι δεῖκτες εἶναι ἴσοι καί ἀθροίζονται ὡς πρός αὐτόν τόν κοινό δείκτη:

$$T_{\varrho\dots} = A_{\mu\mu\varrho\dots}\left(= \sum_{\mu} A_{\mu\mu\varrho\dots} \right)\dots \tag{11}$$

Ἀπόδειξη:

$$A'_{\mu\mu\varrho} = b_{\mu\alpha}b_{\mu\beta}b_{\varrho\gamma}\dots A_{\alpha\beta\gamma\dots} = \delta_{\alpha\beta}b_{\varrho\gamma}\dots A_{\alpha\beta\gamma\dots} = b_{\varrho\gamma}\dots A_{\alpha\alpha\gamma\dots}.$$

Σ' αὐτούς τούς βασικούς κανόνες ὁρισμοῦ προστίθεται ἀκόμη ὁ κανόνας τοῦ σχηματισμοῦ τῶν τανιστῶν μέ διαφόριση (ἐπέκταση)

$$(12) \qquad T_{\mu\nu\varrho\ldots\alpha} = \frac{\theta A_{\mu\nu\varrho\ldots}}{\theta x_\alpha}.$$

῎Αν (Α) εἶναι τανιστής τάξης α, τότε (Τ) εἶναι τανιστής τάξης α+1. Ἡ ἀπόδειξη προκύπτει ἀπό τίς ἐξισώσεις μετατροπῆς (3α) καί (3), ἀπ' ὅπου συμπεραίνουμε:

$$(13) \qquad \frac{\theta}{\theta x'_\nu} = \frac{\theta}{\theta x_\alpha} \quad \frac{\theta x_\alpha}{\theta x'_\nu} = b_{\nu\alpha} \quad \frac{\theta}{\theta x_\alpha}.$$

Χάρις σ' αὐτούς τούς φυσικούς κανόνες, μποροῦμε ἀπό δοσμένους τανιστές νά σχηματίσουμε καινούριους τανιστές (σχετικά μέ τίς ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές).

Συμμετρικές ἰδιότητες τῶν τανιστῶν. — Δύο τανιστές ὀνομάζονται συμμετρικοί ἤ ἀντισυμμετρικοί, ὥς πρός δύο ἀπό τούς δεῖκτες τους, μ καί ν, ἄν οἱ δύο συνιστῶσες, πού βγαίνουν ἡ μία ἀπό τήν ἄλλη ἀπό τόν ἰσομορφισμό τῶν δεικτῶν μ καί ν, εἶναι ἴσες ἤ ἴσες ἀλλά μέ ἀντίθετα πρόσημα...

Συνθήκη συμμετρίας : $A_{\mu\nu\varrho} = A_{\nu\mu\varrho}$
Συνθήκη ἀντισυμμετρίας: $A_{\mu\nu\varrho} = -A_{\nu\mu\varrho}$

Θεώρημα. — Ὁ χαρακτῆρας τῆς συμμετρίας ἤ τῆς ἀντισυμμετρίας παραμένει ἀνεξάρτητος ἀπό τήν ἐκλογή τῶν συντεταγμένων. Ἀπ' αὐτό τό θεώρημα μόνο ἀποκτᾶ μιά πραγματική σημασία. Ἡ ἀπόδειξη μπορεῖ νά βγεῖ ἀπό τήν ἐξίσωση τοῦ ὁρισμοῦ τῶν τανιστῶν.

Εἰδικοί τανιστές. — Τά μεγέθη $\delta_{\varrho\sigma}$ [ἐξίσωση (4)] εἶναι οἱ συνιστῶσες ἑνός τανιστῆ (βασικός τανιστής).

Ἀπόδειξη. — Βάζοντας στό πρῶτο μέρος τῶν ἐξισώσεων μετατροπῆς $A_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta}$ ἀντί γιά $A_{\alpha\beta}$ τά μεγέθη $\delta_{\alpha\beta}$ (=1 ἤ =0 γιά α=β ἤ γιά α≠β ἀντίστοιχα), γίνεται

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}.$$

Ἡ ἔπαρση τοῦ τελευταίου σημείου ἰσότητας γίνεται προφανής ὅταν ἐφαρμόσουμε τήν (4) στήν ἀντίστροφη ὑποκατάσταση (5).

II. Ὑπάρχει σχετικά μέ ὅλα τά ζεύγη δεικτῶν ἕνας ἀντισυμμετρικός τανιστής ($\delta_{\mu\nu\varrho\ldots}$) τοῦ ὁποίου ἡ σειρά α εἶναι ἴση μέ τήν n διάσταση καί τοῦ ὁποίου οἱ συνιστῶσες εἶναι ἴσες μέ +1 ἤ −1, ἀνάλογα μέ τό ἄν τό $_{\mu\nu\varrho\ldots}$ εἶναι ζυγός ἤ μονός ἰσομορφισμός τοῦ 123...

Ἡ ἀπόδειξη δίνεται μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος $|b_{\varrho\sigma}| = 1$ πού ἀποδείχτηκε πάρα πάνω.

Ὅπως θά δοῦμε καί πάρα κάτω, αὐτά τά ἁπλά θεωρήματα συνθέτουν τόν μηχανισμό τῆς θεωρίας τῶν ἀναλλοίωτων μεγεθῶν γιά τήν κατασκευή ἐξισώσεων στήν θεωρία τήν πρίν ἀπό τή Θεωρία τῆς σχετικότητας καί στήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας.

Στήν φυσική πρίν τήν σχετικότητα, ὅπως εἴδαμε, γιά τόν ὁρισμό τοῦ χώρου χρειαζόμαστε ἕνα σῶμα ἤ ἕνα χῶρο ἀναφορᾶς καί — μέσα σ' αὐτό — ἕνα σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Μποροῦμε νά συμπυκνώσουμε αὐτές τίς δύο ἔννοιες σέ μιά καί μοναδική ἔννοια, παριστάνοντας τό σύστημα τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων σάν ἕνα κυβικό σύστημα μίσχων, πού ὁ καθένας ἔχει μῆκος ἕνα μέτρο. Τά σημεῖα συνάντησης τῶν μίσχων αὐτοῦ τοῦ συστήματος ἔχουν γιά συντεταγμένες ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἡ βασική σχέση·

$$s^2 = \Delta x^2_1 + \Delta x^2_2 + \Delta x^2_3$$

δείχνει ὅτι οἱ μίσχοι ἑνός τέτοιου πλέγματος ἔχουν ὁ καθένας μῆκος ἴσο μέ τή μονάδα.

Γιά τόν ὁρισμό τοῦ χρόνου, χρειαζόμαστε σύν τοῖς ἄλλοις ἕνα πρότυπο ρολόϊ, πού μπορεῖ, ἄν θέλουμε, νά μπεῖ στήν ἀρχή τοῦ συστήματος καρτεσιανῶν συντεταγμένων (σύστημα μίσχων). Ἄν ἕνα γεγονός συμβεῖ κάπου, μποροῦμε νά τοῦ ἀντιστοιχίσουμε τρεῖς συντεταγμένες x_v καί τόν χρόνο t, ἄν ἰσχύει ὅτι τό γεγονός ἔγινε ταυτόχρονα μέ τό χρόνο t, πού ἔδειχνε τό ρολόϊ μας τοποθετημένο στήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Ἔτσι ἡ παραδοχή τοῦ ταυτόχρονου ἀπομακρυσμένων γεγονότων παίρνει ὑποθετικά ἀντικειμενική ὑπόσταση, ἐνῶ, πιό πάνω, ἐπρόκειτο μόνο γιά τό ταυτόχρονο δύο γεγονότων πού πέφτουν στήν ἀντίληψη ἑνός παρατηρητῆ. Ὁ χρόνος πού ὁρίστηκε ἔτσι εἶναι, ὁπωσδήποτε, ἀνεξάρτητος ἀπ' τό σύστημα τῶν συντεταγμένων μέσα στόν χῶρο ἀναφορᾶς, καί ἄρα ἀναλλοίωτος σχετικά μέ τή μετατροπή (3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΑΝΙΣΤΩΝ. — Ἡ πρίν ἀπό τή σχετικότητα φυσική θεωρεῖ ὅτι τά συστήματα ἐξισώσεων πού ἐκφράζουν τούς κανόνες της πρέπει νά συνδιακυμαίνονται σχετικά μέ τή μετατροπή (3), ἀκριβῶς ὅπως οἱ σχέσεις τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας. Ἐννοοῦμε μ' αὐτό τήν ἰσοτροπία καί τήν ὁμογένεια τοῦ χώρου (1). Θά ἐξετάσουμε τώρα ἀπ' αὐτή τή σκοπιά τίς σημαντικώτερες φυσικές ἐξισώσεις.

Ἐξισώσεις τῆς κίνησης ὑλικοῦ σημείου.

$$(14) \qquad m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} = x_\nu \quad \ldots$$

τό (dx) εἶναι ἄνυσμα, τό dt, καί ἄρα καί τό $\frac{1}{dt}$, εἶναι μεγέθη ἀναλλοίωτα. Ἄρα, τό $\left(\frac{dx_\nu}{dt}\right)$ εἶναι ἄνυσμα. Δείχνουμε, κατά τόν ἴδιο τρόπο, ὅτι τό $\left(\frac{\delta^2 x_\nu}{dt^2}\right)$ εἶναι ἄνυσμα.

Ἡ διαφόριση ὡς πρός τό χρόνο δέν ἀλλάζει γενικά τόν χαρακτῆρα τοῦ τανιστῆ. Ἀφοῦ τό m εἶναι μέγεθος ἀναλλοίωτο (τανιστής μηδενικῆς τάξης), τό $m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}$ εἶναι ἐπίσης ἄνυσμα ἤ τανιστής πρώτης τάξης (σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ ἐξωτερικοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τανιστῶν). Ἄν, κατά συνέπεια, ἡ δύναμη (x_ν), ἔχει ἀνυσματικό χαρακτῆρα, συμβαίνει τό ἴδιο καί μέ τή διαφορά

$$m\frac{d^2x_\nu}{dt^2} - X_\nu$$

Η ἐξίσωση τῆς κίνησης, ὡς ἐκ τούτου, ἰσχύει τό ἴδιο καί γιά κάθε ἄλλο σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων τοῦ χώρου ἀναφορᾶς. Στήν περίπτωση πού οἱ δυνάμεις οἱ δυνάμεις διατηροῦνται, ὁ ἀνυσματικός χαρακτήρας τοῦ (x_ν) ἀναγνωρίζεται εὔκολα. Γιατί, στό κάτω-κάτω, ὑπάρχει μιά δυναμική ἐνέργεια Φ πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν ἀπόσταση τῶν σημείων καί, ἄρα, εἶναι ἀναλλοίωτη. Ὁ ἀνυσματικός χαρακτήρας τῆς δύναμης - X_ν - εἶναι τελικά συνέπεια τῶν γενικῶν μας θεωρημάτων. (ἐπέκταση τοῦ τανιστῆ μηδενικῆς τάξης).

Πολλαπλασιάζοντας τήν ταχύτητα μέ ἕνα τανιστή πρώτης τάξης, παίρνουμε, ἐπί πλέον, τήν τανιστική ἐξίσωση δεύτερης τάξης.

$$\left(m\frac{d^2x_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)\frac{dx_\mu}{dt}=o.$$

Συστέλλοντας καί πολλαπλασιάζοντας μέ τό βαθμωτό μέγεθος dt, παίρνουμε τό θεώρημα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=X_\nu dx_\nu.$$

Ἄν παραστήσουμε μέ ξ_ν τήν διαφορά μεταξύ τῶν συντεταγμένων τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί ἐκείνων ἑνός σταθεροῦ σημείου, τότε οἱ ξ_ν ἔχουν ἀνυσματικό χαρακτήρα. Εἶναι φανερό ὅτι $\frac{d^2x_\nu}{dt^2}=\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}$ ἔτσι ὥστε οἱ ἐξισώσεις τῆς κίνησης τοῦ σημείου μποροῦν ἐπίσης νά πάρουν τή μορφή

$$m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}-X_\nu=o.$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν ἐξίσωση μέ ξ_μ, παίρνουμε τήν τανιστική ἐξίσωση

$$\left(m\frac{d^2\xi_\nu}{dt^2}-X_\nu\right)\xi_\mu=o.$$

Συστέλλοντας τόν τανιστή τοῦ πρώτου μέλους καί παίρνοντας τήν μέση τιμή του μέσα στό χρόνο, φτάνουμε στό θεώρημα τοῦ Viriel, στό ὁποῖο, ὅμως δέν εἶναι τοῦ παρόντος νά ἐπιμείνουμε.

Μεταθέτοντας τούς δεῖκτες καί ἀφαιρώντας, στή συνέχεια, παίρνουμε, μετά ἀπό μία ἁπλή τροποποίηση, τό θεώρημα τῶν στιγμῶν

$$(15)\quad \frac{d}{dt}\left[m\left(\xi_\mu \frac{d\xi_\nu}{dt} - \xi_\nu \frac{d\xi_\mu}{dt}\right)\right] = \xi_\mu X_\nu - \xi_\nu X_\mu \ldots$$

Αὐτή ἡ ἔκφραση δείχνει ὅτι οἱ στιγμές τῶν ἀνυσμάτων δέν εἶναι ἀνύσματα ἀλλά τανιστές. Σάν συνέπεια τοῦ ἀντισυμμετρικοῦ χαρακτῆρα, οἱ ἀνεξάρτητες ἐξισώσεις αὐτοῦ τοῦ συστήματος δέν εἶναι ἐννέα μά μονάχα τρεῖς. Ἡ δυνατότητα μέσα στόν τρισδιάστατο χῶρο νά ἀντικαταστήσουμε τούς ἀντισυμμετρικούς τανιστές δεύτερης τάξης μέ ἀνύσματα ἐναπόκειται στό σχηματισμό τοῦ ἀνύσματος.

$$A_\mu = \frac{1}{2} A_{\sigma\tau}\delta_{\sigma\tau\mu}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τόν ἀντισυμμετρικό τανιστή δεύτερης τάξης μέ τόν εἰδικό ἀντισυμμετρικό τανιστή δ, πού ὁρίστηκε πάρα πάνω, καί κάνοντας διπλή συστολή, παίρνουμε ἕνα ἄνυσμα μέ συνιστῶσες ἀριθμητικά ἴσες μέ ἐκεῖνες τοῦ τανιστῆ. Εἶναι τά ἀνύσματα καί ὀνομάζονται ἀξονικά καί πού ἔχουν συνιστῶσες πού μεταβάλλονται διαφορετικά ἀπό τίς Δ_x ὅταν ἀπό ἕνα δεξιό καρτεσιανό σύστημα περνᾶμε σ' ἕνα ἀριστερό. Ἡ θεώρηση τῶν ἀντισυμμετρικῶν τανιστῶν δεύτερης τάξης σάν ἀνύσματα στόν τρισδιάστατο χῶρο ἔχει τό πλεονέκτημα ὅτι εἶναι πιό κοντά στή φαντασία μας, ἀλλά δέν κάνει τό ἴδιο ἄμεσα τήν βαθύτερη φύση τῶν μεγεθῶν πού ἐξετάζαμε, ὅπως κάνουν ἡ τανιστική θεώρηση.

Θά ἐξετάσουμε τώρα τίς ἐξισώσεις τῆς κίνησης τῶν ματιῶν πού ἡ κατανομή τους εἶναι συνεχής. Ἄν ρ εἶναι ἡ πυκνότητα, κ_ν οἱ συνιστῶσες τῆς ταχύτητας σάν συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων καί τοῦ χρόνου, x_ν ἡ συγκεντρωμένη δράση πού ἀσκεῖται ἀνά μονάδα μάτας $\rho_{\nu\sigma}$ ἡ ἐπιφανειακή δράση ἀνά μονάδα ἐπιφανείας κατακόρυφης στόν ἄξονα σ, μέ x_ν ὅλο καί μεγαλύτερα. Οἱ ἐξισώσεις τῆς κίνησης εἶναι τότε, κατά τόν κανόνα τοῦ Newton,

$$\rho \frac{du_\nu}{dt} = - \frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + \rho X_\nu,$$

ὅπου $\frac{dk_\nu}{dt}$ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση ἑνός σωματίδιου μέ συντεταγμένες x_m τή στιγμή t. Ἄν ἐκφράσουμε τήν ἐπιτάχυνση αὐτή μέ τίς μερικές παραγώγους καί διαιρέσουμε διά ρ, παίρνουμε,

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\sigma = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma} + X_\nu. \tag{16}$$

Πρέπει τώρα νά δείξουμε ὅτι ἡ σημασία αὐτῆς τῆς ἐξίσωσης εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ συστήματος καρτεσιανῶν συντεταγμένων. Τό (U_ν) εἶναι ἄνυσμα, κατά συνέπεια τό $\frac{\partial u_\nu}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma}$

- εἶναι τανιστής δεύτερης τάξης, τό $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\sigma} u_\tau$

εἶναι τανιστής τρίτης τάξης. Συστέλλοντας ὡς πρός τούς δεῖκτες σ, τ, παίρνουμε τόν δεύτερο ὅρο τοῦ πρώτου μέλους. Ὁ χαρακτήρας τοῦ δεύτερου ὅρου τοῦ δεύτερου μέλους φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶναι ἀνυσματικός. Γιά νά ἔχει ἀνυσματικό χαρακτῆρα καί ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δεύτερου μέλους, πρέπει τό $p_{\nu\sigma}$ νά εἶναι τανιστής. μέ ἐπέκταση καί συστολή παίρνουμε $\frac{\partial p_{\nu\sigma}}{\partial x_\sigma}$, , πού ἔχει ἔχει ἀνυσματικό χαρακτῆρα, ἀκόμα κι ὕστερα ἀπό πολλαπλασιαμό μέ τόν βαθμωτό μέγεθος $\frac{1}{\varrho}$. Τό ὅτι τό $\varrho_{\nu\sigma}$ ἔχει χαρακτῆρα τανιστῆ καί, ἄρα, μεταβάλλεται σύμφωνα μέ τίς ἐξισώσεις

$$p'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} p_{\alpha\beta}$$

δείχνεται στή μηχανική μέ τήν ἐφαρμογή αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων σ' ἕνα ἄπειρα μικρό τετράεδρο. Δείχνουμε ἔτσι, μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τῶν στιγμῶν σ' ἕνα ἄπειρο μικρό παραλληλεπίπεδο, ὅτι $\varrho_{\nu\sigma}=\varrho_{\sigma\nu}$, καί, ἄρα, ὅτι ὁ τανιστής τῶν δυνάμεων ἐπιφάνειας εἶναι συμμετρικός τανιστής. Ἀπό αὐτό τό τελευταῖο βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι, χάρη στούς κανόνες πού ἀναφέραμε πιό κάτω, μποροῦμε νά δοῦμε μέ τήν πρώτη ἄν μιά ἐξίσωση εἶναι συνδιακυμανόμενη σχετικά μέ τίς ὀρθογώνιες μεταβολές στό χῶρο (μεταβολές τῆς στροφικῆς κίνησης) ἤ ἀκόμα μποροῦμε νά δοῦμε, βάσει ποιανῶν κανόνων, τά μεγέθη πού ὑπάρχουν στήν ἐξίσωση μποροῦν νά μεταβληθοῦν ὥστε ἡ ἐξίσωση νά γίνει συνδιακυμαινόμενη σχετικά πάντα μέ τίς ὀρθογώνιες μεταβολές στό χῶρο.

Ἡ συνδιακύμανση τῆς ἐξίσωσης συνέχειας

(17) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\nu)}{\partial x_\nu} = 0 \quad \ldots$$

δέν χρειάζεται περισσότερη ἐπεξήγηση μετά ἀπ' ὅσα εἴπαμε.

Θέλουμε ἀκόμη νά ἐξετάσουμε, στή βάση τῆς συνδιακύμανσής τους, τίς ἐξισώσεις τῶν συνιστωσῶν τῆς πίεσης σάν ἐξαρτώμενες ἀπό τήν κατάσταση τῆς ὕλης, ἤ, ἀκόμη, νά τίς δώσουμε (τίς ἐξισώσεις) μέ τή βοήθεια τῆς συνδιακύμανσης γιά τήν περίπτωση ἑνός παχύρευστου συμπιεστοῦ ὑγροῦ. Ἄν παραβλέψουμε τήν ἐσωτερική τριβή, θά ὑπάρχει μιά πίεση ρ μέ χαρακτήρα βαθμητοῦ μεγέθους, πού δέν θά ἐξαρτᾶται παρά ἀπό τήν πυκνότητα καί τή θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ. Ἡ συνεισφορά στόν τανιστή τῆς πίεσης εἶναι προφανῶς ἴση μέ $\rho\delta_{\mu\nu}$, ὅπου $\delta_{\mu\nu}$ εἶναι ὁ εἰδικός συμμετρικός τανιστής. Αὐτός ὁ ὅρος θά παραμένει στήν περίπτωση τοῦ παχύρευστου ὑγροῦ. Θά ἔχουμε, λοιπόν ἐπί πλέον, τούς ὅρους τῶν δυνάμεων ἐπιφάνειας, πού ἐξαρτῶνται ἀπό τίς παραγώγους στό χῶρο τῶν u_ν. Ὑποθέτουμε ὅτι αὐτή ἡ ἐξάρτηση εἶναι γραμμική. Ἐφ' ὅσον τοῦ δίνουμε τό χαρακτήρα συμμετρικοῦ τανιστῆ,

ἐκεῖνο πού μᾶς ἐνδιαφέρει ἀφοῦ $-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}-$ εἶναι

μονάχα ὁ συνδυασμός $\alpha\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right)+\beta\delta_{\mu\nu}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$

Γιά φυσικούς λόγους (τέλεια ἔλλειψη ὀλίσθησης), πρέπει νά ὑποθέσουμε ὅτι, ὅταν ὑπάρχει συμμετρική διαστολή πρός ὅλες τίς κατευθύνσεις, δηλαδή στήν περίπτωση πού $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$, κ.τ.λ. εἶναι ἴσα μέ 0), δέν ὑπάρχουν δυνάμεις τριβῆς, καί ἄρα $\beta=-\frac{2}{3}\alpha$. Στήν περίπτωση πού μόνο τό $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$ εἶναι διαφορετικό ἀπό τό 0, ὑποθέτουμε ἐπίσης ὅτι $p_{31}=-\eta\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$, ἀπ' ὅπου καί ὁρίζεται τό α. Παίρνουμε γιά τόν συνολικό τονιστή πίεσης

$$(18) \qquad p_{\mu\nu} = p\,\delta_{\mu\nu} - \eta\left[\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\delta_{\mu\nu}\right] \quad \ldots\ldots$$

Αὐτό τό παράδειγμα μᾶς κάνει νά πιάσουμε τήν εὑρηματική σημασία τῶν ἀπόψεων πού στηρίζονται στή θεωρία τῶν ἀναλλοίωτων μεγεθῶν καί πού ἔχουν τήν ἀρχή τους στήν ὑπόθεση τῆς ἰσοτροπίας τοῦ χώρου (ἰσοδυναμίας ὅλων τῶν διευθύνσεων).

Ἄς ἐξετάσουμε ἀκόμη τίς ἐξετάσεις τοῦ Maxwell, πού ἀποτελοῦν τήν βάση τῆς θεωρίας τῶν ἠλεκτρονίων τοῦ Lorentz:

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial x_3} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathfrak{i}_1, \\ &\frac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_1} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathfrak{i}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_3} = \rho. \end{aligned}\right.$$

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathfrak{e}_3}{\partial x_1} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial \mathfrak{h}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{h}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathfrak{h}_3}{\partial x_3} = 0. \end{aligned}\right.$$

Τό i εἶναι ἄνυσμα, ἐφόσον ἡ πυκνότητα τοῦ ρεύματος ὁρίζεται σάν τό γινόμενο τῆς πυκνότητας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ ἐπί τό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τίς τρεῖς πρῶτες ἐξισώσεις, ἐνδείκνυται νά θεωροῦμε καί τό e σάν ἄνυσμα. Ἐνῶ τό h δέν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἄνυσμα (1). Ἀλλά εἶναι εὐκολώτερο νά ἐξηγήσουμε τίς ἐξισώσεις δίνοντας στό h τή σημασία ἑνός ἀντισυμμετρικοῦ τανιστῆ δεύτερης τάξεως. Ἔτσι γράφουμε ἀντί γιά h_1, h_2, h_3 τήν σειρά h_{23}, h_{31}, h_{12}. Δοσμένης τῆς ἀντισυμμετρίας τοῦ $h_{\mu\nu}$ οἱ τρεῖς πρῶτες ἐξισώσεις τῶν (19) καί (20) μποροῦν νά πάρουν τή μορφή

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{e}_\mu}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathfrak{i}_\mu, \tag{19a}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \mathfrak{e}_\nu}{\partial x_\mu} = + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}_{\mu\nu}}{\partial t}. \tag{20a}$$

Ἔτσι, σ' ἀντίθεση μέ τό e, τό h φαίνεται σάν ἕνα μέγεθος πού ἔχει τό συμμετρικό χαρακτήρα στρο; φορμῆς ἤ ταχύτητας τῆς στροφικῆς κίνησης.

Ἀλλά οἱ ἐξισώσεις ἀπό κλισης παίρνουν τή μορφή

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_\nu}{\partial x_\nu} = \rho, \tag{19b}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathfrak{h}_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{20b}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι ἀντισυμμετρική τανιστική ἐξίσωση τρίτης τάξης (ἡ ἀντισυμμετρία τοῦ πρώτου μέλους ὡς πρός κάθε ζευγάρι δείχνουν εἶναι εὔκολο νά δειχτεῖ, δοσμένη τῆς ἀντισσυμετρίας τῶν $h_{\mu\nu}$). Κατά συνέπεια, παρά τούς τρεῖς δεῖκτες της, ἡ ἐξίσωση δέν περιέχει παρά μόνο μία συνθήκη. Αὐτή ἡ παράσταση εἶναι πολύ πιό φυσική ἀπό τή συνηθισμένη παράσταση, ἐπειδή, ἀντίθετα μέ τήν τελευταία μπορεῖ χωρίς τήν ἀλλαγή τῶν προσήμων νά ἐφαρμοστεῖ στά καρτεσιανά συστήματα τόσο τά ἀριστερά ὅσο καί τά δεξιά.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ. — Οἱ σκέψεις πού προηγήθηκαν, πού ἀφοροῦν τίς ἀλλαγές θέσης τῶν στερεῶν σωμάτων βασίζονται, ἄν ἀφήσουμε κατά μέρος τήν ὑπόθεση γιά τήν ἰσχύ τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας, στήν ὑπόθεση ὅτι ὅλες οἱ διευθύνσεις μέσα στόν χῶρο (ἤ οἱ θέσεις τῶν καρτεσιανῶν συστημάτων συντεταγμένων) εἶναι ἰσοδύναμες ἀπό φυσική ἄποψη. Δέν ὑπάρχει ἀπόλυτη διεύθυνση στόν χῶρο ἀναφορᾶς, πού νά διακρίνεται μέ ἀντικειμενικά χαρακτηριστικά. Ὑπάρχουν μονάχα σχέσεις ἀνάμεσα στίς διευθύνσεις. Ἡ θέση αὐτή μπορεῖ νά ὀνομαστεῖ «ἀρχή τῆς σχετικότητας ὡς πρός τή διεύθυνση» καί δείχτηκε ὅτι μποροῦμε, μέ τόν τανιστικόν λογισμό, νά φτιάξουμε ἐξισώσεις (νόμοι τῆς φύσης) πού συμμορφώνονται μ' αὐτή τήν ἀρχή.

Ἄς ἀναρωτηθοῦμε τώρα ἄν ὑπάρχει ἐπίσης σχετικότητα πού νά ἀφορᾶ τήν κατάσταση τῆς κίνησης τοῦ χώρου ἀναφορᾶς, δηλαδή ἄν ὑπάρχουν χῶροι ἀναφορᾶς, πού εἶναι φυσικά ἰσοδύναμοι παρόλο πού ἐκτελοῦν σχετικές κινήσεις οἱ μέν ὡς πρός τούς δέ. Ἀπό τή σκοπιά τῆς μηχανικῆς, ἰσοδύναμοι χῶροι ἀναφορᾶς μποροῦν θαυμάσια νά ὑπάρχουν. Γιατί, κάνοντας πειράματα στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, δέν ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι ἡ Γῆ γυρνάει γύρω ἀπ' τόν Ἥλιο μέ τήν ταχύτητα τῶν 30km τό δευτερόλεπτο.

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ. — Ἀπό τήν ἄλλη μεριά, αὐτή ἡ φυσική ἰσοδυναμία δέν φαίνεται νά ἰσχύει γιά τούς χώρους ἀναφορᾶς πού κινοῦνται μέ τυχαῖο τρόπο, γιατί τά μηχανικά φαινόμενα δέν φαίνεται νά ξετυλίγονται μέ βάση τούς ἴδιους νόμους: ἡ κίνηση ἑνός κινητοῦ πού προχωρᾶ μέ ὤσεις διέπεται ἀπό διαφορετικούς νόμους ἀπ' ὅτι ἡ κίνηση ἑνός κινητοῦ πού προχωρᾶ μέ σταθερή ταχύτητα. Ἡ στροφική κίνηση τῆς γῆς ἀποκτᾶ σημασία ὅταν διατυπώνουμε τούς νόμους τῆς κίνησης ὡς πρός ἕνα γήινο σῶμα. Φαίνεται λοιπόν ὅτι ὑπάρχουν καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων (τά λεγόμενα ἀδρανειακά συστήματα ὡς πρός τά ὁποῖα οἱ νόμοι τῆς μηχανικῆς καί ἀκόμα γενικότερα οἱ νόμοι τῆς φυσικῆς) παίρνουν τήν ἁπλούστερη δυνατή μορφή. Μποροῦμε ἤδη νά μαντέψουμε τήν ἰσχύ τῆς ἀκόλουθης πρότασης. Ἄν τό κ εἶναι ἕνα ἀδρανειακό σύστημα, κάθε σύστημα συντεταγμένων κ΄, πού κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα καί χωρίς στροφική κίνηση ὡς πρός τό κ, εἶναι ἐπίσης ἀδράνειακο σύστημα. Οἱ νόμοι τῆς φύσης ἰσχύουν γιά ὅλα τά ἀδρανειακά συστήματα. Ὀνομάζουμε αὐτό τό ἀξίωμα «ἀρχή τῆς εἰδικῆς σχετικότητας». Θά δοῦμε τώρα τίς συνέπειες αὐτῆς τῆς ἀρχῆς, εἰδικώτερα ἀπό τήν «σχετικότητα τῆς μετατόπισης», ὅπως τό κάνουμε πιό πάνω στό θέμα τῆς σχετικότητας τῆς διεύθυνσης.

Γιά νά τό κάνουμε, πρέπει πρῶτα νά ἀπαντήσουμε στήν ἑξῆς ἐρώτηση. Δοσμένων τῶν καρτεσιανῶν συντεταγμένων x_ν καί τοῦ χρόνου t ἑνός γεγονότος σχετικά μ' ἕνα ἀδράνειακο σύστημα κ, μέ ποιόν τρόπο μποροῦμε νά λογαριάσουμε τίς συντεταγμένες x'_ν καί τό χρόνο t΄ τοῦ ἴδιου γεγονότος σχετικά μ' ἕνα δεύτερο ἀδρανειακό σύστημα κ΄, πού κινεῖται μέ ἰσοταχῆ μετατόπιση ὡς πρός τό κ. Ἡ προσχετική φυσική ἀπάντησε σ' αὐτή τήν ἐρώτηση βασιζόμενη ἀσυναίσθητα στίς παρακάτω δύο ὑποθέσεις:

1. Ὁ χρόνος εἶναι ἀπόλυτος. Ὁ χρόνος t΄ ἑνός γεγονότος ὡς πρός τό κ΄ εἶναι ἴσος μέ τόν χρόνο t τοῦ ἴδιου γεγονότος ὡς πρός κ. Αὐτή ἡ ὑπόθεση θά ἦταν στηριγμένη φυσικά, ἄν ἦταν δυνατή ἡ ὕπαρξη στιγμιαίων σημάτων πού ἐκπέμπονται ἀπό κάποια ἀπόσταση καί ἄν, ἐκτός ἀπ' αὐτό, ξέρουμε ὅτι ἡ κατάσταση τῆς κίνησης τοῦ ρολογιοῦ δέν ἐπιρρεάζει τή λειτουργία του. Τότε, λοιπόν, θά μπορούσαμε νά συνδέσουμε σέ διαφορετικά συστήματα κ καί κ΄ ρολόγια μέ ἐντελῶς ἴδια κατασκευή καί συγχρονισμένα μεταξύ τους ἔτσι πού οἱ χρόνοι πού δείχνουν νά εἶναι καί νά παραμένουν ἀνεξάρτητοι ἀπό τίς σχετικές τους κινήσεις. Κάθε ρολόϊ θά μᾶς χρησίμευε ἔτσι στή μέτρηση τοῦ χρόνου τῶν γεγονότων πού ξετυλίγονται στό ἄμεσο περιβάλλον του.

2. Ἡ ἀπόσταση εἶναι ἀπόλυτη. Ἄν μιά εὐθεῖα ἀκίνητη ὡς πρός τό κ ἔχει μῆκος s, ἔχει τό ἴδιο μῆκος ὡς πρός τό κ΄ πού κινεῖται σχετικά μέ τό κ.

Βασιζόμενοι σ' αὐτές τίς ὑποθέσεις, βρίσκουμε μέ ἁπλό ὑπολογισμό, στήν περίπτωση πού οἱ ἄξονες τοῦ κ΄ εἶναι παράλληλα μέ κείνους τοῦ κ, τίς ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ

$$x'_\nu = x_\nu - \alpha_\nu - b v t \ldots \qquad (21)$$
$$t' = t - b.$$

Αὐτός ὁ μετασχηματισμός ὀνομάζεται «μετασχηματισμός τοῦ Γαλλιλαίου». Διαφορίζοντας δύο συνεχεῖς φορές τήν (21) ὡς πρός τόν t, ἔχουμε

$$\frac{d^2x'_\nu}{dt'^2} = \frac{d^2x_\nu}{dt^2}.$$

Βγαίνει, ἐπί πλέον, γιά 2 ταυτόχρονα γεγονότα

$$x'_\nu(^1) - x'_\nu(^2) = x_\nu(^1) - x_\nu(^2).$$

Ὑψώνοντας στό τετράγωνο καί προσθέτοντας, παίρνουμε τό ἀναλλοίωτο τῆς ἀπόστασης s μεταξύ δύο σημείων. Ἀπό δῶ συμπεραίνουμε εὔκολα τήν διακύμανση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Νεύτωνα γιά τήν κίνηση σχετικά μέ τόν μετασχηματισμό τοῦ Γαλλιλαίου (21). Τό ἀποτέλεσμα εἶναι ὅτι ἡ κλασσική μηχανική συμμορφώνεται μέ τήν ἀρχή τῆς εἰδικῆς σχετικότητας, ἄν προσθέσουμε τίς ὑποθέσεις πού ἀναφέρουμε πάρα πάνω πού ἀφοροῦν τίς πρότυπες κλίμακες μέτρησης (étalons) καί τά ρολόγια.

Ἀλλά αὐτή ἡ προσπάθεια νά βασίσουμε τήν σχετικότητα τῆς μετατόπισης πάνω στόν μετασχηματισμό τοῦ Γαλλιλαίου ἀποτυχαίνει μπρός στά ἠλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου τῶν Maxwell – Lorentz δέν συνδιακυμαίνονται ὡς πρός τόν μετασχηματισμό τοῦ Γαλλιλαίου. Πρέπει ἰδιαίτερα νά σημειώσουμε ὅτι μιά φωτεινή ἀκτίνα, πού ἔχει ταχύτητα c ὡς πρός τό κ, ἔχει, κατά τήν (21), καί ταχύτητα διαφορετική τῆς c πού ἐξαρτᾶται ἀπό τόν προσανατολισμό. Ὁ χῶρος ἀναφορᾶς τοῦ κ θά ἦταν ἔτσι πλεονεκτικός σ' ὅτι ἀφορᾶ τίς φυσικές του ἰδιότητες, ὡς πρός ὅλους τούς χώρους ἀναφορᾶς πού κινοῦνται σχετικά μ' αὐτόν (αἰθέρας σέ ἠρεμία).

Ὅλα ὅμως τά πειράματα ἔδειξαν ὅτι τά ἠλεκτρομαγνητικά καί ὀπτικά φαινόμενα ξετυλίγονται κατά τέτοιο τρόπο ὡς πρός τή Γῆ, ἡ ὁποία θεωρεῖται σάν σῶμα ἀναφορᾶς, πού ἡ ταχύτητα μετατόπισης της (τῆς Γῆς) δέν γίνεται αἰσθητή. Τό πιό σημαντικό ἀπ' αὐτά τά πειράματα εἶναι τό πείραμα τῶν Michelson καί Morley, πού ὑποθέτω ὅτι εἶναι ἀρκετά γνωστό. Δέν ἐπιτρέπεται, λοιπόν, νά θέτουμε σέ ἀμφισβήτηση τήν ἀρχή τῆς εἰδικῆς σχετικότητας στόν τομέα τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων.

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ. — Οἱ ἐξισώσεις τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου τῶν Maxwell – Lorentz, ἀπό τήν ἄλλη μεριά, ἀποδείχτηκαν τόσο ἀποτελεσματικές στά προβλήματα τῆς ὀπτικῆς τῶν κινουμένων σωμάτων, πού ἡ θεωρία εἶναι ὑποχρεωμένη νά στηριχτεῖ σ' αὐτές τίς ἐξισώσεις. Καμιά ἄλλη θεωρία δέν εἶναι σέ θέση νά ἐξηγήσει μέ ἱκανοποιητικό τρόπο τά φαινόμενα τῆς ἐκτροπῆς τοῦ φωτός, τήν διάδοση τοῦ φωτός μέσα στά κινούμενα κύματα (Fijeau) καί τά φαινόμενα πού παρουσιάζουν τά διπλά ἀστέρια (τοῦ Sitter). Αὐτό πού βγαίνει σάν συνέπεια ἀπό τίς ἐξισώσεις τῶν Maxwell – Lorentz εἶναι καλά θεμελιωμένο ὅτι δηλαδή τό φῶς διαδίδεται στό κενό μέ ταχύτητα c (ἀρχή τῆς σταθερότητας τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός) — τουλάχιστον ὡς πρός ἕνα ὁρισμένο ἀδρανειακό σύστημα κ. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς εἰδικῆς σχετικότητας, πρέπει νά θεωρήσουμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα αὐτό ἰσχύει τό ἴδιο καί γιά κάθε ἄλλο ἀδρανειακό σύστημα.

Πρίν βγάλουμε τά συμπεράσματά μας ἀπ' αὐτές τίς δύο ἀρχές, πρέπει νά σταθοῦμε κριτικά στίς ἔννοιες «χρόνος» καί «ταχύτητα» γιά νά δοῦμε ποιά εἶναι ἡ φυσική σημασία τους. Ἤδη, ἀπ' ὅσα παραπάνω εἰπώθηκαν, βγαίνει τό συμπέρασμα ὅτι οἱ καρτεσιανές συντεταγμένες ὡς πρός ἕνα ἀδρανειακό σύστημα πρέπει νά ὁρίζονται φυσικά μέ μέτρα ἤ μέ μετρικές κατασκευές μέ τή βοήθεια στερεῶν σωμάτων.

Γιά νά μετρήσουμε τόν χρόνο πρέπει νά φανταστοῦμε ἕνα ρολόϊ H πού βρίσκεται κάπου ἀκίνητο ὡς πρός τό κ. Δέν εἶναι ὅμως δυνατό νά ἐκτιμήσουμε ἄμεσα, μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ ρολογιοῦ, τή χρονική ἀπόσταση γεγονότων πού δέν εἶναι καί πολύ κοντινά μέσα στό χῶρο. Κι αὐτό γιατί δέν διαθέτουμε «στιγμιαῖα σήματα» γιά νά συγκρίνουμε χρονικά αὐτά τά γεγονότα μέ τό ρολόϊ. Γιά νά συμπληρώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ χρόνου, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν ἀρχή τῆς σταθερότητας τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός στό κενό. Ἄς φανταστοῦμε ὅτι βρίσκονται ἀκίνητα, σέ διάφορα σημεῖα τοῦ χώρου K, ρολόγια μέ ἴδια ἀκριβῶς κατασκευή καί κανονισμένα σύμφωνα μέ τό ἀκόλουθο σχῆμα. Ἄν μιά φωτεινή ἀκτῖνα ξεκινήσει ἀπό ἕνα τέτοιο ρολόϊ hm, τή στιγμή πού αὐτό δείχνει χρόνο tm, καί διασχίσει τόν κενό χῶρο πρός τό ρολόϊ Hn, πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση Fmn ἀπό τό πρῶτο, ὁ χρόνος πού τό ρολόϊ Hn θά δείχνει τή στιγμή πού φτάνει ἡ φωτεινή ἀχτίδα θά πρέπει νά εἶναι

$$t_n = t_m + \frac{r_{mn}}{c} \ (+).$$

῾Η ἀρχή τῆς σταθερότητας τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός βεβαιώνει ὅτι αὐτός ὁ συγχρονισμός τῶν ρολογιῶν δέν θά μπορεῖ νά ὁδηγήσει σέ ἀντιφάσεις. Μέ ρολόγια συγχρονισμένα κατ' αὐτόν τόν τρόπο μποροῦμε στή συνέχεια νά ἐκτιμήσουμε τή διάρκεια τῶν γεγονότων πού βρίσκονται ὅσο τό δυνατό πιό κοντά σέ καθένα ἀπ' αὐτά τά ρολόγια.

Εἶναι οὐσιῶδες ὅτι αὐτός ὁ ὁρισμός τοῦ χρόνου ἀναφέρεται ἀποκλειστικά στό ἀδρανειακό σύστημα K, ἀφοῦ χρησιμοποιήσουμε ἕνα σύστημα ρολογιῶν πού βρίσκονται σέ ἠρεμία ὡς πρός τό K.

᾿Απ' αὐτόν τόν ὁρισμό μέ κανένα τρόπο δέν βγαίνει ὅτι ὁ χρόνος εἶναι ἀπόλυτος, δηλαδή ὅτι οἱ τιμές τοῦ χρόνου εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος, ὅπως εἶχε ὑποθέσει ἡ προσχετική φυσική.

Κατηγοροῦν συχνά τή Θεωρία τῆς σχετικότητας ὅτι χωρίς λόγο προσδίνει στή διάδοση τοῦ φωτός κεντρικό θεωρητικό ρόλο, βασίζοντας τήν ἔννοια τοῦ χρόνου πάνω στό νόμο διάδοσης τοῦ φωτός. Νά ἡ ἀπάντηση σ' αὐτή τήν ἀντίρρηση. Γιά νά δώσουμε στό χρόνο φυσική σημασία, πρέπει νά χρησιμοποιήσουμε ὁρισμένα γεγονότα πού θεσπίζουν σχέσεις ἀνάμεσα σέ διαφορετικούς τόπους. Τό ποιά γεγονότα θά πάρουμε, γιά νά δώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ χρόνου, εἶναι ἀδιάφορο αὐτό καθαυτό. Εἶναι ὅμως προτιμώτερο γιά τή θεωρία νά προτιμήσουμε ἕνα φαινόμενο γιά τό ὁποῖο γνωρίζουμε μέ βεβαιότητα κάποια στοιχεῖα. ῾Η διάδοση τοῦ φωτός στό κενό σέ βαθμό ἀσύγκριτα μεγαλύτερα ἀπό κάθε ἄλλο φαινόμενο ἔχει αὐτό τό χαρακτηριστικό — χάρη στίς ἔρευνες τῶν Maxwell καί H.A. Lorentz.

Μετά ἀπ' ὅλες αὐτές τίς σκέψεις, βλέπουμε ὅτι οἱ ἐνδείξεις γιά τόν χῶρο καί τό χρόνο ἔχουν πραγματική φυσική σημασία καί ὄχι μόνο συμβατική. Αὐτό εἶναι κυρίως ἀλήθεια γιά τίς σχέσεις ὅπου οἱ συντεταγμένες τοῦ χώρου καί ὁ χρόνος παίζουν κάποιο ρόλο, ὅπως γιά παράδειγμα, στίς σχέσεις (21). Ἔχουμε, λοιπόν, ἀπόλυτο δίκιο, νά ἀναρωτιόμαστε γιά τό ἄν αὐτές οἱ ἐξισώσεις εἶναι ἤ ὄχι σωστές ἤ, ἀκόμη, γιά τό ποιές εἶναι οἱ σωστές ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ πού ἰσχύουν γιά τό πέρασμα ἀπό ἕνα ἀδρανειακό σύστημα K σέ ἕνα ἀδρανειακό σύστημα K΄, πού ἔχει μιά σχετική κίνηση ὡς πρός τό K. Καί νά πού αὐτές οἱ ἐξισώσεις καθορίζονται μέ μοναδικό τρόπο ἀπό τήν ἀρχή τῆς σταθερότητας τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός καί μέ τήν ἀρχή τῆς εἰδικῆς σχετικότητας.

Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ χῶρος καί ὁ χρόνος εἶναι ὁρισμένα, μέ τήν φυσική ἔννοια πού ὑποδείξαμε, ὡς πρός δύο ἀδρανειακά συστήματα K καί K΄ πού κινοῦνται τό ἕνα σχετικά πρός τό ἄλλο. Καί ἔστω μιά φωτεινή ἀκτίνα πού διαδίδεται, διά μέσου τοῦ κενοῦ χώρου, ἀπό τό σημεῖο R_1 σέ ἕνα ἄλλο σημεῖο R_2 τοῦ K. Ἄν r εἶναι ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα στά δύο σημεῖα πού μετροῦμε στό σύστημα K, ἡ διάδοση τοῦ φωτός πρέπει νά ὑπακούει στήν ἐξίσωση

$$r = c\Delta t.$$

Ἄν ὑψώσουμε τήν ἐξίσωση στό τετράγωνο καί ἐκφράσουμε τό r^2 μέ τίς διαφορές τῶν συντεταγμένων Δx_ν, μποροῦμε νά γράψουμε ἐπίσης

$$\Sigma(\Delta x_\nu)^2 - c^2\Delta t^2 = 0. \qquad (22)$$

Αὐτή ἡ ἐξίσωση διατυπώνει τήν ἀρχή τῆς σταθερότητας τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός ὡς πρός τό Κ. Ἡ ἰσχύ της πρέπει νά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν κινητική κατάσταση τῆς φωτεινῆς πηγῆς ἀπ' ὅπου ἐκπέμφθηκε ἡ φωτεινή ἀκτίνα.

Τήν ἴδια διαδικασία διάδοσης μποροῦμε νά θεωρήσουμε καί ἀπό τήν ἄποψη τοῦ Κ΄, ὅπου ἡ ἀρχή τῆς σταθερότητας τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός πρέπει νά παραμένει σέ ἰσχύ. Ἔτσι, ὡς πρός τό Κ΄, ἔχουμε τήν ἐξίσωση

(22α) $$\Sigma(\Delta x'_\nu)^2 - c^2\Delta t'^2 = o.$$

Οἱ ἐξισώσεις (22α) καί (22) πρέπει ἡ καθεμιά νά εἶναι προϋπόθεση τῆς ἄλλης σάν συνέπεια τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων καί τοῦ χρόνου πού ἀντιστοιχεῖ στό πέρασμα ἀπό τό Κ στό Κ΄. Ὁ μετασχηματισμός πού ἱκανοποιεῖ τίς παρά πάνω σκέψεις λέγεται «μετασχηματισμός τοῦ Lorentz».

Πρίν ἐξετάσουμε τούς μετασχηματισμούς αὐτούς ἀπό πιό κοντά, ἄς μᾶς ἐπιτραπεῖ νά κάνουμε μιά γενική παρατήρηση πάνω στό χῶρο καί τόν χρόνο. Στήν προσχετική φυσική αὐτά ἦταν ἀνεξάρτητες ἀλήθειες. Ἡ ἰσχύς τῶν κρίσεων γιά τό χρόνο ἦταν ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ χώρου ἀναφορᾶς. Γιά τό χῶρο ἀναφορᾶς εἶναι ἀλήθεια ὅτι ἤδη ἡ μηχανική τοῦ Newton εἶχε χαρακτῆρα σχετικότητας, ἔτσι ὥστε ἡ παραδοχή, παραδείγματος χάριν, ὅτι δύο μή ταυτόχρονα γεγονότα συμβαίνουν στό ἴδιο σημεῖο δέν εἶχε ἀντικειμενική ἔννοια (ἀνεξάρτητα ἀπό τό χῶρο ἀναφορᾶς). Ὅμως αὐτή ἡ σχετικότητα δέν ἔπαιξε ρόλο στό φτιάξιμο τῆς θεωρίας. Τό σημεῖο τοῦ χώρου θεωροῦνταν σάν ἀπόλυτη ἀλήθεια, τό ἴδιο καί οἱ χρονικές στιγμές. Δέν κατανοήθηκε ὅτι τό ἀληθινό στοιχεῖο τῆς χωρο–χρονικῆς περιγραφῆς εἶναι τό γεγονός, πού περιγράφεται στό χῶρο καί στό χρόνο μέ τέσσερις ἀριθμούς x_1, x_2, x_3,t. Ἡ ἀντίληψη τῶν φαινομένων ἦταν πάντα ἡ ἀντίληψη ἑνός τετραδιάστατου συνεχοῦς, ὅμως ἡ γνώση αὐτή σκιάστηκε ἀπό τόν ἀπόλυτο χαρακτῆρα πού δόθηκε στόν χρόνο, ὅπως τόν ἔβλεπαν πρίν τή Θεωρία τῆς σχετικότητας.

Ἄν ἀφήσουμε τήν ὑπόθεση τοῦ ἀπόλυτου χρόνου, καί ἰδιαίτερα μάλιστα τόν ἀπόλυτο χαρακτήρα τοῦ ταυτόχρονου, ἀμέσως ἐπιβάλλεται ἡ τετραδιάστατη ὄψη τοῦ χώρου–χρόνου. Φυσική ἀλήθεια δέν ἔχει τό σημεῖο τοῦ χώρου ὅπου συμβαίνει κάτι, οὔτε πάλι ἡ χρονική στιγμή στήν ὁποία γίνεται κάτι τι, φυσική ἀλήθεια ἔχει μόνο αὐτό καθ' αὐτό τό γεγονός. Μεταξύ δύο γεγονότων, δέν ὑπάρχει ἀπόλυτη σχέση ὡς πρός τό χῶρο ἤ ἀπόλυτη σχέση ὡς πρός τό χρόνο (ἀνεξάρτητη ἀπό τό χῶρο ἀναφορᾶς). Ὑπάρχει ὅμως ἀπόλυτη σχέση ὡς πρός τό χῶρο–χρονο (ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ χώρου ἀναφορᾶς), πρᾶγμα πού θά ἀποδείξουμε πάρα κάτω.

Τό γεγονός ὅτι τό τετραδιάστατο συνεχές δέν μπορεῖ νά χωριστεῖ ἀντικειμενικά σέ ἕνα τρισδιάστατο συνεχές χώρου καί σ' ἕνα μονοδιάστατο συνεχές χρόνου, ἔχει σά συνέπεια νά μή μποροῦν οἱ νόμοι τῆς φύσης νά ἐκφραστοῦν μέ λογικά ἱκανοποιητικό τρόπο παρά μόνο ἄν αὐτοί οἱ νόμοι διατυπωθοῦν στό τετραδιάστατο συνεχές τοῦ χώρου–χρόνου. Σ' αὐτό ἀκριβῶς ἡ Θεωρία τῆς σχετικότητας ὀφείλει στόν Minkowski τήν μεγάλη πρόοδο στή μεθοδολογία.

᾿Απ᾿ αὐτή τήν ἄποψη, πρέπει νά θεωροῦμε τό x_1, x_2, x_3,t σάν τίς τέσσερις συντεταγμένες ἑνός γεγονότος πού συμβαίνει στό τετραδιάστατο συνεχές.

῾Η συγκεκριμένη παράσταση τῶν σχέσεων αὐτοῦ τοῦ τετραδιάστατου συνεχοῦς εἶναι πολύ λιγότερο εὔκολη ἀπ᾿ ὅ,τι τοῦ τρισδιάστατου εὐκλείδιου συνεχοῦς. Πρέπει ὅμως νά σημειώσουμε ὅτι οἱ ἀντιλήψεις καί οἱ σχέσεις τῆς τρισδιάστατης εὐκλείδιας γεωμετρίας ἔχουν ἐξαιρετικά ἀφηρημένο χαρακτῆρα καί ἀκόμη ὅτι δέν εἶναι καθόλου ἴδιες μέ τίς ὀπτικές καί ἁπτικές παραστάσεις. Τό γεγονός ὅτι δέν εἶναι δυνατό νά διαχωρίσουμε τό τετραδιάστατο συνεχές ἀπό τά γεγονότα μέ κανένα τρόπο δέν σημαίνει ἰσοδυναμία ἀνάμεσα στίς συντεταγμένες τοῦ χώρου καί τίς συντεταγμένες τοῦ χρόνου. Δέν πρέπει νά χάνουμε ἀπ᾿ τά μάτια μας ὅτι ἡ συντεταγμένη τοῦ χρόνου ὁρίζεται φυσικά μέ διαφορετικό τρόπο ἀπ᾿ ὅ,τι οἱ συντεταγμένες τοῦ χώρου. Οἱ σχέσεις (22) καί (22α), πού ἡ ταυτότητά τους ὁρίζει τόν μετασχηματισμό τοῦ Lorentz, δείχνουν ἐκτός τῶν ἄλλων τούς διαφορετικούς ρόλους πού παίζουν ἡ συντεταγμένη τοῦ χρόνου καί οἱ συντεταγμένες τοῦ χώρου, μέ τούς ὅρους Δt^2 σημασμένους ἀντίθετα ἀπ᾿ ὅ,τι οἱ ὅροι τοῦ χώρου

$$\Delta x_1^2, \Delta x^2_2, \Delta x^2_3.$$

Μετασχηματισμός τοῦ Lorentz. — Πρίν νά ἀναλύσουμε λεπτομερέστερα τήν συνθήκη πού ὁρίζει τόν μετασχηματισμό τοῦ Lorentz, στή θέση τοῦ χρόνου t θά βάλουμε τόν χρόνο – φῶς l=ct, ὥστε ἡ σταθερά c νά μήν ἐμφανίζεται καθαρά στούς τύπους, πού θά διατυπώσουμε πιό κάτω ῾Ο

῾Ο μετασχηματισμός τοῦ Lorentz ὁρίζεται κατ' ἀρχή ἀπό τό γεγονός ὅτι κάνει τήν ἐξίσωση

(22β) $$\Delta x^2_1 + \Delta x^2_2 + \Delta l^2 = 0$$

ἐξίσωση συνδακυμαινόμενη, δηλαδή ἐξίσωση πού ἰσχύει γιά κάθε ἀδρανειακό σύστημα, ἄν ἰσχύει γιά τά δύο γεγονότα πού ἐξετάζουμε (τήν ἀναχώρηση καί τήν ἄφιξη τῆς φωτεινῆς ἀκτίνας) ὡς πρός ἕνα ἰδιαίτερο ἀδρανειακό σύστημα. Τέλος, μποροῦμε, μαζί μέ τό Minkowski, νά ἀντικαταστήσουμε τήν πραγματική συντεταγμένη τοῦ χρόνου

$$l = ct$$

μέ τή φανταστική συντεταγμένη

$$x_4 = il = \text{ict}.$$

῾Η ἐξίσωσή μας, πού ὁρίζει τή διάδοση τοῦ φωτός, τῆς ὁποίας ἡ συνδιακύμανση πρέπει νά βγαίνει μέ ἐφαρμογή τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz, παίρνει τήν ἀκόλουθη μορφή

(22γ) $$\sum_{(\nu)} \Delta x^2_\nu = \Delta x^2_1 + \Delta x^2_2 + \Delta x^2_3 + \Delta x^2_4 = 0.$$

Αὐτή ἡ συνδιακύμανση τῆς (22β), πάντως, ἰσχύει (1), ἄν ἱκανοποιεῖται ἡ πιό γενική συνθήκη ὅτι δηλαδή

(23) $$s^2 = \Delta x^2_1 + \Delta x^2_2 + \Delta x^2_3 + \Delta x^2_4$$

εἶναι μέγεθος ἀναλλοίωτο. Αὐτή ἡ συνθήκη δέν πληροῦται παρά μόνο ἀπό γραμμικούς μετασχηματισμούς, τοῦ τύπου

(24) $$x'_\mu = a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha,$$

ὅπου ἡ ἄθροιση ὡς πρός α γίνεται ἀπό α=1 μέχρι α=4. Ἕνα βλέμμα στίς ἐξισώσεις (23) καί (24) μᾶς πείθει ὅτι *οἱ ἔτσι ὁρισμένοι μετασχηματισμοί τοῦ* Lorentz, *χωρίς νά σταθοῦμε στόν ἀριθμό τῶν διαστάσεων καί τῶν συνθηκῶν ἀλήθειας, εἶναι ἴδιοι μέ τούς μετασχηματισμούς μετατόπισης καί περιστροφῆς τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας*. Ἐδῶ, συμπεραίνουμε ἐπίσης, ὅτι οἱ συντελεστές $b_{\mu\alpha}$ πρέπει νά ὑπακούουν στίς συνθῆκες

(25) $$b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu} = b_{\alpha\mu} b_{\alpha\nu}.$$

Ἀπό τίς συνθῆκες ἀλήθειας τῶν x_ν βγαίνει ὅτι τά a_μ καί $b_{\mu\alpha}$ εἶναι ὅλα πραγματικά, ἐκτός τῶν a_4, b_{41}, b_{43}, b_{14}, b_{24}, b_{34}, πού εἶναι καθαρά φανταστικά.

Ὁ εἰδικός μετασχηματισμός τοῦ Lorentz. — Παίρνουμε τούς πιό ἁπλούς μετασχηματισμούς τοῦ τύπου (24), (25), ἄν ἀπαιτήσουμε νά μετασχηματιστοῦν μόνο 2 συντεταγμένες καί τά a_μ, πού καθορίζουν τήν ἐκλογή τοῦ νέου σημείου ἀρχῆς, τῶν συντεταγμένων, νά μηδενιστοῦν. Γιά τούς δεῖκτες 1, 2 παίρνουμε λοιπόν, ἐξ αἰτίας τῶν σχέσεων (25) πού μᾶς δίνουν 3 ἀνεξάρτητες συνθῆκες,

(26) $$\left\{\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi, \\ x'_2 &= x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi, \\ x'_3 &= x_3, \\ x'_4 &= x_4. \end{aligned}\right.$$

Αὐτό πολύ ἁπλά εἶναι στροφική κίνηση μέσα στό χῶρο τοῦ συστήματος συντεταγμένων (κίνηση στό χῶρο) γύρω ἀπό τόν ἄξονα x_3. Βλέπουμε κύρια, ὅτι οἱ χωρικοί μετασχηματισμοί τῆς στροφικῆς κίνησης (χωρίς χρονικό μετασχηματισμό), πού μελετήσαμε πάρα πάνω, συμπεριλαμβάνονται σάν ἰδιαίτερη περίπτωση μέσα στούς μετασχηματισμούς τοῦ Lorentz. Γιά τούς δεῖκτες 1,4 παίρνουμε κατ' ἀνάλογο τρόπο

$$(26\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= x_2\cos\psi - x_4\sin\psi,\\ x'_4 &= x_1\sin\psi + x_4\cos\psi,\\ \\ x'_2 &= x_2,\\ x\,_3 &= x_3. \end{aligned}\right.$$

'Εξ' αἰτίας τῶν συνθηκῶν ἀλήθειας, πού ἀναφέρθηκαν πιό πάνω, πρέπει ἐδῶ νά θεωρήσουμε τή γωνία ψ σάν φανταστική. Γιά τήν φυσική ἑρμηνεία, εἰσάγαμε τό πραγματικό χρόνο−φῶς l καί τήν ταχύτητα υ τοῦ κ′ ὡς πρός τό κ, ἀντί γιά τήν φανταστική γωνία ψ. Ἔχουμε κατ' ἀρχή

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\psi - il\sin\psi,\\ l' &= -ix_1\sin\psi + l\cos\psi. \end{aligned}$$

Δοσμένου ὅτι γιά τήν ἀρχή τοῦ Κ′, δηλαδή γιά $x'=o$, πρέπει νά εἶναι $x=vl$, ϐγαίνει ἀπό τήν πρώτη ἀπό τίς δύο παραπάνω ἐξισώσεις

$$(27)\qquad \upsilon = i\,\mathrm{tang}\psi,$$

καί στή συνέχεια

$$(28)\quad \begin{cases} \sin\psi = \dfrac{-i\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2}}, \\ \cos\psi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2}}. \end{cases}$$

ὥστε νά ἔχουμε

$$(29)\quad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{x_1 - vl}{\sqrt{1-v^2}}, \\ l' = \dfrac{l - vx_1}{\sqrt{1-v^2}}; \\ x'_2 = x_2, \\ x'_3 = x_3. \end{cases}$$

Πρόκειται γιά τόν πολύ γνωστό εἰδικό μετασχηματισμό τοῦ Lorentz, πού ὑπάρχει μέσα στή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας σάν στροφική κίνηση μιᾶς φανταστικῆς γωνίας τοῦ τετραδιάστατου συστήματος συντεταγμένων γύρω ἀπό τόν ἄξονα τοῦ χρόνου. Ἄν θέλαμε στή θέση τοῦ χρόνο–φωτός l νά βάλουμε τόν συνηθισμένο χρόνο t, δέν ἔχουμε παρά νά βάλουμε στήν (29) ὅπου l καί υ, ἀντίστοιχα ct καί υ/c.

Πρέπει τώρα νά καλύψουμε ἕνα κενό. Ἀπό τήν ἀρχή τῆς σταθερότητας τῆς ταχύτητας τοῦ φωτός, βγαίνει ὅτι ἡ σημασία τῆς ἐξίσωσης

$$\Sigma\Delta x^2_\nu = o$$

πρέπει νά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος, δέν βγαίνει ὅμως ἀκόμη τό ἀναλλοίωτο τοῦ μεγέθους $\Sigma\Delta x^2_\nu$. Αὐτό τό τελευταῖο θά μποροῦσε νά διατηρεῖται κατά προσέγγιση ἑνός σταθεροῦ παράγοντα. Μ' αὐτό ἐπανερχόμαστε στό ὅτι τά δεύτερα μέλη τῆς (29) θά μποροῦσαν ἀκόμη νά πολλαπλασιαστοῦν ἐπί ἕνα παράγοντα λ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό υ). Ἡ ἀρχή ὅμως τῆς σχετικότητας δέν ἐπιτρέπει νά εἶναι αὐτός ὁ παράγοντας διάφορος τοῦ 1, ὅπως θά ἀποδείξουμε.

Ἄς φανταστοῦμε ἕνα κυκλικό κύλινδρο πού κινεῖται παράλληλα πρός τόν ἄξονά του. Ἄν υ ἀκτῖνα του, μετρούμενη μέ τόν κανόνα στήν κατάσταση ἠρεμίας του, εἶναι ἴση μέ Ro, θά μποροῦσε, στήν κατάσταση τῆς κίνησης, νά διαφέρει ἀπό τήν τιμή Ro, δοσμένου ὅτι ἡ Θεωρία τῆς σχετικότητας δέν ὑποθέτει ὅτι ἡ μορφή τῶν σημάτων ὡς πρός ἕνα χῶρο ἀναφορᾶς δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κίνησή τους ὡς πρός αὐτό τό χῶρο. Οἱ διευθύνσεις ὅμως τοῦ χώρου εἶναι ἰσοδύναμες μεταξύ τους. Ἔτσι, τό R μπορεῖ νά ἐξαρτᾶται πάρα πολύ ἀπό τήν ταχύτητα τῆς κίνησης υ, ὄχι ὅμως καί ἀπό τή διεύθυνση τῆς κίνησης. Πρέπει, λοιπόν, τό R νά εἶναι συνάρτηση τοῦ υ. Ἄν ὁ κύλινδρος εἶναι σέ ἠρεμία ὡς πρός K′, ἡ ἐξίσωση τῆς ἐπιφάνειάς του εἶναι

$$x'^2_2 + x'^2_3 = Ro^2.$$

Ἄν γράψουμε τίς 2 τελευταῖες ἐξισώσεις τῆς (29) στήν γενικότερη μορφή

$$x'_2 = \lambda x_2,$$
$$x'_3 = \lambda x_3,$$

τότε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύλινδρου ὡς πρός τό κ ὑπακούει στήν ἐξίσωση

$$x^2_2 + x^2_3 = \frac{Ro^2}{\lambda^2}$$

῾Ο παράγοντας λ, κατά συνέπεια, μετράει τήν πλευρική συστολή τοῦ κυλίνδρου καί, σύμφωνα μ' ὅσα εἴπαμε, δέν μπορεῖ παρά νά εἶναι ἄρτια συνάρτηση τοῦ υ.

Εἰσάγοντας ἕνα τρίτο σύστημα συντεταγμένων K'', πού κινεῖται μέ ταχύτητα υ ὡς πρός τό κ΄ καί στήν κατεύθυνση τοῦ ἀρνητικοῦ ἄξονα x τοῦ κ΄, παίρνουμε ἐφαρμόζοντας δύο συνεχεῖς φορές τήν (29)

$$x''_2 = \lambda(\upsilon)\,\lambda(-\upsilon)\,x_2,$$
$$x''_3 = \lambda(\upsilon)\,\lambda(-\upsilon)x_3.$$

᾿Επειδή λ(υ)=λ(−υ) καί ἐπειδή ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι οἱ ἴδιοι κανόνες πρέπει νά χρησιμοποιοῦνται σ' ὅλα τά συστήματα, πρέπει ὁ μετασχηματισμός τοῦ κ΄ σέ κ νά εἶναι ὁ ἴδιος μετασχηματισμός, ἀπ' ὅπου βγαίνει ὅτι λ=1 (ἀφοῦ δέν εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά ἀναφερθοῦμε στήν πιθανότητα νά εἶναι λ=−1). Τό οὐσιαστικό στή σκέψη αὐτή εἶναι ὅτι ἡ συμπεριφορά τῶν κανόνων δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κίνησή τους στό παρελθόν.

ΚΙΝΗΤΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΟΥ LORENTZ

Κανόνες καί ρολόγια σέ κίνηση. — ῾Η θέση τῶν σημείων, πού παριστάνονται μέ τούς ἀκέραιους ἀριθμούς x΄=n, σέ μιά καθορισμένη στιγμή $t = 0$ τοῦ συστήματος κ, δίνεται ἀναφορικά πρός τό σύστημα αὐτό ἀπό τήν ἐξίσωση

$$x = n\sqrt{1 - v^2},$$

πού συνεπάγεται ἀπό τήν πρώτη ἀπό τίς σχέσεις (29) (συστολή τοῦ Lorentz). Ἕνα ρολόι σέ ἠρεμία βρισκόμενο στήν ἀρχή τοῦ κ, καί τοῦ ὁποίου οἱ χτύποι χαρακτηρίζονται ἀπό $l = n$, λειτουργεῖ ὡς πρός τό κ΄, συμμορφωνόμενο μέ τήν δεύτερη ἐξίσωση ἀπό τίς σχέσεις (29), μέ ταχύτητα

$$l' = \frac{n}{\sqrt{1 - v^2}},$$

δηλαδή πιό ἀργά, ἀπ', ὅ,τι ἄν ἦταν σέ ἠρεμία ὡς πρός τό κ΄. Αὐτές οἱ δύο συνέπειες πού, τηρουμένων τῶν ἀναλογιῶν, ἰσχύουν γιά κάθε σύστημα ἀναφοράς, φτιάχνουν τό φυσικό περιεχόμενο τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz, τό ὁποῖο δέν ἐξαρτᾶται ἀπό καμιά συμβατικότητα.

Θεώρημα τῆς πρόθεσης τῶν ταχυτήτων. — Ἄν κάνουμε δύο εἰδικούς μετασχηματισμούς τοῦ Lorentz μέ σχετικές ταχύτητες v_1 καί v_2, ἡ ταχύτητα v_{12} τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz (27) πού τίς ἀντικαθιστάει δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$(30) \qquad v_{12} = i\, \mathrm{tang}(\psi_1 + \psi_2) = i\, \frac{\mathrm{tang}\psi_1 + \mathrm{tang}\psi_2}{1 - \mathrm{tang}\psi_1\, \mathrm{tang}\psi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

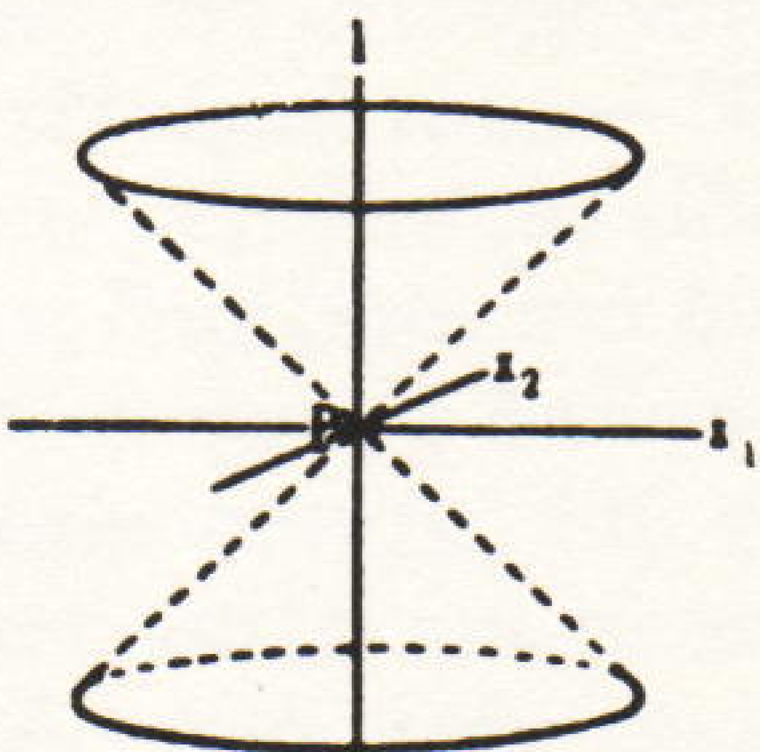
Γενική θεώρηση τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz *καί τό ἀναλλοίωτό του.* — Ὅλη ἡ θεωρία τῶν ἀναλλοίωτων μεγεθῶν τῆς εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας βασίζεται στό ἀναλλοίωτο μέγεθος s^2(23). Ἀπό τυπική ἄποψη, παίζει μέσα στό τετραδιάστατο συνεχές τοῦ χώρο–χρόνου τόν ἴδιο ρόλο πού παίζει καί τό ἀναλλοίωτο μέγεθος $\Delta x^2_1 + \Delta x^2_1 + \Delta x^2_3$ στήν εὐκλείδια γεωμετρία ἤ στήν προσχετική φυσική. Τό τελευταῖο αὐτό μέγεθος, ἄν συγκριθεῖ μέ τό σύνολο τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ Lorentz, δέν εἶναι ἀναλλοίωτο. Εἶναι τό μέγεθος s^2 τῆς ἐξίσωσης (23), πού ἐπωμίζεται τό ρόλο τοῦ ἀναλλοίωτου. Τό s^2 μπορεῖ νά μετρηθεῖ ὡς πρός ἕνα τυχόν ἀδρανειακό σύστημα καί, μέ δοσμένο κανόνα, γίνεται μέγεθος τέλεια καθορισμένο, πού ἀντιστοιχεῖ σ' ἕνα τυχαῖο ζευγάρι γεγονότων.

Τό ἀναλλοίωτο μέγεθος s^2, ἀνεξάρτητα ἀπό τόν ἀριθμό τῶν διαστάσεων, διακρίνεται ἀπό τό ἀντίστοιχο ἀναλλοίωτο μέγεθος τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας, ἀπό τό ἀκόλουθο χαρακτηριστικό. Στήν εὐκλείδια γεωμετρία, τό s^2 εἶναι ἀπαραίτητα θετικό. Δέν μηδενίζεται παρά μόνο ἄν συμπίπτουν τά ἐξεταζόμενα σημεῖα τοῦ χώρου. Ἀντίθετα, ἀπό τή συνθήκη

$$s^2=\Sigma\Delta x^2_\nu=\Delta x^2_1+\Delta x^2_2+\Delta x^2_3-\Delta l^2=o$$

δέν μποροῦμε νά συμπεράνουμε ὅτι τά δύο χωρο–χρονικά σημεῖα συμπίπτουν. Ἡ προηγούμενη συνθήκη εἶναι μᾶλλον ἡ ἀναλλοίωτη ἔκφραση τοῦ γεγονότος ὅτι τά δύο χωρο–χρονικά σημεῖα μποροῦν νά συνδεθοῦν διά μέσου ἑνός φωτεινοῦ σήματος διά μέσου τοῦ κενοῦ.

Ἄν P εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ τετραδιάστατου χώρου τῶν x_1, x_2, x_3, l, τό σύνολο τῶν «σημείων» P′, πού μποροῦν νά συνδεθοῦν διά μέσου ἑνός φωτεινοῦ συστήματος μέ τό σημεῖο P, βρίσκεται στόν κῶνο $s^2=o$ (εἰκ. 1, ὅπου ἡ διάσταση x_3 ἔχει καταργηθεῖ).



Ὑποθέτουμε ὅτι ὁ «ἀνώτερος» μισός κῶνος περιέχει τά «σημεῖα» πρός τά ὁποῖα φωτεινά σήματα μποροῦν νά σταλοῦν ἀπό τό P (κῶνος τοῦ μέλλοντος), καί ὅτι ὁ «κατώτερος» ἡμικῶνος περιέχει τά «σημεῖα» ἀπ' ὅπου μποροῦμε νά στείλουμε φωτεινά σήματα πρός τό P (κῶνος τοῦ παρελθόντος). Τά σημεῖα P′ πού περικλείονται ἀπό τήν κωνική ἐπιφάνεια ἔχουν μαζί μέ τό σημεῖο P ἀρνητικό s^2. Ὀνομάζουμε, σύμφωνα μέ τόν Minkowski, τό ἄνυσμα PP′ ἤ P′P *χρονικό ἄνυσμα*. Τέτοιες εὐθεῖες παριστάνουν τμήματα ἀπό τίς πιθανές πορείες [ταχύτητες κατώτερες ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φωτός (1)]. Στήν περίπτωση αὐτή, ὁ ἄξονας l μπορεῖ, μέ τή σωστή ἐκλογή τῆς κινητικῆς κατάστασης τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος νά τοποθετηθεῖ στή διεύθυνση PP′. Ἄν τό ρ′ εἶναι στό ἐξωτερικό τοῦ «κώνου φω τός», τό PP′ ὀνομάζεται *ἄνυσμα τοῦ χώρου*. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, μποροῦμε, μέ κατάλληλη ἐκλογή τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος, νά κάνουμε ὥστε νά μηδενιστεῖ τό Δl.

Εἰσάγοντας τήν φανταστικη χρονική μεταβλητή $x_4 = il$, ὁ Minkowski θεμελίωσε τήν πλήρη ἀναλογία μεταξύ τῆς θεωρίας τῶν ἀναλλοίωτων μεγεθῶν τοῦ τετραδιάστατου συνεχοῦς στόν τομέα τῆς φυσικῆς καί τῆς θεωρίας τοῦ τρισδιάστατου συνεχοῦς τοῦ εὐκλείδιου χώρου. Ἔτσι ἡ τανιστική θεωρία τῶν τεσσάρων διαστάσεων στήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας δέν διαφέρει ἀπό τόν τρισδιάστατο χῶρο παρά μόνο κατά τόν ἀριθμό τῶν διαστάσεων καί τίς συνθῆκες ἀλήθειας.

Μία φυσική ὀντότητα, πού, ὡς πρός ἕνα τυχαῖο ἀδρανειακό σύστημα x_1, x_2, x_3, x_4 περιγράφεται μέ τά 4 μεγέθη A_ν, λέγεται «τετραδιάνυσμα» μέ συνιστῶσες A_ν, ἄν οἱ A_ν ἀντιστοιχοῦν στά Δx_ν μέ βάση τίς συνθῆκες ἀλήθειας τους καί τίς ἰδιότητες μετασχηματισμοῦ τους. Μπορεῖ τό «τετραδιάνυσμα» νά ἔχει φύση χωρική ἤ χρονική. Τά 16 μεγέθη $A_{\mu\nu}$ φτιάχνουν τίς συνιστῶσες ἑνός τανιστῆ δεύτερης τάξης, ἄν μετασχηματίζονται σύμφωνα μέ τό σχῆμα.

$$A'_{\mu\nu}=b_{\mu\alpha}b_{\nu\beta}A_{\alpha\beta}.$$

Βέβαια συνεπάγεται ὅτι τά $A_{\mu\nu}$ συμπεριφέρονται ὡς πρός τίς ἰδιότητές του (μετασχηματισμοῦ καί ἀλήθειας) σάν τά γινόμενα τῶν συνιστωσῶν $U_m V_\nu$ τῶν δύο τετραδιανυσμάτων (U) καί (V). Κατά συνέπεια, ὅλες οἱ συνιστῶσες εἶναι πραγματικές, ἐκτός ἀπό κεῖνες πού περιέχουν μιά φορά τό δείκτη 4, ὁπότε καί εἶναι καθαρά φανταστικές. Μέ ἀνάλογο τρόπο, μποροῦμε νά ὁρίσουμε τούς τανιστές τρίτης τάξης ἤ καί μεγαλύτερης. Οἱ πράξεις πρόσθεσης, ἀφαίρεσης, πολλαπλασιασμοῦ, συστολῆς καί διαφόρισης τῶν τανιστῶν εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογες μέ τίς ἴδιες πράξεις σέ τανιστές τοῦ τρισδιάστατου χώρου.

Πρίν νά ἐφαρμόσουμε τήν θεωρία τῶν τανιστῶν στό τετραδιάστατο χωρο–χρονικό συνεχές, πρέπει νά ἐξετάσουμε ἀπό πιό κοντά τούς ἀντισυμμετρικούς τανιστές. Ἕνας τανιστής δεύτερης τάξης ἔχει γενικά 16=4×4 συνιστῶσες. Στήν περίπτωση τῆς ἀντισυμμετρίας, οἱ συνιστῶσες μέ δύο ἴσους δεῖκτες ἐξαφανίζονται καί οἱ συνιστῶσες μέ ἄνισους δεῖκτες εἶναι ἀνά δύο ἴσες κατ' ἀπόλυτη τιμή, ἀλλά ἔχουν ἀντίθετο πρόσημο. Ἄρα, ὑπάρχουν μόνο ἕξι ἀνεξάρτητες μεταξύ τους συνιστῶσες, ὅπως π.χ. στήν περίπτωση τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. Ἡ ἐξέταση τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell θά δείξει, πράγματι, ὅτι μποροῦν νά ἐξηγηθοῦν σάν τανιστές ἐξισώσεις, ἄν θεωρήσουμε τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο σάν ἀντισυμμετρικό τανιστή. Ἐπί πλέον, εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἀντισυμμετρικός τανιστής τρίτης τάξης (ἀντισυμμετρικός γιά κάθε ζευγάρι δεικτῶν) ἔχει μόνο τέσσερις ἀνεξάρτητες μεταξύ τους συνιστῶσες, δοσμένου ὅτι τρεῖς δεῖκτες ἐπιτρέπουν μόνο τέσσερις συνδυασμούς.

Θά καταπιαστοῦμε τώρα μέ τίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell (19α), (19β), (20α), (20β) καί θά εἰσαγάγουμε τούς συμβολισμούς:

$$(30\alpha)\quad \left\{\begin{array}{llllll} \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & \varphi_{14} & \varphi_{24} & \varphi_{34}, \\ h_{23} & h_{31} & h_{12} & -ie_x & -ie_y & -ie_z, \end{array}\right.$$

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{llll} J_1 & J_2 & J_3 & J_4, \\ \frac{1}{c}i_x & \frac{1}{c}i_y & \frac{1}{c}i_z & i\varrho, \end{array}\right.$$

συμφωνώντας ὅτι $\varphi_{\mu\nu}=-\varphi_{\nu\mu}$. Οἱ ἐξισώσεις (19) καί (20) μποροῦν σύντομα νά δοθοῦν μέ τή μορφή

$$(32)\qquad \frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J_\mu,$$

$$(33)\qquad \frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial\varphi_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial\varphi_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

Αὐτό μποροῦμε εὔκολα νά τό διαπιστώσουμε ὑποκαθιστώντας κατάλληλα στίς (30α) καί (31). Οἱ σχέσεις (32) καί (33) ἔχουν τανιστικό χαρακτῆρα κι ἔτσι συνδιακυμαίνονται ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς τοῦ Lorentz, ἄν τά $\varphi_{\mu\nu}$ καί J_μ ἔχουν τανιστικό χαρακτῆρα, ὅπως ὑποθέτουμε. Ἀπό δῶ, μέ μοναδικό τρόπο θεμελιώνονται οἱ νόμοι τοῦ μετασχηματισμοῦ αὐτῶν τῶν μεγεθῶν γιά τό πέρασμα ἀπό ἕνα πλεονεκτικό σύστημα συντεταγμένων (πού ἀνήκει σέ κάποιο ἀδρανειακό σύστημα) σ' ἕνα ἄλλο.

Ἡ μεθοδολογική πρόοδος τῆς ἠλεκτροδυναμικῆς πού ὀφείλεται στήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας συνίσταται βασικά στό ὅτι ἐλαττώνει τόν ἀριθμό τῶν ἀνεξάρτητων ὑποθέσεων. Γιά παράδειγμα, ρίχνοντας μιά ματιά στίς σχέσεις (19α) καί ἐξετάζοντάς τις, ὅπως παρά πάνω κάναμε, μόνο ἀπό τήν ἄποψη τῆς σχετικότητας τῆς διεύθυνσης διαπιστώνουμε ὅτι ἔχουν τρεῖς ὅρους πού λογικά εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητοι μεταξύ τους. Τό ἠλεκτρικό πεδίο μπαίνει μέσα σ' αὐτές τίς ἐξισώσεις μέ τρόπο πού φαίνεται ἐντελῶς ἀνεξάρτητος ἀπό τόν τρόπο πού μπαίνει μέσα σ' αὐτές τό μαγνητικό πεδίο. Δέν θά ἔπρεπε νά ἐκπλαγοῦμε ἄν, στή θέση τοῦ $\frac{\partial e_\mu}{\partial l}$, , ὑπῆρχε π.χ. $\frac{\partial^2 e_\mu}{\partial l^2}$, ἤ καί ἄν αὐτός ὁ ὅρος ἔλειπε τελείως. Στήν σχέση (32), ἀντίθετα, ὑπάρχουν μόνο δύο ὅροι ἀνεξάρτητοι μεταξύ τους.

Τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο παρουσιάζεται σάν μιά ἑνότητα τυπική. Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο τό ἠλεκτρικό πεδίο ὑπεισέρχεται στίς ἐξισώσεις ἐξαρτᾶται ἀπό τό πῶς ὑπεισέρχεται τό μαγνητικό πεδίο. Σάν ὅρος ἀνεξάρτητος πλάϊ στό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο ὑπάρχει μόνο ἡ πυκνότητα τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος. Ἡ μεθοδολογική αὐτή πρόοδος ἔγκειται στό γεγονός ὅτι τό ἠλεκτρικό καί τό μαγνητικό πεδίο χάνανε τήν ἀνεξαρτησία τους μέ τήν σχετικότητα τῆς κίνησης. Ἐκεῖνο πού ἀπό τή σκοπιά ἑνός συστήματος, εἶναι καθαρά μαγνητικό πεδίο, ἔχει ἐπίσης, ὅταν τό κοιτάζουμε ἀπό ἄλλο ἀδρανειακό σύστημα, συνιστῶσες ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Στήν εἰδική περίπτωση τοῦ εἰδικοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz ὁ γενικός νόμος μετασχηματισμοῦ στήν ἐφαρμογή του στό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο παίρνει τή μορφή

$$
(34)\quad \left\{ \begin{array}{ll}
e'_x = e_x, & h'_x = h_x, \\[2mm]
e'_y = \dfrac{e_y - \upsilon h_z}{\sqrt{1-\upsilon^2}}, & h'_y = \dfrac{h_y + \upsilon e_z}{\sqrt{1-\upsilon^2}}, \\[4mm]
e'_z = \dfrac{e_z + \upsilon h_y}{\sqrt{1-\upsilon^2}}, & h'_z = \dfrac{h_z - \upsilon e_y}{\sqrt{1-\upsilon^2}}.
\end{array} \right.
$$

Μπορεῖ ὡς πρός κ νά ὑπάρχει μόνο ἕνα μαγνητικό πεδίο h καί καθόλου ἠλεκτρικό πεδίο e, ἐν τούτοις θά ὑπάρχει ὡς πρός κ΄ ἕνα ἠλεκτρικό πεδίο e΄, πού δρᾶ σέ ἠλεκτρική μάζα ἀκίνητη ὡς πρός τό κ΄. Ἕνας ἀκίνητος παρατηρητής ὡς πρός κ θά ἐξηγήσει αὐτή τή δύναμη σάν ἠλεκτρεγερτική δύναμη τῶν Biot–Savart ἤ τοῦ Lorentz. Καί ἡ τελευταία ἐμφανίζεται σάν φυσική ἑνότητα κοινή μέ τή δράση τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

ΟΡΜΗ, ΕΝΕΡΓΕΙΑ, ΜΑΖΑ

Γιά νά συλλάβουμε αὐτή τή σχέση ἀπό τήν τυπική της ἄποψη, ἄς δοῦμε πῶς ἐκφράζεται ἡ δύναμη πού δρᾶ ὥστε νά παραχθῆ ὁρισμένη ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ ἀνά μονάδα ὄγκου

$$
(35)\qquad K = \varrho e + [i, h],
$$

ὅπου i τό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας τοῦ ἠλεκτρισμοῦ (σάν μονάδα λαμβάνεται ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός). Ἄν εἰσάγουμε τά μεγέθη j_μ καί $\varphi_{\mu\nu}$, σύμφωνα μέ τίς σχέσεις (30α) καί (31), παίρνουμε σάν πρώτη συνιστῶσα τήν ἔκφραση

$$
\varphi_{12}J_2 + \varphi_{13}J_3 + \varphi_{14}J_4.
$$

Παίρνοντας ὑπ' ὄψη τό γεγονός ὅτι ἡ γωνία φ_{11} ἐξαφανίζεται ἐξ αἰτίας τῆς ἀντισυμμετρίας τοῦ τανιστῆ (φ), οἱ συνιστῶσες τῆς K δίνονται ἀπό τίς τρεῖς πρῶτες συνιστῶσες τοῦ τετραδιάστατου διανύσματος

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu} J_\nu, \tag{36}$$

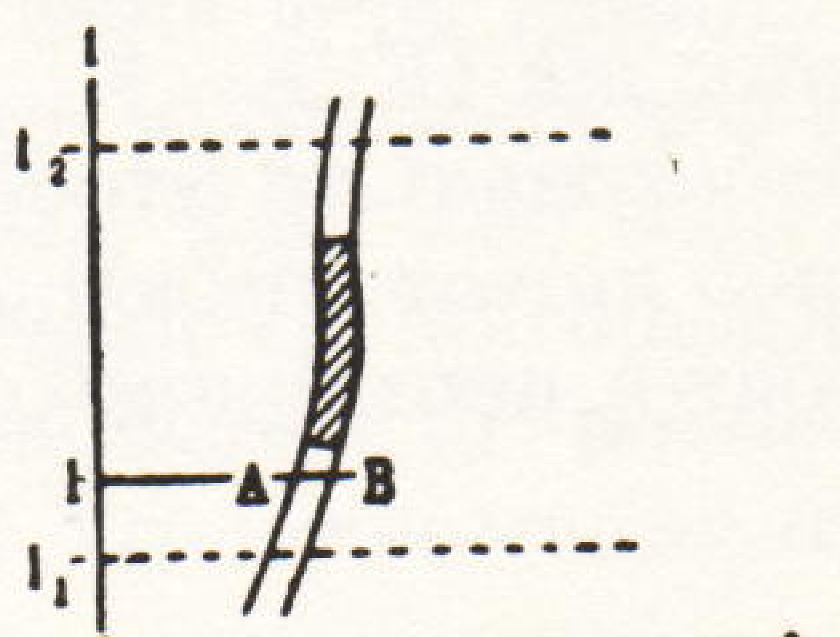
τοῦ ὁποίου ἡ τέταρτη συνιστῶσα δίνεται ἀπό τή σχέση

$$K_4 = \varphi_{41} J_1 + \varphi_{42} J_2 + \varphi_{43} J_3 = i(e_x i_x + e_y i_y + e_z i_z) = i\lambda. \tag{37}$$

Κατά συνέπεια, ὑπάρχει ἕνα τετραδιάστατο διάνυσμα τῆς πυκνότητας τῆς δύναμης μέ τρεῖς πρῶτες συνιστῶσες τίς K_1, K_2, K_3 τῆς πυκνότητας τῆς δύναμης καί μέ τέταρτη συνιστῶσα ἴση μέ τήν πυκνότητα τοῦ ἔργου πολλαπλασιασμένη ἐπί $\sqrt{-1}$ (ἀπώλεια ἐνέργειας τοῦ πεδίου ἀνά μονάδα ὄγκου καί χρόνου).

Ἡ σύγκριση ἀνάμεσα στίς (35) καί (36) δείχνει ὅτι ἡ Θεωρία τῆς σχετικότητας πραγματοποιεῖ τήν τυπική ἕνωση ἀνάμεσα στήν δύναμη τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ρe καί τή δύναμη τῶν Biot–Savart ἤ τοῦ Loreutz [i, h].

Μάζα καί ἐνέργεια. — Ἀπό τήν ὕπαρξη καί τή σημασία τοῦ τετραδιανύσματος (K_μ) μποροῦμε νά βγάλουμε ἕνα συμπέρασμα κεφαλαιώδους σημασίας. Ἄς φανταστοῦμε ἕνα σῶμα πάνω στό ὁποῖο δρᾶ ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο γιά κάποιο χρονικό διάστημα. Στή συμβολική εἰκόνα 2, ἡ Ox_1 εἶναι ὁ ἄξονας x_1, πού ἀντικαθιστᾶ ταυτό-



χρονα τούς τρεῖς ἄξονες τοῦ χώρου Ox_1, Ox_2, Ox_3. Ἡ Ol παριστάνει τόν (πραγματικό) ἄξονα τοῦ χρόνου. Στήν εἰκόνα αὐτή, ἕνα πεπερασμένο σῶμα παριστάνεται σέ δοσμένη στιγμή l ἀπό τό τμῆμα AB, καί ὁλόκληρη ἡ χωροχρονική του ὕπαρξη ἀπό μιά λουρίδα μέ ὅρια πού σ' ὅλο τό μῆκος τους ἔχουν ὡς πρός τόν ἄξονα l κλίση λιγότερο ἀπό 45°. Ἀνάμεσα στά χρονικά διαστήματα $l = l_1$ καί $l = l_2$ χωρίς ὅμως νά τά φτάνει, βρίσκεται τό γραμμοσκιασμένο κομμάτι τῆς λουρίδας. Αὐτό παριστάνει τήν χωροχρονική περιοχή μέσα στήν ὁποία τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο δρᾶ πάνω στό σῶμα ἤ στό ἠλεκτρικό φορτίο του, πού τοῦ διαβιβάζει ἔμμεσα τή δράση τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. Θά συγκεντρώσουμε τήν προσοχή μας στίς ἀλλαγές πού φέρνουν σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ ποσότητα τῆς κίνησης καί ἡ ἐνέργεια τοῦ σώματος.

Δεχόμαστε ὅτι οἱ ἀρχές τῆς ὁρμῆς καί τῆς ἐνέργειας ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν γιά τό ἐξεταζόμενο σῶμα. Ἡ ἀλλαγή τῆς ὁρμῆς, ἤ τῆς ἐνέργειας τοῦ σώματος ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z, ΔE, δίνονται ἀπό τίς σχέσεις

$$\Delta I_x = \int_{l_0}^{l_1} dl \int \mathfrak{k}_x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{i} \int K_1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Delta E = \int_{l_0}^{l} dl \int \lambda \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{i} \int \frac{1}{i} K_4 \, dx_1 dx_2 \, dx_3 \, dx_4.$$

Καθώς ὁ ὄγκος τῶν τεσσάρων διαστάσεων εἶναι ἀναλλοίωτος καί (K_1, K_2, K_3, K_4) σχηματίζουν ἕνα τετραδιάνυσμα, τά τετραδιάστατα ὁλοκληρώματα, πού πιάνουν ὁλόκληρη τή γραμμοσκιασμένη περιοχή, μετασχηματίζονται ὅπως τά τετραδιανύσματα. Τό ἴδιο καί τά ὁλοκληρώματα πού πιάνουν τήν περιοχή ἀπό l_1 ὡς l_2, γιατί τά μή γραμμοσκιασμένα τμήματα τῆς λουρίδας δέν συνεισφέρουν στά ὁλοκληρώματα. Ἀπό δῶ βγαίνει ὅτι τά ΔI_x, ΔI_y, ΔI_z, $i\Delta E$, τό σύνολο τῶν τεσσάρων μεγεθῶν.

$$I_x, I_y, I_z, iE$$

θά ἔχει ἀνυσματικό χαρακτῆρα. Τά τέσσερα αὐτά μεγέθη ἀνάγονται στήν κατάσταση τοῦ σώματος σέ δοσμένη στιγμή, π.χ. στή στιγμή $l=l_1$.

Αὐτό τό τετραδιάνυσμα μπορεῖ ἐπίσης νά ἐκφραστεῖ μέ τή μάζα m καί τήν ταχύτητα τοῦ σώματος (ἡ τελευταία θεωρεῖται σάν ὑλικό σημεῖο). Γιά νά φτιάξουμε αὐτή τή σχέση ἄς σημειώσουμε πρῶτα ὅτι τό

$$(38)\quad -ds^2=d\tau^2=-(dx^2_1+dx^2_2+dx^2_3)-dx^2_4=dl^2(1-q^2)$$

εἶναι ἀναλλοίωτο μέγεθος πού ἀνάγεται σ' ἕνα ἄπειρα μικρό τμῆμα τῆς τετραδιάστατης γραμμῆς πού παριστάνει τήν κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Εὔκολα μποροῦμε νά δείξουμε τή φυσική σημασία α τοῦ ἀναλλοίωτου μεγέθους dr. Πραγματικά, ἄν διαλέξουμε τόν ἄξονα τοῦ χρόνου ἔτσι πού νά συμπίπτει μέ τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτόμενης τοῦ δοσμένου τμήματος τῆς γραμμῆς, τό ὁποῖο ἐξετάζουμε, ἤ — ὅπως λέμε καμμιά φορά — ἄν ἀνάγουμε τό ὑλικό σημεῖο στήν κατάσταση τῆς ἠρεμίας, τότε dr=dl, δηλαδή μετριέται μ' ἕνα ρολόϊ πού μετράει δευτερόλεπτα (ρολόϊ–φῶς) πού εἶναι ἀκίνητο ὡς πρός τό ὑλικό σημεῖο καί πού συμπίπτει μέ αὐτό. Γι' αὐτό καί ὀνομάζουμε τό r καθαρό χρόνο τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Τό r εἶναι, λοιπόν, ἀντίθετα ἀπό τό dl, ἀναλλοίωτο καί πρακτικά ἴσο μέ τό dl γιά κινήσεις μέ μικρές ταχύτητες συγκριτικά μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Διαπιστώνουμε ἔτσι ὅτι τά

(39) $$u_\sigma = \frac{dx_\sigma}{dr}$$

ὅπως καί τά dx_ν ἔχουν ἀνυσματικό χαρακτῆρα. Ὀνομάζουμε τό (u_σ) ἄνυσμα τεσσάρων διαστάσεων τῆς ταχύτητας («τετραδιάνυσμα ταχύτητας»).

Σύμφωνα μέ τήν (38), οἱ συνιστῶσες του ὑπακούουν στή συνθήκη

(40) $$\Sigma u^2_\sigma = -1.$$

Βλέπουμε ὅτι αὐτό τό τετραδιάνυσμα, πού οἱ συνιστῶσες συμβολίζονται κανονικά μέ

(41) $$\frac{q_x}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_y}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{q_z}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{i}{\sqrt{1-q^2}},$$

εἶναι τό μόνο διάνυσμα πού μπορεῖ νά φτιαχτεῖ μέ βάση τίς συνιστῶσες τῆς ταχύτητας (ὅπως αὐτές ὁρίζονται στήν τριδιάστατη περιοχή)

$$q_x = \frac{dx}{dl}, \quad q_y = \frac{dy}{dl}, \quad q_z = \frac{dz}{dl}$$

τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Ἀπό δῶ προκύπτει ὅτι τό

(42) $$\left(m\frac{dx_\mu}{dr}\right)$$

πρέπει νά εἶναι ἐκεῖνο τό τετραδιάνυσμα, πού γιά τό ὑλικό σημεῖο, ἰσοδυναμεῖ μέ τό τετραδιάνυσμα τῆς ὁρμῆς καί τῆς ἐνέργειας τοῦ ὁποίου στήν ὕπαρξη δείξαμε πάρα πάνω. Βάζοντας τήν ἰσότητα τῶν συνιστωσῶν, παίρνουμε σέ τρισδιάστατη ἀπεικόνιση

$$(43) \qquad \left\{ \begin{array}{l} I_x = \dfrac{mq_x}{\sqrt{1-q^2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E = \dfrac{m}{\sqrt{1-q^2}}. \end{array} \right.$$

Συμπεραίνουμε, πράγματι, ὅτι οἱ συνιστῶσες τῆς ὁρμῆς συμφωνοῦν μέ τίς συνιστῶσες τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς, ὅταν ἡ ταχύτητα εἶναι πολύ μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ὅταν ὅμως πρόκειται γιά μεγάλες ταχύτητες, ἡ ὁρμή αὐξάνεται πιό γρήγορα ἀπ' ὅ,τι γραμμικά μέ τήν ταχύτητα καί γίνεται ἄπειρη γιά ταχύτητες πού πλησιάζουν τήν ταχύτητα τοῦ φωτός.

Ἄν, στή συνέχεια, ἐφαρμόσουμε τήν τελευταία ἀπό τίς σχέσεις (43) σ' ἕνα ὑλικό σημεῖο πού ἠρεμεῖ ($q=0$), διαπιστώνουμε ὅτι *ἡ ἐνέργεια Eo ἑνός ἠρεμῶντος σώματος εἶναι ἴση μέ τή μάζα του.* Ἄν εἴχαμε διαλέξει τό δευτερόλεπτο σάν μονάδα χρόνου, θά πρόκυπτε ἡ σχέση.

$$(44) \qquad Eo = mc^2.$$

Ἡ μάζα καί ἡ ἐνέργεια ἔχουν, συνεπῶς, τήν ἴδια φύση, δηλαδή δέν εἶναι παρά διαφορετικές ἐκδηλώσεις τοῦ ἴδιου πράγματος. Ἡ μάζα ἑνός σώματος δέν εἶναι σταθερά, ἀλλά ἀλλάζει μέ τίς ἀλλαγές τῆς ἐνέργειάς του (1). Ἡ τελευταία ἀπό τίς σχέσεις (43) μᾶς δείχνει ὅτι ἡ ἐνέργεια Ε γίνεται ἄπειρη ὅταν τό q πλησιάζει τήν ταχύτητα τοῦ φωτός 1. Ἀναπτύσσοντας τό Ε μέ τή χρήση τῶν δυνάμεων τοῦ·ϱ^2 ἔχουμε

$$E = m + \frac{m}{2} q^2 + \frac{3}{8} m q^4. \tag{45}$$

Ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ στήν κινητική ἐνέργεια τοῦ ὑλικοῦ σημείου στήν κλασσική μηχανική.

Οἱ ἐξισώσεις τῆς κίνησης τοῦ ὑλικοῦ σημείου. — Ἀπό τίς (43), παραγωγίζοντας ὡς πρός τό χρόνο l σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ὁρμῆς, παίρνουμε τόν νόμο τῆς κίνησης τοῦ ὑλικοῦ σημείου σέ τρισδιάστατη ἀνυσματική ἀπεικόνιση

$$\mathfrak{K} = \frac{d}{dl}\left(\frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-q^2}}\right) \tag{46}$$

Αὐτές οἱ ἐξισώσεις τῆς κίνησης, πού θεμελιώθηκαν ἤδη ἀπό τόν H.A. Lorentz γιά ἕνα ἠλεκτρόνιο μέ κίνηση σχεδόν στάσιμη, ἐπαληθεύτηκαν μέ μεγάλη ἀκρίβεια ἀπό ἔρευνες πάνω στίς ἀκτῖνες β ([2]).

Τανιστής τῆς ἐνέργειας τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. — Πρίν ἀπό τήν ἀνάπτυξη τῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας, ξέραμε ἤδη ὅτι ἡ ἀρχή τῆς ἐνέργειας καί τῆς ὁρμῆς μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μέ μορφή διαφορική γιά τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ἡ τετραδιάστατη ἔκφραση αὐτῶν τῶν ἀρχῶν μᾶς ὁδηγεῖ σέ μιά ἔννοια μέ μεγάλη σημασία γιά τήν πρόοδο τῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας, εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ τανιστῆ ἐνέργειας.

Ἄν ξεκινήσουμε ἀπό τό τετραδιάνυσμα τῆς πυκνότητας τῆς δύναμης

$$K_\mu = \varphi_{\mu\nu} J_\nu$$

καί, σύμφωνα μέ τίς ἐξισώσεις τοῦ πεδίου (32), ἀντικαταστήσουμε τό J_ν συναρτήσει τῶν πεδίων δύναμης $\varphi_{\mu\nu}$, παίρνουμε, μετά ἀπό ὁρισμένες τροποποιήσεις πού κάνουν χρήση τῶν ἐξισώσεων πεδίου (32) καί (33), τήν ἔκφραση

$$K_\mu = -\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \tag{47}$$

ὅπου,

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\varphi^2_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\alpha}\varphi_{\nu\alpha} \text{ (}^1\text{)}. \tag{48}$$

Ἡ φυσική σημασία προβάλλει καθαρά ἄν, ἀντί γιά τή (47), γράψουμε μέ νέους συμβολισμούς.

$$\left\{\begin{array}{l} k_x = -\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial (i b_x)}{\partial (i l)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ i\lambda = -\dfrac{\partial (i s_x)}{\partial x} - \dfrac{\partial (i s_y)}{\partial y} - \dfrac{\partial (i s_z)}{\partial z} - \dfrac{\partial (-\eta)}{\partial (i l)}, \end{array}\right. \tag{47α}$$

ἤ, ἀπαλείφοντας τούς φανταστικούς παράγοντες,

$$
\text{(47b)} \quad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{k}_x = -\dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} - \dfrac{\partial b_x}{\partial l}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda = -\dfrac{\partial \mathfrak{s}_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{s}_y}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial z} - \dfrac{\partial \eta}{\partial l}. \end{array} \right.
$$

Σύμφωνα μ' αὐτή τήν τελευταία ἀπεικόνιση, βλέπουμε ὅτι οἱ τρεῖς πρῶτες ἐξισώσεις ἔχουν τή σημασία τῆς ἀρχῆς τῆς ὁρμῆς, ὅπου $\varrho_{xx}\dots\varrho_{zz}$ δηλώνουν τίς δυνάμεις πίεσης τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου τοῦ Maxwell καί (b_x, b_y, b_z) τό διάνυσμα τῆς πυκνότητας τῆς ὁρμῆς τοῦ πεδίου. Ἡ τελευταία ἐξίσωση (47β) ἐκφράζει τήν ἀρχή τῆς ἐνέργειας, ὅπου s δηλώνει τό διάνυσμα τῆς ροῆς τῆς ἐνέργειας καί η τήν πυκνότητα ἐνέργειας τοῦ πεδίου. Πραγματικά, ἀπό τήν σχέση (48) καί ἀφοῦ εἰσαγάγουμε τίς πραγματικές συνιστῶσες τοῦ πεδίου, παίρνουμε τίς πολύ γνωστές ἐξισώσεις τῆς ἠλεκτροδυναμικῆς

$$
\text{(48α)} \quad \left| \begin{array}{lll} p_{xx} = -\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_x + \dfrac{1}{2}(\mathfrak{h}_x^2 + \mathfrak{h}_y^2 + \mathfrak{h}_z^2) & p_{xy} = -\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_y & p_{xz} = -\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_z \\ \qquad -\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_x + \dfrac{1}{2}(\mathfrak{e}_x^2 + \mathfrak{e}_y^2 + \mathfrak{e}_z^2), & \qquad -\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_y, & \qquad -\mathfrak{e}_x\mathfrak{e}_z \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, & & \\ b_x = \mathfrak{s}_x = \mathfrak{e}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{e}_z\mathfrak{h}_y, & & \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & & \\ \eta = +\dfrac{1}{2}(\mathfrak{e}_x^2 + \mathfrak{e}_y^2 + \mathfrak{e}_z^2 + \mathfrak{h}_x^2 + \mathfrak{h}_y^2 + \mathfrak{h}_z^2). & & \end{array} \right.
$$

Ἐξετάζοντας τήν (48), διαπιστώνουμε ὅτι ὁ τανιστής τῆς ἐνέργειας τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου εἶναι συμμετρικός. Στήν ἰδιότητά του αὐτή ὀφείλεται τό γεγονός ὅτι ἡ πυκνότητα τῆς ὁρμῆς καί ἡ ροή τῆς ἐνέργειας συμπίπτουν (σχέση ἀνάμεσα στήν ἐνέργεια καί τήν ἀδράνεια).

Συμπεραίνουμε, ἄρα, ὅτι ἡ πυκνότητα τῆς ἐνέργειας ἔχει τανιστικό χαρακτήρα. Αὐτό ἄμεσα ἔχει δειχτεῖ μόνο γιά τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο, πρέπει ὅμως νά ἔχει καθολική ἰσχύ. Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell καθορίζουν τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο, ἄν ἡ κατανομή τῶν φορτίων καί τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος εἶναι γνωστή. Οἱ νόμοι ὅμως πού διέπουν τή συμπεριφορά τοῦ ρεύματος καί τῶν φορτίων δέν μᾶς εἶναι γνωστοί. Ξέραμε πολύ καλά ὅτι ὁ ἠλεκτρισμός ἀποτελεῖται ἀπό στοιχειώδη σωματίδια (ἠλεκτρόνια, ἀρνητικό φορτίο, πυρήνες μέ θετικό φορτίο), δέν τό καταλαβαίνουμε ὅμως θεωρητικά. Δέν γνωρίζαμε τούς ἐνεργειακούς παράγοντες πού καθορίζουν τή συγκέντρωση τοῦ ἠλεκτρισμοῦ σέ σωματίδια μέ καθορισμένο μέγεθος καί φορτίο, καί ὅλες οἱ προσπάθειες πού κάνουμε γιά νά συμπληρώσουμε σ' αὐτό τό σημεῖο τή θεωρία ἔχουν γιά τήν ὥρα ἀποτύχει. Δέν γνωρίζουμε, κατά συνέπεια, τόν τανιστή τῆς ἐνέργειας γιά τά ἠλεκτρομαγνητικά πεδία — ἀκόμα κι ἄν μᾶς ἐπιτρέπεται νά παίρνουμε σάν βάση τίς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell — παρά μονάχα ἐπιφανειακά γιά τά στοιχειώδη σωματίδια ([1]). Σ' αὐτά τά σημεῖα, τά μόνα ὅπου μᾶς φαίνεται δυνατό νά ἔχουμε μιά ὁλοκληρωμένη ἔκφραση γιά τόν τανιστή τῆς ἐνέργειας, πρέπει σύμφωνα μέ τήν (47) νά ἔχουμε (47γ)

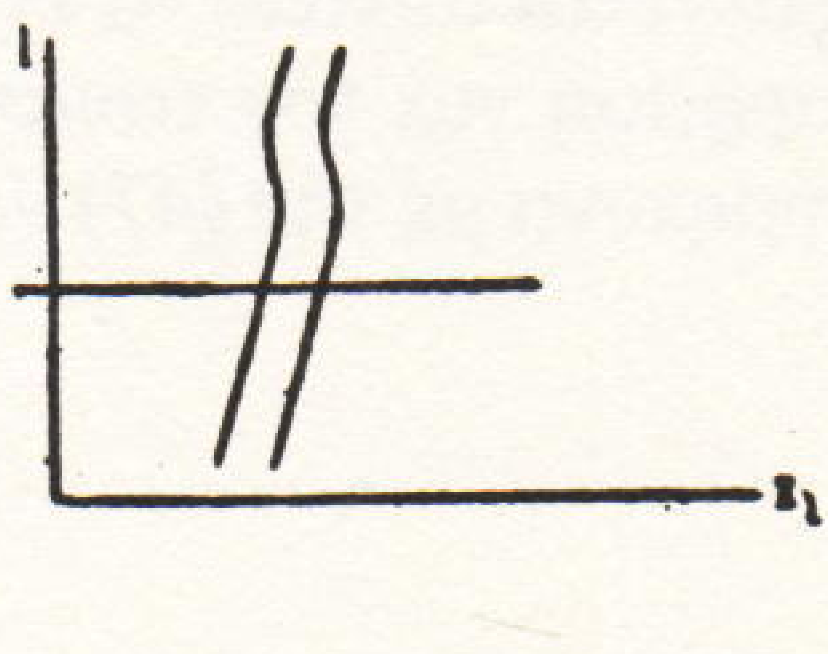
$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \qquad (47\gamma)$$

Γενική ἔκφραση τῶν ἀρχῶν τῆς διατήρησης. — Μόλις πού μποροῦμε νά ξεφύγουμε ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι καί σ' ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις ἡ κατανομή τῆς ἐνέργειας στό χῶρο δίνεται ἀπό ἕνα συμμετρικό τανιστή $T_{\mu\nu}$, καί ὅτι αὐτός ὁ πλήρης τανιστής τῆς ἐνεργείας ἀνταποκρίνεται ἀπόλυτα στή σχέση (47). Μ' αὐτή τήν ὑπόθεση πάντως, ἀνταποκρινόμαστε στήν ἀρχή τῆς ἐνέργειας μέ τήν μορφή τοῦ ὁλοκληρώματος, ὅπως θά ἀποδείξουμε.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα κλειστό καί πεπερασμένο μέσα στό χῶρο σύστημα, πού μπορεῖ νά παρασταθεῖ τετραδιάστατα μέ ἕνα σωλῆνα τοῦ χωροχρόνου στό ἐξωτερικό τοῦ ὁποίου οἱ $T_{\mu\nu}$ χάνονται. Ὁλοκληρώνουμε τήν ἐξίσωση (47α) στό χῶρο πού παίρνουμε μέ τομή μέσα στό σωλῆνα σέ δοσμένη στιγμή καθώς τά ὁλοκληρώματα τά σχετικά μέ $\frac{\partial T_{\mu 1}}{\partial x_1}$ $\left(\text{ou } \frac{\partial T_{\mu 2}}{\partial x_2} \text{ et } \frac{\partial T_{\mu 3}}{\partial x_3}\right)$ σβήνουν στά ὅρια τῆς ὁλοκλήρωσης, ἐξ αἰτίας τῆς ἐξαφάνισης τῶν $T_{\mu\nu}$, ἔχουμε

$$(49) \qquad \frac{\partial}{\partial l}\left\{\int T_{\mu 4}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right\} = 0.$$

Τά ἄγγιστρα περιέχουν τήν ἀπεικόνιση τῶν συνιστωσῶν τῆς ὁρμῆς πολλαπλασιασμένων ἐπί τό i ὁλόκληρου τοῦ συστήματος, ἤ ἐπί τό i τῆς ἐνέργειας ὁλόκληρου τοῦ συστήματος (ἀρνητικά



παρμένες) ὥστε ἡ (49) νά ἐκφράζει τίς ἀρχές διατήρησης ὑπό τήν μορφή ὁλοκληρώματος. Οἱ σκέψεις πού ἀκολουθοῦν θά δείξουν ὅτι ἡ τέτοια θεώρηση τῆς ἐνέργειας καί τῆς ἀρχῆς τῆς διατήρησης της εἶναι πέρα γιά πέρα σωστή.

Φαινομενολογική παράσταση τοῦ τανιστῆ τῆς ἐνέργειας τῆς ὕλης. Ὑδροδυναμικές ἐξισώσεις. — Ξέρουμε σήμερα ὅτι ἡ ὕλη ἀποτελεῖται ἀπό στοιχειώδη σωματίδια, δέν γνωρίζουμε ὅμως τούς νόμους τοῦ πεδίου στούς ὁποίους ὀφείλεται ἡ τέτοια σύσταση τῆς ὕλης. Ἔτσι, εἴμαστε ὑποχρεωμένοι, ὅταν καταπιανόμαστε μέ προβλήματα μηχανικῆς, νά ἀρκεστοῦμε σέ μιά περιγραφή τῆς ὕλης ὄχι καί πολύ ἀκριβῆ, ἀντίστοιχη μέ τήν περιγραφή πού χρησιμοποιεῖται στήν κλασσική μηχανική. Ἡ πυκνότητα σ καί οἱ ὑδροδυναμικές δυνάμεις πίεσης (δυνάμεις ἐπιφάνειας) εἶναι βασικές ἔννοιες πάνω στίς ὁποῖες βασίζεται μιά τέτοια περιγραφή.

Ἔστω σ_0 ἡ πυκνότητα τῆς μάζας τῆς ὕλης σ' ἕνα τόπο, μετρημένη σ' ἕνα ἀδρανειακό σύστημα ὡς πρός τό ὁποῖο αὐτή ἡ ὕλη ἠρεμεῖ τή δοσμένη στιγμή. Ἡ σ_0 εἶναι μέγεθος ἀναλλοίωτο. Ἄς φανταστοῦμε μιά ὕλη μέ τυχαία κίνηση, χωρίς νά ὑπολογίζουμε τίς δυνάμεις ἐπιφάνειας (π.χ. ἀγνοώντας, στήν περίπτωση σκόνης στό κενό, τό μέγεθος τῶν κόκκων τῆς σκόνης καί τήν ἐπίδραση τῆς θερμικῆς ἀκτινοβολίας), ὁ τανιστής τῆς ἐνέργειας τότε θά ἐξαρτᾶται, ἐκτός ἀπό τή σ_0, μόνο ἀπό τίς συνιστῶσες τῆς ταχύτητας u_ν. Ἔχουμε τόν τανιστικό χαρακτήρα βάζοντας

$$T_{\mu\nu} = \sigma_0 u_\mu u_\nu, \tag{50}$$

ὅπου οἱ u_μ δίνονται ἀπό τίς (41) σέ τριδιάστατη ἀπεικόνιση. Πράγματι, βγαίνει ἀπό τήν (50), γιά $q=o$, $T_{44}= -\sigma_0$ (ἴση μέ τήν πυκνότητα τῆς ἐνέργειας μέ ἀλλαγμένο πρόσημο), πράγμα πού περιμένουμε, σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας ἀνάμεσα στή μάζα καί τήν ἐνέργεια καί σύμφωνα μέ τή φυσική ἐξήγηση γιά τόν τανιστή τῆς ἐνέργειας, πού δώσαμε πιό πάνω. Ἄν μιά ἐξωτερική δράση ἀσκεῖται συγκεντρωμένα στήν ὕλη, δράση στόν ὄγκο καί ὄχι στήν ἐπιφάνεια (τετραδιάστατο διάνυσμα K_μ), σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἐνέργειας – ὁρμῆς, πρέπει νά ἰσχύει

$$K_\mu = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}.$$

Θά δείξουμε ὅτι αὐτή ἡ ἐξίσωση ὁδηγεῖ τελικά στόν νόμο τῆς κίνησης τοῦ ὑλικοῦ σημείου, πού πήραμε πιό πάνω. Ἄς φανταστοῦμε ὅτι ἡ ὕλη ἐκτείνεται σέ ἄπειρα μικρή ἔκταση μέσα στό χῶρο, δηλαδή σάν ἴνα μέ τέσσερις διαστάσεις, τότε, ὁλοκληρώνοντας σ' ἕνα τμῆμα τῆς ἴνας ὡς πρός τίς συντεταγμένες τοῦ χώρου x_1, x_2, x_3, θά ἔχουμε

$$\int K_1\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int \frac{\partial T_{1\nu}}{\partial x_\nu}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$
$$= -i\frac{d}{dl}\left\{\int \sigma_0 \frac{dx_1}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right\}.$$

Ἄρα, τό $\int' dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ εἶναι μέγεθος ἀναλλοίωτο, καί, ἑπομένως, καί τό $\int \sigma_0 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. Θά ὑπολογίσουμε αὐτό τό ὁλοκλήρωμα, ἀπό τή μιά, ἀπό τήν ἄποψη τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος πού διαλέξαμε, καί ἀπό τήν ἄλλη, ἀπό τήν ἄποψη ἑνός συστήματος ὡς πρός τό ὁποῖο ἡ θεωρούμενη ὕλη ἔχει ταχύτητα μηδέν. Ἡ ὁλοκλήρωση πρέπει νά ἐκταθῆ κατά μῆκος ἑνός κομματιοῦ τῆς ἴνας, στήν ἐγκάρσια τομή τῆς ὁποίας, ἡ σ_0 μένει σταθερή. Ἄν dV ἤ dV_0 εἶναι ὁ ὄγκος τῆς ἴνας στό χῶρο, ὅπως τόν βλέπουμε ἀπό τά δύο συστήματα, ἔχουμε

$$\int \sigma_0 \, dV \, dl = \int \sigma_0 \, dV_0 \, d\tau,$$

καί, ἄρα, ἐπίσης

$$\int \sigma_0 \, dV = \int \sigma_0 \, dV_0 \frac{d\tau}{dl} = \int dm \, i \frac{d\tau}{dx_4}.$$

Στό πάρα πάνω ὁλοκλήρωμα ἄν βάλουμε τό δεύτερο μέλος στή θέση τοῦ πρώτου καί τόν παράγοντα $\frac{dx_1}{d\tau}$ μπρός ἀπό τό σημεῖο τῆς ὁλοκλήρωσης, ἔχουμε

$$\mathfrak{K}_x = \frac{d}{dl}\left(m \frac{dx_1}{d\tau}\right) = \frac{d}{dl}\left(\frac{m q_x}{\sqrt{1-q^2}}\right).$$

Ἀπό δῶ, βλέπουμε, ὅτι ἡ γενικευμένη ἔκφραση τοῦ τανιστῆ τῆς ἐνέργειας συμφωνεῖ μέ τά ἀποτελέσματα πού πήραμε πιό πάνω.

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ Euler *γιά τά ἰδανικά ὑγρά.* — Γιά νά γνωρίσουμε ἀκριβέστερα τήν κατάσταση τῆς ἀληθινῆς ὕλης, πρέπει στόν τανιστή τῆς ἐνέργειας νά προσθέσουμε ἕναν ὅρο, πού ἀντιστοιχεῖ στίς δυνάμεις ἐπιφάνειας. Ἡ πιό ἁπλή περίπτωση εἶναι ἡ περίπτωση ἑνός μή ἰξώδους ὑγροῦ μέσα στό ὁποῖο οἱ δυνάμεις ἐπιφάνειας καθορίζονται ἀπό τό βαθμωτό μέγεθος ϱ. Οἱ ἐφαπτομενικές δυνάμεις ἐπιφάνειας ϱ_{xy}, κ.τ.λ. σ' αὐτήν

τήν περίπτωση ἐξαφανίζονται, ὥστε τό στοιχεῖο πού θά προσθέσουμε στόν τανιστή τῆς ἐνέργειας πρέπει νά εἶναι τῆς μορφῆς $\rho\delta_{\mu\nu}$. Πρέπει, ἄρα, νά βάλουμε

(51) $$T_{\mu\nu} = \sigma u_\mu u_\nu + p\,\delta_{\mu\nu}.$$

Ἡ πυκνότητα τῆς ὕλης σέ κατάσταση ἠρεμίας ἤ ἐνέργειας, δέν εἶναι, σ' αὐτή τήν περίπτωση, σ, ἀλλά σ−ρ. Γιαυτό, στήν περίπτωση τῆς ἠρεμίας, ἔχουμε

$$-T_{44} = \sigma \frac{dx_4}{d\tau}\frac{dx_4}{d\tau} - p\,\delta_{44} = \sigma - p$$

Ὅταν οἱ συγκεντρωμένες δράσεις (δράσεις στόν ὄγκο) λείπουν, ἔχουμε

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \sigma u_\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + u_\mu \frac{\partial(\sigma u_\nu)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αὐτή τήν ἐξίσωση ἐπί u_μ $\left(= \frac{dx_\mu}{\theta\tau}\right)$ καί ἀθροίζοντας ὡς πρός μ, ἀναφερόμενοι στή σχέση (40) παίρνουμε

(52) $$-\frac{\partial(\sigma u_\nu)}{dx_\nu} + \frac{dp}{d\tau} = 0,$$

ὅπου βάζουμε $-\frac{\partial p}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dp}{d\tau}\cdot$ – . Εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς, δέν διαφέρει πάρα μόνο μέ τόν $\frac{d\rho}{d\tau}$ (πού πρακτικά εἶναι ἄπειρα μικρός). Ὡς πρός τήν (52), οἱ ἐξισώσεις διατήρησης παίρνουν τή μορφή

$$(53) \qquad \sigma \frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu \frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial p}{\partial x_\mu} = 0.$$

Γιά τούς τρεῖς πρώτους δεῖκτες οἱ ἐξισώσεις ἀντιστοιχοῦν προφανῶς στίς ἐξισώσεις τοῦ Euler. Τό ὅτι οἱ ἐξισώσεις (52) καί (53) ἀντιστοιχοῦν. σέ πρώτη προσέγγιση. στίς ὑδροδυναμικές ἐξισώσεις τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς. εἶναι μιά ἀκόμα ἀπόδειξη ὅτι τό γενικό ἀξίωμα τῆς ἀρχῆς τῆς ἐνέργειας εἶναι σωστό. Ἡ πυκνότητα τῆς μάζας ἤ τῆς ἐνέργειας ἔχει τανιστικό χαρακτήρα (καί εἰδικότερα χαρακτήρα συμμετρικοῦ τανιστῆ).

Οἱ ἀξιότιμοι καθηγητές τήν ὥρα πού προσπαθοῦν νά λύσουν ἕνα πρόβλημα πού τούς ἔθεσε ὁ Αϊνστάϊν

(Γελοιογραφία τοῦ 1950)

ΤΡΙΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΒΑΣΙΚΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΙ (CONSIDERATIONS)

Οἱ προηγούμενες σχέσεις βασίζονται στήν ὑπόθεση ὅτι τά ἀδρανειακά συστήματα εἶναι ἰσοδύναμα γιά τή φυσική περιγραφή, ἀλλά ὅτι παρουσιάζουν ἕνα πλεονέκτημα, γιά τή διατύπωση τῶν νόμων τῆς φύσης, στό θέμα τῶν χώρων ἀναφορᾶς πού συνδέονται μέ ἄλλες καταστάσεις κίνησης. Μετά ἀπ' ὅ,τι εἴπαμε, δέν εἶναι δυνατό νά παραδεχτοῦμε ὅτι ἡ ἰδιότητα αὐτή ὁρισμένων καταστάσεων κίνησης ἔχει τήν αἰτία της, εἴτε στά σώματα πού ἀντιλαμβανόμαστε μέ τίς αἰσθήσεις μας, εἴτε στήν ἔννοια τῆς κίνησης. Πρέπει νά τή θεωροῦμε σάν ἐσωτερική ἰδιότητα τοῦ χωροχρονικοῦ συνεχοῦς, σάν ἰδιότητα πού δέν προϋποτίθεται ἀπό κάποιο ἄλλο πρᾶγμα. Εἶναι, κύρια, ἡ ἀρχή τῆς ἀδράνειας πού μᾶς πιέζει νά ἀποδόσουμε ἀντικειμενικές φυσικές ἰδιότητες στό χωροχρονικό συνεχές. Ἄν, ἀπό νευτονική ἄποψη, ἦταν ἐντελῶς φυσικό νά διατυπώσουμε τίς δύο ἀρχές: «tempus est obsolutum, spatium est absolutum» (σ.μ. «ὁ χρόνος εἶναι ἀπόλυτος, ὁ χῶρος εἶναι ἀπόλυτος»), εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά ποῦμε, ἐφ' ὅσον υἱοθετοῦμε τήν ἄποψη τῆς εἰδικῆς σχετικότητας, «continuum spatis et temporis est absolutum» (σ.μ. «τό συνεχές τοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου εἶναι ἀπόλυτο»). Ἐδῶ «ἀπόλυτο» δέν δηλώνει μόνο κάτι τό φυσικά ἀληθινό, ἀλλά «κάτι μέ αὐτόνομες φυσικές ἰδιότητες, ἱκανό νά περικλείσει φυσικούς ὁρισμούς καί πού παρ' ὅλα αὐτά δέν εἶναι ὁρισμένο».

Ὅσο κοιτάζαμε τόν νόμο τῆς ἀδράνειας σάν τήν βάση τῆς φυσικῆς, αὐτή ἡ ἄποψη ἦταν ἀσφαλῶς καί ἡ μόνη παραδεχτή. Ἀλλά δύο σοβαροί λόγοι ἀντιτίθενταν σ' αὐτή τή συνηθισμένη θεώρηση. Αὐτή ἡ ἄποψη ἀντιτίθεται, κατά πρῶτο λόγο, στήν ἐπιστημονική συλλογιστική τῆς παραδοχῆς ἑνός ἀντικειμένου (δηλαδή τοῦ χωρο–χρονικοῦ συνεχοῦς) πού ἐξασκεῖ μιά δράση ἀλλά πού δέν ὑφίσταται καμιά δράση. Αὐτός εἶναι ὁ λόγος πού ὁδήγησε τόν E. Mach νά δοκιμάσει νά βγάλει ἀπό τό σύστημα τῆς μηχανικῆς τόν χῶρο σάν αἰτία. Κατ' αὐτόν, ἕνα ξεχωριστό ὑλικό σημεῖο δέν θἄπρεπε νά κινεῖται χωρίς νά ἐπιταχύνεται *ὡς πρός τό χῶρο, ἀλλά θά μποροῦσε νά κάνει αὐτή τήν κίνηση ὡς πρός τό σύνολο ὅλων τῶν μαζῶν στό σύμπαν*. Ἀπό δῶ, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ αἰτιατή σειρά τῶν μηχανικῶν γεγονότων πρέπει νά εἶναι κλειστή, σέ ἀντίθεση μέ τή μηχανική τοῦ Newton καί τοῦ Γαλλιλαίου. Γιά νά πραγματοποιήσουμε αὐτή τήν ἰδέα στά πλαίσια τῆς μοντέρνας θεωρίας τῆς δράσης βῆμα μέ βῆμα, ἦταν ἀσφαλῶς ἀναγκαῖο νά θεωρήσουμε τήν ἰδιότητα τοῦ χωρο–χρονικοῦ συνεχοῦς, πού καθορίζει τήν ἀδράνεια, σάν ἰδιότητα τοῦ πεδίου τοῦ χώρου, ἀνάλογα μέ τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο. Ἀπ' αὐτή τήν ἄποψη, οἱ ἔννοιες τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς δέν μᾶς προσφέρουν τά ἀπαραίτητα μέσα ἔκφρασης. Γι' αὐτό καί τό πέρασμα τοῦ Mach, πρός στιγμήν φαινόταν ἀποτυχημένο. Σ' αὐτό τό σημεῖο θά ἐπανέλθουμε ἀργότερα. Κατά δεύτερο λόγο, ἡ κλασσική μηχανική ἔχει ἕνα κενό πού μᾶς ἀναγκάζει νά ἐντείνουμε ὁπωσδήποτε τήν ἀρχή τῆς σχετικότητας σέ χώρους ἀναφορᾶς πού ἐκτελοῦν ἀνομοιόμορφες κινήσεις τά μέν πρός τά δέ.

Ἡ σχέση ἀνάμεσα στίς μάζες δύο σωμάτων στήν οὐσία ὁρίζεται στή μηχανική μέ δύο τρόπους ἐντελῶς διαφορετικούς: ἀπό τή μιά μεριά, σάν ἀντίστροφα ἀνάλογες πρός τίς ἐπιταχύνσεις πού τούς προσδίνουν ἴσες δυνάμεις (μάζα ἠρεμίας), καί ἀπό τήν ἄλλη, σάν ἀνάλογες στίς δυνάμεις πού δροῦν ἐπάνω τους μέσα στό ἴδιο πεδίο βαρύτητας (βάρος) (masse pesante). Τό ὅτι ἡ μάζα ἠρεμίας καί τό βάρος εἶναι ἴσα ἔχει ἀποδειχτεῖ πειραματικά μέ μεγάλη ἀκρίβεια (πείραμα τοῦ Eötvös). Καί τοῦτο παρ' ὅλο ὅτι ἡ μάζα ἠρεμίας καί τό βάρος μέ ἐντελῶς διαφορετικό τρόπο. Ὅμως γιά τήν ἰσότητα τῆς μάζας ἠρεμίας καί τοῦ βάρους καί τοῦ βάρους (masse pesante) ἡ κλασσική μηχανική δέν μπορεῖ νά δώσει ἐξήγηση. Εἶναι ὅμως φανερό ὅτι ἡ ἐπιστήμη δέν μπορεῖ νά ἐξηγήσει ἱκανοποιητικά παρόμοιες ἀριθμητικές ἰσότητες παρά μόνο ἄν ἀποδείξει ὅτι τά μεγέθη εἶναι ἴδια ὡς πρός τή φύση τους.

ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Ὁ πάρα πάνω σκοπός μπορεῖ τελικά νά ἐκπληρωθεῖ χάρις στή διεύρυνση τῆς ἀρχῆς τῆς σχετικότητας. Γιά νά τό ἀποδείξουμε θά περάσουμε σέ μιά σειρά συλλογισμῶν. Βλέπουμε, κατ' ἀρχή, ὅτι ἡ ἀρχή τῆς ἰσότητας ἀνάμεσα στή μάζα ἠρεμίας καί τό βάρος ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἀρχή, σύμφωνα μέ τήν ὁποία ἡ ἐπιτάχυνση, πού ἕνα πεδίο βαρύτητας προσδίνει σ' ἕνα σῶμα, δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ σώματος. Ἡ ἐξίσωση τῆς νευτόνιας κίνησης σ' ἕνα πεδίο βαρύτητας εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

(Μάζα ἠρεμίας) × (Ἐπιτάχυνση)
= (Ἔνταση τοῦ πεδίου βαρύτητας) × (Βάρος).

Μονάχα στήν περίπτωση πού οἱ τιμές τῆς μάζας ἠρεμίας καί τοῦ βάρους τῶν δύο μαζῶν τοῦ σώματος εἶναι ἀριθμητικά ἴσες, ἡ ἐπιτάχυνση εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή φύση τοῦ σώματος. Ἔστω κ ἕνα ἀδρανειακό σύστημα. Ὅταν ὑπάρχουν μάζες σέ ἀρκετή ἀπόσταση μεταξύ τους καί ὡς πρός τρίτες μάζες, αὐτές δέν ἐπιταχύνονται ὡς πρός τό κ. Ἄς δοῦμε τώρα τί κάνουν αὐτές οἱ μάζες ὡς πρός ἕνα σύστημα συντεταγμένων κ΄, πού ἐπιταχύνεται μέ σταθερή ἐπιτάχυνση ὡς πρός τό κ. Ὡς πρός τό κ΄, ὅλες οἱ μάζες δέχονται παράλληλα τήν ἴδια ἐπιτάχυνση, καί ἄρα ὡς πρός τό κ΄, συμπεριφέρονται σάν νά ὑπῆρχε ἕνα πεδίο βαρύτητας καί τό κ΄ νά μήν ἐπιταχυνόταν. Ἐκτός ἀπό τό πρόβλημα τῆς «αἰτίας» ἑνός τέτοιου πεδίου βαρύτητας, πού θά μᾶς ἀπασχολήσει παρά κάτω τίποτε δέν μᾶς ἐμποδίζει νά δεχτοῦμε σάν πραγματικό τό πεδίο αὐτό. Μέ ἄλλα λόγια ἔτσι θεωροῦμε ὅτι ἡ ἀντίληψη, πού ὑποστηρίζει, ὅτι τό κ΄ εἶναι σέ «ἠρεμία» καί ὅτι ὑπάρχει πεδίο βαρύτητας, εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀντίληψη, πού ὑποστηρίζει, ὅτι μόνο τό κ εἶναι «κανονικό» σύστημα συντεταγμένων καί ὅτι τό πεδίο βαρύτητας δέν ὑπάρχει.

Ἡ ὑπόθεση ὅτι αὐτή ἡ ἀντίληψη μπορεῖ κάλιστα νά ἀποδειχτεῖ φυσική ὀνομάζεται «ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας». Αὐτό γίνεται ἀκόμη πιό φανερό ἀπό τήν ἀρχή τῆς ἰσότητας ἀνάμεσα στή μάζα ἠρεμίας καί τό βάρος (masse pesante) ἑνός σώματος καί δηλώνει τήν διεύρυνση τῆς ἀρχῆς τῆς σχετικότητας στά συστήματα συντεταγμένων πού ἐκτελοῦν τυχαῖα (σ.μ. καί ὄχι ὁμαλή) κίνηση τά μέν πρός τά δέ. Καί, πραγματικά, χάρη σ' αὐτή τήν ἀντίληψη, φτάνουμε στό συμπέρασμα ὅτι ἡ ἀδράνεια καί ἡ βαρύτητα (pesanteur) ἔχουν τήν ἴδια φύση. Γιατί, ἀνάλογα μέ τό πρίσμα κάτω ἀπό τό ὁποῖο βλέπουμε, οἱ ἴδιες μάζες μοιάζουν, νά δέχονται πότε τήν ἐπίδραση μόνο τῆς ἀδράνειας (ὅταν τίς βλέπουμε ἀπό τό κ), καί πότε τή συνδυασμένη ἐπίδραση τῆς ἀδράνειας καί τοῦ βάρους (ὅταν τίς βλέπουμε ἀπό τό κ΄). Ἡ δυνατότητα νά ἀναγάγουμε τήν ἀριθμητική ἰσότητα ἀδράνειας καί βαρύτητας (pasanteur)σέ ταυτότητα ὡς πρός τή φύση δίνει, κατά τή γνώμη μου, στή Θεωρία τῆς σχετικότητας ἕνα τέτοιο πλεονέκτημα ἔναντι τῆς ἀντίληψης τῆς κλασσικῆς μηχανικῆς, πού μπρός σέ τέτοια πρόοδο οἱ δυσκολίες δέν μετρᾶνε.

Ἀλλά τί εἶναι ἐκεῖνο πού μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀπορρίψουμε τήν ἀρχή τῆς ἀδράνειας, πού βασίζεται στή ἀδιάσειστη παρατήρηση ὅτι τά ἀδρανειακά συστήματα διακρίνονται ἀπό κάθε ἄλλο σύστημα συντεταγμένων; Τό ἀδύνατο σημεῖο τῆς ἀρχῆς τῆς ἀδράνειας εἶναι ὅτι γυρίζει σ' ἕνα φαῦλο κύκλο. Λέμε, ὅτι μιά μάζα μπορεῖ νά κινεῖται χωρίς νά ἐπιταχύνεται, ἄν βρίσκεται ἀρκετά μακριά ἀπό κάθε ἄλλο σῶμα καί, ἀντίστροφα, καταλαβαίνουμε ὅτι ἡ μάζα αὐτή βρίσκεται ἀρκετά μακριά ἀπό κάθε ἄλλο σῶμα μόνο ἄν κινεῖται χωρίς ἐπιτάχυνση. Καί ἐξ' ἄλλου, γεννιέται τό ἐρώτημα: ὑπάρχουν ἀδρανειακά συστήματα γιά ἐκτεταμένα τμήματα τοῦ χωρο–χρονικοῦ συνεχοῦς ἤ καί γιά ὁλόκληρο τό σύμπαν; Πρέπει νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ ἀρχή τῆς ἀδράνειας ἐπιβεβαιώνεται κατά μεγάλη προσέγγιση γιά τό χῶρο τοῦ ἡλιακοῦ μας συστήματος, παραβλέποντας τίς ἐπιπλοκές ἐξ' αἰτίας τοῦ ἥλιου καί τῶν πλανητῶν. Καί γιά νά ἀκριβολογήσουμε, μποροῦμε νά ποῦμε: ὑπάρχουν ὡς πρός χώρους ἀναφορᾶς κατάλληλα ἐκλεγμένους περιοχές πεπερασμένες, ὅπου ὅπου τά ὑλικά σημεῖα κινοῦνται χωρίς ἐπιτάχυνση καί ὅπου οἱ νόμοι τῆς εἰδικῆς σχετικότητας πού ἀναπτύχτηκαν πάρα πάνω, ἐφαρμόζονται μέ ἀξιοσημείωτη ἀκρίβεια. Αὐτές τίς περιοχές θά τίς ὀνομάσουμε «περιοχές τοῦ Γαλλιλαίου». Θά θέλαμε νά ἀρχίσουμε μέ τήν ἐξέταση αὐτῶν τῶν τελευταίων θεωρώντας τες σάν εἰδική περίπτωση μέ γνωστές ἰδιότητες.

Η ΑΝΕΠΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἡ ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας ἀπαιτεῖ ὅτι, ὅταν ἐξετάζουμε τίς περιοχές τοῦ Γαλλιλαίου, πρέπει νά παραδεχτοῦμε ὅτι καί συστήματα πού δέν εἶναι ἀδρανειακά πρέπει ἐπίσης νά θεωροῦνται ἰσάξια. Δηλαδή μιλᾶμε ἐδῶ γιά συστήματα συντεταγμένων πού, σχετικά μέ τά ἀδρανειακά συστήματα, μποροῦν νά ἐπιταχυνθοῦν ἤ νά ἐκτελέσουν στροφική κίνηση. Ἄν, πάντως, θέλουμε νά λύσουμε ὁριστικά τό ἐπίμαχο ζήτημα πού ἀφορᾶ τούς ἀντικειμενικούς λόγους γιά τούς ὁποίους προτιμάμε ορισμένα συστήματα συντεταγμένων, θά ὑποχρεωθοῦμε νά παραδεχτοῦμε ὅτι ὑπάρχουν συστήματα συντεταγμένων πού κάνουν τυχαία κίνηση. Γιά τή ριζική ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος, ἐρχόμαστε σέ ἀντίθεση μέ τή φυσική ἐξήγηση τοῦ χώρου καί τοῦ χρόνου πού, στήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας, πάντως, μᾶς ὁδήγησε στόν σκοπό πού ἐπιθυμούσαμε.

Ἔστω κ΄ ἕνα σύστημα συντεταγμένων τοῦ ὁποίου ὁ ἄξονας z΄ συμπίπτει μέ τόν ἄξονα z τοῦ κ καί πού γυρνάει γύρα ἀπ' αὐτόν τόν ἄξονα μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Μπορεῖ, ἄκαμπτα σώματα, ἀκίνητα ὡς πρός τό κ΄, νά διαταχτοῦν σύμφωνα μέ τούς νόμους τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας; Οἱ νόμοι τῆς θέσης τῶν ἄκαμπτων σωμάτων ὅπως, ἐξ ἄλλου, καί οἱ νόμοι τῆς φύσης, δέν μᾶς εἶναι γνωστοί ἀπ' εὐθείας ὡς πρός τό κ΄, δοσμένου ὅτι τό τελευταῖο δέν εἶναι ἀδρανειακό σύστημα. Ὅμως αὐτοί οἱ νόμοι μᾶς εἶναι γνωστοί ὡς πρός τό ἀδρανειακό σύστημα κ, καί γι' αὐτό τό λόγο τούς κρίνουμε ὡς πρός τό κ. Ἄς φανταστοῦμε ὅτι στό ἐπίπεδο x΄y΄ τοῦ κ΄ σχεδιάζουμε ἕνα κύκλο γύρω ἀπ' τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων, καθώς ἐπίσης καί μιά διάμετρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου. Ἄς φανταστοῦμε, ἀκόμη, ἕνα μεγάλο ἀριθμό ἀπό μικρές ἄκαμπτες, βέργες ἴδιου μεγέθους. Ὑποθέτουμε ὅτι αὐτές βρίσκονται κατά μῆκος τῆς περιφέρειας καί τῆς διαμέτρου καί ὅτι εἶναι ἀκίνητες ὡς πρός κ΄. Ἄν ρ εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν βεργῶν στήν περιφέρεια, D ὁ ἀριθμός τῶν βεργῶν στή διάμετρο, ἔχουμε, ἐφ' ὅσον τό κ΄ δέν ἐκτελεῖ στροφική κίνηση ὡς πρός τό κ,

$$\frac{P}{D} = \pi.$$

Τά πράγματα ὅμως εἶναι τελείως διαφορετικά ἄν τό κ΄ κάνει στροφική κίνηση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι, σέ δοσμένη στιγμή t τοῦ κ, τό μῆκος ὅλων τῶν βεργῶν εἶναι καθορισμένο ὡς πρός τό κ. Μέσα στό κ, οἱ βέργες πού εἶναι στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου ὑφίστανται τήν συστολή τοῦ Lorentz, ἐκεῖνες ὅμως πού βρίσκονται στή διάμετρο δέν ὑφίστανται συστολή [ὅσο ἀφορᾶ τό μῆκος τους ([1])].

$$\frac{P}{D} > \pi.$$

Ἀπό δῶ βγαίνει ὅτι οἱ νόμοι τῆς θέσης τῶν ἄκαμπτων σωμάτων ὡς πρός τό κ΄ δέν συμφωνοῦν μέ τούς νόμους τῆς θέσης τῶν σωμάτων σύμφωνα μέ τήν εὐκλείδια γεωμετρία. Ἄν, ἐπί πλέον, βάζαμε στήν περιφέρεια καί στό κέντρο ἀντίστοιχα, ἀπό ἕνα ρολόϊ (ἴδιας κατασκευῆς καί στρεφόμενο μαζί μέ τό κ΄), τό ρολόϊ τῆς περιφέρειας θά προχωράει πιό ἀργά ἀπ' τό ρολόϊ τοῦ κέντρου, ὅταν τό κοιτάζουμε ἀπό τό κ. Τό ἴδιο πρᾶγμα θά συμβεῖ ἄν παρατηροῦμε ἀπό τό κ΄, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι σ' αὐτό δέν θά ὁρίσουμε τό χρόνο μέ ἐντελῶς τεχνητό τρόπο (δηλαδή μέ τέτοιο τρόπο πού οἱ νόμοι πού θά ἰσχύουν ὡς πρός τό κ΄ νά ἐξαρτῶνται κατ' εὐθεῖαν ἀπό τόν χρόνο). Κατά συνέπεια, δέν μποροῦμε νά ὁρίσουμε τόν χῶρο καί τόν χρόνο ὡς πρός τό κ΄ ὅπως τό κάναμε στήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας ὡς πρός τά ἀδρανειακά συστήματα. Σύμφωνα, ὅμως, μέ τήν ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας, τό κ΄ μπορεῖ ἐπίσης νά θεωρηθεῖ σάν σύστημα «πού ἠρεμεῖ», ὡς πρός τό ὁποῖο ἐκδηλώνεται ἕνα πεδίο βαρύτητας (πεδία φυγόκεντρων δυνάμεων καί δυνάμεων Coriolis). Ἄρα, φτάνουμε στό συμπέρασμα ὅτι τό πεδίο βαρύτητας ἐξασκεῖ μιά ἐπίδραση στό χωρο–χρονικό συνεχές ἤ, τουλάχιστον, ὅτι καθορίζει τούς μετρικούς κανόνες του. Ἄν τό ἀντικείμενο τῆς γεωμετρίας εἶναι νά ἐκφράσει τούς νόμους τῆς θέσης τῶν στερεῶν σωμάτων (θεωρώντας τα ἰδεώδη), παύει νά εἶναι εὐκλείδια στήν περίπτωση πού ἐκδηλώνονται πεδία βαρύτητας.

Συμβαίνει ἐδῶ κάτι ἀνάλογο μέ ὅτι προκύπτει ἀπό τήν (δυσδιάστατη) περιγραφή μιᾶς ἐπιφάνειας. Καί ἐδῶ ἐπίσης εἶναι ἀδύνατο νά σχεδιάσουμε σέ μιά ἐπιφάνεια (π.χ. σέ μιά ἐλλειψοειδῆ ἐπιφάνεια) συντεταγμένες πού νά ἔχουν ὁμοιόμορφη μετρική σημασία, ἐνῶ, στό ἐπίπεδο, οἱ καρτεσιανές συντεταγμένες x_1, x_2 σημαίνουν μήκη πού μετριοῦνται ἀπ' εὐθείας μέ τόν κανόνα. Ὁ Gauss, στή Θεωρία τῶν ἐπιφανειῶν, μπόρεσε νά ξεπεράσει τή δυσκολία σχεδιάζοντας αὐθαίρετα πάνω στήν ἐπιφάνεια καμπυλόγραμμες συντεταγμένες πού κατ' ἀρχή ἐκφράζανε μόνο τίς σχέσεις συνέχειας καί στή συνέχεια θεμελίωνε τίς σχέσεις τους μέ τίς μετρικές ἰδιότητες τῆς ἐπιφάνειας. Κατ' ἀναλογία, εἰσάγουμε στήν γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας τυχαῖες συντεταγμένες x_1, x_2, x_3, x_4, πού μᾶς ἐπιτρέπουν μιά μονοσήμαντη ἀρίθμηση τῶν σημείων τοῦ χωρο–χρόνου, ἔτσι ὥστε σέ κοντινά χωρο–χρονικά γεγονότα νά ἀντιστοιχοῦν παραπλήσιες τιμές συντεταγμένων. Καί ἄρα ἡ ἐκλογή τῶν τελευταίων εἶναι αὐθαίρετη. Ὑπακούουμε στήν ἀρχή τῆς σχετικότητας στήν πιό πλατειά της ἔννοια δίνοντας στούς νόμους τέτοια μορφή πού νά ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν γιά κάθε τετραδιάστατο σύστημα συντεταγμένων αὐτοῦ τοῦ εἴδους. Μέ ἄλλα λόγια οἱ ἐξισώσεις πού ἐκφράζουν αὐτούς τούς νόμους νά συνδιακυμαίνονται ὡς πρός ὁποιαδήποτε τυχαία μετατροπή.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΟΥ GAUSS

Τό σημαντικότερο σημεῖο σύγκρισης ἀνάμεσα στή Θεωρία τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ Gauss καί τή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας βρίσκεται στή μετρική, στήν ὁποία κυρίως στηρίζονται οἱ ἔννοιες τῶν δύο Θεωριῶν. Στή Θεωρία τῶν ἐπιφανειῶν, ὁ Gauss ἔκανε τόν ἀκόλουθο συλλογισμό. Ἡ ἐπίπεδη γεωμετρία μπορεῖ νά βασιστεῖ στήν ἴδια τήν ἀπόσταση ds μεταξύ δύο κοντινῶν σημείων. Αὐτή ἡ ἀπόσταση εἶναι φυσικά σημαντική, γιατί μπορεῖ ἄμεσα νά μετρηθεῖ μέ τή βοήθεια ἑνός ἄκαμπτου κανόνα. Διαλέγοντας κατάλληλα τίς (καρτεσιανές) συντεταγμένες, ἡ ἀπόσταση αὐτή μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ μέ τόν τύπο

$$ds^2 = dx^2_1 + dx^2_2.$$

Ἀπ' αὐτή τή βασική ἔννοια μποροῦν νά συναχθοῦν καί οἱ ἔννοιες τῆς εὐθείας, σάν ἡ πιό σύντομη γραμμή ($\delta \int ds = 0$) τοῦ τόξου, τοῦ κύκλου ἤ τῆς γωνίας πού εἶναι τά στοιχεῖα τῆς κατασκευῆς στήν ἐπίπεδη εὐκλείδια γεωμετρία. Ἡ γεωμετρία τῆς συνεχοῦς καμπύλης ἐπιφάνειας μπορεῖ νά φτιαχτεῖ μέ ἀνάλογο τρόπο, ἄν θεωρήσουμε ὅτι ἕνα ἄπειρα μικρό κομμάτι τῆς ἐπιφάνειας μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ἐπίπεδο κατά προσέγγιση μιᾶς ἄπειρα μικρῆς ποσότητας. Σ' ἕνα τόσο μικρό κομμάτι τῆς ἐπιφάνειας ὑπάρχουν καρτεσιανές συντεταγμένες X_1, X_2 καί ἡ ἀπόσταση πού μετρᾶμε ἀνάμεσα σέ δύο σημεῖα της μέ τόν κανόνα δίνεται ἀπό τή σχέση.

$$ds^2 = dX^2_1 + dX^2_2.$$

Ἄν χαράξουμε πάνω στήν ἐπιφάνεια τυχαῖες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες x_1, x_2, οἱ X_1, X_2 μποροῦν νά ἐκφραστοῦν γραμμικά συναρτήσει τῶν dx^2, dx_2. Ἄρα, ἡ ἐξίσωση

$$ds^2 = g_{11}dx^2_1 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx^2_2$$

ἰσχύει σ' ὁλόκληρη τήν ἐπιφάνεια. Οἱ g_{11}, g_{12}, g_{22} καθορίζονται ἀπό τή φύση τῆς ἐπιφάνειας καί τήν ἐκλογή τῶν συντεταγμένων. Ἄν γνωρίζουμε αὐτές τίς συναρτήσεις, γνωρίζουμε ταυτόχρονα πῶς θά μποροῦσαν δίκτυα ἀπό ἄκαμπτες βέργες νά ἐξαπλωθοῦν στήν ἐπιφάνεια, δηλαδή, μποροῦσε σ' αὐτή τήν ἔκφραση τοῦ ds^2 νά στηρίξουμε τή γεωμετρία τῆς ἐπιφάνειας, ἀκριβῶς ὅπως θεμελιώσαμε τήν ἐπίπεδη γεωμετρία στήν ἀντίστοιχη ἔκφραση.

Ἡ περίπτωση εἶναι ἀνάλογη γιά τό τετραδιάστατο συνεχές τοῦ χωρο–χρόνου στή φυσική. Γιά ἕνα παρατηρητή μέ ἐλεύθερη πτώση σ' ἕνα πεδίο βαρύτητας, τό πεδίο αὐτό θεωρεῖται ὅτι γίνεται μηδέν στό ἄμεσο περιβάλλον τοῦ παρατηρητῆ. Καί ἔτσι, θά μποροῦμε νά θεωροῦμε πάντα σάν περιοχή πού ἀνήκει στή θεωρία τοῦ Γαλλιλαίου ὁποιαδήποτε ἄπειρα μικρή περιοχή τοῦ χωρο–χρονικοῦ συνεχοῦς. Γιά μιά τέτοια ἄπειρα μικρή περιοχή, θά ὑπάρχει ἕνα ἀδρανειακό σύστημα (μέ συντεταγμένες χώρου X_1, X_2, X_3 καί συνταγμένη χρόνου X_4), ὡς πρός τό ὁποῖο θά πρέπει νά θεωρήσουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ νόμοι τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας. Καί, ἄρα, τό μέγεθος, πού μπορεῖ ἄμεσα νά μετρηθεῖ μέ κανόνα καί πρότυπα ρολόγια.

$$dX^2_1+dX^2_2+dX^2_3-dX^2_4,$$

ἤ τό ἀρνητικό του

$$ds^2=-dX^2_1-dX^2_2-dX^2_3+dX^2_4, \tag{54}$$

Θά εἶναι ἕνα καλά καθορισμένο ἀναλλοίωτο γιά δύο κοντινά γεγονότα (δηλ. γιά δυό σημεῖα τοῦ τετραδιάστατου συνεχοῦς), ἄν παντοῦ δουλεύουμε μέ κανόνες πού τούς βρίσκουμε ἴσους ὅταν τούς βάζουμε τόν ἕνα πλάϊ στόν ἄλλο καί ρολόγια πού βρίσκουμε ἴσα ὅταν συγκρίνουμε τό πῶς λειτουργοῦν. Αὐτό πού ἐνδιαφέρει ἐδῶ, εἶναι ἡ φυσική ὑπόθεση ὅτι τό σχετικό μῆκος δύο κανόνων ἤ ἡ σχετική λειτουργία δύο ρολογιῶν εἶναι κατ' ἀρχή ἀνεξάρτητα ἀπό τό παρελθόν τους. Αὐτή ἡ ὑπόθεση στηρίζεται γερά στό πείραμα. Ἄν αὐτή ἡ παρατήρηση δέν ἦταν ἀκριβής θά ὑπῆρχαν συγκεχυμένες φασματικές γραμμές. Δοσμένου ὅτι δύο ἄτομα τοῦ ἴδιου στοιχείου ἀσφαλῶς δέν ἔχουν καί τήν ἴδια ἱστορία πίσω τους, καί ὅτι, ἄν δεχόμασταν τήν σχετική μεταβλητότητα τῶν ἀτόμων, σύμφωνα μέ τήν ἱστορία τους, θά ἦταν ἀνόητο νά παραδεχτοῦμε ὅτι ἡ μάζα ἤ οἱ συχνότητες ἐκπομπῆς τῶν ἀτόμων τοῦ ἴδιου στοιχείου μπορεῖ ποτέ νά εἶναι ἴσες μεταξύ τους.

Σέ μιά πεπερασμένη ἔκταση, οἱ χωρο–χρονικές περιοχές γενικά δέν εἶναι περιοχές τοῦ Γαλλιλαίου, ἔτσι ὥστε τό πεδίο τῆς βαρύτητας δέν μπορεῖ, ὅποια καί νά εἶναι ἡ ἐκλογή τῶν συντεταγμένων, νά ἐξαλειφτεῖ στούς πεπερασμένους τομεῖς. Κατά συνέπεια, δέν ὑπάρχουν συντε ταγμένες, γιά τίς ὁποῖες οἱ μετρικές συνθῆκες τῆς εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας νά κρατοῦν τήν ἰσχύ τους στίς πεπερασμένες περιοχές. Πάντα, ὅμως, τό ἀναλλοίωτο ds, πού ἀναφέραμε ἤδη, κρατάει τήν ἀξία του γιά δύο κοντινά σημεῖα (γεγονότα) τοῦ συνεχοῦς. Τό ἀναλλοίωτο αὐτό μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ συναρτήσει τυχαίων συντεταγμένων. Ἄν λάβουμε ὑπ' ὄψη μας τό γεγονός ὅτι τά τοπικά dX_ν μποροῦν νά ἐκφραστοῦν γραμμικά συναρτήσει τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων dx_ν, τό ds^2 παίρνει τήν ἀκόλουθη μορφή:

(55) $$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_n .$$

Οἱ συναρτήσεις g_{mn} περιγράφουν, ὡς πρός ἕνα αὐθαίρετα παρμένο σύστημα συντεταγμένων, τίς μετρικές συνθῆκες στό χωρο−χρονικό συνεχές καί ἐπίσης τό πεδίο τῆς βαρύτητας. Ἐδῶ, ὅπως καί στήν Εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας, πρέπει νά ξεχωρίζουμε στό τετραδιάστατο συνεχές τά στοιχεῖα τῶν γραμμῶν τοῦ χρόνου ἀπό τά στοιχεῖα τῶν γραμμῶν τοῦ χώρου. Στόν συμβολισμό πού υἱοθετήσαμε τά στοιχεῖα τῶν γραμμῶν τοῦ χρόνου ἔχουν ds πραγματικό, τά στοιχεῖα τῶν γραμμῶν τοῦ χώρου ἔχουν ds φανταστικό. Τά χρονικά ds μποροῦν ἄμεσα νά μετρηθοῦν μέ τή βοήθεια ἑνός πρότυπου ρολογιοῦ κατάλληλα διαλεγμένου.

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΤΑΝΙΣΤΩΝ

Μετά ἀπ' αὐτά πού μόλις εἴπαμε, εἶναι καθαρό ὅτι τό ἀξίωμα τῆς γενικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας ὑποθέτει τή γενίκευση τῆς θεωρίας τῶν ἀναλλοίωτων μεγεθῶν καί τῶν τανιστῶν. Ἀναρωτιέται κανείς μέ ποιό τρόπο φτιάνονται οἱ ἐξισώσεις πού συνδιακυμαίνονται ὡς πρός τυχαῖες σημειακές μεταβολές. Ὁ τανιστικός λογισμός ἔτσι γενικευμένος τελειοποιήθηκε ἀπό τούς μαθηματικούς πολύ πρίν ἀπό τή Θεωρία τῆς σχετικότητας. Πρῶτος ὁ Riemann, χρησιμοποίησε τό συλλογισμό τοῦ Gauss καί σέ συνεχῆ μέ τυχαῖες διαστάσεις. Ἐντελῶς προφητικά, πρόβλεψε τή φυσική σημασία αὐτῆς τῆς γενίκευσης τῆς Εὐκλείδιας γεωμετρίας. Ὕστερα ἦρθε ἡ ὁλοκλήρωση τῆς θεωρίας μέ τή μορφή τοῦ τανιστικοῦ λογισμοῦ ἀπό τούς Ricci καί Levi−Civita.

Ἄν μᾶς ἐπιτραπεῖ νά ἐκθέσουμε σύντομα τίς ἔννοιες καί τίς μαθηματικές πράξεις πού ἀναφέρονται σ' αὐτές.

Θεωροῦμε καί πάλι 4 μεγέθη (ὁρισμένα σάν συναρτήσεις τῶν x ὡς πρός ὅλα τά συστήματα συντεταγμένων) σάν συνιστῶσες A_ν ἑνός ἀνύσματος (ἀντιδιακυμαινόμενου), ἄν, μέ τήν ἀλλαγή τῶν συντεταγμένων, μεταβάλλονται μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅπως καί τά διαφορικά τῶν συντεταγμένων dx_ν. Ἔτσι ἔχουμε

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} A^\nu. \tag{56}$$

Ἀλλά, ἐκτός ἀπ' αὐτά τά ἀντιδιακυμαινόμενα ἀνύσματα, ὑπάρχουν ἐπίσης καί συνδιακυμαινόμενα. Ἄν B εἶναι οἱ συνιστῶσες ἑνός συνδιακυμαινόμενου διανύσματος, πρέπει νά δεχτοῦμε ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος τῆς μεταβολῆς

$$B'_\mu = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} B_\nu. \tag{57}$$

Ὁ ὁρισμός τοῦ συνδιακυμαινόμενου διανύσματος διαλέχτηκε μέ τέτοιο τρόπο πού νά μπορεῖ, σέ συνδυασμό μέ ἕνα ἀντιδιακυμαινόμενο διάνυσμα, νά σχηματίσει μιά βαθμωτή συνάρτηση σύμφωνα μέ τό σχῆμα

$$\varphi = B_\nu A^\nu \text{ (ἀθροισμένο ὡς πρός } \nu\text{)}.$$

Πραγματικά ἔχουμε

$$B'_\mu A'^\mu = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta} B_\alpha A^\beta = B_\alpha A^\alpha.$$

Εἰδικώτερα, οἱ παράγωγοι $\theta\varphi/\theta x_\alpha$ μιᾶς βαθμωτῆς συνάρτησης φ εἶναι οἱ συνιστῶσες ἑνός συνδιακυμαινόμενου διανύσματος, πού, μέ τά διαφορικά τῶν συντεταγμένων, σχηματίζουν τή βαθμωτή συνάρτηση $\theta\varphi/\theta x_a \, dx_a$. Βλέπουμε ἀπ' αὐτό τό παράδειγμα πόσο φυσικός εἶναι ὁ ορισμός τοῦ συνδιακυμαινόμενου διανύσματος. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά, ἐδῶ ὑπάρχουν τανιστές τυχαίας τάξης, πού μποροῦν, σχετικά μέ κάθε δείκτη, νά ἔχουν χαρακτήρα εἴτε συνδιακυμαινόμενο εἴτε ἀντιδιακυμαινόμενο. Τό ποιός θά εἶναι ὁ χαρακτήρας δείχνεται ἀπό τή θέση τοῦ δείκτη, ὅπως ἀκριβῶς καί στήν περίπτωση τῶν ἀνυσμάτων. Ἔτσι, γιά παράδειγμα, τό $A_{\nu\mu}$ δηλώνει ἕνα τανιστή δεύτερης τάξης, μέ χαρακτήρα συνδιακυμαινόμενο ὡς πρός τόν δείκτη μ, καί χαρακτήρα ἀντιδιακύμανσης, ὡς πρός τόν δείκτη ν. Ὁ τανιστικός χαρακτήρας σημαίνει τήν ὕπαρξη τῆς ἐξίσωσης μετατροπῆς

$$(58) \qquad A'^{\nu}_{\mu} = \frac{\theta x_a}{\theta x'_\mu} \frac{\theta x'_\nu}{\theta x_\beta} A^{\beta}_{a}.$$

Τό προϊόν τῆς πρόσθεσης ἤ τῆς ἀφαίρεσης τανιστῶν ἴδιας τάξης καί ἴδιου χαρακτήρα, εἶναι πάλι τανιστής, ὅπως καί στή θεωρία τῶν ἀναλλοίωτων τῶν ὀρθογώνιων γραμμικῶν ὑποκαταστάσεων, παράδειγμα:

$$(59) \qquad A^{\nu}_{\mu} + B^{\nu}_{\mu} = C^{\nu}_{\mu}.$$

Τό ὅτι τό C^{ν}_{μ} Π12 εἶναι τανιστής βγαίνει ἀπό τήν σχέση (58).

Τό προϊόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τανιστῶν μέ τή διατήρηση τοῦ χαρακτήρα του στούς δείκτες, εἶναι πάλι τανιστής, ὅπως καί στή θεωρία τῶν ἀναλλοίωτων τῶν ὀρθογώνιων γραμμικῶν μεταβολῶν. Παράδειγμα:

(60) $$A_{\mu}^{\nu}\, B_{\sigma\tau} = C^{\nu}_{\mu\sigma\tau}$$

Ἡ ἀπόδειξη βγαίνει κατ' εὐθείαν ἀπό τό νόμο τῆς μετατροπῆς.

Τό προϊόν τῆς συστολῆς ὡς πρός δύο δεῖκτες μέ διαφορετικό χαρακτήρα εἶναι πάλι τανιστής. Παράδειγμα:

(61) $$A^{\mu}_{\mu\sigma\tau} = B_{\sigma\tau}.$$

Ὁ τανιστικός χαρακτήρας τοῦ $A^{\nu}_{\mu\sigma\tau}$ καθορίζει τόν τανιστικό χαρακτήρα τοῦ $B_{\sigma\tau}$. Ἀπόδειξη:

$$A'^{\mu}_{\mu\sigma\tau} = \frac{\theta x_\alpha}{\theta x'_\mu}\,\frac{\theta x'_\mu}{\theta x_\beta}\,\frac{\theta x_s}{\theta x'_\sigma}\,\frac{\theta x_t}{\theta x'_\tau}\,A^{\beta}_{\alpha st} = \frac{\theta x_s}{\theta x'_\sigma}\,\frac{\theta x_t}{\theta x'_\tau}\,A^{\alpha}_{\alpha st}.$$

Καί ἐδῶ, πάλι, ἡ ἰδιότητα συμμετρίας καί ἀντισυμμετρίας ἑνός τανιστῆ, ὡς πρός δύο δεῖκτες ἴδιου χαρακτῆρα, ἔχει σημασία ἀναλλοίωτη.

Αὐτά πού εἴπαμε εἶναι τά βασικά γιά τίς ἀλγεβρικές ἰδιότητες τῶν τανιστῶν.

Ὁ βασικός τανιστής. — Ἀπό τό ἀναλλοίωτο τοῦ ds^2 (γιά αὐθαίρετη ἐκλογή τῶν dx_ν) σέ σχέση καί μέ τίς συνθῆκες συμμετρίας πού συμφωνοῦν μέ τήν σχέση (55), βγαίνει ὅτι οἱ $g_{\mu\nu}$ εἶναι συνιστῶσες ἑνός συμμετρικοῦ συνδιακυμαινόμενου τανιστῆ (βασικός τανιστής). Ἄς φανταστοῦμε ὅτι φτιάξαμε τήν ὁρίζουσα g τῶν $g_{\mu\nu}$ καί, ἀκόμη, τά πηλίκα $g_{\mu\nu}$ τῆς διαίρεσης τῶν ἐλάσσονων ὁριζουσῶν διά g, πού ἀντιστοιχοῦν σέ κάθε ἕνα ἀπό τά $g_{\mu\nu}$ καί γιά τά ὁποία δέν ξέρουμε ἀκόμη ἄν ἔχουν χαρακτήρα συνδιακύμανσης. Ἔχουμε τότε

(62) $g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}=\delta^{\beta}{}_{\alpha}$(=1 ἤ =0, γιά α=β καί α≠β ἀντίστοιχα).

Φτιάχνοντας τά ἄπειρα μικρά μεγέθη (συνδιακυμαινόμενα διανύσματα)

(63) $$d\xi_{\mu}=g_{\mu\alpha}dx_{\alpha},$$

πολλαπλασιάζοντας μέ $g_{\mu\beta}$ καί ἀθροίζοντας ὡς πρός μ, ἔχουμε ὡς πρός τήν (62)

(64) $$dx_{\beta}=g_{\beta\mu}d\xi_{\mu}.$$

Καί ἀφοῦ οἱ συνθῆκες τῶν $d\xi_{\mu}$ μποροῦν ἐλεύθερα νά ἐκλεγοῦν καί τά dx_{β} ὅπως καί τά $d\xi_{\mu}$ εἶναι συνιστῶσες ἑνός διανύσματος, συνεπάγεται ὅτι τά $g_{\beta\mu}$ εἶναι οἱ συνιστῶσες ἑνός ἀντιδιακυμαινόμενου τανιστῆ ([1]). (Βασικός ἀντιδιακυμαινόμενος τανιστής). Ἀκόμη συνεπάγεται ἀπό τήν (62) ὁ τανιστικός χαρακτήρας τοῦ $\delta^{\beta}{}_{\alpha}$ (μικτός βασικός τανιστής). Μέ τή βοήθεια τοῦ βασικοῦ τανιστῆ μποροῦμε, ἀντί τῶν τανιστῶν μέ δεῖκτες πού ἔχουν χαρακτήρα συνδιακύμανσης, νά εἰσαγάκτήρα ἀντιδιακύμανσης, καί τό ἀντίθετο.

Νά μερικά παραδείγματα:

$$A^{\mu}=g^{\mu\alpha}A_{\alpha},$$
$$A_{\mu}=g_{\mu\alpha}A^{\alpha},$$
$$T^{\sigma}{}_{\mu}=g^{\sigma\nu}T_{\mu\nu}.$$

Ἀναλλοίωτο τοῦ ὄγκου. — Τό στοιχεῖο ὄγκος

$$\int dx_1dx_2dx_3dx_4=dx$$

δέν εἶναι ἀναλλοίωτο. Γιατί σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Jacobi, ἔχουμε

$$(65)\qquad dx' = \left| \frac{dx'_\mu}{dx_\nu} \right| dx.$$

Μποροῦμε ὅμως νά συμπληρώσουμε τό dx γιά νά τό κάνουμε ἀναλλοίωτο. Πράγματι, ἄν φτιάξουμε τήν ὁρίζουσα τῶν μεγεθῶν

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu} g_{\alpha\beta}.$$

παίρνουμε, ἐφαρμόζοντας δύο φορές διαδοχικά τό θεώρημα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὁριζουσῶν,

$$g' = |g'_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \right|^2 |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \right|^{-2} g.$$

Ἀπό δῶ βγαίνει καί τό ἀναλλοίωτο

$$(66)\qquad \sqrt{g'}\, dx' = \sqrt{g}\, dx.$$

Σχηματισμός τανιστῶν μέ διαφόριση. — Οἱ ἀλγεβρικές πράξεις ἀποδείχτηκαν τό ἴδιο ἁπλές γιά τό σχηματισμό τανιστῶν καί γιά τήν εἰδική περίπτωση τοῦ ἀναλλοίωτου ὡς πρός τίς ὀρθογώνιες γραμμικές μετατροπές. Οἱ διαφορικές πράξεις γιά τά ἀναλλοίωτα πάντως στή γενική περίπτωση εἶναι ἀρκετά πιό περίπλοκες. Καί ὁ λόγος γι' αὐτό δίνεται ἐδῶ. Ἄν A^μ εἶναι διάνυσμα ἀντιδιακυμαινόμενο, οἱ συντελεστές μετατροπῆς του $\theta x'_\mu/\theta x_\nu$ εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τόν τόπο μόνο ἄν ἡ μετατροπή εἶναι γραμμική. Οἱ διανυσματικές συνιστῶσες $A^{\mu} + \frac{\theta A_{\mu}}{\theta x_{\alpha}} dx_{\alpha}$ μετατρέπονται σ' ἕνα κοντινό σημεῖο ὅπως καί τά ἴδια τά A^{μ}, ἀπ' ὅπου συνεπάγονται ὁ διανυσματικός χαρακτήρας τοῦ διανυσματικοῦ διαφορικοῦ καί ὁ τανιστικός χαρακτῆρας τοῦ $\theta A_{\mu}/\theta x_{a}$. Αὐτό ὅμως παύει νά ἰσχύει ἄν οἱ $\theta x'_{\mu}/\theta x_{\nu}$ μεταβάλλονται ἀπό τό ἕνα σημεῖο στό ἄλλο.

Παρ' ὅλα αὐτά μποροῦμε νά δείξουμε ὅτι εἶναι δυνατό, ἀκόμη καί στή γενική περίπτωση νά ἐφαρμόσουμε στούς τανιστές τίς διαφορικές πράξεις τοῦ ἀναλλοίωτου μεγέθους, ἄν ἀκολουθήσουμε τό δρόμο πού χάραξαν οἱ Levi–Civita καί Weyl. Ἔστω (A^{μ}) ἕνα ἀντιδιακυμαινόμενο διάνυσμα τοῦ ὁποίου οἱ συνιστῶσες δίνονται ὡς πρός τό σύστημα συντεταγμένων τῶν x_{ν}. Ἔστω ὅτι P_1 P_2 εἶναι δύο σημεῖα τοῦ συνεχιστοῦ ἄπειρα κοντά τό ἕνα στό ἄλλο. Γιά τό ἀπειροστό περιβάλλον τοῦ σημείου P_1 ὑπάρχουν, σύμφωνα μέ τούς συλλογισμούς μας, συστήματα συντεταγμένων τῶν x_{ν}, ὡς πρός τά ὁποῖα τό συνεχές εἶναι εὐκλείδιο (μέ τήν συντεταγμένη x_{ν} λαμβανόμενη σάν φανταστική). Ἔστω ὅτι $A^{\mu}_{(1)}$ εἶναι οἱ συνιστῶσες τοῦ διανύσματος στό σημεῖο P_1. Ἄς φανταστοῦμε ὅτι φέρνουμε στό σημεῖο P_2, κάνοντας χρήση τοῦ τοπικοῦ συστήματος τῶν X_{ν}, ἕνα διάνυσμα μέ τίς ἴδιες συντεταγμένες (διάνυσμα παράλληλα μέ τό διάνυσμα στό σημεῖο P_1). Αὐτό, λοιπόν, θά καθορίζεται μέ τρόπο ἀποκλειστικό ἀπό τό διάνυσμα στό σημεῖο P_1 καί ἀπό τήν μετατόπιση. Τήν πράξη αὐτή, πού ὁ ἀποκλειστικός της χαρακτήρας θά δειχτεῖ στή συνέχεια, τήν ὀνομάζουμε παράλληλη μετατόπιση τοῦ διανύσματος A^{μ} ἀπό τό σημεῖο P_1 στό ἄπειρα κοντινό σημεῖο P_2. Παίρνοντας τήν διανυσματική διαφορά ἀνάμεσα στό διάνυσμα (A^{μ}) στό σημεῖο P_2 καί στό διάνυσμα πού πρόκυψε ἀπό τήν παράλληλη μετατόπιση ἀπό τό P_1 στό P_2, θά ἔχουμε ἕνα διάνυσμα πού μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν διαφορικό τοῦ διανύσματος (A_{μ}) γιά τή δοσμένη μετατό-

Ἡ διανυσματική αὐτή μετατόπιση μπορεῖ ἀσφαλῶς νά θεωρηθεῖ ἀπό τήν ἄποψη τοῦ συστήματος συντεταγμένων τῶν x_{ν}. Ἄν A^{ν} εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος στό σημεῖο P_1, $A^{\nu}+\delta A^{\nu}$ οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος πού εἶναι παράλληλα μετατοπισμένο κατά μῆκος τῆς εὐθείας (dx_{ν}) πρός τό P_2, τότε οἱ δA^{ν} δέν μηδενίζονται. Γνωρίζουμε ὅτι αὐτά τά μεγέθη (πού δέν ἔχουν διανυσματικό χαρακτήρα) ἐξαρτῶνται ἀπό τά dx_{ν} καί τά A^{ν} κατά τρόπο γραμμικό καί ὁμογενῆ. Στή συνέχεια, βάζουμε

$$\delta A^{\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} A^{\alpha} dx_{\beta}. \tag{67}$$

Ἀκόμη, μποροῦμε νά βεβαιώσουμε ὅτι τά $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$ πρέπει νά εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τούς δεῖκτες α καί β. Γιατί μποροῦμε, μέ τό τοπικό εὐκλείδιο σύστημα συντεταγμένων, νά δείξουμε, ὅτι μέ τή μετατόπιση ἑνός στοιχείου $d^{(1)}x_{\nu}$ κατά μῆκος ἑνός δεύτερου στοιχείου $d^{(2)}x_{\nu}$ περιγράφουμε τό ἴδιο τοῦ $d^{(2)}x_{\nu}$ κατά μῆκος τοῦ $d^{(1)}x_{\nu}$. Πράγματι, ἔχουμε

$$d^{(2)}x_{\nu} + (d^{(1)}x_{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} d^{(1)}x_{\alpha} d^{(2)}x_{\beta}) = d^{(1)}x_{\nu} + (d^{(2)}x_{\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} d^{(2)}x_{\alpha} d^{(1)}x_{\beta}),$$

ὅπου, μετά ἀπό μετάθεση τῶν δεικτῶν ἄθροισης α καί β, βγαίνει καί ἡ παραδοχή μας.

Ἀφοῦ τά μεγέθη $g_{\mu\nu}$ καθορίζουν ὅλες τίς μετρικές ἰδιότητες τοῦ συνεχοῦς, πρέπει ἐπίσης νά καθορίζουν καί τά μεγέθη $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}$. Ἐξετάζοντας τό ἀναλλοίωτο τοῦ διανύσματος A^{ν}, δηλαδή τό τετράγωνο τῆς τιμῆς του

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu},$$

πού εἶναι ἀναλλοίωτη, αὐτή δέν θά πρέπει νά ἀλλάζει ἐφ' ὅσον τό διάστημα μετατοπίζεται παράλληλα. Ἔχουμε, κατά συνέπεια,

$$o=\delta(g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu})=\frac{\theta g_{\mu\nu}}{\theta x_{\alpha}}A^{\mu}A^{\nu}dX_{\alpha}+g_{\mu\nu}A^{\mu}\delta A^{\nu}+g_{\mu\nu}A^{\nu}\delta A^{\mu},$$

ἤ, σύμφωνα μέ τήν (67)

$$\left(\frac{\theta g_{\mu\nu}}{\theta x_{\alpha}}-g_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}-g_{\nu\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\alpha}\right)A^{\mu}A^{\nu}dx_{\alpha}=o.$$

Δοσμένης τῆς συμμετρίας τῆς ἔκφρασης μέσα στήν παρένθεση ὡς μπρός μ καί ν, αὐτή ἡ ἐξίσωση, ὅταν διαλέγουμε αὐθαίρετα τά διανύσματα (A^{μ}) καί dx_{ν}, ἰσχύει μόνο ὅταν ὁ παράγων μέσα στήν παρένθεση γίνεται ἴσος μέ τή μονάδα γιά ὅλους τούς δυνατούς συνδυασμούς τῶν δεικτῶν. Μέ τούς κυκλικούς ἰσομορφισμούς τῶν δεικτῶν μ,ν,α, παίρνουμε συνολικά τρεῖς ἐξισώσεις καί, λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη καί τή συμμετρική ἰδιότητα τῶν $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, προκύπτει

(68) $$\left[{\mu\nu \atop \alpha}\right]=g_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}{}_{\mu\nu},$$

ὅπου, σύμφωνα μέ τόν Christoffel, εἰσάγουμε τήν σύντμηση

(69) $$\left[{\mu\nu \atop \alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\theta g_{\mu\alpha}}{\theta x_{\nu}}+\frac{\theta g_{\nu\alpha}}{\theta x_{\mu}}-\frac{\theta g_{\mu\nu}}{\theta x_{\alpha}}\right)$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν (68) μέ $g^{\alpha\sigma}$ καί ἀθροίζοντας ὡς πρός α, παίρνουμε

$$(70) \quad \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left(\frac{\theta g_{\mu\alpha}}{\theta x_{\nu}} + \frac{\theta g_{\nu\alpha}}{\theta x_{\mu}} - \frac{\theta g_{\mu\nu}}{\theta x_{\alpha}} \right) = \left\{ {\mu\nu \atop \sigma} \right\},$$

ὅπου $\{^{\mu\nu}{}_{\sigma}\}$ εἶναι τά σύμβολα τοῦ Christoffel δεύτερου βαθμοῦ. 'Από δῶ βγαίνει, ὅτι τά μεγέθη Γ προέρχονται ἀπό τά $g_{\mu\nu}$. Οἱ ἐξισώσεις (67) καί (70) ἀποτελοῦν τή βάση γιά τίς πάρα κάτω σκέψεις

'Επέκταση τῶν τανιστῶν. — Ἄν $(A^{\mu}+\delta A^{\mu})$ εἶναι τό παράλληλα μετατοπισμένο διάνυσμα κατά ἕνα μῆκος ἄπειρα μικρό, ἀπό τό σημεῖο P_1 στό σημεῖο P_2 καί $(A^{\mu}+dA^{\mu})$ εἶναι τό διάνυσμα A^{μ} στό σημεῖο P_2, τότε ἡ διαφορά τους

$$dA^{\mu}-\delta A^{\mu} = \left(\frac{\delta A^{\mu}}{\delta x_{\sigma}} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha} A^{\alpha} \right) dx_{\sigma}$$

εἶναι ἐπίσης διάνυσμα. 'Εφ' ὅσον αὐτό ἰσχύει, ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι ἡ ἐκλογή τῶν dx_{σ}, τό

$$(71) \qquad A^{\mu};\sigma = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\sigma}} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha} A^{\alpha}$$

εἶναι τανιστής πού τόν θεωροῦμε σάν ἐπέκταση τοῦ τανιστῆ πρώτης τάξης (δηλ. τοῦ διανύσματος). Συστέλλοντας αὐτόν τόν τανιστή, ἔχουμε τήν ἀπόκλιση τοῦ ἀντιδιακυμαινόμενου τανιστή A^{μ}. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, πρέπει νά σημειώσουμε, ὅτι σύμφωνα μέ τή σχέση (70), ἰσχύει

(72) $$\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\mu}.$$

'Εξ' ἄλλου, βάζοντας

(73) $$A^\mu \sqrt{g} = \mathfrak{A}^\mu,$$

μέγεθος πού μαζί μέ τόν Weyl ὀνομάζουμε ἀντιδιακυμαινόμενη τανιστική πυκνότητα (1) πρώτης τάξης, βγαίνει ὅτι ἡ

(74) $$\mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}^\mu}{\partial x_\mu}$$

εἶναι βαθμωτή πυκνότητα

Γιά τό συνδιακυμαινόμενο διάνυσμα B_μ ἰσχύει ἐπίσης ὁ νόμος τῆς παράλληλης μετατόπισης κάνοντας τήν παραδοχή ὅτι κατά τή διάρκεια τῆς παράλληλης μετατόπισης, τό βαθμωτό μέγεθος

$$\varphi = A^\mu B_\mu$$

παραμένει ἀμετάβλητο, ὅτι, κατά συνέπεια, τό

$$A^\mu \delta B_\mu + B_\mu \delta A^\mu$$

μηδενίζεται, γιά ὁποιαδήποτε ἐκλογή τοῦ (A^μ). Παίρνουμε ἔτσι

(75) $$\delta B_\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} B_\alpha dx_\sigma.$$

'Από ἐδῶ, γιά τήν ἐπέκταση τοῦ συνδιακυμαινόμενου διανύσματος, ἀκολουθώντας τόν ἴδιο δρόμο πού μᾶς ὁδήγησε στήν (71), ἰσχύει ὅτι

(76) $$B_{\mu;\sigma} = \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} B_\alpha.$$

Μέ κυκλικό ἰσομορφισμό τῶν δεικτῶν μ και σ, καί μέ ἀφαίρεση παίρνουμε τόν ἀντισυμμετρικό τανιστή.

$$\varphi_{\mu\sigma} = \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial B_\sigma}{\partial x_\mu}. \tag{77}$$

Ἡ ἐπέκταση τῶν τανιστῶν δεύτερης καί ἀνώτερης τάξης μπορεῖ νά πραγματοποιηθεῖ μέ τήν ἴδια διαδικασία πού χρησιμοποιήθηκε γιά νά βγεῖ ἡ ἰσχύς τῆς (75). Ἔστω ὅτι ($A_{\sigma\tau}$) εἶναι συνδιακυμαινόμενος τανιστής δεύτερης τάξης. Τότε, $A_{\sigma\tau}E^\sigma F^\tau$ εἶναι μέγεθος βαθμωτό, ἄν E καί F εἶναι διανύσματα. Αὐτή ἡ ἔκφραση δέν πρέπει νά ἀλλάζει μέ τήν μετατόπιση τῶν δ. Διατυπώνοντας αὐτό τό γεγονός, παίρνουμε μέ τή βοήθεια τῆς (67), τό $\delta A_{\sigma\tau}$ καί ἀπό ἐδῶ τήν ἐπέκταση πού γυρεύουμε

$$A_{\sigma\tau;\rho} = \frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} - \Gamma^\alpha_{\sigma\rho} A_{\alpha\tau} - \Gamma^\alpha_{\tau\rho} A_{\sigma\alpha}. \tag{78}$$

Γιά νά δείξουμε καθαρά τό γενικό νόμο πού ἐπιτρέπει τήν ἐπέκταση τῶν τανιστῶν, θά θέλαμε νά προσθέσουμε δύο ἐπεκτάσεις πού μποροῦν νά συναχθοῦν κατ' ἀνάλογο τρόπο:

$$A^\tau_{\sigma;\rho} = \frac{\partial A^\tau_\sigma}{\partial x_\rho} - \Gamma^\alpha_{\sigma\rho} A^\tau_\alpha + \Gamma^\tau_{\alpha\rho} A^\alpha_\sigma, \tag{79}$$

$$A^{\sigma\tau}{}_{;\rho} = \frac{\partial A^{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \Gamma^\sigma_{\alpha\rho} A^{\alpha\tau} + \Gamma^\tau_{\alpha\rho} A^{\sigma\alpha}. \tag{80}$$

Καί νά ὁ γενικός νόμος, μπροστά στά μάτια μας. Ἀπό τούς τύπους αὐτούς συμπεραίνουμε πολλούς ἄλλους πού εἶναι σημαντικοί γιά τή φυσική ἐφαρμογή τῆς θεωρίας.

Γιά τήν περίπτωση ὅπου τό $A^{\sigma\tau}$ εἶναι ἀντισυμμετρικό, μετά ἀπό κυκλικό ἰσομορφισμό καί ἄθροιση, βγαίνει ὁ ἀντισυμμετρικός τανιστής γιά κάθε ζευγάρι δεικτῶν

$$A_{\sigma\tau\rho} = \frac{\partial A_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial A_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau}. \tag{81}$$

Ὑποκαθιστώντας στό $A_{\sigma\tau}$ τῆς σχέσης (78) τόν βασικό τανιστή $g_{\sigma\tau}$. τό δεύτερο μέλος ἐπίσης μηδενίζεται. Ἀνάλογη εἶναι καί ἡ περίπτωση γιά τήν σχέση (80) ὡς πρός τόν $g^{\sigma\tau}$, δηλαδή οἱ ἐπεκτάσεις τοῦ βασικοῦ τανιστή μηδενίζονται. Ὅτι ἔτσι πρέπει νά εἶναι, τό βλέπουμε ἄμεσα στό τοπικό σύστημα συντεταγμένων.

Στήν περίπτωση πού τό $A^{\sigma\tau}$ εἶναι ἀντισυμμετρικό, παίρνουμε ἀπό τήν (80), συστέλλοντας ὡς πρός τ καί ρ,

$$\mathfrak{A}^{\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\sigma\tau}}{\partial x_\tau}. \tag{82}$$

Στή γενική περίπτωση ἀπό τίς (79) καί (80), συστέλλοντας ὡς πρός τ καί ρ, βγαίνουν οἱ ἐξισώσεις

$$\mathfrak{A}_{\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta} \mathfrak{A}^{\beta}_{\alpha}, \tag{83}$$

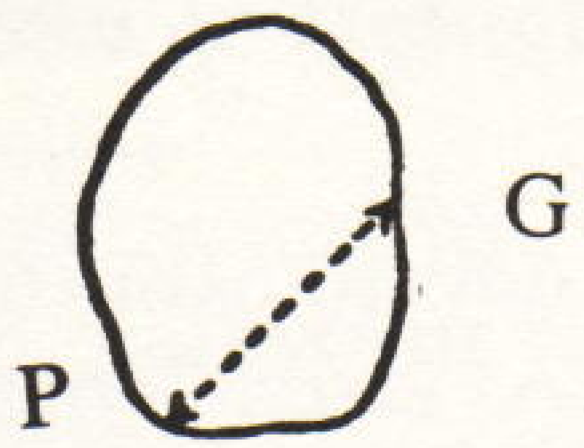
$$\mathfrak{A}^{\sigma} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\sigma\alpha}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} \mathfrak{A}^{\alpha\beta}. \tag{84}$$

Ὁ τανιστής τοῦ Riemann. — Ἄν δίνεται μιά καμπύλη πού περνάει ἀπό τά σημεῖα P καί G τοῦ συνεχοῦς, ἕνα δοσμένο διάνυσμα A_μ στό σημεῖο U μπορεῖ νά μετατοπιστεῖ παράλληλα κατά μῆκος τῆς δοσμένης καμπύλης μέχρι τό σημεῖο G.

Ἄν τό συνεχές εἶναι εὐκλείδιο (γενικότερα, ἄν τά $g_{\mu\nu}$ εἶναι σταθερά, ὅταν οἱ συντεταγμένες εἶναι κατάλληλα ἐκλεγμένες), τό διάνυσμα στό σημεῖο G πού προκύπτει ἀπό τή μετατόπιση δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐκλογή τῆς καμπύλης πού ἑνώνει τό P καί G. Μ' ἄλλα λόγια τό ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἀπό τόν δρόμο πάνω στόν ὁποῖο ἔγινε ἡ μετατόπιση. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, ἕνα διάνυσμα ὑφίσταται μιά ἀλλαγή ΔA^μ (ἀλλαγή στή διεύθυνσή του καί ὄχι στό μέγεθός του) ἀπό τό γεγονός ὅτι ἀπό τό σημεῖο P μιᾶς κλειστῆς καμπύλης ἐπανέρχεται στό ἴδιο σημεῖο μετατοπιζόμενο κατά μῆκος τῆς καμπύλης. Θά ὑπολογίσουμε τώρα τήν ἀλλαγή αὐτή τοῦ διανύσματος

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu .$$

Ὅπως καί στό θεώρημα τοῦ Stokes γιά τό ὁλοκλήρωμα πάνω σέ μία γραμμή ἑνός διανύσματος κατά μῆκος κλειστῆς καμπύλης μέ γραμμικές διαστάσεις ἄπειρα μικρές. Ἄς περιοριστοῦμε σ' αὐτήν τήν περίπτωση.



Εἰκ. 4

Σύμφωνα μέ τήν (67), ἔχουμε,

$$\Delta A^\mu = \oint \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx_\beta ,$$

ὅπου $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ εἶναι ἡ τιμή αὐτοῦ τοῦ μεγέθους στό μεταβλητό σημεῖο g τοῦ δρόμου ὁλοκλήρωσης. Βάζοντας $\xi^\mu = (x_\mu)_G - (x_\mu)_P$ καί παριστάνοντας μέ $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ τήν τιμή $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ στό σημεῖο P, ἔχουμε ἀρκετή ἀκρίβεια

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \overline{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} + \frac{\partial \overline{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} \xi^{\nu}.$$

Τό A^{α} παριστάνει τήν τιμή πού προκύπτει ἀπό τό A^{α} μετά ἀπό παράλληλη μετατόπιση κατά μῆκος τῆς καμπύλης ἀπό τό σημεῖο P στό σημεῖο G. Ἀπό τήν σχέση (67) εἶναι εὔκολο νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ διαφορά $A_{\mu} - A_{\mu}$ εἶναι ἄπειρα μικρή πρώτης τάξης, ἐνῶ ἡ τιμή ΔA^{μ}, γιά μιά καμπύλη ἄπειρα μικρῶν διαστάσεων πρώτης τάξης, εἶναι ἄπειρα μικρή δεύτερης τάξης. Γι' αὐτό, ἐξ ἄλλου, τό λάθος πού κάνουμε, ὅταν βάζουμε

$$A^{\alpha} = \overline{A}^{\alpha} - \overline{\Gamma}^{\alpha}_{\sigma\tau} \overline{A}^{\alpha} \xi^{\beta},$$

εἶναι δεύτερης τάξης.

Ὑποκαθιστώντας τίς τιμές αὐτές στά $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ καί A^{α} μέσα στό ὁλοκλήρωμα, καί γιά τήν περίπτωση μόνο ἑνός ἄειρα μικροῦ μεγέθους δεύτερης τάξης, παίρνουμε

$$\Delta A^{\mu} = -\left(\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha}\right) A^{\sigma} \oint \xi^{\alpha} d\xi^{\beta}. \tag{85}$$

Τά μεγέθη πού βγαίνουν ἀπό τό ὁλοκλήρωμα ἀναφέρονται στό σημεῖο P. Ἄν ἐλαττώσουμε τήν πρός ὁλοκλήρωση ποσότητα κατά 1/2 $d(\xi^{\alpha}\xi^{\beta})$, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\int_{\bullet} (\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} - \xi^{\beta} d\xi^{\alpha}).$$

Αὐτός ὁ ἀντισυμμετρικός τανιστής δεύτερης τάξης $f^{\alpha\beta}$ χαρακτηρίζει τό στοιχεῖο τῆς ἐπιφάνειας πού περικλείνεται ἀπό τή γραμμή, ὅσο ἀφορᾶ μέγεθος καί τή θέση του. Ἄν τό μέγεθος μέσα στήν παρένθεση τῆς σχέσης (85) ἦταν ἀντισυμμετρικό ὡς πρός τούς δεῖκτες α καί β θά μπορούσαμε ἀπό τήν (85) νά συμπεράνουμε τόν τανιστικό χαρακτῆρα του. Μποροῦμε ὅμως νά τό κάνουμε μεταθέτοντας κυκλικά τούς ἀθροιστικούς δεῖκτες α καί β στήν σχέση (85) καί προσθέτοντας τήν ἐξίσωση, πού προκύπτει ἀπ' αὐτήν, στήν ἴδια τήν (85). Ἔχουμε

(86) $$2\Delta A^{\mu} = -R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta} A^{\sigma} \quad {}^{\alpha\beta},$$

ὅπου

(87) $$R^{\mu}_{\sigma\alpha\beta} = -\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha}.$$

Ἀπό τήν (86) βγαίνει ὁ τανιστικός χαρακτῆρας τοῦ $R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta}$. Εἶναι ὁ τὰνιστής τῆς καμπυλότητας Riemann πού εἶναι τέταρτης τάξης, στίς συμμετρικές ἰδιότητες τοῦ ὁποίου δέν εἶναι ὑποχρεωτικό νά ἐπιμείνουμε. Ὁ μηδενισμός του εἶναι συνθήκη ἱκανή γιά νά εἶναι τό συνεχές εὐκλείδιο (ἄν δέν σταθοῦμε στίς ἰδιότητες ἀλήθειας τῶν συντεταγμένων πού θά πρέπει νά ἐκλέξουμε).

Συστέλλοντας τόν τανιστή τοῦ Riemann ὡς πρός μβ, παίρνουμε τόν συμμετρικό τανιστή δεύτερης τάξης

(88) $$R_{\mu\nu} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}.$$

Οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι γίνονται μηδέν, ἄν τό σύστημα συντεταγμένων εἶναι ἔτσι ἐκλεγμένο ὥστε g=σταθ. Ἀπό τό $R_{\mu\nu}$ μποροῦμε νά φτιάξουμε τό βαθμωτό μέγεθος

(89) $$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Ἡ πιό εὐθεῖα γραμμή (γεοδετική). — Μποροῦμε νά φτιάξουμε μιά γραμή πού τά διαδοχικά στοιχεῖα της νά προέρχονται τά μέν ἀπό τά δέ μέ παράλληλη μετατόπιση (ἡ πιό εὐθεία γραμμή). Εἶναι ἡ φυσική γενίκευση τῆς εὐθείας τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας. Γιά μιά τέτοια γραμμή, ἔχουμε

$$\delta\left(\frac{dx_\mu}{ds}\right) = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,dx_\beta.$$

Τό πρῶτο μέλος πρέπει νά ἀντικατασταθεῖ μέ $(d^2x_\mu/ds^2]ds$(1), ὥστε νά ἔχουμε

$$\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds} = o. \tag{90}$$

Τήν ἴδια γραμμή μποροῦμε νά πάρουμε ἄν κατασκευάσουμε τέτοια πού τό ὁλοκλήρωμα

$$\int ds \text{ ἤ } \int \sqrt{g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu}$$

ἀνάμεσα σέ δύο σημεῖα νά γίνει νά γίνει ἤ μέγιστο ἤ ἐλάχιστο (γεοδετική γραμμή).

ΤΕΤΑΡΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (συνέχεια)

Γνωρίζουμε τώρα μαθηματικές ἔννοιες πού μᾶς ἐπιτρέπουν νά διατυπώσουμε τούς νόμους τῆς γενικῆς σχετικότητας. Σκοπός μας δέν εἶναι νά κάνουμε μιά ἔκθεση πού νά ἔχει χαρακτήρα τέλειας συστηματοποίησης, ἀλλά νά ἀναπτύξουμε βῆμα—βῆμα τά ἀποτελέσματα καί τίς δυνατότητες πού ἀκολουθοῦν ὅ,τι προηγήθηκε στίς τρεῖς πρῶτες διαλέξεις. Μιά τέτοια ἔκθεση ταιριάζει καλλίτερα στήν προσωρινότητα τῶν γνώσεών μας.

Ἡ κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου, πού πάνω του δέν δρᾶ καμιά δύναμη, εἶναι, σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἀδράνειας, εὐθύγραμμη καί ὁμαλή. Στό τετραδιάστατο συνεχές τῆς εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας (μέ πραγματική συντεταγμένη τοῦ χρόνου), αὐτό ἀντιπροσωπεύει πραγματική εὐθεία γραμμή. Ἡ εὐθεία γραμμή ἔχει ἀκριβῆ ἔννοια μέσα στό ἐννοιολογικό σύστημα τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἀναλλοίωτων (θεωρία τοῦ Rieman). Ἡ φυσική γενίκευση τῆς εὐθείας γραμμῆς, ἡ ἁπλούστερη δηλαδή γενίκευση της, εἶναι ἡ πιό εὐθεία γραμμή (γεωδετική). Θά δεχτοῦμε κατά συνέπεια, σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας, ὅτι ἡ κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου, πού δέχεται μόνο τήν ἐπίδραση τῆς ἀδράνειας καί τῆς βαρύτητας, περιγράφεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$(90) \qquad \frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\,\frac{dx_\alpha}{ds}\,\frac{dx_\beta}{ds} = 0.$$

Καί πράγματι, αὐτή ἡ ἐξίσωση ὑπεισέρχεται στήν ἐξίσωση τῆς εὐθείας ἄν ὅλες οἱ συνιστῶσες $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ τοῦ πεδίου βαρύτητας εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν.

Ποιά σχέση ὑπάρχει ἀνάμεσα σ' αὐτή τήν ἐξίσωση καί τήν νευτόνια ἐξίσωση τῆς κίνησης; Σύμφωνα μέ τήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας, τά $g_{\mu\nu}$ καθώς καί τά g^{mn} ἔχουνε σχέση μ' ἕνα ἀδρανειακό σύστημα τιμές:

$$(91) \qquad \left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.$$

(στό ἀδρανειακό αὐτό σύστημά ἡ συντεταγμένη τοῦ χρόνου εἶναι πραγματική καί τό σημεῖο τοῦ ds^2 εἶναι κατάλληλα ἐκλεγμένο).

Ἡ ἐξίσωση τῆς κίνησης εἶναι τότε $d^2x_\mu/ds^2 = 0$. Αὐτό θά τό ὀνομάσουμε «πρώτη προσέγγιση» γιά τό πεδίο $g_{\mu\nu}$. Ὅταν μελετᾶμε προσεγγίσεις, συχνά εἶναι χρήσιμο νά χρησιμοποιοῦμε, ὅπως καί στήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας, μιά φανταστική συντεταγμένη x_4, γιατί τότε τά $g_{\mu\nu}$ παίρνουν σέ πρώτη προσέγγιση τίς τιμές

$$(91\alpha) \qquad \left\{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right.$$

πού μποροῦν νά ἀναχτοῦν στήν σχέση

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}.$$

Σέ δεύτερη προσέγγιση, πρέπει νά βάλουμε

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{92}$$

ὅπου τά $g_{\mu\nu}$ πρέπει νά θεωρηθοῦν σάν μικρές ποσότητες πρώτης τάξης.

Ἔτσι καί οἱ δύο ὅροι τῆς ἐξίσωσής μας εἶναι μικρότατοι πρώτης τάξης. Ἀγνοώντας ἐκείνους τούς ὅρους πού, ὡς πρός τούς τελευταίους, εἶναι μικρότατου μεγέθους πρώτης τάξης, πρέπει νά βάλουμε

$$ds^2 = -\Sigma dx_\nu^2 = dl^2(1-q^2), \tag{93}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = -\delta_{\mu\sigma}\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \sigma\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \mu\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\gamma_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}\right) \tag{94}$$

Θά θέλαμε ἐπίσης νά δοῦμε τό πρόβλημα τῆς προσέγγισης καί μέ διαφορετικό τρόπο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι πολύ μικρή συγκρινόμενη μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Τό ds, τότε, θά εἶναι τό ἴδιο πράγμα μέ τό διαφορικό τοῦ χρόνου dl. Ἀκόμη, dx_1/ds, dx_2/ds, dx_3/ds μηδενίζονται ὡς πρός dx_4/ds.

Ἄς ὑποθέσουμε, ἐπίσης, ὅτι τό πεδίο βαρύτητας ἐξαρτᾶται τόσο λίγο ἀπό τόν χρόνο, πού οἱ παράγωγοι τῶν $\gamma_{\mu\nu}$ ὡς πρός x_4, μποροῦν νά μή ληφθοῦν ὑπ' ὄψη. Τότε ἡ ἐξίσωση τῆς κίνησης γίνεται (γιά $\mu=1, 2, 3$).

(90α) $$\frac{d^2x_\mu}{dl^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\gamma_{44}}{2}\right).$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι στήν πραγματικότητα ἴδια μέ τήν νευτόνια ἐξίσωση τῆς κίνησης ἑνός σημείου μέσα στό πεδίο βαρύτητας, ἄν ταυτίσουμε τό $-\frac{\gamma_{44}}{2}$ μέ τό δυναμικό τοῦ πεδίου τῆς βαρύτητας. Ἡ ὀρθότητα αὐτοῦ τοῦ προσδιορισμοῦ ἐξαρτᾶται, φυσικά, ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ πεδίου βαρύτητας. Εἶναι ἀναγκαῖο, δηλαδή, νά καθορίσουμε ἄν αὐτό τό μέγεθος ἐκπληρώνει σέ πρώτη προσέγγιση τόν ἴδιο νόμο τοῦ πεδίου πού ἐκπληρώνει καί τό δυναμικό τῆς βαρύτητας στή θεωρία τοῦ Νεύτωνα. Ἕνα βλέμμα στίς (90) καί (90α) μᾶς δείχνει ὅτι οἱ $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ εἶναι ἀποτελεσματικές στό ρόλο τῆς πυκνότητας τοῦ πεδίου βαρύτητας. Αὐτά τά μεγέθη δέν ἔχουν τανιστικό χαρακτήρα.

Οἱ ἐξισώσεις (90) ἐκφράζουν τήν ἐπίδραση τῆς ἀδράνειας καί τῆς βαρύτητας πάνω στό ὑλικό σημεῖο. Ἡ ἑνότητα τῆς ἀδράνειας καί τῆς βαρύτητας βρίσκει τήν τυπική της ἔκφραση στό γεγονός ὅτι τό πρῶτο μέλος τῆς (90) ἔχει τανιστικό χαρακτήρα (ὡς πρός τυχαίους μετασχηματισμούς τῶν συντεταγμένων). Δέν συμβαίνει ὅμως τό ἴδιο γιά κάθε ὅρο ξεχωριστά. Γι' αὐτούς θά ἔπρεπε νά θεωρήσουμε, κατ' ἀναλογία μέ τίς νευτόνιες ἐξισώσεις, τόν πρῶτο ὅρο σάν ἔκφραση τῆς ἀδράνειας καί τόν δεύτερο σάν ἔκφραση τῆς δύναμης τῆς βαρύτητας.

Ὁ σκοπός πού θέλουμε τώρα νά φτάσουμε εἶναι ὁ νόμος τοῦ πεδίου βαρύτητας. Παίρνουμε σάν μοντέλο ἐξίσωσης τήν ἐξίσωση

$$\Delta\varphi = 4\pi K \varrho,$$

πού ὁ Poisson ἔβγαλε ἀπό τήν θεωρία τοῦ Newton. Ἡ βάση αὐτῆς τῆς ἐξίσωσης εἶναι ἡ ἰδέα ὅτι τό πεδίο βαρύτητας διεγείρεται ἀπό τήν πυκνότητα τῆς ζυγίσιμης ὕλης, ϱ. Τό ἴδιο θά πρέπει νά συμβαίνει καί στήν γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας. Οἱ ἔρευνες ὅμως στόν τομέα τῆς εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας μᾶς ἔδειξαν ὅτι τό βαθμωτό μέγεθος τῆς πυκνότητας τῆς μᾶζας πρέπει νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τόν τανιστή τῆς πυκνότητας τῆς ἐνέργειας. Αὐτός ὁ τελευταῖος δέν περιέχει μόνο τόν τανιστή τῆς ἐνέργειας τῆς Ζυγίσιμης μάζας, ἀλλά ἐπίσης καί τόν τανιστή τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς ἐνέργειας. Ἀκόμη εἴδαμε ὅτι στό φῶς μιᾶς βαθειᾶς διάλυσης ὁ τανιστής τῆς ἐνέργειας τῆς ὕλης θά πρέπει νά θεωρεῖται μόνο σάν ἕνα προσωρινό μέσο μέ τό ὁποῖο μποροῦμε νά ἀντιπροσωπεύουμε τήν ὕλη καί ὅτι δέν πιάνει τήν βαθύτερη φύση της. Στήν πραγματικότητα, ἡ ὕλη ἀποτελεῖται ἀπό στοιχειώδη ἠλεκτρικά σωματίδια, πού ἀποτελοῦν ἕνα τμῆμα, καί μάλιστα τό βασικό τμῆμα, τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. Μόνο τό γεγονός ὅτι οἱ πραγματικοί νόμοι τῶν συμπυκνωμένων ἠλεκτρομαγνητικῶν πεδίων δέν μᾶς εἶναι ἀκόμη ἀρκετά γνωστοί, μᾶς ὑποχρεώνει νά ἀφήσουμε γιά τήν ὥρα, στήν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας, τήν πραγματική δομή αὐτοῦ τοῦ τανιστῆ σέ μιά κατάσταση ἀκαθόριστη. Ἀπό αὐτή τήν ἄποψη, καλό θά εἶναι νά χρησιμοποιοῦμε, πρός τό παρόν ἕνα τανιστή $T_{\mu\nu}$ δεύτερης τάξης καί μέ ἀκαθόριστη γιά τήν ὥρα δομή, πού νά ἑνώνει προσωρινά τήν πυκνότητα ἐνέργειας τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου καί τῆς λεγόμενης ζυγίσιμης ὕλης. Θά τόν ὀνομάσουμε «τανιστή τῆς ἐνέργειας τῆς ὕλης».

Σύμφωνα μέ τά ἀποτελέσματα πού πήραμε προηγούμενα, τό θεώρημα τῆς ὁρμῆς καί τῆς ἐνέργειας ἐκφράζεται μέ τοῦτο: ὅτι ἡ ἀπόκλιση αὐτοῦ τοῦ τανιστῆ μηδενίζεται [ἐξίσωση (47α)). Ἡ συνδιακυμαινόμενη γενική ἐξίσωση πού ἀντιστοιχεῖ στήν τελευταία θά θεωρήσουμε ὅτι ἰσχύει ἐπίσης καί στή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας. Ἄν, λοιπόν, ($T_{\mu\nu}$) δηλώνει τόν συνδιακυμαινόμενο τανιστή ἐνεργείας τῆς ὕλης, $\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$ δηλώνει τήν μερική μικτή τανιστική πυκνότητα, πρέπει νά ἀπαιτοῦμε, σάν συνέπεια καί τῆς (83),

$$o = \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \mathfrak{T}_{\alpha}^{\beta}. \tag{95}$$

Ἀξίζει νά σημειώσουμε ὅτι, ἐκτός ἀπό τήν πυκνότητα ἐνέργειας τῆς ὕλης, θά πρέπει νά ὑπάρχει μιά πυκνότητα ἐνέργειας τοῦ πεδίου βαρύτητας, ἔτσι ὥστε νά μή μποροῦμε νά μιλᾶμε μόνο γιά τήν ἀρχή τῆς διατήρησης τῆς ἐνέργειας (ἤ τῆς ὁρμῆς) τῆς ὕλης. Ἀπό μαθηματική ἄποψη αὐτό ἐκφράζεται μέ τόν δεύτερο ὅρο στήν σχέση (95), πού κάνει ὥστε ἀπό τήν σχέση (95) νά μή μποροῦμε νά καταλήξουμε στήν ὕπαρξη μιᾶς ἐξίσωσης μέ μορφή ὁλοκληρώματος, στόν τύπο τῆς ἐξίσωσης (49). Τό πεδίο βαρύτητας μεταβιβάζει ἐνέργεια καί ὁρμή στήν «ὕλη» ἐξασκώντας ἐπάνω της δυνάμεις καί μεταδίνοντάς της ἐνέργεια, πράγμα πού ἐκφράζεται ἀπό τόν δεύτερο ὅρο στή σχέση (95).

Ἄν ὑπάρχει στή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας κάτι ἀνάλογο μέ τήν ἐξίσωση τοῦ Poisson, αὐτό θά πρέπει νά εἶναι μιά τανιστική ἐξίσωση γιά τόν τανιστή $g_{\mu\nu}$ τοῦ δυναμικοῦ τῆς βαρύτητας, στό δεύτερο μέλος τῆς ὁποίας θά ὑπάρχει ὁ τανιστής ἐνέργειας τῆς ὕλης. Στό πρῶτο μέλος αὐτῆς τῆς ἐξίσωσης θά πρέπει νά ὑπάρχει ἕνα διαφορικός τανιστής τῶν $g_{\mu\nu}$. Θά πρέπει τώρα αὐτόν τόν τελευταῖο νά τόν βροῦμε. Ὁ τανιστής αὐτός καθορίζεται τέλεια ἀπό τίς τρεῖς ἀκόλουθες συνθῆκες:

1ο Δέν πρέπει νά περιέχει διαφορικά πηλίκα μεγαλύτερα ἀπό τά πηλίκα δεύτερης τάξης.

2ο Πρέπει μέσα σ' αὐτά τά διαφορικά πηλῖκα δεύτερης τάξης νά εἶναι γραμμικός.

3ο Ἡ ἀπόκλισή του πρέπει νά εἶναι ταυτοτικά ἴση μέ μηδέν.

Οἱ δύο πρῶτες συνθῆκες, φυσικά, εἶναι δανεισμένες ἀπό τήν ἐξίσωση τοῦ Poisson. Μιᾶς καί μποροῦμε μαθηματικά νά ἀποδείξουμε ὅτι τέτοιοι διαφορικοί τανιστές μποροῦν νά σχηματιστοῦν μέ βάση τόν τανιστή τοῦ Riemann μέ ἀλγεβρικό τρόπο (δηλαδή χωρίς διαφόριση), ὁ τανιστής αὐτός πρέπει νά εἶναι τῆς μορφῆς

$$R_{\mu\nu} + a g_{\mu\nu} R,$$

ὅπου τά $R_{\mu\nu}$ καί R ὁρίζονται ἀπό τίς σχέσεις (88) ἤ (89). Μποροῦμε, ἀκόμη, νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ τρίτη συνθήκη ἀπαιτεῖ τό α νά παίρνει τήν τιμή: $-1/2$. Ἔτσι, σάν νόμο τοῦ πεδίου βαρύτητας ἔχουμε

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{96}$$

ἐξίσωση πού συνέπειά της εἶναι ἡ ἴδια μέ τῆς ἐξίσωσης (95). Τό κ εἶναι μιά σταθερά πού στή θεωρία τοῦ Newton εἶναι ἡ σταθερά τῆς βαρύτητας.

Θά ἤθελα, τώρα, νά ἀποκαλύψω τίς φυσικές πλευρές τῆς θεωρίας, πού ἔχουν μεγάλο ἐνδιαφέρον, ἐλατώνοντας στό ἐλάχιστο τή χρήση τῶν λεπτῶν μαθηματικῶν μεθόδων. Πρέπει πρῶτα-πρῶτα νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ἀπόκλιση τοῦ πρώτου μέλους γίνεται πράγματι μηδέν. Τό θεώρημα τῆς ἐνέργειας τῆς ὕλης ἐκφράζεται, μέ βάση τήν σχέση (83), μέ τόν παρακάτω τρόπο:

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha \mathfrak{T}_\alpha^\beta, \tag{97}$$

ὅπου

$$\mathfrak{T}_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau} g^{\tau\alpha} \sqrt{-g}.$$

Ἄν κάνουμε τό ἴδιο καί γιά τό πρῶτο μέλος τῆς σχέσης (96), θά πρέπει νά ὁδηγήσει σέ ταυτότητα.

Γύρω ἀπό κάθε σημεῖο τοῦ σύμπαντος, ὑπάρχουν συστήματα συντεταγμένων (μέ τή συντεταγμένη x_4 φανταστική) γιά τά όποῖα ἔχουμε στό δοσμένο σημεῖο, $g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=-\delta_{\mu\nu}$ (=1 ἤ =0, ἀντίστοιχα γιά $\mu=\nu$ καί $\mu\neq\nu$) καί οἱ πρῶτες παράγωγοι τῶν $g_{\mu\nu}$ καί $g^{\mu\nu}$ εἶναι ἴσες μέ μηδέν. Θά ἐξακριβώσουμε γιά τό σημεῖο αὐτό τό μηδενισμό τῆς ἀπόκλισης τοῦ πρώτου μέλους. Εἶναι σίγουρο ὅτι οἱ συνιστῶσες $\Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}$ μηδενίζονται στό δοσμένο σημεῖο, ὥστε νά ἔχουμε νά ἀποδείξουμε μόνο τό μηδενισμό τῆς

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\sqrt{-g}\, g^{\nu\sigma}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\right].$$

Μεταφέροντας τίς σχέσεις (88) καί (70) στήν πάρα πάνω ἔκφραση, διαπιστώνουμε ὅτι μένουν μόνο οἱ ὅροι πού περιέχουν τίς παράγωγους τρίτης τάξης τῶν $g_{\mu\nu}$. Καθώς οἱ τελευταῖες πρέπει νά ἀντικατασταθοῦν μέ $-\delta_{\mu\nu}$, παίρνουμε πολύ λίγους ὅρους πού μηδενίζονται ἀμοιβαία. Καί ἀφοῦ τό μέγεθος πού προκύπτει ἔχει τανιστικό χαρακτήρα, ἀπό αὐτό καί μόνο, ὁ μηδενισμός τους ἀποδεικνύεται γιά κάθε ἄλλο σύστημα συντεταγμένων καί, φυσικά, γιά κάθε σημεῖο (τετραδιάστατο). Ἡ ἀρχή τῆς ἐνέργειας τῆς ὕλης (97) εἶναι, ἄρα, μαθηματική συνέπεια τῶν ἐξισώσεων τοῦ πεδίου (96).

Γιά νά ξέρουμε ἄν οἱ ἐξισώσεις (96) συμφωνοῦν μέ τό πείραμα, πρέπει πρίν ἀπ' ὅλα νά βροῦμε ἄν ὁδηγοῦν στή θεωρία τοῦ Newton, σέ πρώτη προσέγγιση. Γιά τό σκοπό αὐτό, πρέπει στίς ἐξισώσεις αὐτές νά ὑποκαταστήσουμε μέ προσεγγίσεις. Γνωρίζουμε ἤδη, ὅτι σέ πολύ ἐκτεταμένους τομεῖς (πλανητικό σύστημα), ἡ Εὐκλείδια γεωμετρία καί ὁ νόμος τῆς σταθερότητας τοῦ φωτός ἰσχύουν κατά προσέγγιση. Αὐτό, ἄν ἡ τέταρτη συντεταγμένη εἶναι φανταστική, ὅπως στήν εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας, σημαίνει ὅτι βάζουμε

$$g_{\mu\nu}=-\delta_{\mu\nu}+\gamma_{\mu\nu}, \tag{98}$$

ὅπου τά $g_{\mu\nu}$ εἶναι τόσο μικρά ὡς πρός τή μονάδα, πού μποροῦμε νά ἀγνοήσουμε τίς ἀνώτερες δυνάμεις τους (καί τίς παραγώγους τους). Κάνοντάς το αὐτό, ἀσφαλῶς δέν μαθαίνουμε τίποτε γιά τή δομή τοῦ πεδίου βαρύτητας ἤ τοῦ μετρικοῦ διαστήματος σέ κοσμικές διαστάσεις, μαθαίνουμε ὅμως κάτι γιά τήν ἐπίδραση τῶν γειτονικῶν μαζῶν στά φυσικά φαινόμενα.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Πρίν κάνουμε αὐτή τήν προσέγγιση, πρέπει νά μετατρέψουμε τήν σχέση (96). Πολλαπλασιάζοντάς την ἐπί $g^{\mu\nu}$ (καί ἀθροίζοντας ὡς πρός μ καί ν) λαμβάνοντας ὑπ' ὄψη καί τή σχέση $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=4$, πού βγαίνει ἀπό τόν ὁρισμό τῶν $g_{\mu\nu}$, παίρνουμε τήν ἐξίσωση

$$R=\kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=\kappa T.$$

Βάζοντας τήν τιμή αὐτή τοῦ R στήν (96), γίνεται

$$R_{\mu\nu}=-\kappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)=-\kappa T^*_{\mu\nu}. \tag{96α}$$

Ἄν κάνουμε τήν προσέγγιση πού λέμε, παίρνουμε γιά τό πρῶτο μέλος

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\partial x_\alpha}-\frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\partial x_\alpha}\right),$$

ἤ

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial\gamma'_{\mu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\gamma'_{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha}\right),$$

ὅπου βάζουμε

(99) $$\gamma'_{\mu\nu}=\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\gamma_{\sigma\sigma}\delta_{\mu\nu}.$$

Πρέπει νά σημειώσουμε ὅτι οἱ ἐξισώσεις (96), ἰσχύουν γιά τυχαῖα συστήματα συντεταγμένων. Χρησιμοποιήσαμε τό σύστημα συντεταγμένων μέ μιά εἰδική ἔννοια του. Τό διαλέξαμε μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε στόν τομέα πού ἐξετάζουμε, τά $g_{\mu\nu}$ νά διαφέρουν ἀπειροελάχιστα ἀπό τίς σταθερές τιμές $-\delta_{\mu\nu}$. Αὐτή ὅμως ἡ συνθήκη ἐξακολουθεῖ νά ὑπάρχει γιά τυχαία ἀπειροστή μετατροπή τῶν συντεταγμένων, ὥστε νά μᾶς ἐπιτρέπεται ἀκόμη νά διαλέγουμε τέσσερις αὐθαίρετες σχέσεις γιά τίς $g_{\mu\nu}$, ὑπό τήν προϋπόθεση ὅμως ὅτι αὐτές θά ἀφήνουν ἀνέπαφη τή συνθήκη τῆς τάξης μεγέθους τῶν $g_{\mu\nu}$. Θέλουμε τώρα νά διαλέξουμε τό σύστημα συντεταγμένων μέ τέτοιο τρόπο πού νά ἐκπληρώνονται οἱ τέσσερις σχέσεις:

(100) $$0=\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}=\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\mu}.$$

Ἔτσι ἡ (96α) παίρνει τή μορφή

(96β) $$\frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 2\kappa T^*_{\mu\nu}.$$

Αὐτές οἱ ἐξισώσεις μποροῦν νά λυθοῦν μέ potentrels etondes, μέθοδος πού εἶναι πολύ γνωστή στήν ἠλεκτροδυναμική. Ἔτσι παίρνουμε, σέ μιά μορφή πού μποροῦμε εὔκολα νά καταλάβουμε,

(101) $$\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2\pi} \int \frac{T^*_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r} dV_0.$$

ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ NEWTON

Γιά νά δοῦμε κατά πόσο ἡ θεωρία μας περιέχει τή θεωρία τοῦ Newton, θά πρέπει νά ἐξετάσουμε ἀπό πιό κοντά τόν τανιστή ἐνέργεια, τῆς ὕλης. Ἄν τόν δοῦμε ἀπό φαινομενολογική ἄποψη, ἀποτελεῖται ἀπό τόν τανιστή τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου καί τόν τανιστή τῆς ὕλης μέ τήν πιό στενή ἔννοια. Ἄν ἀναλογιστοῦμε τά διάφορα στοιχεῖα τοῦ τανιστῆ ἐνέργειας ὡς πρός τό μέγεθός τους, βγαίνει ἀπό τά ἀποτελέσματα τῆς εἰδικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας ὅτι τό κομμάτι πού συνεισφέρει τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο πρακτικά ἐξαφανίζεται μπρός στήν ἐπίδραση πού ἐξασκεῖ ἡ ἐνέργεια τῆς Ζυγίσιμης ὕλης. Στό δικό μας σύστημα μέτρησης ἡ ἐνέργεια ἑνός γραμμάριου ὕλης εἶναι ἴση μέ τή μονάδα, ἐνῶ οἱ ἐνέργειες τῶν ἠλεκτρικῶν πεδίων ἀνάγονται σχεδόν στό μηδέν, ὅπως καί ἡ ἐνέργεια πού προκύπτει ἀπό τήν ἀλλαγή τῆς ὕλης καί ἀκόμη ἡ χημική ἐνέργεια. Παίρνουμε ἔτσι μιά προσέγγιση πολύ ἱκανοποιητική γιά τό σκοπό μας, ἄν βάλουμε

$$(102)\quad \begin{cases} T^{\mu\nu} = \sigma \dfrac{dx_\mu}{ds}\dfrac{dx_\nu}{ds}, \\ ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \end{cases}$$

ὅπου σ εἶναι ἡ πυκνότητα στήν κατάσταση ἠρεμίας, δηλαδή ἡ πυκνότητα τῆς Ζυγίσιμης μάζας μέ τή συνηθισμένη της ἔννοια, μετρημένη μέ τή μονάδα μέτρησης, ἀπό τή σκοπιά ἑνός γαλιλαίου συστήματος συντεταγμένων πού συνδέεται μ' αὐτήν.

Ἄς σημειωθεῖ, ἐπίσης, ὅτι μέ τήν ἐκλογή τῶν συντεταγμένων μας κάνουμε μόνο ἕνα πολύ μικρό σχετικό λάθος ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς $g_{\mu\nu}$ μέ $-\delta_{\mu\nu}$, ὥστε νά πρέπει νά βάλουμε

$$(102\alpha)\qquad ds^2 = -\Sigma dx^2_\mu.$$

Τά πιό πάνω ἀναπτύγματα ἰσχύουν γιά μάζες πού δημιουργοῦν πεδία καί πού ἔχουν τυχαῖες ταχύτητες ὡς πρός τό ἐκλεγμένο, σχεδόν γαλίλαιο σύστημα. Ἀλλά, στήν ἀστρονομία, ἔχουμε νά κάνουμε μέ μάζες, πού οἱ ταχύτητές τους ὡς πρός τό σύστημα συντεταγμένων πού χρησιμοποιεῖται, εἶναι πολύ μικρές, συγκρινόμενες μέ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός, δηλαδή μέ τή μονάδα, τήν ὁποία ἔχουμε εἰσαγάγει στή μέτρηση τοῦ χρόνου. Καί ἔτσι, φτάνουμε σέ μιά προσέγγιση ἱκανοποιητική γιά ὅλες σχεδόν τίς πρακτικές περιπτώσεις, ἄν ἀντικαταστήσουμε στήν (97) τά potentiels retardés μέ τά συνηθισμένα δυναμικά (non retartés) καί γιά τίς μάζες πού δημιουργοῦν πεδία, βάζουμε

(103) $$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \frac{dx_3}{ds} = 0, \quad \frac{dx_4}{ds} = \frac{\sqrt{-1}\,dl}{dl} = \sqrt{-1}.$$

Παίρνουμε, λοιπόν, γιά τά $T_{\mu\nu}$ καί $T^{\mu\nu}$ τίς τιμές

(104) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix}$$

γιά τό T τήν τιμή σ καί, τέλος, γιά τά $T^*_{\mu\nu}$ τίς τιμές

(104α) $$\begin{vmatrix} \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \end{vmatrix}$$

᾿Από τήν (97) λοιπόν βγαίνει

(101α) $$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}=-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r},$$

$$\gamma_{44}=+\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r},$$

ἐνῶ οἱ ἄλλες $\gamma_{\mu\nu}$ μηδενίζονται. ῾Η τελευταία ἀπ᾿ αὐτές τίς ἐξισώσεις μαζί μέ τήν (90α) ἀντιστοιχεῖ στή θεωρία τῆς βαρύτητας τοῦ Newton. ῎Αν ἀντικαταστήσουμε τό l μέ ct, ἔχουμε, πράγματι,

(90β) $$\frac{d^2 x_\mu}{dt^2} = \frac{\varkappa c^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \int \frac{\sigma dV_0}{r} \right\}.$$

Βλέπουμε ὅτι ἡ σταθερά K τῆς βαρύτητας τοῦ Newton συνδέεται μέ τή σταθερά κ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πεδίου μας μέ τή σχέση

(105) $$K = \frac{\kappa c^2}{8\pi}.$$

᾿Από τήν πολύ καλά γνωστή ἀριθμητική τιμή τῆς K, συμπεραίνουμε

(105α) $$\varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = \frac{8\pi . 6{,}67 . 10^{-8}}{9 . 10^{20}} = 1.86 . 10^{-27}.$$

᾿Από τήν (101) βγαίνει ὅτι, ἀκόμη καί σέ πρώτη προσέγγιση, ἡ δομή τοῦ πεδίου βαρύτητας διακρίνεται κατ' ἀρχήν ἀπό τή δομή πού μᾶς δίνει ἡ θεωρία τοῦ Newton. ῾Ο λόγος γι' αὐτό εἶναι ὅτι τό δυναμικό τῆς βαρύτητας ἔχει χαρακτήρα τανιστῆ καί ὄχι βαθμωτοῦ μεγέθους. Τό ὅτι αὐτό δέν τό καταλάβαμε νωρίτερα ἐξηγεῖται ἀπό τό γεγονός, ὅτι μόνο ἡ συνιστῶσα g_{44} μπαίνει στήν ἐξίσωση τῆς κίνησης τοῦ ὑλικοῦ σημείου σέ πρώτη προσέγγιση.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

῎Αν, τώρα, θέλουμε βασιζόμενοι στά ἀποτελέσματά μας, νά μάθουμε πῶς συμπεριφέρονται οἱ κανόνες καί τά ρολόγια, εἶναι ἀπαραίτητο νά ὑπολογίσουμε τό ἀκόλουθο γεγονός. ῾Ως πρός ἕνα καρτεσιανό σύστημα ἀναφορᾶς μέ διαστάσεις ἄπειρα μικρές πού βρίσκεται σέ κατάλληλη κινητική κατάσταση (σέ ἐλεύθερη πτώση καί χωρίς «στροφική κίνηση») οἱ σχέσεις μέτρησης τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας κρατοῦν τήν ἰσχύ τους σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας. Αὐτό διατηρεῖ τήν ἰσχύ του γιά τοπικά συστήματα συντεταγμένων, πού ἐπιταχύνονται ἀρκετά ἀργά ὡς πρός ἄλλα τέτοια συστήματα, καί ἄρα ἐπίσης καί γιά συστήματα πού ἠρεμοῦν ὡς πρός τό σύστημα συντεταγμένων πού διαλέξαμε. Γιά ἕνα τέτοιο τοπικό σύστημα, ἔχουμε (γιά δύο γειτονικά σημεῖα — γεγονότα).

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dT^2 = -dS^2 + dT^2,$$

ὅπου τό dS μετριέται ἀπ' εὐθείας μέ τόν πρότυπο κανόνα, τό dT ἀπ' εὐθείας μέ τό πρότυπο ρολόϊ πού βρίσκεται σέ ἠρεμία ὡς πρός τό σύστημα (φυσική μέτρηση μηκῶν καί χρόνων). Ἀπό τήν ἄλλη μεριά, ἀφοῦ τό ds^2, μέ τίς συντεταγμένες x_ν πού χρησιμοποιοῦμε γιά τούς πεπερασμένους χώρους, εἶναι γνωστό μέ τή μορφή

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

γίνεται δυνατό νά καθορίσουμε τή σχέση ἀνάμεσα στή φυσική μέτρηση μηκῶν καί χρόνων καί τίς διαφορές τῶν ἀντίστοιχων συντεταγμένων. Καί, δοσμένου ὅτι ἡ ἀνάλυση σέ χῶρο καί χρόνο συμφωνεῖ μέ τή μιά καί τήν ἄλλη ἐκλογή τῶν συντεταγμένων, ἡ σχέση πού παίρνουμε γιά τό ds^2 ἐξισώνοντας τίς δύο ἐκφράσεις ἀναλύεται σέ δύο. Βάζοντας σύμφωνα μέ τήν (102).

$$ds^2 = -\left(1+\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+\left(1-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl^2,$$

παίρνουμε μέ ἱκανοποιητική προσέγγιση

$$(106)\quad \begin{cases} \sqrt{dX_1^2+dX_2^2+dX_3^2} = \left(1+\dfrac{\kappa}{8\pi}\displaystyle\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}, \\ dT = \left(1-\dfrac{\kappa}{8\pi}\displaystyle\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl. \end{cases}$$

Ὁ πρότυπος κανόνας ἔχει, κατά συνέπεια, μῆκος $1-\kappa/8\pi\int\sigma dV_0/r$ ὡς πρός τό σύστημα συντεταγμένων πού διαλέξαμε. Ἡ εἰδική ἐκλογή τῶν συντεταγμένων μᾶς κάνει ὥστε αὐτό τό μῆκος νά ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τόν τόπο καί ὄχι ἀπό τή διεύθυνση. Ἄν εἴχαμε κάνει ἄλλη ἐκλογή, ἡ περίπτωση θά ἦταν διαφορετική. Ἀνεξάρτητο, ὅμως, ἀπό τήν ἐκλογή τῶν συντεταγμένων εἶναι τό γεγονός ὅτι οἱ νόμοι τῆς θέσης ἄκαμπτων ραβδιῶν δέν συμφωνοῦν μέ τούς νόμους τῆς εὐκλείδιας γεωμετρίας, δέν εἶναι, δηλαδή, δυνατό μέ κατάλληλη ἐκλογή συντεταγμένων νά κάνουμε ὥστε οἱ διαφορές τους ΔX_1, Δx_2, Δx_3, πού ἀντιστοιχοῦν στά δύο ἄκρα ἑνός πρότυπου κανόνα τοποθετημένου μέ τυχαῖο τρόπο, νά ὑπακοῦνε πάντα στή σχέση $\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\Delta x_3^2=1$. Μ' αὐτή τήν ἔννοια ὁ χῶρος δέν εἶναι εὐκλείδιος ἀλλά «καμπύλος». Ἀπό τή δεύτερη ἀπό τίς σχέσεις, πού ἀναφέραμε πιό πάνω, βγαίνει ὅτι στό χρονικό διάστημα μεταξύ δύο χτύπων τοῦ πρότυπου ρολογιοῦ ($dT=1$) στό σύστημα συντεταγμένων

μας, ἀντιστοιχεῖ ὁ «χρόνος» $1 + \frac{\varkappa}{8\pi}\int \frac{\sigma dV_0}{r}$.
r. Ἡ λειτουργία, λοιπόν, τοῦ ρολογιοῦ εἶναι τόσο πιό ἀργή ὅσο ὁ ἀριθμός τῶν ζυγίσιμων μαζῶν εἶναι μεγαλύτερος στό ἄμεσο περιβάλλον του. Ἄρα, ξετύλιγμα ὅλων τῶν φαινομένων πού ἔχουν ἕνα καθορισμένο ἐσωτερικό ρυθμό θά ἐπιβραδύνεται ἀπό τίς ζυγίσιμες μάζες πού βρίσκονται γύρω.

Μποροῦμε ἐπίσης νά συμπεράνουμε ὅτι οἱ φασματικές γραμμές πού παράγονται, στήν ἐπιφάνεια τοῦ Ἥλιου θά ὑποστοῦν ὡς πρός ἐκεῖνες πού παράγονται στή Γῆ μιά σχετική μετατόπιση πρός τό κόκκινο φτάνοντας περίπου στά $2 \cdot 10^{6}$ τοῦ μήκους κύματός τους. Αὐτή ἡ σπουδαία συνέπεια τῆς θεωρίας δέν φαίνονταν πρίν νά ἀποδεικνύεται ἀπό τά πειράματα. Ἀλλά οἱ παρατηρήσεις τῶν τελευταίων χρόνων ἔκαναν ὅλο καί πιό πιθανή τήν ὕπαρξη αὐτοῦ τοῦ φαινομένου, καί ἀναμφίβολα τά χρόνια πού θά ἀκολουθήσουν θά φέρουν καί τή σίγουρη ἐπιβεβαίωσή του.

Μιά ἄλλη συνέπεια τῆς θεωρίας πού ἡ ἀλήθειά της μπορεῖ νά ὑποβληθεῖ σέ πειραματικό ἔλεγχο εἶναι ἐκείνη πού ἀφορᾶ τήν διάδοση τῶν φωτεινῶν ἀκτίνων. Ὡς πρός ἕνα τοπικό ἀδρανειακό σύστημα ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός, σύμφωνα μέ τή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας εἶναι παντοῦ ἡ ἴδια (=1 σύμφωνα μέ τή φυσική μέτρηση τοῦ χρόνου πού υἱοθετήσαμε). Ὁ νόμος διάδοσης τοῦ φωτός σέ γενικές συντεταγμένες χαρακτηρίζεται σύμφωνα μέ τή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας ἀπό τήν ἐξίσωση

$$ds^2=0.$$

Χρησιμοποιώντας τήν προσέγγιση πού μελετήσαμε πρίν λίγο καί τίς συντεταγμένες πού διαλέξαμε, ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός θά χαρακτηρίζεται, σύμφωνα μέ τήν (106), ἀπό τήν ἐξίσωση

$$\left(1+\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)(dx^2_1+dx^2_2+dx^2_3)=\left(1-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}\right)dl^2.$$

Ἡ ταχύτητα τοῦ φωτός L ἐκφράζεται, λοιπόν, στίς συντεταγμένες μας ἀπό τήν ἐξίσωση

$$(107)\qquad L=\frac{\sqrt{dx^2_1+dx^2_2+dx^2_3}}{dl}=1-\frac{\kappa}{4\pi}\int\frac{\sigma dV_0}{r}.$$

Ἀπό δῶ μποροῦμε νά συμπεράνουμε ὅτι μιά φωτεινή ἀκτίνα, πού περνάει κοντά σέ μιά μάζα ὑπολογίσιμου μεγέθους παθαίνει ἀπόκλιση. Φανταζόμενοι τόν Ἥλιο τοποθετημένο στήν ἀρχή τοῦ συστήματος συντεταγμένων (μάζα M), μιά ἀκτίνα φωτός, πού περνάει στό ἐπίπεδο x_1, x_3 καί σέ ἀπόσταση Δ ἀπό τόν ἄξονα x_3, παράλληλα πρός αὐτόν, θά ὑποστεῖ συνολικά τήν ἀπόκλιση

$$\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial x_1}dx_3$$

πρός τήν κατεύθυνση τοῦ Ἥλιου. Λογαριάζοντας τό ὁλοκλήρωμα, ἔχουμε (108)

(108) $$\alpha = \frac{\kappa M}{2\pi\Delta}$$

῾Η ὕπαρξη τῆς ἀπόκλισης αὐτῆς, πού γιά Α=ἡλιακή ἀκτίνα, εἶναι 1,7, ἐπιβεβαιώθηκε μέ ἀξιοσημείωτη προσέγγιση ἀπό τήν ἀγγλική ἀποστολή γιά τήν ὁλική ἔκλειψη τοῦ ῞Ηλιου τό 1919. Λεπτά πειράματα γίνονται στίς μέρες μας γιά νά πάρουμε ἀκόμη πιό ἀκριβῆ ἀποτελέσματα κατά τήν ὁλική ἔκλειψη πού θά γίνει τό 1922 ([1]). ῎Ας σημειωθεῖ ἀκόμη ὅτι αὐτή ἡ συνέπεια τῆς θεωρίας δέν ἐπηρρεάζεται ἀπό τό αὐθαίρετο πού συνοδεύει τήν ἐκλογή τοῦ συστήματος συντεταγμένων μας.

᾿Εδῶ θά πρέπει νά μιλήσουμε γιά τήν τρίτη συνέπεια τῆς θεωρίας, πού εἶναι προσιτή στό πείραμα: ἀφορᾶ τήν κίνηση τῆς τροχιᾶς γύρω ἀπ' τόν ἥλιο τοῦ ῾Ερμῆ. ῾Η κίνηση τῶν τροχιῶν τῶν πλανητῶν ἀπό αἰῶνα σέ αἰῶνα εἶναι γνωστή μέ τέτοια ἀκρίβεια, πού ἡ προσέγγιση πού χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα δέν εἶναι πιά ἀρκετή γιά νά κάνουμε τή σύγκριση ἀνάμεσα στή θεωρία καί τήν πράξη. Θά πρέπει νά ξαναγυρίσουμε στίς γενικές ἐξισώσεις τοῦ πεδίου (96). Χρησιμοποίησα τή μέθοδο τῶν διαδοχικῶν προσεγγίσεων γιά τή λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος. ᾿Από τότε, ὅμως, τό πρόβλημα τοῦ στατικοῦ πεδίου βαρύτητας, πού εἶναι συμμετρικό ὡς πρός ἕνα κέντρο, λύθηκε ἀπό τόν Schwatzschild καί ἄλλους μέ τρόπο διεξοδικό. ᾿Ιδιαίτερα ὄμορφο εἶναι τό συμπέρασμα πού ἔβγαλε ἀπό αὐτό ὁ Weyl καί πού ὑπάρχει στό βιβλίο του *«Χῶρος-Χρόνος-῞Υλη»*. ῾Ο ὑπολογισμός μπορεῖ νά ἁπλουστευτεῖ ἄν δέν τόν στηρίξουμε ἀπ' εὐθείας στήν ἐξίσωση

(96), ἀλλά σέ μιά ἀρχή ἀλλαγῆς πού ἰσοδυναμεῖ μέ τήν (96). Θά δείξουμε μόνον ὅτι χρειάζεται γιά νά φανεῖ ἡ ἐξυπνάδα τῆς μεθόδου.

Στήν περίπτωση στατικοῦ πεδίου, τό ds^2 πρέπει νά ἔχει τή μορφή

$$(109)\qquad \begin{cases} ds^2 = -d\sigma^2 + f^2 dx_4^2, \\ d\sigma^2 = \sum\limits_{1-3} \gamma_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta, \end{cases}$$

ὅπου ἡ ἄθροιση τοῦ δεύτερου μέλους τῆς τελευταίας ἐξίσωσης δέν πρέπει νά ἐπεκτείνεται παρά μόνο στίς χωρικές μεταβλητές. Ἡ συμμετρία ὡς πρός τό κέντρο τοῦ πεδίου κάνει ὥστε οἱ $\gamma_{\mu\nu}$ νά πρέπει νά ἔχουν τή μορφή

$$(110)\qquad \gamma_{\alpha\beta} = \mu\delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta.$$

f^2, μ καί λ εἶναι ἐδῶ συναρτήσεις τοῦ r μόνο ($r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$). Μία ἀπό τίς τρεῖς αὐτές συναρτήσεις μπορεῖ, ἐξ αἰτίας τῆς ἐντελῶς αὐθαίρετης ἐκλογῆς τοῦ συστήματος συντεταγμένων, νά ἐκλεγεῖ αὐθαίρετα, γιατί μποροῦμε πάντα μέ τήν ὑποκατάσταση.

$$x'_4 = x_4,$$
$$x'_\alpha = F(r)x$$

νά κάνουμε ὥστε μία ἀπ' αὐτές τίς τρεῖς συναρτήσεις νά εἶναι συνάρτηση τοῦ x'. Μποροῦμε, κατά συνέπεια, χωρίς νά περιορίσουμε τή γενικότητα, νά βάλουμε στή θέση τῆς (108)

$$(110\alpha)\qquad \gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \lambda x_\alpha x_\beta.$$

᾽Από δῶ, οἱ $g_{\mu\nu}$ ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν δύο μεγεθῶν λ καί f. Στή συνέχεια, πρέπει νά τίς καθορίσουμε σάν συναρτήσεις r βάζοντάς τις στίς ἐξισώσεις (96) καί λογαριάζοντας πρῶτα τίς $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ ξεκινώντας ἀπό τίς (107) καί (108α). Ἔχουμε

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{x_\sigma}{r}\,\frac{\lambda' x_\alpha x_\beta + 2\lambda r \delta_{\alpha\beta}}{1+\lambda r^2} \quad (\text{γιά } \alpha,\beta,\sigma,=1,2,3),$$

$$\Gamma^{4}_{44} = \Gamma^{\alpha}_{4\beta} = \Gamma^{4}_{\alpha\beta} = o \quad (\text{γιά } \alpha,\beta=1,2,3),$$

$$\Gamma^{4}_{4\alpha} = \frac{1}{2} f^{-2} \frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}, \qquad \Gamma^{\alpha}_{44} = -\frac{1}{2} f^{-2} \frac{\partial f^2}{\partial x_\alpha}.$$

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ πεδίου στή συνέχεια μᾶς δίνουν, σύμφωνα μ᾽ αὐτές τίς σχέσεις, τή λύση τοῦ Schwarzschild

$$(109\alpha) \quad ds^2 = \left(1-\frac{A}{r}\right) dl^2 - \left[\frac{dr^2}{1-\frac{A}{r}} + r^2 (\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)\right],$$

ὅπου βάζουμε

$$(109\beta) \quad \left\{\begin{array}{l} x_4 = l, \\ x_1 = r\sin\theta\sin\varphi, \\ x_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \\ x_3 = r\cos\theta, \\ A = \dfrac{\kappa M}{4\pi}. \end{array}\right.$$

Τό Μ δηλώνει τή μάζα τοῦ Ἥλιου μέ κέντρο πού συμπίπτει μέ τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων. Ἡ λύση (109) ἰσχύει μόνο ἔξω ἀπ᾽ αὐτή τή μάζα, ἐκεῖ ὅπου ὅλα τά $T_{\mu\nu}$ γίνονται μηδέν. Ὅταν ἡ κίνηση τῶν πλανητῶν γίνεται στό ἐπίπεδο τῶν

$x_1 x_2$, ἡ (109) πρέπει νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν

$$(109\gamma) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{A}{r}\right) dl^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{A}{r}} - r^2 d\varphi^2.$$

῾Ο ὑπολογισμός τῆς πλανητικῆς κίνησης στηρίζεται στήν ἐξίσωση (90). ῾Η πρώτη ἀπό τίς ἐξισώσεις (108β) καί (90) μᾶς δίνει γιά τούς δεῖκτες 1,2,3

$$\frac{d}{ds}\left(x_\alpha \frac{dx_\beta}{ds} - x_\beta \frac{dx_\alpha}{ds}\right) = 0,$$

ἤ, ὁλοκληρώνοντας καί ἐκφράζοντας σέ πολικές συντεταγμένες,

$$(111) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{σταθ.}$$

᾿Ακόμη, ἀπό τήν (90) συμπεραίνεται γιά $\mu = 4$

$$o = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{df^2}{dx_2}\frac{dx_2}{ds} = \frac{d^2 l}{ds^2} + \frac{1}{f^2}\frac{df^2}{ds},$$

ἀπ' ὅπου, πολλαπλασιάζοντας μέ f^2 καί ὁλοκληρώνοντας, βγαίνει

$$(112) \qquad f^2 \frac{dl}{ds} = \text{σταθ.}$$

Στίς (109γ), (111) καί (112), ἔχουμε τρεῖς σχέσεις μέ τέσσερις μεταβλητές s,r,l,φ, ἀπ' ὅπου μποροῦμε νά λαγοριάσουμε τήν κίνηση τῶν πλανητῶν μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅπως καί στήν κλασσική μηχανική. Ἀποτέλεσμα εἶναι κύρια ἡ πλανητική ἔλλειψη νά κάνει στροφική κίνηση κάθε αἰῶνα, κατά τήν ἔννοια τῆς κυκλικῆς κίνησης, πού, μέ ἀπόλυτη γωνιακή μέτρηση, ἡ τιμή της γιά ἕνα πλήρη κύκλο φτάνει τό

$$\frac{24\pi^3\alpha^2}{(1-e^2)c^2T^2}, \tag{113}$$

ὅπου α εἶναι ὁ μεγάλος ἡμιάξονας τῆς πλανητικῆς τροχιᾶς σέ cm, e ἡ ἀριθμητική ψ ἡ excentricité, ταχύτητα τοῦ φωτός 3.10^{10} στό κενό, T ἡ διάρκεια ἑνός κύκλου σέ δευτερόλεπτα.

Αὐτή ἡ ἔκφραση μᾶς δίνει τήν ἐξήγηση τῆς κίνησης τοῦ περιήλιου τοῦ Ἑρμῆ πού εἶναι 42″ γιά κάθε αἰώνα καί πού ἡ θεωρητική ἀστρονομία δέν μπόρεσε μέχρι τώρα νά ἐξηγήσει ἱκανοποιητικά.

Δέν εἶναι δύσκολο νά ἐνσωματώσουμε στή γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας τή θεωρία τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου τοῦ Maxwell κάνοντας ἐφαρμογή τοῦ σχηματισμοῦ τανιστῶν (81), (82) καί (77). Στήν πραγματικότητα, ἄν φ_μ εἶναι τανιστής πρώτης τάξης πού μπορεῖ νά ἐξηγηθεῖ σάν ἠλεκτρομαγνητικό τετραδυναμικό, μποροῦμε νά ὁρίσουμε τόν τανιστή $\varphi_{\mu\nu}$ τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου μέ τή σχέση

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{114}$$

Τό δεύτερο σύστημα ἐξισώσεων τοῦ Maxwell ὁρίζεται ἔτσι ἀπό τήν τανιστική ἐξίσωση τῆς ὁποίας εἶναι συνέπεια:

(114α) $$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

καί τό πρῶτο σύστημα ἐξισώσεων τοῦ Maxwell ὁρίζεται ἀπό τή σχέση τῆς τανιστικῆς πυκνότητας

(115) $$\frac{\partial \mathfrak{f}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mathfrak{J}^\mu,$$

ὅπου

$$\mathfrak{f}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \varphi_{\sigma\tau},$$

$$\mathfrak{J}^\mu = \sqrt{-g}\, \rho \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Βάζοντας στό δεύτερο μέλος τῆς (96) τόν τανιστή ἐνέργειας τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου, παίρνουμε τήν (115), γιά τήν εἰδική περίπτωση ποῦ $\mathfrak{J}^\mu = 0$, σάν συνέπεια τῆς (96) μέ σχηματισμό τῆς ἀπόκλισης. Αὐτή ἡ ἐνσωμάτωση τῆς ἠλεκτρικῆς θεωρίας στό σχῆμα τῆς γενικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας θεωρήθηκε ἀπό πολλούς θεωρητικούς σάν ὄχι καλά στηριγμένη καί ὄχι ἱκανοποιητική. Δέν εἶναι δυνατό, μ' αὐτό τόν τρόπο, νά καταλάβουμε τήν ἰσορροπία τοῦ ἠλεκτρισμοῦ σέ κάθε στοιχειῶδες ἠλεκτρικό σωματίδιο. Θά ἔπρεπε μάλλον νά προτιμήσουμε μιά θεωρία πού παρουσιάζει τό πεδίο βαρύτητας καί τό ἠλεκτρομαγνητικό πεδίο σάν νά ἔχουν τήν ἴδια φύση. Ὁ H. Weyl καί, πιό πρόσφατα, ἡ Th. Kaluza, παρουσίασαν θεωρητικές πλευρές τοῦ θέματος αὐτοῦ πολύ ἐνδιαφέρουσες. Παρ' ὅλα αὐτά εἶμαι πεισμένος ὅτι δέν μᾶς πλησιάζουν στήν πραγματική λύση αὐτοῦ τοῦ σημαντικοῦ προβλήματος. Δέν θέλω νά ἐπεκταθῶ περισσότερο σ' αὐτά τά θέματα, ἀλλά θἄθελα ἀκόμη νά κάνω μιά σύντομη ἐξέταση τοῦ κοσμολογικοῦ προβλήματος, πού, ἄν τό παραλείψουμε, θά ἀφήσει ἡμιτελεῖς τίς σκέψεις γιά τή γενική σχετικότητα.

ΤΟ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Οἱ σκέψεις πού κάνουμε μέχρι τώρα βασίζονταν στίς ἐξισώσεις πεδίου (96). Δείχνουν τήν ἀντίληψη ὅτι ὁ χῶρος χοντρικά εἶναι γαλιλαῖος ἀπό τίς μᾶζες πού συνωστίζονται μέσα σ' αὐτόν. Ἡ ἀντίληψη, αὐτή ἀσφαλῶς ἦταν δικαιολογημένη ὅσο εἴχαμε ὑπ' ὄψη μας χώρους μέ τάξη μεγέθους πού συναντᾶμε στήν ἀστρονομία. Ἐδῶ ὅμως τό πρόβλημα εἶναι, ἄν μᾶς ἐπιτρέπεται νά θεωροῦμε σάν σχεδόν εὐκλείδια τμήματα τοῦ σύμπαντος μέ τυχαῖο μέγεθος. Γιά νά πάρουμε μιά ἰδέα, ἀρκεῖ νά θυμηθοῦμε τό παράδειγμα τῆς θεωρία τῶν ἐπιφανειῶν. Ἄν ἕνα τμῆμα τῆς ἐπιφάνειας εἶναι πρακτικά ἐπίπεδο, ἐν τούτοις δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά εἶναι ἐπίπεδη καί ὁλόκληρη ἡ ἐπιφάνεια. Θά μποροῦσε πολύ ὡραῖα νά εἶναι σφαιρική ἐπιφάνεια μέ ἀρκετά μεγάλη ἀκτῖνα. Ἤδη, πρίν τή Θεωρία τῆς σχετικότητας, εἴχαμε συζητήσει τό ἐρώτημα ἄν δέν θά μποροῦσε τό σύμπαν, στό σύνολό του, νά εἶναι μή εὐκλείδια, ἀπό γεωμετρική ἄποψη. Νά, ὅμως, πού αὐτό τό ἐρώτημα μπαίνει σέ νέα φάση, χάρη στή Θεωρία τῆς σχετικότητας, δοσμένου ὅτι, σύμφωνα μέ τή θεωρία αὐτή, ἡ γεωμετρική κατάσταση τῶν σωμάτων δέν εἶναι αὐτόνομη, ἀλλά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατανομή τῶν μαζῶν.

Ἄν τό σύμπαν ἦταν σχεδόν εὐκλείδιο, ὁ Mach δέν θά εἶχε δίκιο νά ὑποστηρίζει ὅτι τόσο ἡ ἀδράνεια ὅσο καί ἡ βαρύτητα ὀφείλονται σέ κάποιου εἴδους ἀμοιβαία δράση ἀνάμεσα στά σώματα. Γιατί, σ' αὐτή τήν περίπτωση, οἱ $g_{\mu\nu}$ (διαλέγοντας κατάλληλα τό σύστημα συντεταγμένων) θά ἦταν ἐπ' ἄπειρο σταθερές, ὅπως ἀπαιτεῖ ἡ εἰδική Θεωρία τῆς σχετικότητας. Καί οἱ τιμές τῶν $g_{\mu\nu}$ (μέ κατάλληλα ἐκλεγμένες συντεταγμένες) θά ἀπόκλιναν πολύ λίγο ἀπ' αὐτές τίς σταθερές τιμές, στό πεπερασμένο (fini), ἐξ αἰτίας τῆς ἐπίδρασης πού ἀσκεῖ ἡ ὕλη πού περιέχεται μέσα σ' αὐτό. Οἱ φυσικές ἰδιότητες τοῦ χώρου ἀσφαλῶς δέν θά ἦταν ὅλως δι' ὅλου αὐτόνομες, δηλαδή χωρίς νά δέχονται καθόλου ἐπιδράσεις ἀπό τήν ὕλη, ἀλλά θά ἦταν χοντρικά αὐτόνομες καί ἡ ὕλη πολύ λίγο θά τίς ἐπιρρέαζε. Μιά τέτοια δυαδική ἔννοια δέν εἶναι ἀπό μόνη της καί πολύ ἱκανοποιητική. Ὑπάρχουν ὅμως σημαντικοί φυσικοί λόγοι πού συνηγοροῦν ἐνάντιά της καί πού θά τούς ἐξετάσουμε τόν ἕνα ὕστερα ἀπό τόν ἄλλο.

Ἡ ὑπόθεση ὅτι τό σύμπαν εἶναι ἄπειρο καί εὐκλείδιο εἶναι, ἀπό τήν ἄποψη τῆς σχετικότητας, πολύ μπερδεμένη ὑπόθεση. Στή γλώσσα τῆς γενικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας, ἡ ὑπόθεση αὐτή ἀπαιτεῖ ὁ τανιστής τέταρτης τάξης τοῦ Riemann R_{iklm} νά μηδενίζεται στό ἄπειρο (20 ἀνεξάρτητες συνθῆκες), ἐνῶ στόν νόμο τοῦ πεδίου βαρύτητας ὑπεισέρχονται μόνο οἱ 10 συνιστῶσες καμπυλότητας $r_{\mu\nu}$. Καί, ὁπωσδήποτε, δέν εἶναι πολύ σωστό νά δεχόμαστε, χωρίς φυσικούς λόγους, ἕναν τόσο μεγάλο περιορισμό.

Κατά δεύτερο λόγο, γίνεται πολύ πιθανό, ἀπό τή Θεωρία τῆς σχετικότητας, ὁ Mach νά εἶχε δίκιο νά σκέφτεται ὅτι ἡ ἀδράνεια προέρχεται ἀπό τήν ἀμοιβαία δράση τῶν μαζῶν. Θά ἀποδείξουμε στή συνέχεια, ὅτι, σύμφωνα μέ τίς ἐξισώσεις μας, .οἱ μάζες ἠρεμίας δροῦν οἱ μέν πάνω στίς δέ (ἄν καί ἡ δράση αὐτή εἶναι πολύ ἀσθενής) μέ τήν ἔννοια τῆς σχετικότητας τῆς ἀδράνειας. Τί μᾶς κάνει νά προβλέψουμε τήν ἰδέα τοῦ Mach;

1ο Ἡ ἀδράνεια ἑνός σώματος πρέπει νά αὐξάνει ἄν συγκεντρώνονται στό περιβάλλον του ζυγίσιμες μάζες.

2ο Ἕνα σῶμα πρέπει νά δέχεται μιά ἐπιταχύνουσα δύναμη ἄν ὑπάρχουν μάζες στό περιβάλλον του πού ἐπιταχύνονται. Ἡ δύναμη πρέπει νά ἔχει τήν ἴδια φορά μέ τήν ἐπιτάχυνση.

3ο Ἕνα κοίλο σῶμα μέ στροφική κίνηση πρέπει στό ἐσωτερικό του νά δημιουργεῖ «πεδίο Coriolis» πού ἔχει σάν ἀποτέλεσμα τά κινούμενα σώματα νά ἀποκλίνουν κατά τήν ἔννοια τῆς στροφικῆς κίνησης. Πρέπει ἀκόμη νά δημιουργεῖ ἀκτινωτό πεδίο φυγόκεντρων δυνάμεων.

Θά δείξουμε ὅτι, σύμφωνα μέ τή θεωρία μας, αὐτά τά τρία ἀποτελέσματα πού πρόβλεψε ὁ Mach πρέπει πραγματικά νά ἐκδηλώνονται, ἄν καί θά συμβαίνουν σέ τόσο μικρή ἔκταση, ὥστε δέν θά ἔμπαινε θέμα νά τά ἀποδείξουμε πειραματικά στό ἐργαστήριο. Γιά τό σκοπό αὐτό, θά ξαναδοῦμε τήν ἐξίσωση τῆς κίνησης τοῦ ὑλικοῦ σημείου (90) γιά νά κάνουμε ἀκόμη μεγαλύτερη τήν προσέγγιση ἀπ' ὅ,τι ἔγινε στήν ἐξίσωση (90α).

Θεωροῦμε πρῶτα—πρῶτα τήν γ_{44} σάν μικρότατο μέγεθος πρώτης τάξης. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση τῆς ἐνέργειας, ἴδιας τάξης θά εἶναι καί

τό τετράγωνο τῆς ταχύτητας τῶν ματιῶν πού κινοῦνται κάτω ἀπό τήν ἐπίδραση τῶν δυνάμεων τῆς βαρύτητας. Εἶναι, ἄρα, λογικό νά θεωροῦμε τίς κινήσεις τοῦ ὑλικοῦ σημείου πού ἐξετάζουμε καθώς καί τίς κινήσεις τῶν μαζῶν πού παράγουν ἕνα πεδίο σάν μικρότατες κινήσεις τῆς τάξης $\frac{1}{2}$.
Θέλουμε τώρα νά ἐμβαθύνουμε παραπέρα τήν προσέγγιση τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τοῦ πεδίου (101) καί τῆς κίνησης (90), ἔτσι ὥστε νά μποροῦμε ἀκόμη νά ἔχουμε στό δεύτερο μέλος τῆς (90) τούς ὅρους πού ἡ ἐξάρτηση τους ὡς πρός αὐτές τίς ταχύτητες εἶναι γραμμική. Ἐπίσης δέν θά δεχτοῦμε τήν ἰσότητα μεταξύ τοῦ ds καί τοῦ *dl*, ἀλλά καθώς ταιριάζει σέ μιά πιό ἀκριβῆ προσέγγιση, θά βάλουμε

$$ds=\sqrt{g_{44}}\, dl=\left(1-\frac{\gamma_{44}}{2}\right) dl.$$

Ἀπό τήν (90) παίρνουμε πρῶτα

$$(116) \qquad \frac{d}{dl}\left[\left(1+\frac{\gamma_{44}}{2}\right)\frac{dx_\mu}{dl}\right]=-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{dl}\frac{dx_\beta}{dl}\left(1+\frac{\gamma_{44}}{2}\right).$$

Ἀπό τήν (101), κατά τήν ἔννοια τῆς προσέγγισης πού ἐπιθυμοῦμε, παίρνουμε

$$(117)\quad \begin{cases} -\gamma_{11} = -\gamma_{22} = -\gamma_{33} = \gamma_{44} = \dfrac{\varkappa}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\sigma\, dV_0}{r}, \\ \gamma_{4\alpha} = -\dfrac{3\varkappa}{2}\displaystyle\int \dfrac{\sigma \dfrac{dx_\alpha}{ds} dV_0}{r}, \\ \gamma_{\alpha\beta} = 0, \end{cases}$$

ὅπου a, q, δηλώνουν τούς δεῖχτες:

Στό δεύτερο μέλος τῆς (116), μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε τό $1^e g^{44}/2$ μέ τήν μονάδα, καί $-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ μέ $[^{\alpha\beta}{}_{\mu}]$. Ἐπίσης, μᾶς βολεύει νά δοῦμε ὅτι πρέπει νά βάλουμε γι' αὐτή τήν προσέγγιση

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 44 \\ \mu \end{bmatrix} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \gamma_{4\mu}}{\partial x_4}, \\ \begin{bmatrix} \alpha 4 \\ \mu \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{4\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial x_{4\alpha}}{\partial x_\mu}\right), \\ \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \mu \end{bmatrix} &= 0, \end{aligned}$$

ὅπου α,β καί μ εἶναι χωρικοί δεῖκτες. Σάν συνέπεια τῆς (116) παίρνουμε, μέ τή συνηθισμένη διανυσματική ἀπεικόνιση,

$$(118)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dl}[(1+\bar{\sigma})\mathfrak{v}] = \operatorname{grad}\bar{\sigma} + \dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial l} + [\operatorname{rot}\mathfrak{A}, \mathfrak{v}], \\ \bar{\sigma} = \dfrac{\varkappa}{8\pi}\displaystyle\int \dfrac{\sigma\, dV_0}{r}, \\ \mathfrak{A} = \dfrac{\varkappa}{2}\displaystyle\int \dfrac{\sigma \dfrac{dx_\alpha}{dl} dV_0}{r}. \end{cases}$$

Οἱ ἐξισώσεις τῆς κίνησης (118) δείχνουν, πράγματι, ὅτι:

1ο Ἡ μάζα ἠρεμίας εἶναι ἀνάλογη μέ 1+σ. Κατά συνέπεια, αὐτή αὐξάνει μέ τό πλησίασμα ζυγίσιμων μαζῶν στό ἐξεταζόμενο σῶμα (corps d'éprenve).

2ο Πάνω στό ἐξεταζόμενο σῶμα ἐξασκεῖται ἕνα ἐπαγωγικό φαινόμενο τῆς ἴδιας φορᾶς ἀπό ἐπιταχυνόμενες μάζες (ὅρος θ $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$).

3ο Στό ἐσωτερικό ἑνός κοίλου σώματος πού κινεῖται μέ στροφική κίνηση, ἕνα ὑλικό σημεῖο πού κινεῖται κανονικά στόν ἄξονα περιστροφῆς ἀποκλείνει κατά τήν ἔννοια τῆς περιστροφῆς αὐτοῦ τοῦ σώματος (πεδίο Coriolis). Τό φυγόκεντρο φαινόμενο πού ἀναφέραμε πιό πάνω, πού ἐκδηλώνεται στό ἐσωτερικό τῶν κοίλων σωμάτων πού κάνουν στροφική κίνηση εἶναι ἐπίσης ἀποτέλεσμα τῆς θεωρίας ([1]), ὅπως ἔδειξε ὁ M. Thirring.

Ἄν καί, ἐξ αἰτίας τοῦ μικροῦ μεγέθους τοῦ κ, ὅλα αὐτά τά φαινόμενα δέν εἶναι προσιτά στό πείραμα, ἡ ὕπαρξή τους, σύμφωνα μέ τήν γενική Θεωρία τῆς σχετικότητας, δέν μπαίνει σέ ἀμφισβήτηση. Τήν ὕπαρξη αὐτῶν τῶν φαινομένων πρέπει νά τή θεωροῦμε σάν γερό στήριγμα τῆς ἀντίληψης τοῦ Mach γιά τή σχετικότητα ὅλων τῶν φαινομένων τῆς ἀδράνειας. Ἄν προχωρήσουμε τήν ἰδέα αὐτή ἀκόμη πιό βαθειά, θά πρέπει νά περιμένουμε ὅλη ἡ ἀδράνεια, δηλαδή ὅλο τό πεδίο $g_{\mu\nu}$, νά καθορίζεται ἀπό τήν ὕλη τοῦ σύμπαντος, καί ὄχι ἀπό τίς συνθῆκες στά ὅρια τοῦ ἄπειρου.

Γιά μιά ἱκανοποιητική θεώρηση τοῦ πεδίου $g_{\mu\nu}$ στίς κοσμικές διαστάσεις, πρέπει νά συγκρατήσουμε τό σημαντικό γεγονός ὅτι ἡ σχετική ταχύτητα τῶν ἀστεριῶν εἶναι μικρή ὡς πρός τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Ἄρα, διαλέγοντας κατάλληλα τίς συντεταγμένες, ἡ g_{44} θά εἶναι σχεδόν σταθερή μέσα στό σύμπαν, τουλάχιστον στό τμῆμα του ὅπου ὑπάρχει ὕλη. Ἐπί πλέον, εἶναι φυσικό νά ὑποθέσουμε ὅτι ὅλες οἱ περιοχές τοῦ σύμπαντος περιέχουν ἀστέρια, ὥστε νά μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι ἡ διακύμανση τῆς g_{44} ὀφείλεται ἀποκλειστικά στό γεγονός ὅτι ἡ ὕλη δέν εἶναι κατανεμημένη κατά τρόπο συνεχῆ, ἀλλά εἶναι συγκεντρωμένη στά οὐράνια σώματα καί στά συστήματα πού αὐτά σχηματίζουν. Ἄν δέν πάρουμε ὑπ' ὄψη μας αὐτές τίς τοπικές ἀνωμαλίες τῆς πυκνότητας τῆς ὕλης καί τοῦ πεδίου $g_{\mu\nu}$ γιά νά πάρουμε μιά ἰδέα τοῦ γεωμετρικοῦ χαρακτήρα τοῦ σύμπαντος στό σύνολό του, φαίνεται φυσικό νά βάλουμε στή θέση τῆς πραγματικῆς κατανομῆς τῶν μαζῶν μιά συνεχῆ κατανομή μέ σταθερή πυκνότητα σ.

Σ' αὐτόν τόν φανταστικό κόσμο, ὅλα τά σημεῖα γεωμετρικά εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀπό τήν ἄποψη, λοιπόν, τοῦ χώρου τό σύμπαν θά ἔχει σταθερή καμπυλότητα καί θά εἶναι κυλινδρικό ὡς πρός τήν συντεταγμένη x_4. Ἰδιαίτερα ἱκανοποιητική εἶναι ἡ δυνατότητα νά ἔχει τό σύμπαν κάποιο σχῆμα στό χῶρο, δηλαδή (σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεσή μας γιά τή σταθερότητα τοῦ σ) νά ἔχει σταθερή καμπυλότητα, σφαιρική ἤ ἐλλειπτική, γιατί ἔτσι θά μπορούσαμε, στή βάση τῆς γενικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας, νά ἀντικαταστήσουμε τίς δύσχρηστες συνθῆκες τῶν ὅριων στό ἄπειρο μέ τήν πιό φυσική συνθήκη ὅτι ὁ χῶρος εἶναι κλειστός σφαιρικά.

Σύμφωνα μ' ὅ,τι μόλις πιό πάνω εἴπαμε, πρέπει νά βάλουμε

(119) $$ds^2=dx_4^2-\gamma_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu,$$

ὅπου οἱ δεῖκτες μ καί ν κινοῦνται ἀπό 1 μέχρι 3. Οἱ $\gamma_{\mu\nu}$ θά εἶναι οἱ συναρτήσεις τῶν x_1, x_2, x_3 μέ μορφή πού νά ταιριάζει σ' ἕνα τρισδιάστατο συνεχές μέ σταθερή θετική καμπυλότητα. Θά πρέπει τώρα νά δοῦμε ἄν μιά τέτοια ἔκφραση ὑπακούει στίς ἐξισώσεις τοῦ πεδίου βαρύτητας.

Πρίν ὅμως καταπιαστοῦμε μ' αὐτό τό θέμα, θά πρέπει πρῶτα νά ἐξετάσουμε τή διαφορική συνθήκη

Σύμφωνα μ' ὅ,τι μόλις πιό πάνω εἴπαμε, πρέπει νά βάλουμε

(119) $$ds^2=dx_4^2-\gamma_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu,$$

ὅπου οἱ δεῖκτες μ καί ν κινοῦνται ἀπό 1 μέχρι 3. Οἱ $\gamma_{\mu\nu}$ θά εἶναι οἱ συναρτήσεις τῶν x_1, x_2, x_3 μέ μορφή πού νά ταιριάζει σ' ἕνα τρισδιάστατο συνεχές μέ σταθερή θετική καμπυλότητα. Θά πρέπει τώρα νά δοῦμε ἄν μιά τέτοια ἔκφραση ὑπακούει στίς ἐξισώσεις τοῦ πεδίου βαρύτητας.

Πρίν ὅμως καταπιαστοῦμε μ' αὐτό τό θέμα, θά πρέπει πρῶτα νά ἐξετάσουμε τή διαφορική συνθήκη στήν ὁποία ὑπακοῦνε οἱ τρισδιάστατες πολλαπλότητες σταθερῆς καμπυλότητας. Μία σφαιρική πολλαπλότητα τριῶν διαστάσεων πού εἶναι βυθισμένη σ' ἕνα εὐκλείδιο τετραδιάστατο συνεχές ($_1$) δίνεται ἀπό τίς σχέσεις

$$x^2_1+x^2_2+x^2_3+x^2_4=\alpha^2,$$
$$dx^2_1+dx^2_2+dx^2_3+dx^2_4=ds^2.$$

Παραγράφοντας τό x_4, ἔχουμε

$$ds^2=dx^2_1+dx^2_2+dx^2_3+\frac{(x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3)^2}{\alpha^2-x^2_1-x^2_2-x^2_3}.$$

Ἄν παραλείψουμε τούς ὅρους τρίτου καί ἀνώτερου βαθμοῦ ὡς πρός x_ν, μποροῦμε, κατά συνέπεια, νά βάλουμε γιά τήν περιοχή τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων

$$ds^2=\left[\delta_{\mu\nu}+\frac{x_\mu x_\nu}{\alpha^2}\right]dx_\mu dx_\nu.$$

Τό μέγεθος μέσα στήν ἀγκύλη παριστάνει τίς $g_{\mu\nu}$ τῆς πολλαπλότητας γύρω ἀπ' τό σημεῖο μηδέν. Ἀφοῦ οἱ πρῶτοι παράγωγοι τῶν $g_{\mu\nu}$ γίνονται μηδέν στό σημεῖο μηδέν, καί ἄρα ἐπίσης καί οἱ $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, ὁ ὑπολογισμός τῶν $R_{\mu\nu}$ αὐτῆς τῆς πολλαπλότητας στό σημεῖο μηδέν εἶναι, σύμφωνα μέ τήν (88), πολύ ἁπλός. Ἔχουμε

$$R_{\mu\nu}=\frac{\alpha^2}{2}\delta_{\mu\nu}=\frac{\alpha^2}{2}g_{\mu\nu}.$$

Ἡ σχέση $R_{\mu\nu}=\alpha^2/2\ g_{\mu\nu}$ εἶναι συνδιακυμαινόμενη μέ τή γενική ἔννοια, καί ὅλα τά σημεῖα τῆς πολλαπλότητας εἶναι ἰσοδύναμα γεωμετρικά. Ἔτσι αὐτή ἡ σχέση ἰσχύει γιά κάθε σύστημα συντεταγμένων καί γιά κάθε σημεῖο τῆς πολλαπλότητας. Γιά νά ἀποφύγουμε τή σύγχυση μέ τό τετραδιάστατο συνεχές, θά θέλαμε νά παραστήσουμε τά μεγέθη πού ἀνάγονται στό τριδιάστατο συνεχές μέ ἑλληνικά γράμματα καί νά βάλουμε

$$(120) \qquad P_{\mu\nu} = \frac{\alpha^2}{2}\gamma_{\mu\nu}.$$

Ἄς περάσουμε τώρα στήν ἐφαρμογή τῶν ἐξισώσεων τοῦ πεδίου μας (96) στή δική μας ἰδιαίτερη περίπτωση. Σύμφωνα μέ τήν (119), παίρνουμε γιά τήν τετραδιάστατη πολλαπλότητα

(121) $R_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}$ (γιά τούς δεῖκτες πού ἔχουν τιμές ἀπό 1 μέχρι 3)

$$R_{14} = R_{24} = R_{34} = R_{44} = 0.$$

Σ' ὅ,τι ἀφορᾶ τό δεύτερο μέλος τῆς (96), αὐτό πού ὑπολογίζεται εἶναι ὁ τανιστής ἐνέργειας γιά τήν ὕλη πού εἶναι κατανεμημένη μέ τή μορφή σκόνης. Σύμφωνα μ' αὐτά πού μόλις εἴπαμε, περιοριζόμενοι στήν κατάσταση ἠρεμίας, θά ἔπρεπε νά βάλουμε

$$T^{\mu\nu} = \sigma \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Θά προσθέσουμε ὅμως ἕναν ἀκόμη ὅρο γιά τήν πίεση, πού μποροῦμε νά δικαιολογήσουμε φυσικά μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο. Ἡ ὕλη ἀποτελεῖται ἀπό στοιχειώδη ἠλεκτρικά σωματίδια. Δέν μποροῦμε, στηριζόμενοι στή θεωρία τοῦ Maxwell, νά θεωρήσουμε αὐτά τά τελευταῖα σάν ἠλεκτρομαγνητικά πεδία καί σάν νά μήν εἶναι τό καθένα μιά μονάδα. Ἕνα στοιχειῶδες σωματίδιο μπορεῖ νά ὑπάρχει παρά τήν ἄπωση πού τά ὅμοια φορτισμένα τμήματά του ἐξασκοῦν τό ἕνα πάνω στά ἄλλα. Γιά νά ἐξηγήσουμε τό γεγονός αὐτό χρησιμοποιοῦμε ἐνεργειακούς ὅρους, πού δέν περιέχονται στή θεωρία τοῦ Maxwell. Γιά νά ἐξηγήσει προσωρινά αὐτό τό φαινόμενο, ὁ Poincaré ὑπέθεσε ὅτι στό ἐσωτερικό αὐτῶν τῶν σωματιδίων ὑπάρχει μιά ὑπο–πίεση, πού ἐξουδετερώνει τήν ἠλεκτροστατική ἄπωση. Δέν εἶναι δυνατό νά ὑποστηρίξουμε ὅτι αὐτή ἡ πίεση ἐξαφανίζεται στό ἐξωτερικό τῶν στοιχειωδῶν σωματιδίων. Ἡ λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος θά γίνει πιό ἱκανοποιητική, ἄν στή φαινομελογική μας ἔκθεση τῆς ὕλης προσθέσουμε ἕναν ὅρο πού νά παριστάνει τήν πίεση. Αὐτό δέν πρέπει νά τό συγχέουμε μέ τήν πίεση στήν ὑδροδυναμική, πού χρησιμεύει μόνο γιά τήν ἐνεργειακή ἀναπαράσταση δυναμικῶν συνθηκῶν στό ἐσωτερικό τῆς ὕλης. Μ' αὐτήν τήν ἔννοια, βάζουμε

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \sigma \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} - g_{\mu\nu} p. \qquad (122)$$

Πρέπει, λοιπόν, στήν δική μας ἰδιαίτερη περίπτωση, νά βάλουμε

$$T_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} p \quad \text{(γιά μ καί ν ἀπό 1 μέχρι 3)},$$
$$T_{44} = \sigma - p,$$
$$T \;= -\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} p + \sigma - p = \sigma - 4p.$$

Δοσμένου ὅτι οἱ ἐξισώσεις πεδίου (96) μποροῦν ἐπίσης νά ἐκφραστοῦν μέ τή μορφή

$$R_{\mu\nu} = -x\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right),$$

ἀπό τήν (96) θά ἔχουμε τίς ἐξισώσεις

$$-\frac{2}{a^2}\gamma_{\mu\nu} = \varkappa\left(\frac{\sigma}{2} - p\right)\gamma_{\mu\nu},$$

$$0 = -\varkappa\left(\frac{\sigma}{2} + p\right);$$

ἀπ' ὅπου ϐγαίνει

(123) $$\begin{cases} p = -\frac{\sigma}{2}, \\ a = \sqrt{\frac{2}{\varkappa\sigma}}. \end{cases}$$

Ἔτσι ἱκανοποιεῖ τίς ἐξισώσεις πεδίου.

Γιά νά εἶναι τό σύμπαν σχεδόν εὐκλείδιο καί, ἄρα, ἡ ἀκτῖνα καμπυλότητάς του νά εἶναι ἄπειρη, πρέπει σ νά γίνει μηδέν. Δέν εἶναι ὅμως πιθανό ἡ μέση πυκνότητα τῆς ὕλης στό σύμπαν νά εἶναι πραγματικά μηδέν. Αὐτή εἶναι ἡ τρίτη ἔνδειξή μας ἐνάντια στήν ὑπόθεση ὅτι τό σύμπαν μας εἶναι σχεδόν εὐκλείδιο. Ἐπίσης ἡ πίεση πού ὑποθετικά χρησιμοποιήσαμε δέν μοιάζει νά μπορεῖ νά μηδενιστεῖ. Ἡ φυσική της σημασία δέν θά γίνει κατανοητή, παρά μόνο ὅταν θά ἔχουμε ἀποκτήσει ϐαθύτερη θεωρητική γνώση τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. Σύμφωνα μέ τή δεύτερη ἐξίσωση ἀπό τίς ἐξισώσεις (123), ἡ ἀκτίνα τοῦ σύμπαντος α καθορίζεται ἀπό τήν ὁλική μάζα M τῆς ὕλης, κατά τήν ἐξίσωση

(124) $$\alpha = \frac{M\kappa}{4\pi^2}.$$

Αὐτή ἡ σχέση ἀποδείχνει πολύ ὡραῖα τό γεγονός ὅτι ὁ γεωμετρικός χαρακτήρας ἐξαρτᾶται στενά ἀπό τήν φυσική σημασία.

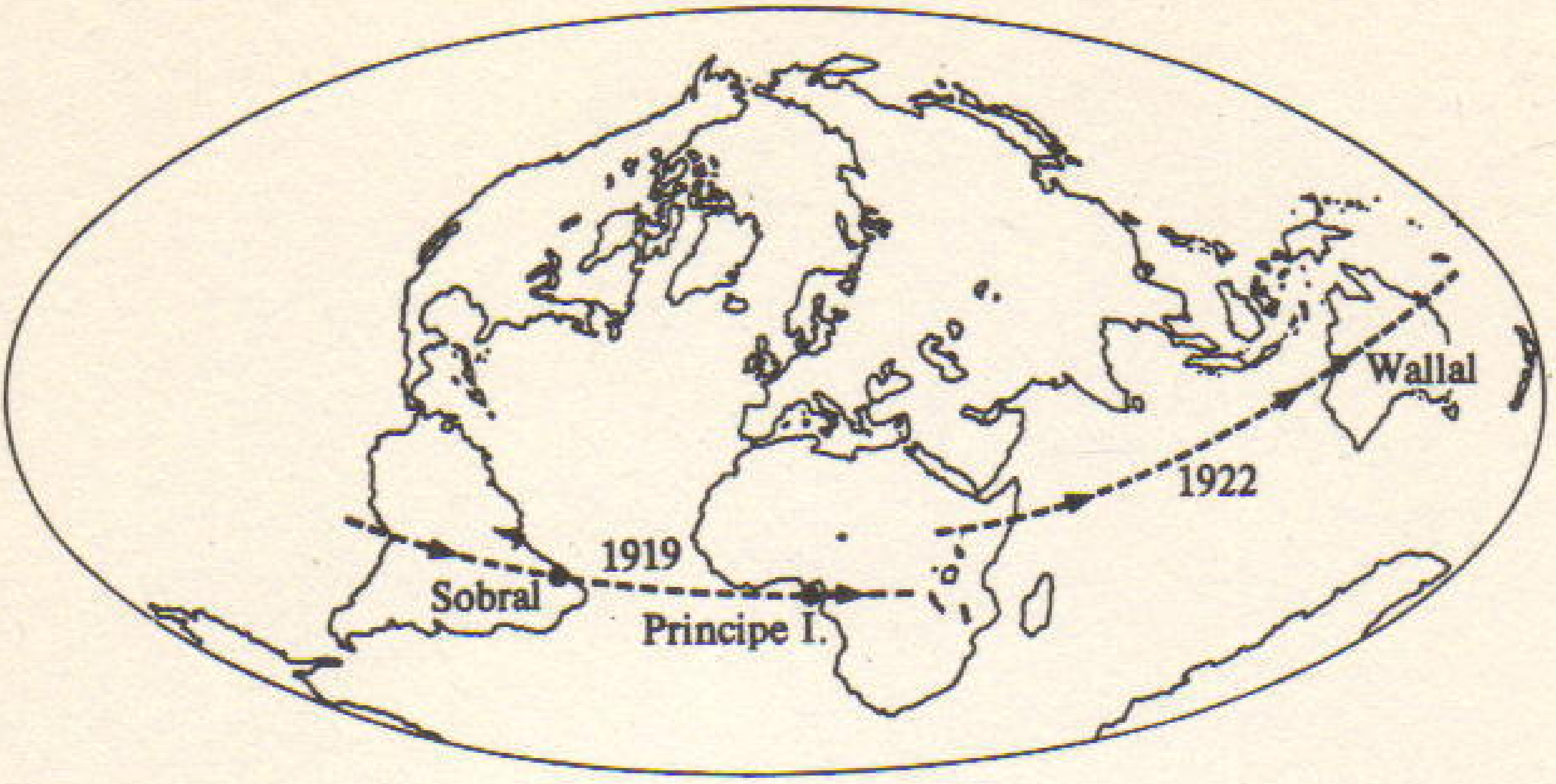
Μποροῦμε, λοιπόν, νά προωθήσουμε τίς παρακάτω ἰδέες, πού κλίνουν πρός τή μεριά ἑνός πεπερασμένου σύμπαντος, οἱ ὁποῖες παράλληλα ἀποδείχνουν τό λάθος τῆς ἀντίθετης ἀντίληψης, δηλαδή τοῦ κόσμου πού ἀπλώνεται στό ἄπειρο.

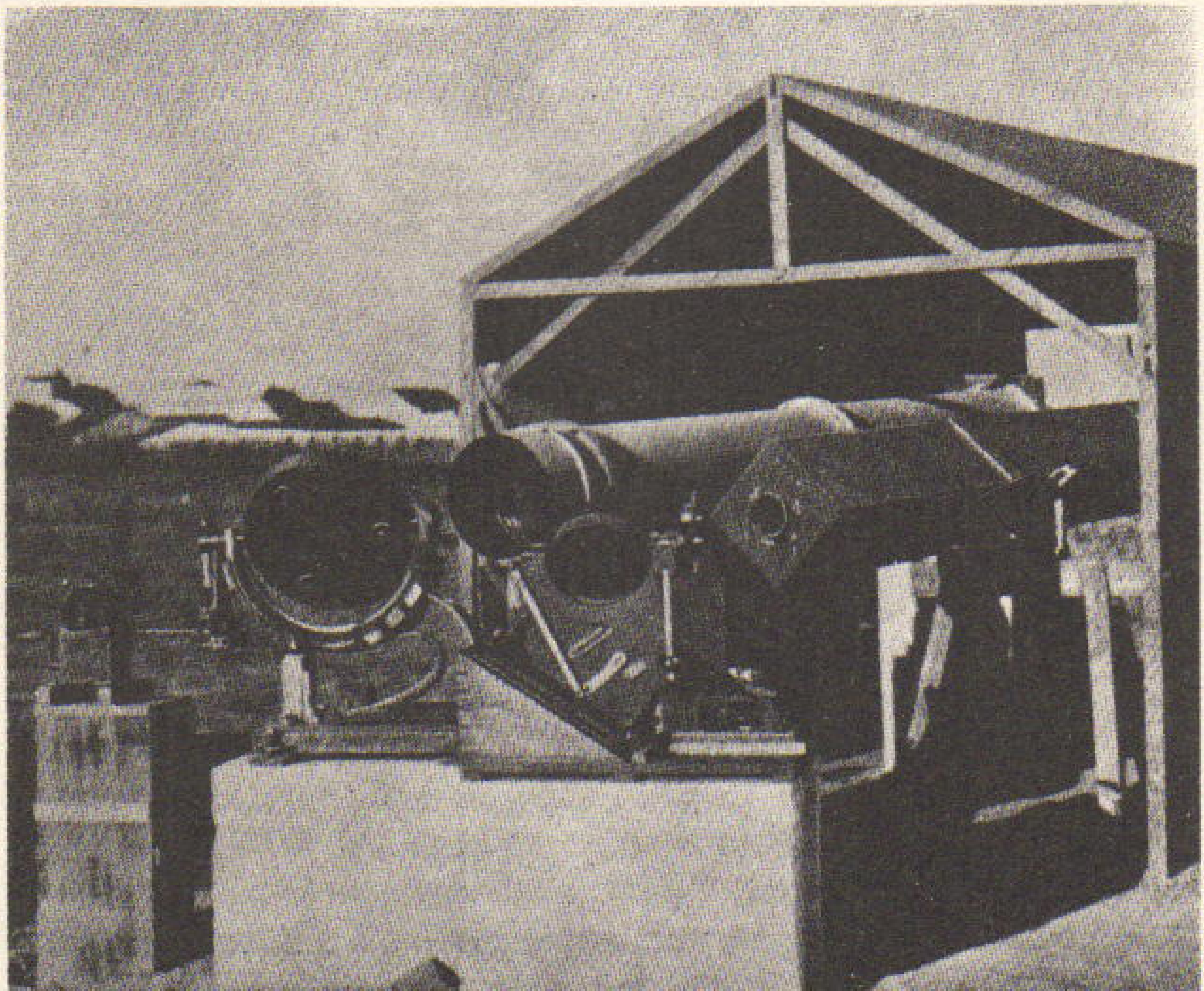
1ο Ἀπό τήν ἄποψη τῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας, ἡ συνθήκη τοῦ πεπερασμένου σύμπαντος εἶναι πολύ πιό ἁπλή ἀπ' αὐτήν πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιά δομή σχεδόν εὐκλείδια στό ἄπειρο.

2ο Ἡ ἰδέα τοῦ Mach, ὅτι ἡ ἀδράνεια ὀφείλεται στή δράση πού τά σώματα ἀσκοῦν τά μέν πάνω στά δέ, περιέχεται, σέ πρώτη προσέγγιση, στίς ἐξισώσεις τῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητας. Ἀπ' αὐτές τίς τελευταίες, πράγματι, βγαίνει, ὅτι ἡ ἀδράνεια προέρχεται, τουλάχιστον κατά ἕνα μέρος, ἀπό τή δράση τῶν μαζῶν τῶν μέν πάνω στίς δέ. Ἡ ἀντίληψη τοῦ Mach γίνεται ἔτσι πολύ πιθανή, δοσμένου ὅτι δέν θά ἦταν πολύ λογικό νά ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἀδράνεια κατά ἕνα μέρος προέρχεται ἀπό τήν ἀμοιβαία δράση τῶν μαζῶν καί κατά ἕνα ἄλλο μέρος ἀπό τίς ἐσωτερικές ἰδιότητες τοῦ χώρου. Ὅμως, μόνο ἕνα πεπερασμένο σύμπαν ἐναρμονίζεται ἀπόλυτα μέ τήν ἀντίληψη τοῦ Mach καί ὄχι ἕνα σύμπαν σχεδόν εὐκλείδιο καί ἄπειρο. Νοιώθουμε πάντως, ἀπό ἐπιστημονική ἄποψη, ἰδιαίτερη ἱκανοποίηση ὅταν βλέπουμε ὅτι οἱ μηχανικές ἰδιότητες τοῦ χώρου καθορίζονται ἀπόλυτα ἀπό τήν ὕλη, πράγμα πού εἶναι δυνατό μόνο στήν περίπτωση πού τό σύμπαν εἶναι πεπερασμένο στό χώρο.

3ο Ἕνα ἄπειρο σύμπαν εἶναι δυνατό μόνο ὅταν ἡ μέση πυκνότητα τῆς ὕλης εἶναι μηδέν. Μιά τέτοια ὑπόθεση ἀσφαλῶς, εἶναι πιθανή λογικά, ἀλλά λιγότερο πιθανή ἀπό ἐκείνη πού δέχεται τήν ὕπαρξη μιᾶς πεπερασμένης μέσης πυκνότητας τῆς ὕλης μέσα στόν κόσμο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ





Τά ὄργανα μέ τά ὁποία παρατηρήσανε τήν ἔκλειψη ἐπαληθεύοντας τίς προβλέψεις τοῦ Αϊνστάϊν.