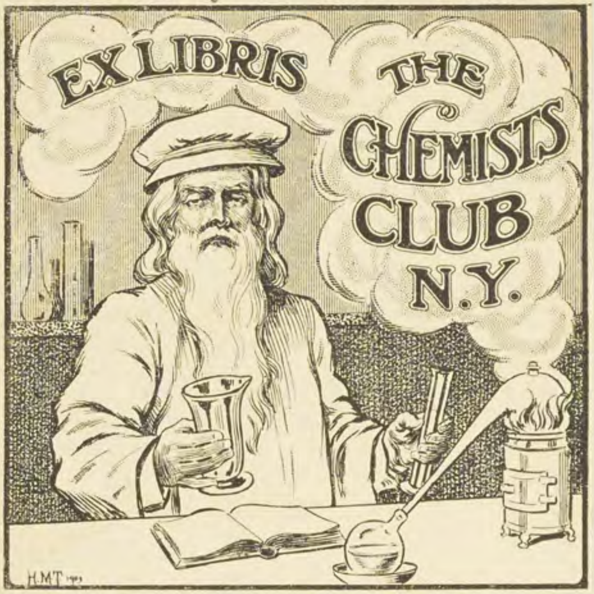
Presented by Dr. Walter Glaeser



Elemente

der

Krystallographie für Chemiker.

Dr. W. Glaeser.

Elemente
der
Krystallographie
für Chemiker.

Von

C. F. Rammelsberg,
Dr. und Professor der Chemie an der Universität, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Mit 151 Holzschnitten.

Berlin SW., 1883.
Verlag von Carl Habel.
(C. G. Lüderitz'sche Verlagsbuchhandlung.)
33. Wilhelm-Strasse 33.

Vorwort.

Das Studium der Chemie bedingt dasjenige der physikalischen Eigenschaften der Körper, also auch der Krystallformen, schon deswegen, weil diese gleichsam der Ausdruck ihrer chemischen Natur sind.

Die Kenntniss der Krystalle erlangt man jedoch nicht aus chemischen Lehrbüchern, denn entweder fehlt denselben der krystallographische Theil ganz oder er beschränkt sich auf eine rein äusserliche Beschreibung idealer Formen, die für das Wesen wirklicher Krystalle bedeutungslos sind.

Die Krystallographie hat eine mathematische und eine physikalische Grundlage. Ihr Studium bedingt lediglich elementare mathematische Kenntnisse und ist durch diese exakte Basis in hohem Grade anziehend.

Der Verfasser hat versucht, im vorliegenden Werke jüngeren Chemikern eine der wichtigsten Aufgaben ihres Studiums nach Kräften zu erleichtern. Für ein späteres tieferes Eindringen in die Krystallographie und die sich anschliessenden Gebiete der Physik bietet die Literatur vortreffliche Hülfsmittel.

Berlin, im April 1883.

C. R.

Inhalt.

Verbesserungen.

Seite 7 Zeile 11 von unten lies: der statt das.
„ 10 „ 16 „ „ „ drei statt die.
„ 19 „ 5 „ „ „ Goniometer.
„ 27 in Fig 25 muss die vertikale Linie fortfallen.
„ 28 Zeile 5 von unten lies: $\frac{a}{1} : \frac{b}{2}$.
„ 41 „ 4 „ „ „ 1,9 statt 0,9.
„ 79 in Fig. 63 ist die Schraffirung der beiden Hälften der oberen Fläche unrichtig. Sie kommt den beiden weissen zu.
„ 84 „ „ 72 fehlt die Schraffirung der oberen rechten Fläche.
„ 90 „ „ 81 ist *d* statt *b* zu setzen.

Einleitung.

Ein selbständiger fester Körper ist entweder amorph oder krystallisirt. Ein amorpher Körper besitzt keine bestimmte äussere Form; seine Masse zeigt nach keiner Richtung Unterschiede, was Cohäsion, Elasticität etc. betrifft; sie ist einfach lichtbrechend, leitet die Wärme nach jeder Richtung gleichartig u. s. w.

Feste amorphe Körper finden sich unter den Elementen gleichwie unter den Verbindungen. Schwefel, Selen, Phosphor, Bor, Silicium, Kohlenstoff existiren in amorphem Zustande. Viele Niederschläge (die flockigen, schleimigen, käsigen) sind gleich vielen organischen Verbindungen amorph.

Ein und derselbe Körper kann amorph und krystallisirt erscheinen. Schwefel, Selen, Phosphor, Kohlenstoff, Bor, Silicium unter den Elementen, Kieselsäure, Thonerde, Schwefelantimon, Schwefelquecksilber, kohlensaurer Kalk, viele Silicate sind Beispiele. In beiden Zuständen sind die physikalischen Eigenschaften des Körpers ganz andere, wie z. B. die Farbe, das optische Verhalten, das V. G., die Schmelzbarkeit, Wärme- und Elektricitätsleitung, die Löslichkeit in gewissen Mitteln.

Der eine Zustand geht in den anderen über, und zwar häufig unter dem Einfluss der Wärme. Schwefel, Selen, Phosphor, Kieselsäure, Schwefelantimon, Silicate werden als krystallisirte Körper durch Schmelzen amorph; aber auch amorpher Schwefel, amorphes Selen, amorphe Kieselsäure und arsenige Säure werden durch Erhitzen zu krystallisirten Körpern; geschmolzenes amorphes Schwefelantimon erstarrt als krystallisirtes. Silicate (Schlacken, Glas) liefern bei schneller Abkühlung amorphe, bei langsamer krystallisirte Massen. Unter Umständen verwandeln sich sogar feste amorphe Körper von selbst in krystallisirte; wie z. B. arsenige Säure, Zucker, manche Niederschläge.

Beim Uebergange aus dem einen in den anderen Zustand zeigt sich, dass die Körperwärme beider verschieden ist, daher unter Umständen Wärme frei wird. Eine Lösung von amorpher arseniger Säure liefert unter Lichtentwickelung Krystalle.

Zur Erklärung des amorphen Zustandes wird angenommen, dass die Moleküle keine bestimmte Stellung gegen einander haben.

Auch Gemenge können amorphe Massen bilden (Gläser, Schlacken, gewisse Gesteine).

Ein krystallisirter Körper besitzt nicht blos eine bestimmte äussere Form, welche ihm wesentlich ist und mit seiner chemischen Natur im Zusammenhang steht, sondern seine Masse zeigt auch nach gewissen Richtungen Unterschiede, die auf eine ganz bestimmte gesetzliche Anordnung seiner Moleküle oder grösserer Molekülgruppen schliessen lassen. Diese Unterschiede zeigen sich in der Elasticität und Cohäsion (Spaltbarkeit, Härte), in dem Verhalten gegen das Licht, die Wärme, Elektricität und den Magnetismus.

Bei einem amorphen Körper lässt sich aus seinen physikalischen Eigenschaften kein Schluss auf seine Selbständigkeit ziehen. Die bestimmte Krystallform hingegen ist das Kennzeichen eines chemisch selbständigen Körpers und schon darum von grosser Wichtigkeit.

Die Kenntniss der Krystallformen wird durch die Krystallographie vermittelt, welche für die Mineralien am frühesten zur Anwendung gelangt und bei ihnen am vollkommensten entwickelt ist. Zur Kenntniss eines Krystalls genügt aber nicht eine empirische rein äusserliche Beschreibung der Zahl, Gestalt und Lage seiner Flächen, sondern es sind zwei Aufgaben zu lösen: 1. die physikalische Gleichheit oder Differenz seiner Begrenzungselemente (Flächen) ist festzustellen, d. h. die Richtungen sind aufzusuchen, nach welchen der Krystall sich physikalisch gleich oder verschieden verhält, sein Symmetriegesetz ist zu bestimmen; und 2. sind die Neigungen der Flächen gegen einander, d. h. die Kantenwinkel zu ermitteln, aus welchen sich das Linearverhältniss gewisser Symmetrierichtungen (Axen) und deren gegenseitige Lage ergiebt. Hiernach sind die Krystalle nicht abstrakte geometrische Körper, sondern ihre Erforschung ist eine physikalisch-mathematische.

Ein Krystall ist von Flächen begrenzt, deren geometrische und physikalische Verhältnisse für jeden chemisch selbstständigen Körper von besonderer Art sind. Die Krystallform als äussere Form ist für jeden Körper eine wesentliche, durch seine chemische Natur bedingte.

In einem jeden Krystall zeigt die Masse nach gewissen Richtungen ein physikalisch gleiches, nach anderen ein ungleiches Verhalten. (Unterschiede der Cohäsion, als Spaltbarkeit und ungleiche Härte erscheinend; ferner optische, thermische, elektrische und magnetische Unterschiede.)

Eine Krystallfläche wird theoretisch als eine Ebene betrachtet. In der Wirklichkeit nähert sie sich einer solchen mehr oder weniger.

Jede Fläche am Krystall entspricht einer Parallelfläche. Nur bei gewissen hälftflächigen Krystallen ist dies nicht der Fall.

Zwei Flächen schneiden sich in einer Kante; drei oder mehr in einer Ecke.

Jede Fläche (und ihre Parallele) hat nicht blos an der Aussenseite des Krystalls Realität; sie existirt überall in seinem Innern, natürlich in paralleler Lage. Dies folgt schon aus der Bildung und Vergrösserung des Krystalls, wobei jede Begrenzungsfläche durch Ansatz neuer Masse in das Innere rückt. Wird ein Krystall parallel einer seiner Flächen getheilt, so sind die Bruchstücke nicht als Theile, sondern immer noch als vollständige Krystalle anzusehen.

Die den äusseren Flächen entsprechenden inneren Flächen kommen beim Zerschlagen eines Krystalls als Spaltungsflächen wieder zum Vorschein. Spaltungsrichtungen sind diejenigen, nach welchen die Cohäsion eine geringere ist, und je mehr dies der Fall, um so vollkommener ist die Spaltbarkeit. Solchen äusseren Flächen, welche physikalisch gleich sind (gleichwerthigen Flächen), gehen auch Spaltungsrichtungen von gleicher Vollkommenheit parallel. In der Spaltbarkeit nach den verschiedenen Flächen zeigen sich jedoch so grosse Unterschiede, dass sie für manche sich der Beobachtung entziehen. Nur theoretisch gilt der Satz: jeder äusseren Fläche entspricht eine innere oder Spaltungsfläche.

Die Lage einer Fläche gegen die übrigen ist eine unveränderliche Grösse. Die Neigung einer Fläche gegen die in Kanten anstossenden ist durch die Kantenwinkel gegeben. Jener Satz lautet also auch so: Die Kantenwinkel der Krystalle sind bestimmte (constante) Werthe. Kleine Abweichungen werden durch Störungen bei der Krystallbildung herbeigeführt.

Die Bestimmung der Kantenwinkel erfolgt durch Messung mit dem Goniometer, und eine solche Messung liefert ein um so genaueres Resultat, je mehr die Flächen den Charakter wirklicher Ebenen an sich tragen.

Wie wir weiterhin sehen werden, kann ein Krystall von lauter physikalisch gleichen (gleichwerthigen) Flächen umschlossen sein und heisst dann eine einfache Form. Er kann aber auch eine Combination, eine Durchdringung von zwei, drei oder mehr einfachen Formen sein, in welchem Fall seine Flächen demgemässe physikalische Ungleichheiten zeigen. Immer aber sind an zwei Krystallen solche Kantenwinkel unter sich gleich, bei welchen die Flächen des einen denen des anderen gleichwerthig sind.

Während die Neigungen der Flächen gegen einander unveränderlich sind, ist ihre Gestalt sehr veränderlich und deshalb unwesentlich. Diese Veränderlichkeit ist durch den Abstand der einzelnen Flächen von ihren Parallelen bedingt, welcher selbst bei Krystallen, die dicht neben einander sich gebildet haben, verschieden sein kann. Die Umstände, unter welchen ein Krystall sich bildet und vergrössert, ob frei in einer Flüssigkeit, oder aufgewachsen auf einer Unterlage, bewirken oft eine sehr ungleiche Ausdehnung nach verschiedenen Richtungen, was schon aus den trivialen, an sich nichtssagenden Bezeichnungen: tafelartige oder nadelförmige Krystalle hervorgeht.

Chlorkalium (ebenso Jodkalium) krystallisirt in Formen, gebildet von drei Flächen (und ihren Parallelen), welche rechtwinklig gegen einander geneigt sind. Allein kaum findet man zwei Krystalle, bei welchen das Verhältniss der drei Kantenlängen dasselbe wäre; die Flächen sind Rechtecke, und nur bisweilen zeigt eine oder die andere eine Annäherung an ein Quadrat.

Betrachtet man einen Krystall von Alaun, so bemerkt man, dass die vier Flächen Dreiecke, Vierecke, Fünfecke und Sechsecke bilden, letztere besonders dann, wenn eine der Flächen ihrer Parallelen sehr nahe liegt.

Die Fig. 1, 2 und 3 stellen Alaunkrystalle dar, und zwar ebensowohl solche von Thonerde- als auch von Chromalaun. Ganz gleicher Art sind die natürlichen Krystalle des Magneteisens.

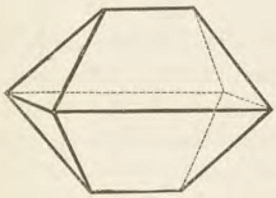


Fig. 1.

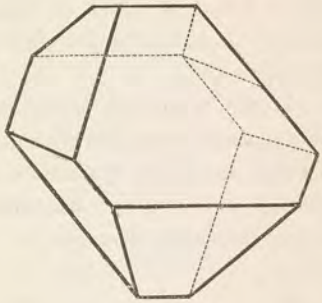


Fig. 2.

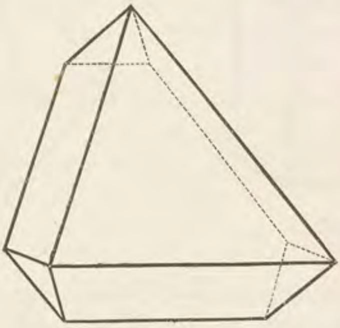


Fig. 3.

Schon aus diesem Beispiel folgt, dass die Gestalt der Flächen veränderlich, mithin unwesentlich und dass sie für das Erkennen eines Krystalls unbrauchbar ist.

Das Wesentliche ist die Neigung der Flächen und ihre physikalische Gleichheit oder Ungleichheit.[1])

[1]) Der Begriff der physikalischen Gleichheit wird weiterhin genauer bestimmt. Vorläufig sei bemerkt: Spaltbarkeit, Glanz, Härte und andere physikalische Eigenschaften sind an solchen Flächen gleich.

Die drei Flächen des Chlorkaliums sind physikalisch gleich und schneiden sich in einem Punkt (einer Ecke) unter rechten Winkeln; die äussere Verschiedenheit beruht darauf, dass das Verhältniss der Entfernung jeder einzelnen Fläche von ihrer Parallelen ein ganz unbestimmtes ist.

Die vier Flächen des Alauns sind ebenfalls physikalisch gleich und in allen ihren stumpfen Kanten unter 109° 28′ gegen einander geneigt, gleichviel welche Gestalt sie besitzen.

Da jede Fläche parallel mit sich im Krystall gleichsam verborgen ist, da sie also in Gedanken in das Innere versetzt werden kann, so lässt sie sich für die Betrachtung so zu sagen rücken, d. h. ihrer Parallelfläche nähern oder von derselben entfernen.

Denkt man sich in dieser Art die drei Flächen des Chlorkaliums und ihre Parallelen gleich weit entfernt von einander so erscheinen sie sämmtlich als Quadrate, Fig. 4. Geschieht dasselbe mit den vier Flächen des Alauns, so werden sie gleichseitige Dreiecke, Fig. 5.

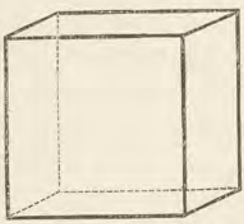


Fig. 4.

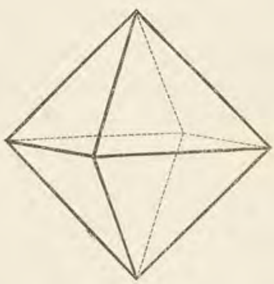


Fig. 5

Die hierdurch entstehenden Formen sind ideale Krystallformen; sie finden sich in der Wirklichkeit nicht. Sehr mit Unrecht bezeichnet man oft die wirklich vorkommenden unsymmetrischen Krystalle als verzerrte Formen der idealen. Solche ideale Krystalle wie die Zeichnungen und Modelle sie gewöhnlich darstellen, sind eigentlich blos mathematische Abstraktionen, denen sich die wirklichen Krystalle allerdings zuweilen so sehr nähern, dass man sie für ideale symmetrische halten könnte, wie z. B. dies bei vielen Alaunkrystallen der Fall ist.

Der Krystall des Chlorkaliums heisst Würfel. Ein Würfel in krystallographischem Sinne ist durch drei physikalisch gleiche, sich in einem Punkte und unter rechten Winkeln schneidende Flächen gegeben. Wäre eine der Flächen physikalisch verschieden von den beiden anderen, so würde das Ganze, selbst wenn die Flächen scheinbar Quadrate bildeten, durchaus kein Würfel, sondern ein quadratisches Prisma mit Endfläche sein. Der mathematische Würfel ist eine abstrakte Form, bei welcher von der physikalischen Beschaffenheit der Flächen oder der Masse nicht die Rede sein kann.

Das Krystall des Alauns heisst reguläres Oktaeder, weil er aus vier physikalisch gleichen, sich unter gleichen Winkeln schneidenden Flächen besteht.

Die Zeichnungen und Modelle stellen, wie schon gesagt, gewöhnlich nur ideale Krystallformen dar, und die Lehrbücher geben meist Definitionen, welche nur auf diese passen. Dadurch entsteht der grosse Nachtheil, dass die Anschauung sich lediglich auf Formen beschränkt, welche in der Natur gar nicht oder blos ausnahmsweise vorkommen.

Flächen, welche sich in parallelen Kanten schneiden bilden eine Zone. Jede dieser Kanten, oder überhaupt eine ihnen parallele Linie heisst eine Zonenaxe.

Wird eine Kante abgestumpft, d. h. tritt an ihre Stelle eine Fläche, so bildet dieselbe mit den beiden vorhandenen Flächen parallele Kanten, und fällt also mit ihnen in eine Zone. Wird eine Kante zugeschärft, d. h. treten zwei Flächen an ihre Stelle, so erfolgt dasselbe hinsichtlich dieser beiden Flächen.

Jeder Complex von zwei oder mehr Flächen (und ihren Parallelen), welcher nur eine Zone hat, heisst ein Prisma. Ein vierseitiges Prisma besteht aus zwei, ein sechsseitiges aus drei Flächen und ihren Parallelen u. s. w. Ein Prisma ist ein offener Krystallraum; durch Hinzutreten einer Fläche, welche mit jeder Prismenfläche eine neue Zone bildet, wird es eine geschlossene Form. Zu einem Krystall gehören also wenigstens drei Flächen (und ihre Parallelen).

Jede Fläche eines Krystalls fällt wenigstens in zwei Zonen, denn die Lage einer Ebene wird durch zwei sich schneidende Linien bestimmt, welche am Krystall als Zonenaxe erscheinen.

Zweck jeder krystallographischen Untersuchung ist zunächst, den Zusammenhang zu ermitteln, in welchem die Flächen eines Krystalls zu einander stehen, d. h. die Lage der Flächen gegen einander aufzusuchen. Dies geschieht dadurch, dass man ihre Lage gegen ein System von drei (zu einander recht- oder schiefwinklig stehenden) Coordinatenebenen feststellt, wobei jede einzelne Fläche in Gedanken allseitig verlängert wird so weit, bis sie diese Ebenen schneidet. Die Lage dieser Coordinatenebenen ist zweckmässig zu wählen, womöglich der Art, dass sie mit drei Krystallflächen zusammenfallen. Zugleich hat man sich den Mittelpunkt des Systems jener Ebenen als den Mittelpunkt des Krystalls zu denken, d. h. die Flächen in Gedanken parallel mit sich so zu verrücken, dass alle physikalisch gleiche von ihren Parallelen gleich weit entfernt sind. Die Durchschnitte der Coordinatenebenen, die drei sich schneidenden Linien heissen Axen, die Ebenen selbst Axenebenen.

Gleich den Axenebenen sind die Axen selbst von unbegrenzter Ausdehnung. Die Lage einer Fläche wird ausgedrückt durch das Verhältniss, in welchem sie die drei Axen trifft, und diese Axenabschnitte, vom Mittelpunkt aus gerechnet, heissen die Parameter der Fläche. Bezüglich der Lage der Flächen sind nur drei Fälle denkbar: Eine Fläche schneidet alle drei Axen, oder sie schneidet zwei Axen und geht der dritten parallel, oder sie schneidet eine Axe und geht den beiden anderen parallel. In letzterem Fall ist sie selbst eine der drei Axenebenen.

Denkt man sich die Axen innerhalb eines idealen Krystalls, so erscheinen sie als drei im Mittelpunkt sich schneidende und halbirende Linien, welche je zwei entgegengesetzt liegende gleichartige Begrenzungselemente (Ecken, Kanten, Flächen) treffen. Deshalb sind die Axen Linien gleicher Symmetrie (Symmetrielinien).

Indem man die Axen mit a, b, c bezeichnet, drückt man die Lage einer Fläche durch Angabe ihrer Parameter aus, und hat also ganz allgemein Flächen

$$\begin{array}{lll} a:b:c & \text{oder } a:b:\infty c & \text{oder } a:\infty b:\infty c \\ & b:c:\infty a & b:\infty a:\infty c \\ & a:c:\infty b & c:\infty a:\infty b \end{array}$$

wobei ∞ bedeutet, dass die Fläche parallel der betreffenden Axe liegt.

Will man einen Krystall auf Axen beziehen, d. h. will man den gegenseitigen Zusammenhang seiner Flächen und die Lage jeder einzelnen gegen das gemeinschaftliche System der Axenebenen oder der Axen angeben, so muss man von gewissen Flächen ausgehen, und die Axen so wählen, dass sie eine bestimmte Lage gegen jene Flächen haben. An sich gleichgültig, welche Flächen man wählt, ist es doch in den meisten Fällen zweckmässig, vier Flächen herauszugreifen, welche sich in einem Punkt schneiden (ein Oktaid), und, nachdem der Abstand jeder einzelnen von ihrer Parallelen in Gedanken gleich gemacht worden, die Axen durch je zwei gegenüber liegende Ecken gehend zu denken. Dann wird jede der vier Flächen die drei Axen[1]) in einem gewissen Abstande vom Mittelpunkt treffen, und man bezeichnet diese Abstände oder die Parameter als die **Einheiten**, die Fläche mit $a : b : c$.

Einstweilen mag die Frage unerörtert bleiben, wie das Längenverhältniss der Axen, d. h. der Parameter der Flächen bestimmt wird. Wir werden weiterhin sehen, dass es aus den Kantenwinkeln der als Ausgang gewählten Form durch Rechnung sich ergiebt, dass jene Kantenwinkel mithin durch Messung gegeben sein müssen. Indem wir das Messen und Berechnen einem späteren Abschnitt vorbehalten, behandeln wir zunächst blos die Frage nach dem Flächenzusammenhang an einem Krystall, d. h. nach der Lage sämmtlicher Flächen, verglichen mit derjenigen der zum Ausgangspunkt dienenden und auf ein ein für alle Mal gewähltes Axensystem bezogenen Flächen.

Zur Ermittelung des Flächenzusammenhanges bedient man sich mit grossem Nutzen gewisser graphischer Hülfsmittel, der Projectionsmethoden. Eine dieser Methoden, welche ebenso einfach wie anschaulich ist, besteht darin, dass man jede Fläche in Gedanken verlängert so weit, bis sie eine gemeinsame Ebene, die Projectionsebene, trifft und dieselbe in einer Linie, der Sectionslinie, schneidet. Um aber einen Krystall, d. h. einen Complex von mindestens drei Flächen projiciren zu können, müssen sämmtliche Flächen durch einen (ausserhalb

1) Vorläufig sei angenommen, die Axen ständen senkrecht gegen einander.

der Projectionsebene liegenden) gemeinsamen Punkt gelegt werden, wobei die parallelen gar nicht in Betracht kommen. Bei der vorausgesetzten Beweglichkeit der Flächen ist dies immer sehr leicht. Die Punkte, in welchen sich zwei oder mehr Sectionslinien schneiden, heissen Zonenpunkte und die sich in ihnen schneidenden Sectionslinien sind die Repräsentanten der Zone, welche die durch die Sectionslinie dargestellten Flächen bilden. Eine Linie von einem Zonenpunkt nach dem gemeinsamen Ausstrahlungspunkt ist die Zonenaxe der Flächen, deren Sectionslinien in dem Zonenpunkt sich schneiden.

Da die Wahl der Projectionsebene ganz beliebig ist, wird das Projectionsbild eines Krystalls sehr verschieden ausfallen können. Zweckmässig ist es, als Projectionsebene die horizontale Axenebene a b zu wählen, und alle Flächen durch die Einheit der vertikalen Axe c zu legen.

Deductionskörper. — Die Flächen, welche sich in einem Punkt schneiden, geben mit ihren Parallelen die einfachste Krystallform, das Hexaid, welches drei Zonen hat. Es umfasst eine gewisse Zahl von Formen, welche sich durch die gegenseitige Neigung ihrer Flächen und durch die physikalische Gleichheit oder Verschiedenheit derselben unterscheiden.

Vier Flächen, welche sich in einem Punkt schneiden, bilden mit ihren Parallelen ein Oktaid, welches sechs Zonen hat.

Aus jedem Oktaid lässt sich ein Hexaid herleiten (deduciren), von dem jede Fläche gleichzeitig in zwei Zonen des Oktaids fällt, was sich bei der Projection leicht nachweisen lässt. Projicirt man nämlich das Oktaid so, dass seine sechs Zonen-

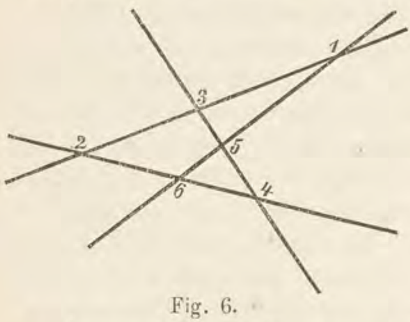


Fig. 6.

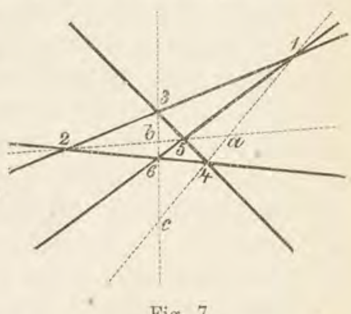


Fig. 7.

punkte erscheinen (Fig. 6), so sieht man, dass die Zonenpunkte 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 sich durch Sectionslinien (wie in

Fig. 7) verbinden lassen. Diese drei neuen Sectionslinien repräsentiren ein Hexaid und jede Hexaidfläche fällt gleichzeitig mit je zwei und zwei Oktaidflächen in eine Zone.

Die Kombination des regulären Oktaeders mit dem Würfel erläutert das Gesagte.

Geht man vom Oktaid aus, denkt sich dasselbe symmetrisch, und bezieht es auf drei Axen a, b, c, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, sich also im Mittelpunkt des Körpers schneiden und halbiren, so ist das Zeichen seiner Flächen $a : b : c$. Alsdann ist jede der drei Hexaidflächen eine der Axenebenen des Oktaids und sie erhalten die Zeichen

$$a : \infty b : \infty c; \quad b : \infty a : \infty c; \quad c : \infty a : \infty b.$$

Man kann auch sagen, die Axen des Oktaids sind die Kantenrichtungen seines Hexaids.

In dem Projectionsbilde, Fig. 7, sind wiederum Zonenpunkte unverbunden enthalten, d. h. es lässt sich aus dem Oktaid und Hexaid ein neuer Körper ableiten, dessen Flächen mit denen jener beiden in gegebene Zonen fallen. Der Hexaidzonenpunkt a lässt sich mit den Oktaidzonenpunkten 3 und 6, b lässt sich mit 1 und 4, c lässt sich mit 2 und 5 verbinden, d. h. es steckt ein neuer Körper von sechs Flächen in der Figur. Dieser so deducirte Körper heisst ein D o d e k a i d, denn, für sich gedacht, zählt er mit den Parallelen zwölf Flächen. Eine Dodekaidfläche fällt 1. in eine Zone mit zwei Hexaidflächen und 2. in eine Zone mit zwei Oktaidflächen und der dritten Hexaidfläche. Aus der ersten Zone folgt, dass eine Dodekaidfläche eine Kante des Hexaids abstumpft. Aus der zweiten Zone folgt, dass sie gleichzeitig eine Kante des Oktaids abstumpft.

Das Gesagte lässt sich an dem Dodekaid des regulären Systems, dem Granatoeder, in seiner Kombination mit dem Oktaeder und Würfel anschaulich machen.

Wie liegt nun die Fläche des Dodekaids gegen die Axen des Oktaids? Sie stumpft eine Kante des letzteren ab. Diese verbindet zwei Axen. Sie schneidet also zwei Axen. Sie stumpft aber auch eine Kante des Hexaids ab, und da eine solche Kante einer Axe parallel läuft, so thut dies die Dodekaidfläche gleichfalls. Je zwei Dodekaidflächen erhalten also die Zeichen $a : b : \infty c$; $b : c : \infty a$; $a : c : \infty b$.

Die Deduktion neuer Flächen aus den bis jetzt gegebenen schreitet immer weiter fort, und es lassen sich also neue Körper ableiten, welche auf die Axen des ursprünglichen Oktaids sich beziehen. Doch mag dies hier nur angedeutet sein.

Fasst man das Gesagte allgemein auf, so muss man sagen: An einem Krystall lassen sich neue Flächen mit Hülfe gegebener bestimmen. Die Lage jeder neuen Fläche ist bestimmt, wenn sie in zwei bekannte Zonen fällt. Ueberhaupt lassen sich alle Flächen eines Krystalls ihrer Lage nach aus einander ableiten. Dies ist das wichtige Zonengesetz, welches wir Weiss verdanken.

Zonenentwicklung und Projektion für ein gegebenes Axensystem. — Um sämmtliche Flächen eines Krystalls ihrer Lage nach zu bestimmen, wählt man vier von ihnen aus, welche ein Oktaid bilden, bezieht dieses auf Axen, projicirt es, sucht dann die Flächen des Hexaids und des Dodekaids auf, und schreitet mit Hülfe der dadurch gegebenen Zonen zur Bestimmung der übrigen Flächen fort.

Die vier Flächen, welche als Ausgangspunkt dienen sollen, müssen, dem früheren gemäss, der Art sein, dass sie sich in einem Punkt schneiden oder, was dasselbe ist, dass nur immer je zwei und zwei in eine Zone fallen.

Für die Projection (S. 9) wählt man die Axenebene ab als Projectionsebene und legt alle Flächen durch den Punkt c (die Einheit von c). Dann erscheinen in der Projectionsfigur alle überhaupt möglichen Flächen des Krystalls in folgender Art:

1. Die Fläche $c : \infty a : \infty b$ geht der Projectionsebene parallel, ist diese gleichsam selbst und erscheint daher nicht.

2. Die Fläche $a : \infty b : \infty c$, durch c gelegt, wird durch die Axe b, und die Fläche $b : \infty a : \infty c$, ebenfalls durch c gelegt, wird durch die Axe a repräsentirt, denn jene ist die Axenebene bc, diese die Axenebene ac.

3. Alle Flächen, welche der Axe a parallel gehen, d. h. die Axen b und c schneiden, bilden Sectionslinien, die der Axe a parallel laufen. Sie werden stets auf den Ausdruck $nb : c : \infty a$ oder $\frac{1}{n} b : c : \infty a$ zurückgeführt

Eine Fläche z. B., welche das Zeichen $b : \frac{2}{3} c : \infty a$ hat, ist für die Projection $= \frac{3}{2} b : c : \infty a$; ihre Sectionslinie schneidet b in $\frac{3}{2}$facher Länge der Einheit.

4. Alle Flächen, welche der Axe b parallel gehen, d. h. die Axen a und c schneiden, liefern Sectionslinien parallel der Axe b. Auch sie müssen durch $1c$ gelegt, also auf den Ausdruck $ma : c : \infty b$ oder $\frac{1}{m} a : c : \infty b$ gebracht sein.

5. Alle Flächen, welche der Axe c parallel gehen, also $a : b : \infty c$ oder $ma : nb : \infty c$, liefern, wenn man sie durch die Axe c legt, in der Projectionsebene Sectionslinien, welche durch den Mittelpunkt (Schnittpunkt von a und b) gehen, entsprechend der Richtung $ma : nb$.

Also muss eine Fläche $\frac{1}{3} a : \frac{1}{4} b : \infty c = a : \frac{3}{4} b : \infty c = \frac{4}{3} a : b \infty c$ eine Sectionslinie liefern, welche dieser Richtung entspricht.

6. Alle Flächen, welche die drei Axen schneiden, werden auf den Ausdruck $ma : nb : c$ oder $\frac{1}{m} a : \frac{1}{n} b : c$ gebracht und liefern Sectionslinien, welche die Axen a und b in der dadurch angezeigten Art schneiden.

Eine Fläche z. B., welche $3a : 4b : \frac{3}{2} c$ ist, wird auf den Ausdruck $2a : \frac{8}{3} b : c$ reducirt; ihre Sectionslinie schneidet $2a$ und $\frac{8}{3} b$ ab. Eine Fläche $a : \frac{2}{3} b : \frac{3}{4} c$ liefert eine Sectionslinie, welche von $\frac{4}{3} a$ nach $\frac{8}{9} b$ geht.

Zwei Aufgaben sind bei der Zonenentwicklung eines Krystalls zu lösen: 1. Welche Lage hat eine neue Fläche, welche in zwei bekannte Zonen fällt, gegen ein gewähltes System von drei Axen? Und 2. Welche Lage hat eine jede Zonenaxe, d. h. die Kante, welche zwei Flächen bilden?

In der Projection heisst die erste Aufgabe: Wie verläuft die Sectionslinie in der Projectionsebene, wenn diese die Ebene der Axen a und b ist, und die Fläche durch die Einheit von c gelegt wird? Die zwei bekannten Zonen sind durch zwei Zonenpunkte gegeben, durch welche die Fläche also hindurchgehen muss.

Die zweite Aufgabe aber besteht darin, die Lage eines jeden Zonenpunktes zu bestimmen aus den beiden Sectionslinien, durch deren Schnitte er gebildet ist.

Die Lage eines Zonenpunkts wird durch die beiden Coordinaten (Parallelen der Axen a und b) ausgedrückt. Sein Zeichen ist ganz allgemein

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$$

Ist in Fig. 8 $om = \frac{a}{m}$ und $on = \frac{b}{n}$ so ist der Zonenpunkt $x = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$.

Wird $m = n$, so heisst der Zonenpunkt ein Kantenzonenpunkt.

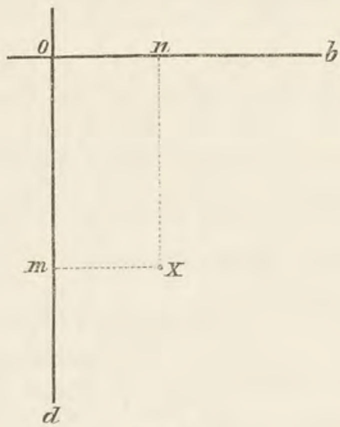


Fig. 8.

Liegt ein Zonenpunkt in einer der beiden Axen, so ist für ihn m oder $n = o$, und er erhält den Ausdruck

$\frac{a}{m} + \frac{b}{\infty}$, wenn er in a liegt, oder

$\frac{a}{\infty} + \frac{b}{n}$, wenn er in b liegt.

Das Zeichen einer Sectionslinie, welche, durch $1c$ gelegt, die Axen a und b schneidet, ist

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n}$$

Zwei Sectionslinien, $\frac{a}{m} : \frac{b}{n}$ und $\frac{a}{m'} : \frac{b}{n'}$, bilden einen Zonenpunkt wie Fig. 9 zeigt, in welcher $om = \frac{a}{m}$, $on = \frac{b}{n}$, $om' = \frac{a}{\ }$, $on' = \frac{b}{n'}$, der Zonenpunkt $=$ x ist.

Beide Aufgaben werden durch Anwendung einiger Formeln gelöst, die hier zusammengestellt sind.

I. Sind zwei Sectionslinien $\frac{a}{m} : \frac{b}{n}$ und $\frac{a}{m'} : \frac{b}{n'}$ gegeben, so ist der Zonenpunkt x, welchen sie bilden:

$$x = \frac{n' - n}{mn' - m'n}\, a + \frac{m - m'}{mn' - m'n}\, b.$$

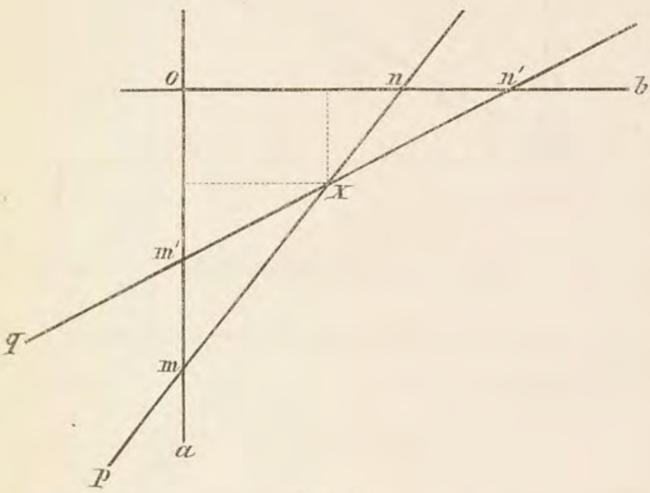


Fig. 9.

Beispiel. In Fig. 9 sei die Sectionslinie $p = a : \frac{2}{3} b : c$, $q = \frac{1}{2} a : b : c$, d. h. $p = \frac{a}{1} : \frac{b}{\frac{3}{2}}$, $q = \frac{a}{2} : \frac{b}{1}$, mithin $m = 1$, $n = \frac{3}{2}$, $m' = 2$, $n' = 1$. Dann ist $x = \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} b = \frac{a}{4} + \frac{b}{2}$.

II. Sind zwei Zonenpunkte $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ und $\frac{a}{m'} + \frac{b}{n'}$ gegeben, so ist die Sectionslinie, welche sie verbindet,

$$= \frac{m'n - mn'}{mm'(n - n')}\, a : \frac{m'n - mn'}{nn'(m' - m)}\, b :$$

Beispiel. In Fig. 10 sei

$$\text{Zonenpunkt } x = \tfrac{2}{3} a + \tfrac{1}{3} b = \frac{a}{\frac{3}{2}} + \frac{b}{3}.$$

$$y = \tfrac{1}{3}a + b = \frac{a}{3} + \frac{b}{1}$$

so ist $m = \frac{3}{2}$, $n = 3$, $m' = 3$, $n' = 1$, mithin $S = \frac{5}{6}a : \frac{5}{3}b : c$.

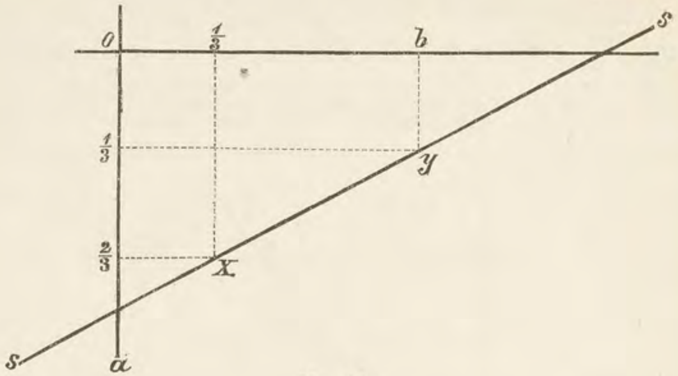


Fig. 10.

III. Sind zwei Kantenzonenpunkte $\frac{a}{m} + \frac{b}{m}$ und $\frac{a}{m'} + \frac{b}{m'}$ in anliegenden Quadranten gegeben, so ist die Sectionslinie

$$= \frac{2}{m + m'}\,a : \frac{2}{m - m'}\,b : c.$$

Beispiel. In Fig. 11 sei $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$, so $m = 2$, $m' = 3$, und $S = \frac{2}{5}a : 2b : c$.

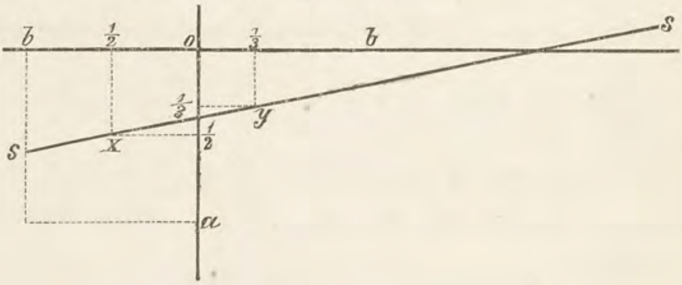


Fig. 11.

Liegt der zweite Zonenpunkt jenseits der Axe b, so sind die Werthe von a und b in der Formel zu vertauschen.

Wird in der Formel ein Werth negativ, so heisst dies: die Sectionslinie schneidet die betreffende Axe in der vom Mittelpunkt entgegengesetzten Richtung.

IV. Liegt ein Zonenpunkt $\frac{a}{m} + \frac{b}{\infty}$ in der Axe a, und ist der andere ein Kantenzonenpunkt $\frac{a}{m'} + \frac{b}{m'}$ diesseits der Axe b, so ist die Sectionslinie

$$= \frac{1}{m} a : \frac{1}{m' - m} b : c.$$

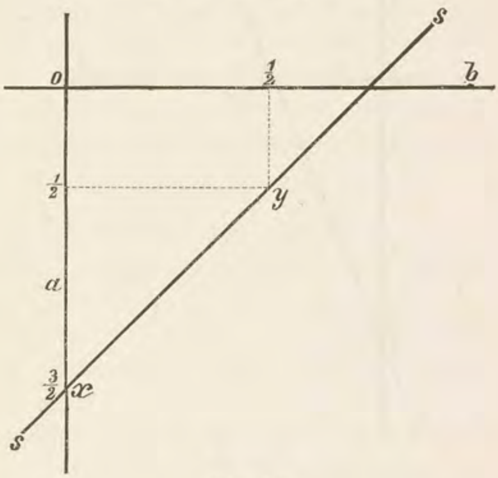


Fig. 12.

Beispiel. In Fig. 12 sei $ox = \frac{3}{2} a$, also Zonenpunkt $x = \frac{3}{2} a + 0b = \frac{a}{\frac{2}{3}} + \frac{b}{\infty}$; $y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, mithin $m = \frac{2}{3}$, $m' = 2$. Dann ist

$$S = \tfrac{3}{2} a : \tfrac{3}{4} b : c.$$

Liegt der eine Zonenpunkt in der Axe b, so vertauschen sich im Zeichen der Sectionslinie die Werthe von a und b.

V. Liegt ein Zonenpunkt $\frac{a}{m} + \frac{b}{\infty}$ in der Axe a, und ist der andere ein Kantenzonenpunkt $\frac{a}{m'} + \frac{b}{m'}$ jenseits der Axe b, so ist die Sectionslinie

$$= \frac{1}{m} a : \frac{1}{m + m'} b : c.$$

Beispiel. In Fig. 13 sei $x = \frac{3}{2} a + 0b = \frac{a}{\frac{2}{3}} + \frac{b}{\infty}$, $y = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Mithin ist $m = \frac{2}{3}$, $m' = 2$, und

$$S = \tfrac{3}{2} a : \tfrac{3}{8} b : c.$$

Liegt der eine Zonenpunkt in der Axe b, der andere jenseits a, so vertauschen sich im Zeichen der Sectionslinie die Werthe von a und b.

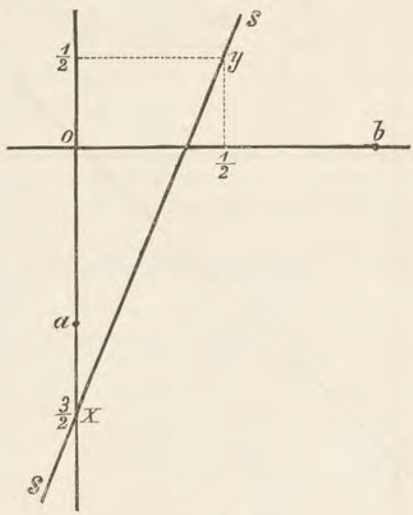


Fig. 13.

Anwendung der Zonenlehre.

Denkt man sich einen von vielen Flächen begrenzten Krystall, so sind an ihm zahlreiche Zonen vorhanden. Wähl man vier Flächen aus, welche für sich ein Oktaid bilden und bezieht dies auf Axen, so lassen sich mit Hülfe der Zonen sämmtliche Flächen ihrer Lage nach gegen jene Axen bestimmen, d. h. sie sind sämmtlich Deductionsflächen, und die Projection liefert ein klares Bild ihres Zusammenhangs und der Zonenverhältnisse des Krystalls.

Wie überzeugt man sich aber, dass gewisse Flächen wirklich in eine Zone fallen, d. h., dass sie unter sich parallele Kanten bilden?

Das Auge ist für den Parallelismus der Kanten sehr empfindlich. An einem wirklichen Krystall wird also meist kein Zweifel darüber bestehen, ob zwei bestimmte Flächen mit gewissen anderen in eine Zone fallen. Allein wenn dies zweifelhaft ist, oder wenn eine Zone durch andere Flächen unterbrochen ist, so hat man im Geniometer ein einfaches Mittel, die Frage zu entscheiden. An diesem Instrument, welches weiterhin beim Messen der Krystallwinkel zu erwähnen ist, befestigt man den Krystall so, dass die Kante zweier Flächen der fraglichen Zone mit seiner Axe zusammenfällt. Bei der Drehung dieser Axe liefern dann beide Flächen das Bild eines fernen Gegenstandes genau auf derselben Stelle. Gilt dies bei weiterer Drehung auch für andere Flächen, so fallen diese mit den beiden ersten in eine Zone (alle ihre Kanten sind der Axe des Instruments, also unter sich parallel).

An Modellen und in Zeichnungen müssen parallele Kanten zweifellos zu erkennen und zu controliren sein.

Beispiele für die Zonenentwicklung und Projection.

Für den Anfänger ist es von grossem Nutzen, wenn er an Krystallen leicht zugänglicher Verbindungen den Flächenzusammenhang durch Aufsuchen der verschiedenen Zonen sich klar macht, wofür die Projection ein unschätzbares Hülfsmittel ist. Aber er muss sich zunächst an Krystallzeichnungen und Modellen üben, weil wirkliche Krystalle entweder zu klein, oder allzu unsymmetrisch ausgebildet sind, oder in den zur Verfügung stehenden Exemplaren nur einen Theil der Flächen aufweisen, welche bei der betreffenden Substanz beobachtet worden sind.

Bei den nachfolgenden Beispielen haben wir es noch gar nicht mit den numerischen Constanten zu thun, d. h. wir lassen die Grösse der Flächenneigungen (Kantenwinkel), das Längenverhältniss der Flächenparameter (die Axenverhältnisse), die Neigung der Axen (welche wir vorläufig als rechtwinklig annehmen) ganz ausser Acht, und berühren die physikalische Natur der Flächen nur insoweit es nöthig ist.

I. Eisenvitriol.

Als erstes Beispiel wählen wir einen flächenreichen Krystall von Eisenvitriol, der in Fig. 14 in gewöhnlicher Art gezeichnet ist, während Fig. 15 eine Ansicht von oben, und Fig. 16 eine seitliche darstellt, so dass in jener die Flächen *g*, *g'*, *b*, in dieser die *a*, *c*, *p* senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehen.

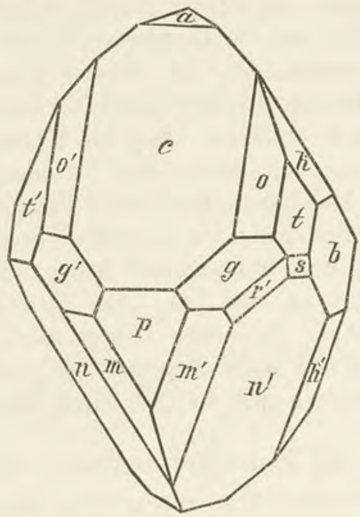


Fig. 14.

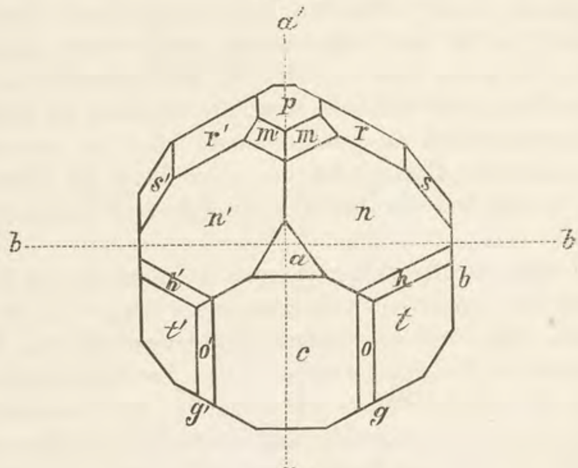


Fig. 15.

Die Flächen *a*, *c*, *p* und *b* sind Einzelflächen; die übrigen sind paarweise vorhanden, und zwar so, dass sie von der Zeichnungsebene in Fig. 16 rechts und links in ganz gleicher Art auftreten. Diese Ebene ist daher eine sogenannte Symmetrieebene. Sie ist zugleich parallel der Fläche *b*, und die *a*, *c* und *p* stehen senkrecht zu ihr. Den Zeichnungen gemäss, erscheinen *t*, *o*, *c* auf der vorderen Seite, *n*, *m*, *r*, *s* auf der hinteren

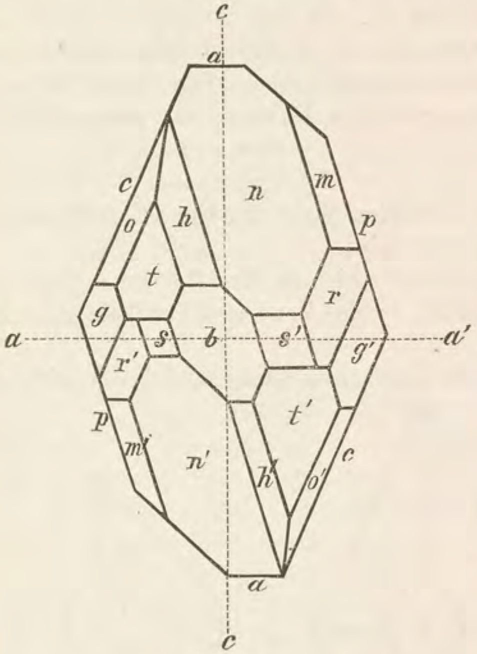


Fig. 16.

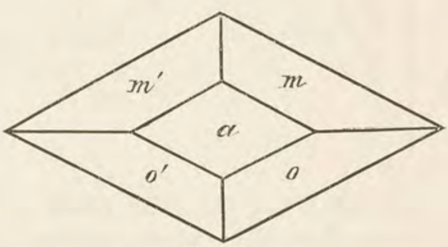


Fig. 17.

Seite. Diese beiden Seiten sind demnach verschieden. Später werden wir sehen, dass Krystalle dieser Art und Symmetrie dem sogenannten zwei- und eingliedrigen System zugehören.

Wir gehen von den beiden Flächenpaaren *o* und *m* aus, welche ein Oktaid bilden, beziehen dasselbe auf drei Axen und nehmen an

$$o \text{ und } o' = a : b : c$$
$$m \text{ und } m' = a' : b : c,$$

wobei a' andeuten soll, dass der Punkt a hinten von dem vorderen verschieden ist. (S. Fig. 20.)

Denkt man sich die übrigen Flächen fort, so erscheinen a und b an diesem Oktaid wie in Fig. 17 und 18, d. h. sie sind Flächen des zugehörigen Hexaids, und zwar wird

$$a = c : \infty a : \infty b$$
$$b = b : \infty a : \infty c.$$

Jene ist die Projectionsebene der Fig. 20, während b durch die Axe a dargestellt wird.

Die vordere schiefe Endfläche c liegt in der Zone $oo'b$ und zugleich in der Zone ap (Vertikalzone). Sie ist daher $= a : c : \infty b$.

Die weitere Zonenentwicklung wird davon abhängig, dass das

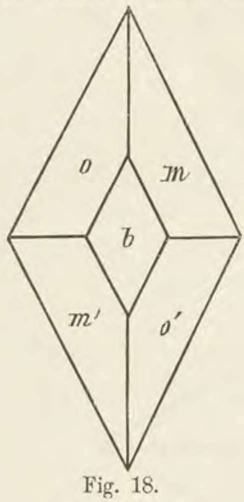


Fig. 18.

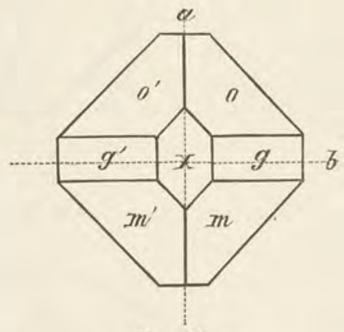


Fig. 19.

Flächenpaar gg' mit b und einer die Kante cp abstumpfenden Fläche x in eine Zone fallen würde, welches x nach Fig. 19 in die beiden Zonen om fällt, also die dritte Hexaidfläche des Oktaids darstellen würde [1]). Da $x = a : \infty b : \infty c$ in der Projection durch die Axe b dargestellt wird, laufen die Sectionslinien von g parallel den o und m durch den Mittelpunkt, und es ist $g = a : b : \infty c$.

[1]) Sein Vorkommen am Eisenvitriol ist zweifelhaft.

Die hintere schiefe Endfläche p wird durch die Zone ac (Vertikalzone) bestimmt; ihre Sectionslinie geht also parallel Axe b. Ferner bildet sie mit g (rechts) und m' (links) eine Zone, (gleichwie umgekehrt mit g' links und m rechts). Ihre Sectionslinie schneidet mithin die beiden Zonenpunkte $\alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ (Kantenzonenpunkte). Somit ist $p = \frac{1}{2} a' : c : \infty b = a' : 2c : \infty b$.

Das hintere Flächenpaar n. Das rechte n fällt in die Zone gpm, also Zonenpunkt α; ferner in die von c und g' gebildete, deren Zonenpunkt $\beta = \frac{a}{1} + \frac{b}{1}$ ist, woraus nach Formel III (S. 16) $n = 2a' : \frac{2}{3}b : c = a' : \frac{1}{3} b : \frac{1}{2}c = 3a' : b : \frac{3}{2}c$ folgt.

Das vordere Paar t liegt in der Zone boc, also Zonenpunkt a. Ferner in der Zone $gnmp$, also Zonenpunkt α. Mithin nach Formel V $t = a : \frac{1}{3}b : c$.

Das hintere Paar r. Es liegt zunächst in der Zone bp (Diagonalzone von p); Zonenpunkt $\frac{1}{3}a'$. Ferner in der Zone ncg'; Zonenpunkt β. Seine Sectionslinie entspricht also (Formel V) dem Flächenzeichen $r = \frac{1}{2}a' : \frac{1}{3}b : c = a' \frac{2}{3}b : 2c = \frac{3}{2}a' : b : 3c$.

Das hintere Paar s fällt ebenfalls in die Diagonalzone von p; ferner in die Zone an, d. h. die durch $\frac{1}{2}a'$ gehende Sectionslinie ist n parallel. Deshalb ist $s = \frac{1}{2}a' : \frac{1}{6}b : c = a' : \frac{1}{3}b : 2c = 3a' : b : 6c$. Die Figur lehrt überdies, dass eine Fläche s, z. B. die rechte, durch die Zonenpunkte γ und δ geht. Das erstere besagt, dass s mit t und g', das zweite, dass es mit m und n' Zonen bildet, welche in den Zeichnungen freilich nicht zur Erscheinung kommen konnten.

Bei dieser Gelegenheit berechnen wir beide Zonenpunkte.

γ wird von t und g' gebildet. $t = \frac{a}{1} : \frac{b}{3}$. Wir nehmen also das vordere a und das rechte b positiv. $g = a : b : \infty c = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty}$, nach vorn herausgerückt, geht durch b links, also ist dies negativ. Mithin

$$m = 1 \quad m' = \infty$$
$$n = 3 \quad n' = -\infty$$

und der Zonenpunkt nach Formel I

$$\gamma = \frac{a}{4} + \frac{b}{4}$$

δ wird von m' und n gebildet. Nun ist

$$m' = \frac{a}{1} : \frac{b}{1};\; n = \frac{a}{\frac{1}{2}} : \frac{b}{\frac{3}{2}}$$

aber dies $\frac{3}{2}$ ist negativ, wenn die übrigen positiv sind. Daher

$$m = 1 \quad m' = \tfrac{1}{2}$$
$$n = 1 \quad n' = -\tfrac{3}{2}$$

und nach I

$$\delta = \frac{a}{\frac{4}{5}} + \frac{b}{4} = \tfrac{5}{4}a + \tfrac{1}{4}b.$$

Das Flächenpaar h gehört der Zone $gtnmp$ an. Also Zonenpunkt α.

Ausserdem ist (Fig. 15) Kante ho parallel cg', d. h. h fällt

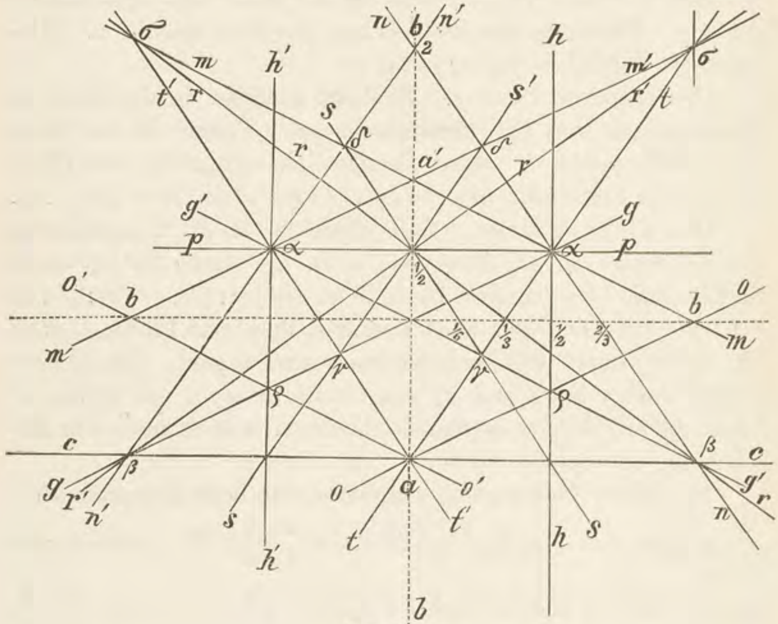


Fig. 20.

mit o und g' in eine Zone; seine Sectionslinie trifft den Zonenpunkt ϱ. Dieser, durch $o = \frac{a}{1} : \frac{b}{1}$ und $g = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{-\infty}$ gebildet, ist nach $\mathrm{I} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$, d. h. er ist $= \alpha$. Mithin läuft **h** der Axe a parallel durch $\frac{1}{2}b$. Oder $h = \frac{1}{2}b : c : \infty a = b : 2c : \infty a$.

Aus Fig. 16 erhellt ebenfalls, dass *ahb* eine Zone ist, d. h. dass *h* und *b* in der Projection parallel sein müssen.

Ausserdem ist die Zone *chs* gegeben. (Zonenpunkt $= \frac{a}{1} + \frac{b}{2}\big)$.

Auch der Zonenpunkt $\sigma = 2a' + b = \frac{a'}{\frac{1}{2}} + \frac{b}{1}$ ist bemerkenswerth, denn er stellt die Zone *mrt'* dar (Fig. 16).

Das vollständige Projektionsbild ist Fig. 20.

Stellen wir nun die Flächen des Eisenvitriols noch einmal zusammen:

$$b = b : \infty a : \infty c$$
$$a = c : \infty a : \infty b$$
$$g = a : b : \infty c$$
$$h = b : 2c : \infty a$$
$$c = a : c : \infty b$$
$$p = a' : 2c : \infty b$$
$$o = a : b : c$$
$$t = a : \tfrac{1}{3}b : c$$
$$m = a' : b : c$$
$$r = \tfrac{1}{2}a' : \tfrac{1}{3}b : c$$
$$s = \tfrac{1}{2}a' : \tfrac{1}{6}b : c$$
$$n = 2a' : \tfrac{2}{3}b : c.$$

Ihre Axen- oder Parameterverhältnisse sind durch die Wahl von *o* und *m* und die hierdurch gegebene Lage der Axen *a*, *b*, *c* bedingt.

Wir können aber auch von irgend einem anderen Oktaid ausgehen; dann werden die Axen *a* und *c* andere, blos die Fläche *b*, in deren Parallelen, der Symmetriebene, jene beiden Axen liegen, wird ihre Lage $b : \infty a : \infty c$ stets beibehalten. Die Axe *b* ist unveränderlich.

Wir können also den Krystall gleichsam um die Axe *b* drehen.

Stellen wir ihn z. B. so, dass das Flächenpaar *nn'* vertikal steht, die Flächen *c* und *p* nach vorn, *a* nach hinten liegt, also so wie die Fig. 21, 22, 23 (S. 26. 27.) ausdrücken, von welchen Fig. 22 einen Durchschnitt durch die Zone *nn'b*, die Horizontalzone, und Fig. 23 einen solchen durch die Zone *acp*, die Vertikalzone, darstellt. Aus dieser letzteren ersieht man, wenn man sie mit der gleichartigen Fig. 16 vergleicht, die veränderte Stellung, bei welcher die Kanten *nn'* und *nb* vertikal stehen, und *a* nach hinten geneigt ist.

Zieht man in Gedanken die vier Flächen *aptt'* (Fig. 22)

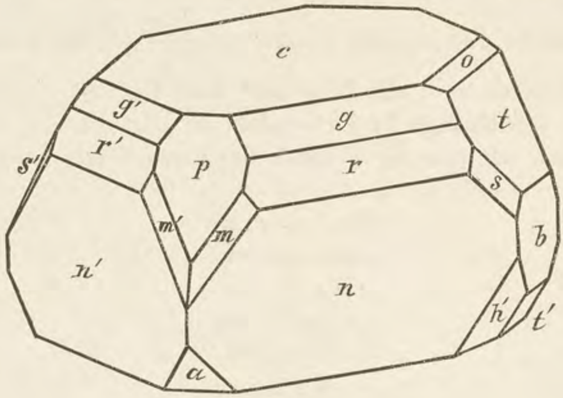


Fig. 21.

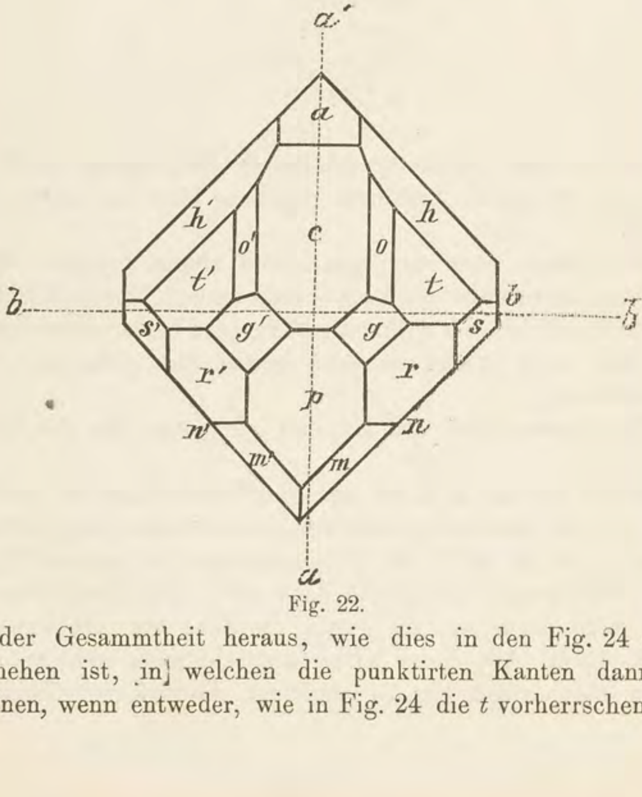


Fig. 22.

aus der Gesammtheit heraus, wie dies in den Fig. 24 u. 25 geschehen ist, in welchen die punktirten Kanten dann erscheinen, wenn entweder, wie in Fig. 24 die *t* vorherrschen oder wie in Fig. 25, die a und p sehr ausgedehnt sind, so bilden die vier Flächen ein Oktaid. Wir wollen jetzt von diesem Oktaid ausgehen, und dasselbe auf eine Ecke projiciren, d. h. wir wollen uns denken

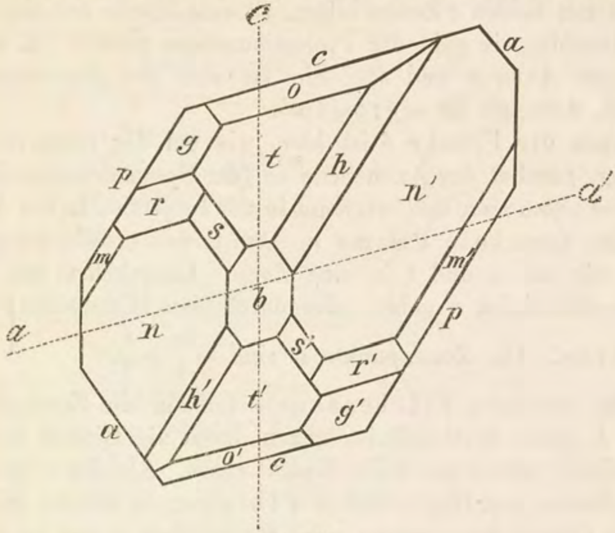


Fig. 23.

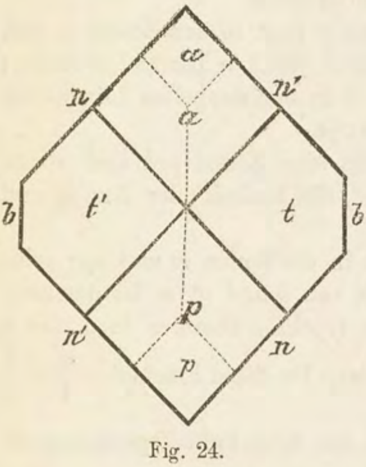


Fig. 24.

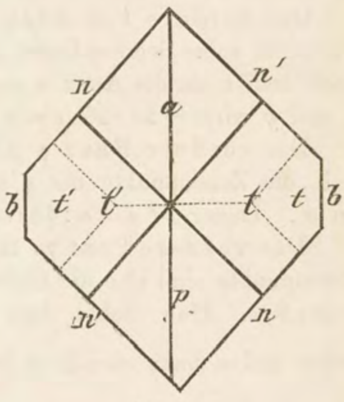


Fig. 25.

$$t \text{ und } t' = b : c : \infty a$$
$$p = a : c : \infty b$$
$$a = a' : c : \infty b$$

und die Fig. 26 entwerfen, in welcher die Axenebene ab die

Projectionsebene ist. Am Krystall ist dann die Kante tt' parallel Axe a, und Kante ap parallel Axe b.

Die vordere schiefe Endfläche c, welche mit a und p, und mit beiden t Zonen bildet, ist eine Fläche des zugehörigen Hexaids; sie geht der Projectionsebene parallel (d. h. parallel den Axen a und b). Sie ist also der Axenebene ab parallel, d. h. sie ist $= c : \infty a : \infty b$.

Auch die Fläche b ist hier, wie bei der früheren Darstellung, parallel der Axenebene ac (der Symmetrieebene), d. h. sie ist $= b : \infty a : \infty c$, und erscheint in der Projection in der Axe a.

Das vertikale Prisma n. Das rechte n fällt mit p und t', so wie mit a und t in eine Zone. Umgekehrt das linke. Die Sectionslinien n gehen also durch den Mittelpunkt; n ist $= a : b : \infty c$. Die Zonenpunkte α sind $= \frac{a}{1} + \frac{b}{1}$.

Das vordere Flächenpaar r fällt in die Zone pb und nc, d. h. seine Sectionslinien gehen durch die Einheit der Axe a parallel n, mithin durch die Einheit von b. Also ist $r = a : b : c$. Käme hinten sein Gegenstück $= a' : \mathrm{b} : c$ vor, so würden wir von diesem Oktaid ausgegangen sein, für welches a und p, so wie die beiden t Dodekaidflächen sein würden.

Das vordere Flächenpaar g liegt in den Zonen pt und nrc, d. h. seine Sectionslinien gehen durch α parallel r und n; somit treffen sie die Axen a und b in der doppelten Länge von r, und g wird $= 2a : 2b : c = a : b : \frac{1}{2}\mathrm{c}$.

Das vordere Paar s gehört den Zonen prb und nt an, d. h. die Zonenpunkte der s sind die Einheit der Axe a und ein α'. Daher ist $s = a : \frac{1}{2}b : c$.

Das vordere Paar m fällt in die Zonen rt und np; seine Zonenpunkte sind also die Einheit von b und α; m ist demnach $= \frac{1}{2}a : b : c$. Man sieht, dass m (rechts) überdies in β mit s rechts und n links eine Zone bildet. Da diese Flächen $= \frac{a}{1} + \frac{b}{2}$ und $\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty}$ sind, wobei für n die Axe b als links liegend negativ ist, so ist $\beta = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$.

Das hintere Paar h fällt in die Zone $tgpm'n'$ und in die Diagonalzone von a, d. h. beide h bilden auf a parallele Kanten, so dass a und die h dieselben Werthe in a und c haben müssen. Also sind die Zonenpunkte die Einheit von a hinten und a vorn. Mithin ist $h = a' : \frac{1}{2}\mathbf{b} : c$.

Auch die Flächenpaare **s** und **h** bilden ein Oktaid, von dem man ausgehen kann.

Das Paar o liegt gleich t in der Diagonalzone von c; es hat also wie diese ∞b im Zeichen; seine Sectionslinie läuft t und der Axe a parallel.

Aus Fig. 23 ergiebt sich ferner die Zone ag. Mithin geht o durch den Zonenpunkt γ, in den auch m fällt, und welcher, wie leicht zu finden, $a' + 3b = \frac{a'}{1} + \frac{b}{\frac{1}{3}}$ ist; somit wird $o = 3b : c : \infty a = b : \frac{1}{3}c : \infty a$.

Das vollständige Projectionsbild ist Fig. 26.

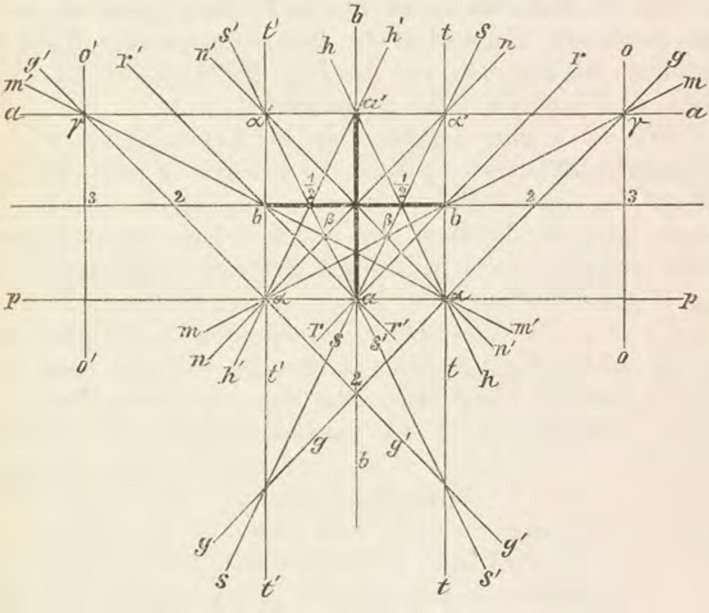


Fig. 26.

Ausser diesen beiden Stellungen lassen sich den Krystallen des Eisenvitriols noch andere geben, doch werden die zwei hier gewählten vorläufig genügen, und es wird nun die Frage sein, welche von ihnen den Vorzug verdient. Um dies zu beurtheilen, vergleichen wir zunächst die Flächenausdrücke nach beiden.

Erste Stellung		Zweite Stellung
$o = a : b : c$	$=$	$3b : c : \infty a$
$m = a' : b : c$		$\frac{1}{2}a : b : c$
$a = c : \infty a : \infty b$		$a' : c : \infty b$
$b = b : \infty a : \infty c$		$b : \infty a : \infty c$
$c = a : c : \infty b$		$c : \infty a : \infty b$
$g = a : b : \infty c$		$2a : 2b : c$
$p = \frac{1}{2}a' : c : \infty b$		$a : c : \infty b$
$n = 2a' : \frac{2}{3}b : c$		$a : b : \infty c$
$t = a : \frac{1}{3}b : c$		$b : c : \infty a$
$r = \frac{1}{2}a' : \frac{1}{3}b : c$		$a : b : c$
$s = \frac{1}{2}a' : \frac{1}{6}b : c$		$a : \frac{1}{2}b : c$
$h = \frac{1}{2}b : c : \infty a$		$a' : \frac{1}{2}b : c$

Die Zeichen sind in der zweiten Stellung einfacher; wenn also möglichste Einfachheit der Parameter bei der Wahl der Stellung eines Krystalls und der Lage der Axen den Ausschlag giebt, ist die zweite Stellung vorzuziehen.

Wie schon oben angeführt, ist bei Krystallen von solchen Symmetrieverhältnissen, wie sie der Eisenvitriol zeigt, lediglich die auf der Symmetrieebene normale Axe (b) naturgemäss gegeben, während die Wahl der beiden anderen innerhalb jener Ebene an und für sich willkürlich erscheint. Trägt man in die Fig. 16 (erste Stellung) und Fig. 23 (zweite Stellung) die Axen a und c so ein, wie dies (durch die punktirten Linien) geschehen ist, so sieht man, dass beide im zweiten Fall sich unter sehr schiefen Winkeln schneiden, welche, den vorhandenen Messungen zufolge, 104° 15′ und 75° 45′ betragen. Dabei sind die Axeneinheiten $a : b : c = 1{,}18 : 1 : 1.54$. In der ersten Stellung dagegen erscheinen a und c rechtwinklig. Allerdings sind sie dies nicht genau, und können es auch, dem Charakter des vorliegenden (zwei- und eingliedrigen) Krystallsystems zufolge, nicht sein, allein sie weichen von 90° nur sehr wenig ab. Wir nahmen (S. 22) an, dass das Flächenpaar g mit b und einer Fläche x welche zwischen beiden g liegt, eine Zone bilde, d. h. wir setzten voraus, dass, da $b : a = 90°$, auch $g : a$ und $x : a = 90°$ bilden. In der Wirklichkeit zeigt sich nun, dass eine solche Fläche x unter 89° 46′ gegen a geneigt sein würde,[1]) dass also

1) Anmerkung. Dieser Winkel liegt bei unserer Stellung und Projection vorn. Er sollte aber eigentlich hinten liegen, da es üblich ist,

die Axen a und c nur um 14′ von der rechtwinkligen Lage abweichen.

Wenn es nun naturgemäss ist, da, wo schiefwinklige Axen anzunehmen sind, diese doch so zu wählen, dass sie sich rechtwinkligen möglichst nähern, und wenn hierdurch allein es möglich wird, solche Krystalle mit gewissen anderen sehr ähnlichen aber auf wirklich rechtwinklige Axen zu beziehenden zu vergleichen, und dafür lieber etwas weniger einfache Flächenzeichen zuzulassen, so verdient die erste Stellung unbedingt den Vorzug.

II. Kupfervitriol.

Die Krystalle des Kupfervitriols sind durch grosse Unsymmetrie ausgezeichnet und keine ihrer Flächen ist gegen eine andere rechtwinklig geneigt. Es giebt keine Symmetrieebene in ihnen; ihre vordere und hintere, ihre rechte und linke Seite sind verschieden ausgebildet. Für solche Krystalle ist keine bestimmte Stellung gleichsam vorgezeichnet, jede gewählte ist willkürlich, die Lage der Axen ist es mithin gleichfalls. Um sie auf Axen beziehen zu können, genügen zwar auch vier Flächen eines Oktaids, jedoch nur in dem Fall, wenn die drei Axen die Ecken desselben verbinden, wenn also jede Fläche $= a : b : c$ ist, d. h. wenn die Axen des Oktaids die Kanten des zugehörigen Hexaids sind.

Fig. 27 ist ein Krystall von Kupfervitriol, und Fig. 28 ein Durchschnitt durch die Zone a, b und die p-Flächen. Denken wir diese Zone aufrecht stehend, so bilden die vier Flächen p, p', q, q' offenbar ein Oktaid, welches wir in der Art auf Axen beziehen können, dass wir setzen

die sogenannte „basische“ Endfläche $c : \infty a : \infty b$, hier die Fläche a, nach vorn geneigt zu denken. Nimmt man diese Aenderung, die an sich unwesentlich ist, vor, so heissen

$$\begin{aligned} m &= a : b : c \\ o &= a' : b : c \\ n &= 2a : \tfrac{2}{3}b : c \\ r &= \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}b : c \\ s &= \tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{6}b : c \\ t &= a' : \tfrac{1}{3}b : c \\ p &= \tfrac{1}{2}a : c : \infty b \end{aligned}$$

$$p = a : b : \infty c \qquad q = b : c : \infty a$$
$$p' = a : b' : \infty c \qquad q' = b' : c : \infty a,$$

wobei b' das linke b bezeichnet. Dann ist die Lage der vertikalen Axe c gegeben: sie ist parallel den Kanten $p : p'$. Zugleich ist die Axe a (von vorn nach hinten) bestimmt durch die Kante $q : q'$. Allein die Lage der Axe b ist durch keine Kante gegeben. Mit anderen Worten: während die Axenebene ac in der Fläche $b = b : \infty a : \infty c$ erscheint (weil b mit p und p'

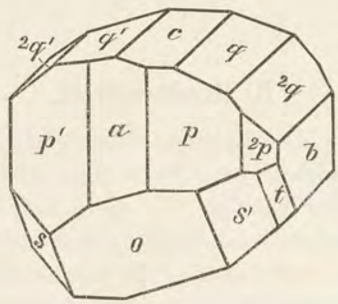


Fig. 27.

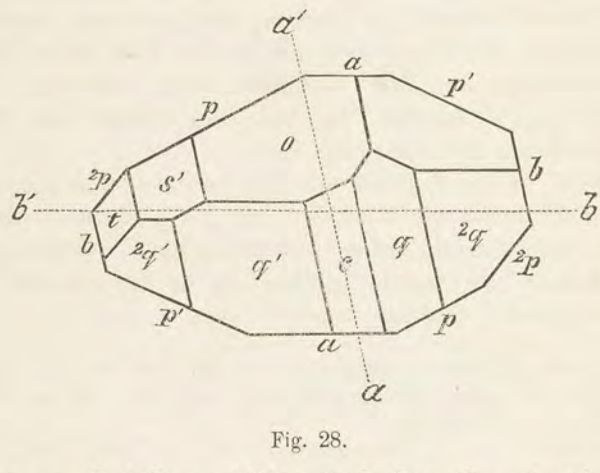


Fig. 28.

und mit q und q' Zonen bildet), bedarf es einer Annahme, wie die Axenebenen bc und ab liegen sollen. Allerdings ist in dem Oktaid $pp'qq'$ Axe b diejenige Linie, welche die Ecken rechts und links verbindet, am Krystall wird sie jedoch erst sichtbar, wenn wir die Flächen

$$a = a : \infty b : \infty c \text{ (Axenebene } bc\text{)}$$
$$c = c : \infty a : \infty b \text{ (Axenebene } ab\text{)}$$

antreffen, denn dann ist die Kante ac parallel Axe b.

Bei Krystallen dieser Art wählt man deshalb womöglich zunächst drei Flächen (a, b, c, Hexaidflächen), welche den drei Axenebenen entsprechen; ihre Kanten sind dann die Axen, und auf diese Axen bezieht man nun die übrigen Flächen, wie z. B. hier die p und q.

Wir ziehen daher in der Projection Fig. 29 die Axen a und b, entsprechend den Flächen b und a, bezeichnen das

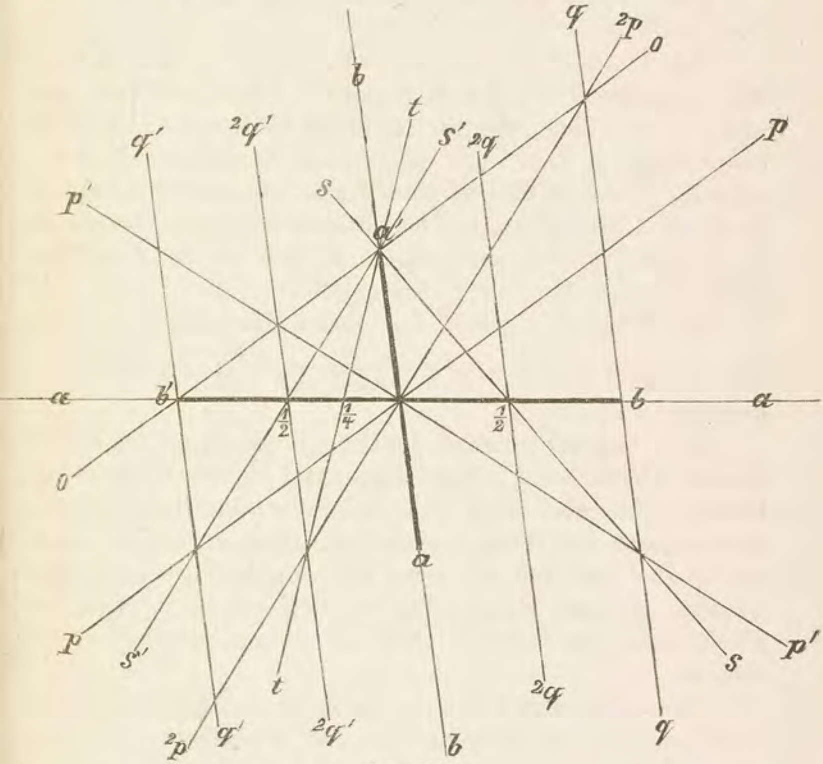


Fig. 29.

hintere a mit a', das linke b mit b', denken die Fläche c als Projectionsebene und tragen p und p', q und q' ein.

Die Fläche o, welche oft sehr vorherrscht, gehört den Zonen aq' und cp an, d. h. ihre Sectionslinie geht durch b'

parallel der Linie p', mithin trifft sie a'. Also ist $o = a' : b' : c$. Sie ist die einzige von den vier Oktaidflächen, welche alle drei Axen in der Einheit schneiden würden.

Die Fläche s liegt in den Zonen $p'q$ und ob; sie ist also $= a' : \frac{1}{2}b : c$.

Die Fläche s' hat die entsprechende Zonenlage links, also $a' : \frac{1}{2}b' : c$.

Die Fläche ${}^2q$ ist durch bqc (also parallel Axe a) und as (Zonenpunkt $\frac{b}{2}$) bestimmt. Also $\frac{1}{2}b : c : \infty a = b : 2c : \infty a$.

Die Fläche ${}^2q'$ liegt entsprechend links, daher $\frac{1}{2}b' : c : \infty a = b' : 2c : \infty a$.

Die Fläche ${}^2p$ liegt zwischen p und b; ihre Sectionslinie geht also durch den Mittelpunkt. Ferner fällt sie mit q und o in eine Zone, denn in Fig. 28 ist die Kante ${}^2p : q$ parallel der Kante $q : o$, d. h. wenn sich ${}^2p$ so ausdehnte, dass es q schnitte, so würde dies in einer Kante geschehen, welche der Kante $q : o$ parallel wäre. Die Sectionslinie trifft mithin den Zonenpunkt $2a' + b$, und verläuft so, dass sie, aus dem Mittelpunkt gerückt, ${}^2p = 2a : b : \infty c$ ergiebt.

Die Fläche t gehört den Zonen $bsos'$ und ${}^2p$ ${}^2q'$ an. Ihre Zonenpunkte sind also a' und $a + \frac{b'}{2}$; ihr Zeichen ist demnach $a' : \frac{1}{4}b' : c$.

Noch andere Stellungen sind für die Krystalle des Kupfervitriols denkbar, und mögen Gegenstand eigener Untersuchung bleiben; stets aber zeigt sich, dass alle ähnlichen Krystalle, welche durch den Mangel irgend einer Symmetrieebene charakterisirt sind und und uns später als eingliedrige beschäftigen werden, nur aus Einzelflächen bestehen, d. h. dass jede Fläche (und ihre Parallele) von den übrigen physikalisch verschieden ist.

Für solche Krystalle sind nur schiefwinklige Axen annehmbar, und die Neigung der drei Axenebenen (der drei Hexaidflächen a, b, c) ist nicht zugleich die ihrer Durchschnitte oder der Axen selbst. So ist beim Kupfervitriol

Fläche			Axe		
$a : b =$	79°	19′	$a : b =$	77°	37′
$b : c =$	94	22	$b : c =$	97	39
$a : c =$	105	38	$a : c =$	106	49

d. h. wenn Axe *c* vertikal steht, läuft *a* von rechts vorn nach links hinten, und *b* von rechts aufwärts nach links. Alles dieses gilt für den vorderen rechten Raumoktanten.

Die Beziehungen zwischen den geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Krystalle.

Der geometrische (mathematische) Charakter eines Krystalls ist durch die Zahl seiner Flächen und durch deren gegenseitige Neigung bestimmt. Allein ein Krystall ist kein blosser mathematischer Körper; er besitzt gewisse physikalische Eigenschaften, die sich in dem Verhalten seiner Masse, sowie in der Beschaffenheit seiner Flächen zu erkennen geben. Die Flächen eines jeden Krystalls sind entweder physikalisch gleich oder verschieden.

Unter physikalisch gleichen Flächen versteht man solche, welche sich in Bezug auf Spaltbarkeit, Härte, Glanz und gegen das Licht etc. gleich verhalten. Sie heissen auch gleichwerthige Flächen. Natürlich sind solche Eigenschaften nur an wirklichen Krystallen wahrzunehmen, an Zeichnungen und Modellen pflegt man gleichwerthige Flächen mit gleichen Buchstaben zu versehen.

Alle Flächen eines Alaunoktaeders sind physikalisch gleich (S. 6). Am Eisenvitriol dagegen lernten wir zwölf verschiedene Arten von Flächen kennen.

Es ist nochmals daran zu erinnern, dass der Abstand je zweier Parallelflächen an einem Krystall ein sehr veränderlicher sein kann, dass davon die äussere Unsymmetrie der meisten Krystalle herrührt, so dass sie, um als geometrische Körper betrachtet werden zu können, im Geiste auf ideale, symmetrische zurückgeführt werden müssen, wie Modelle und Zeichnungen sie in der Regel darstellen (Vgl. S. 4 u. 6).

Der krystallographische Würfel ist ein rechtwinkliges Hexaid. Aber ein rechtwinkliges Hexaid ist nur dann ein Würfel im krystallographischen Sinne, wenn seine Flächen physikalisch gleich sind, mögen dieselben auch keine Quadrate sein. Sind zwei seiner Flächen gleich, physikalisch verschieden von der dritten, so ist es ein viergliedriges Hexaid (quadratisches Prisma mit Endfläche), gleichviel, ob seine Flächen Quadrate sind oder nicht. Sind alle drei Flächen physikalisch verschieden, so ist das Hexaid ein zweigliedriges, auch wenn seine Flächen anscheinend Quadrate sein sollten.

Die Bestimmung eines Krystalls erfordert also die Ermittelung seiner geometrischen und seiner physikalischen Verhältnisse.

Die letzteren sind bisweilen allein entscheidend für die Bestimmung der Natur des Krystalls. Ist ein rechtwinkliges Hexaid einfach lichtbrechend, so ist es ein Würfel (reguläres, gleichgliedriges Hexaid); ist es doppelbrechend, und zwar optisch einaxig, so ist es ein viergliedriges, ist es optisch zweiaxig, so ist es ein zweigliedriges. Ueberhaupt sind die optischen Eigenschaften für die Kenntniss der Krystalle von der grössten Wichtigkeit.

Zwischen den geometrischen und den physikalischen Eigenschaften herrscht der engste Zusammenhang. Gleichheit jener ist mit Gleichheit dieser verknüpft. Alle Stellen eines Krystalls, an welchen physikalische Uebereinstimmung herrscht, sind auch geometrisch gleich. Solche Punkte nennt man Punkte gleicher Symmetrie. Gleich vollkommene, rechtwinklige Spaltbarkeit nach den drei Flächen eines Hexaids lässt dasselbe als einen Würfel erkennen; bei keinem anderen Hexaid ist eine solche möglich.

Eine einfache Form ist eine solche, welche von lauter physikalisch gleichen Flächen gebildet wird. Jede einfache Form lässt sich, wenn sie in Gedanken zu einer idealen symmetrischen gemacht wird, auf ein System von drei Axenebenen oder deren Durchschnitte, d. h. Axen, so beziehen, dass alle ihre Flächen die gleiche Lage gegen die Axen haben. Flächen aber, für welche die Parameterverhältnisse dieselben sind, heissen isoparametrische Flächen.

Eine einfache Form hat also isoparametrische Flächen.

So haben die vier Flächen eines Oktaeders, dessen Axen zwei gegenüberliegende Ecken verbinden, sämmtlich den Ausdruck $a : b : c$ oder $a : a : c$ oder $a : a : a$, je nachdem alle drei Axen verschieden sind, oder eine von den beiden anderen verschieden ist, oder alle drei gleich sind.

So haben die sechs Flächen des Granatoeders, auf drei gleiche Axen *a* bezogen, sämmtlich das Zeichen $a : a : \infty a$.

Oktaeder und Granatoeder sind also einfache Formen.

Wird eine einfache Form in eine ideale symmetrische verwandelt, so sind alle ihre Flächen gleich und ähnlich.

Zwei oder mehr einfache Formen durchdringen sich gleichsam gegenseitig zu einer Combination, in welcher meist eine Form vorherrscht, und die anderen untergeordnet so auftreten, dass sie die Kanten und Ecken jener modificiren (abstumpfen, zuschärfen, zuspitzen).

Es ist die Aufgabe, die Combination aufzulösen, d. h. die einfachen Formen nachzuweisen, welche in ihr enthalten sind.

Eine Combination entsteht auch, wenn ein Prisma, d. h. ein offener Krystallraum, durch ein oder mehrere Flächen zu einem geschlossenen Körper wird.

Besteht eine Combination aus lauter isoparametrischen Flächen, so sind es zwei Hälften oder vier Viertel. Sind diese Hälften oder Viertel für sich geschlossene Körper, also einfache Formen, so heissen sie Hälft- oder Viertelflächner (s. Hemiedrie). Solche Hälften oder Viertel sind allemal physikalisch verschieden, denn ohne dies würden sie zusammen nur eine einfache Form, einen Vollflächner, bilden. Sind die Hälften aber zwar isoparametrisch, jedoch für sich offene Krystallräume (und dann stets physikalisch verschieden), so heissen sie Partialformen. (S. weiterhin.)

Symmetrieverhältnisse der Krystalle.

Zwei an einem Krystall einander diametral gegenüberliegende Punkte, z. B. Ecken, sind immer gleichartig oder symmetrisch, d. h. alle Begrenzungselemente, welche sich auf zwei solche Punkte beziehen, wie Flächen und Kanten, wiederholen sich nach Zahl, Neigung und physikalischer Beschaffenheit an beiden Punkten.

Axen sind Linien, welche solche Punkte gleichsam verbinden; Axen sind daher Symmetrielinien, es sind Linien gleicher Symmetrie an ihren beiden Endpunkten. Gehen wir davon aus, dass Krystalle auf drei rechtwinklige Axen sich beziehen lassen, so bemerken wir, dass bei gewissen Krystallen die Symmetrie in der Richtung aller drei Axen ganz dieselbe ist. Krystalle dieser Art, von denen wir sagen, sie beziehen sich auf drei gleiche Axen, sind in jeder Stellung gleich, sie haben kein Oben und Unten, kein Rechts und Links, kein Vorn und Hinten. Sie heissen gleichgliedrige oder reguläre, und besitzen das Maximum der Symmetrie überhaupt. Ihre krystallographisch gleiche Symmetrie ist mit der physikalischen Beschaffenheit ihrer Masse eng verbunden, denn sie zeigen z. B. auch in optischer Hinsicht gleiches Verhalten ihrer Substanz in jeder Richtung: sie sind einfach brechend.

Andere Krystalle zeigen zwar gleiche Symmetrie in der Richtung zweier Axen, eine andere aber nach der dritten; solche Krystalle besitzen in dieser letzteren eine eminente oder Hauptaxe. Stellt man sie nach dieser aufrecht, so kann man sie zwar um dieselbe drehen, denn rechts und links sind gleich vorn und hinten, allein sie haben ein Oben und Unten, verschieden von dem Rande. Solche Krystalle heissen viergliedrige.

Krystalle, deren drei Symmetrierichtungen verschieden sind, lassen den dreifachen Gegensatz des Oben und Unten gegen das Rechts und Links und gegen das Vorn und Hinten wahrnehmen. Diese auf drei verschiedene Axen sich beziehenden Krystalle heissen zweigliedrige.

Die Symmetrie prägt sich an den Krystallen durch geometrische und physikalische Merkmale aus.

Geometrisch durch die gleiche oder ungleiche Neigung der homologen Begrenzungstheile.

An einem gleichgliedrigen oder regulären Oktaeder sind alle Kantenwinkel gleich, alle Kanten oder Flächen gegen die Axen gleich geneigt. An einem viergliedrigen Oktaeder (Quadratoktaeder) haben wir End- und Seitenkanten, End- und Seitenecken, und die Neigung zweier Flächen in den Endkanten ist eine andere als diejenige in den Seitenkanten. An einem zweigliedrigen Oktaeder (Rhombenoktaeder) finden wir dreierlei Kanten, und die Neigung der Flächen in diesen Kanten ist eine verschiedene.

Die physikalischen Merkmale, in welchen sich das Symmetriegesetz eines Krystalls ausprägt, bestehen darin, dass an Punkten ungleicher Symmetrie auch eine physikalische Differenz stattfindet. Es ist dies eine Folge des wichtigen Gesetzes, dass nur Formen gleicher Symmetrie in Combination treten. Aus der Art, wie eine einfache Form durch eine andere modificirt wird, lässt sich das für beide geltende Symmetriegesetz (wir werden später sagen: das Krystallsystem) erkennen.

Beispiel. Wir sahen, dass das Hexaid die Ecken des Oktaids abstumpft. Am regulären Oktaeder stumpft jenes (der Würfel) alle Ecken ab; die abstumpfenden Hexaidflächen sind sämmtlich physikalisch gleich. Am viergliedrigen oder Quadratoktaeder sind nur die Endecken oder nur die Seitenecken durch Hexaidflächen abgestumpft, und wenn alle, so ist dann die Hexaidfläche, welche als Endfläche an der differenten Axe liegt, physikalisch verschieden von den beiden anderen, welche unter sich gleich sind.

Am zweigliedrigen oder Rhombenoktaeder sind die drei verschiedenen Ecken durch drei physikalisch verschiedene Hexaidflächen abgestumpft, und das Vorkommen der einen bedingt nicht das der anderen. Das viergliedrige und das zweigliedrige Hexaid besitzen also nicht mehr drei physikalisch gleiche Flächen, bei letzterem sind alle drei verschieden. Immer ist die Symmetrie des Oktaids auch die seines Hexaids.

Auch die geometrischen Merkmale an Combinationen geben Aufschluss über die Symmetrie der in ihnen enthaltenen einfachen Formen.

Am Hexaid stumpft das Oktaid die Ecken ab. Am Würfel bildet das reguläre Oktaeder eine Abstumpfung, deren Neigung gegen alle drei anstossenden Würfelflächen dieselbe ist. Die Oktaederfläche ist ein gleichseitiges Dreieck. Am viergliedrigen Hexaid (quadratischen Prisma mit Endfläche) stumpft ein Quadratoktaeder eine Ecke so ab, dass seine Fläche gleiche Winkel bildet mit zwei Hexaidflächen, einen anderen Winkel mit der dritten, der Endfläche, welche physikalisch verschieden von jenen ist. Die Oktaederfläche ist ein gleichschenkliges Dreieck. Am zweigliedrigen Hexaid mit seinen drei physikalisch verschiedenen Flächen bildet die Fläche eines Rhombenoktaeders eine Abstumpfung einer Ecke, verschieden geneigt gegen die drei Hexaidflächen. Hier hat sie die Gestalt eines ungleichseitigen Dreiecks.

Zuweilen lassen Winkelmessungen und die physikalische

Beschaffenheit der Flächen Zweifel über das Symmetriegesetz eines Krystalls. In solchem Fall giebt sein optisches Verhalten Aufschluss.

Gesetz der Rationalität der Parameter. Krystallreihe. Grundform.

Schon aus den beiden für die Zonenentwicklung und Projection gewählten Beispielen ergab sich, dass alle Flächen, die an den Krystallen einer Substanz auftreten, hinsichtlich ihrer Lage gegen ein gewähltes Axensystem unter sich in sehr einfachen Beziehungen stehen. Dies ist ein allgemeines Gesetz:

Die Parameterverhältnisse aller Flächen einer Substanz sind rationale und meist sehr einfache. Dies ist das Gesetz der Rationalität der Parameter.

Dieses Gesetz erkennt man auch, wenn man die bei einer Substanz vorkommenden einfachen Formen misst, und aus den Messungen für jede von ihnen das ihr zukommende Parameter- oder Axenverhältniss berechnet.

So finden sich am Schwefel, der auf drei rechtwinklige, ungleichwerthige Axen a, b, c bezogen wird, mehrere Oktaide (Rhombenoktaeder), für welche die Axenverhältnisse sind:

	$a : b : c$
o	$0{,}81 : 1 : 1{,}9$
$\frac{o}{2}$	$0{,}81 : 1 : 0{,}95$
$\frac{o}{3}$	$0{,}81 : 1 : 0{,}633$
s	$2{,}43 : 1 : 1{,}9$
n	$0{,}273 : 1 : 1{,}9$

Es stehen also die Parameter a in dem Verhältniss $1 : 1 : 1 : 3 : \frac{1}{3}$; die c in dem von $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : 1 : 1$. Dies sind rationale und einfache Verhältnisse.

Unter *Krystallreihe* versteht man den Inbegriff aller bei einer Substanz vorkommenden und durch jene Rationalität unter sich verbundenen Formen. Manche Substanzen, besonders gewisse Mineralien, haben sehr reich entwickelte Krystallreihen aufzuweisen (Orthoklas, Quarz, Kalkspath, Titanit etc.).

Eine *krystallonomisch mögliche Fläche* heisst eine solche, welche, obwohl sie an den Krystallen einer Substanz noch nicht beobachtet wurde, ein Parameterverhältniss hat, welches zu den vorhandenen sich rational verhält, so dass diese Fläche gleichsam ein fehlendes Glied der Krystallreihe bildet.

Um das Axenverhältniss der Formen einer Substanz in bestimmten Zahlen ausdrücken zu können, greift man aus ihrer Krystallreihe ein Glied heraus, und zwar bei den auf drei Axen zu beziehenden Krystallen ein Oktaid, und bezeichnet das Parameterverhältniss dieses Gliedes als das der Axeneinheiten. Dieses Glied heisst die Grundform. Man wählt als solche eine häufig vorkommende oder an den Krystallen vorherrschende Form oder eine solche, welche für die übrigen Formen möglichst einfache Parameterverhältnisse (Flächenzeichen) zur Folge hat.

Wird beim Schwefel das Rhombenoktaeder 0 als Grundform gewählt, so ist $0{,}81 = a$ und $1{,}9 = c$, und die einzelnen Oktaeder sind dann:

$$o = a : b : c$$
$$\tfrac{o}{2} = a : b : \tfrac{1}{2}c$$
$$\tfrac{o}{3} = a : b : \tfrac{1}{3}c$$
$$s = 3a : b : c$$
$$n = \tfrac{1}{3}a : b : c$$

Hätte man aber Grund, das Oktaeder $\frac{o}{2}$ als Grundform zu wählen, so würde

$$o = a : b : 2c$$
$$\tfrac{o}{2} = a : b : c$$
$$\tfrac{o}{3} = a : b : \tfrac{2}{3}c$$
$$s = 3a : b : 2c$$
$$n = \tfrac{1}{3}a : b : 2c$$

Wenn die Symmetrie nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, so sind die, diese Richtungen bezeichnenden Axen (oder eigentlich die Flächenparameter) von ungleicher Länge, und diese Längen stehen bei den Formen einer Substanz in keinem rationalen Verhältniss.

Dies gilt in dem gewählten Beispiel also für $a : b = 0{,}81 : 1$, oder $b : c = 1 : 1{,}9$ oder $a : c = 0{,}81 : 0{,}9$.

Theilflächigkeit. Hemidrie. Tetartoedrie.

Wenn an einer einfachen Form die Hälfte der Flächen nach einem bestimmten Gesetz so verschwindet, dass die bleibende Hälfte einen geschlossenen Körper bildet, der das Symmetriegesetz bewahrt, so ist aus dem Vollflächner oder der holoedrischen Form ein Hälftflächner oder eine hemiedrische Form entstanden. Jeder Vollflächner liefert natürlich zwei gleiche Hälftflächner (Gegenkörper). Zerfällt ein Hälftflächner unter denselben Bedingungen wie zuvor, in zwei Hälften, d. h. der Vollflächner in vier Viertel, so entstehen Viertelflächner oder tetartoedrische Formen.

Die beiden Gegenkörper können sich combiniren, wobei sich beide durch die physikalische Beschaffenheit ihrer Flächen unterscheiden (zwei Tetraeder, zwei Rhomboeder).

Das bestimmte Gesetz der Hemiedrie, welches sich an einer Form einer Substanz offenbart, beherrscht auch alle übrigen bei ihr vorkommenden Formen. Es giebt daher keine Combinationen von Hälft- und Vollflächnern, noch weniger Combinationen von Hälftflächnern nach verschiedenen Gesetzen.

Viele Vollflächner erleiden jedoch durch ein bestimmtes Gesetz der Hemiedrie in ihrem Ansehen keine Veränderung, in dem Fall nämlich, wenn die bleibenden und die verschwindenden Flächen in eine Ebene fallen würden. Sie sehen dann wie Vollflächner aus, sind dies jedoch nur scheinbar, ihre Flächen haben die Bedeutung von Flächenhälften. So haben solche Combinationen das Ansehen, als wenn Vollflächner und Hälftflächner zusammen auftreten könnten.

Die beiden Gegenkörper, welche als Hälftflächner aus einem Vollflächner hervorgehen, sind in vielen Fällen congruent. Man unterscheidet sie wohl als rechte und linke, jedoch nur conventionell, denn der eine wird durch Drehung zu dem anderen.

Bisweilen jedoch sind die beiden Gegenkörper nicht congruent, sondern verhalten sich wirklich wie ein rechter und ein linker, das Spiegelbild des einen ist der andere. Diese interessante Erscheinung heisst Enantiomorphie. (S. reguläres und sechsgliedriges System, so wie das Rhombentetraeder).

Theilflächigkeit. — Selten ist der Fall, dass von den Flächen einer einfachen Form ein Theil (Hälfte, Drittel) verschwindet, so dass die bleibenden Flächen sich zu einem neuen Körper ausdehnen, der dann scheinbar einem anderen Symmetriegesetz angehört. So entstehen Theilflächner.

Aus dem Leucitoeder geht beim Salmiak durch Verlust eines Drittels der Flächen gleichsam ein Vierkantner hervor.

Hemimorphie. — Wenn zwei entgegengesetzte Stellen eines Krystalls verschiedene Ausbildung zeigen, so nennt man dies Hemimorphie. Entweder fehlen dann die Parallelen des einen Endes am anderen, oder sie treten in anderer Combination auf. (Jodsilber). Mit der Hemimorphie scheint immer Pyroelektricität verbunden zu sein.

Selten finden sich Hemimorphie und Theilflächigkeit nebeneinander.

Formen- und Flächenbezeichnung.

Jede einfache Form hat einen bestimmten Namen, wobei leider keine Uebereinstimmung unter den Krystallographen herrscht. Wir bevorzugen solche Namen, an welche sich eine bestimmte Vorstellung knüpft, und verwerfen solche, die blos die Zahl der Flächen und die Gestalt derselben an den idealen (nicht wirklichen) Formen wiedergeben. Wir sagen daher

Würfel und nicht Hexaeder.
Granatoeder und nicht Rhombendodekaeder.
Leucitoid und nicht Ikositetraeder.

u. s. w.

Die Flächen einer einfachen Form, eines Prismas und jede Einzelfläche werden durch ihr Parameterverhältniss bezeichnet. Diese Bezeichnung lässt nie Zweifel oder Missverständniss zu, wie sie bei der von Naumann eingeführten und wegen ihrer Kürze sehr verbreiteten Bezeichnung leicht vorkommen können. (S. den Anhang am Schluss). Handelt es sich um Bezeichnung einer einzelnen Fläche einer einfachen Form, einer vorderen oder hinteren, rechten oder linken, so geschieht dies nöthigenfalls durch einen Zusatz zu dem Buchstaben, dem man der Form in Beschreibungen oder Zeichnungen beilegt.

Modelle. Zeichnungen.

Das Studium kann nicht mit den wirklichen Krystallen begonnen werden, weil man sie sich nicht jederzeit und in vollständiger Auswahl verschaffen kann, ferner weil dieselben häufig sehr unsymmetrisch, oft durch Aufsitzen auf ihrer Unterlage nur theilweise ausgebildet und nicht selten auch zu klein sind. Was von ihnen zur Verfügung steht, studirt man, nachdem man sich mit den Formen der Substanz an Modellen und Zeichnungen vertraut gemacht hat.

Unter den Modellen sind Holzmodelle, wenn richtig gearbeitet, allen anderen vorzuziehen. Ihre Anfertigung setzt besondere Werkzeuge und die Kenntniss der Zonen und Winkel voraus[1]).

Am zugänglichsten und instructivsten sind Zeichnungen, namentlich wenn man sie selbst anfertigt. Unsere Projectionsbilder sind zwar auch Zeichnungen, wir meinen jedoch hier solche graphische Darstellungen von Krystallen, welche das wirkliche Ansehen derselben wiedergeben.

Ist die Zeichnungsebene eine der Axenebenen oder eine Ebene, senkrecht auf eine gewisse Zone, so erhält man einen Durchschnitt, wie z. B. die Fig. 15, 16, 22, 23 und 28, der für die Zonenentwicklung ungemein dienlich ist. Die gewöhnlichen Zeichnungen, welche gleichsam ein plastisches Bild liefern sollen, wie Fig. 14, 21 und 27, sind im Gegensatz zu jenen orthographischen klinographische Projektionen. Wenn sie für das Studium Werth haben sollen, müssen sie die Zonen erkennen lassen, parallele Kanten müssen parallel erscheinen, d. h. das Auge muss in unendlicher Entfernung gedacht werden. Von Perspective darf keine Rede sein. Die Erscheinung des Bildes hängt ab: 1. von der Stellung des Auges gegen den Krystall und die Zeichnungsebene und 2. von der Stellung des Krystalls gegen letztere.

Heisst an einem System dreier rechtwinkliger Axen die dem Beobachter zugekehrte Axe a, die von links nach rechts gehende b, die aufrechte c, und wird diese vertikal gestellt, so ist die Axenebene ab horizontal.

Eine Ebene, durch c und das Auge gelegt, heisst Gesichtsebene. Ist diese zugleich die Axenebene ac, und befindet sich das Auge auch in der Horizontalebene (ab), so erscheint a zu einem Punkt verkürzt. Man will aber in der Zeichnung von einem Krystall so viel wie möglich sehen, was bei jener Stellung

1) Das Modelliren behandelt Naumann in seinem Lehrbuch der Krystallographie, Bd. 2., S. 483, Leipzig 1830.

nicht der Fall ist, da die Kanten *a c* mit *c*, die *a b* mit *b* zusammenfallen würden.

Man dreht daher das Axenkreuz um *c* so, dass die Axe *a* nach links zu liegen kommt. Dann bildet die Gesichtsebene mit der Axenebene *ac* einen gewissen Winkel, die Deklination. Dann erhebt man das Auge über die Horizontalebene, so dass diese mit einer Linie vom Auge nach dem Mittelpunkt einen Winkel bildet: die Elevation. Von der Grösse beider Winkel hängt die Erscheinung des Bildes ab.

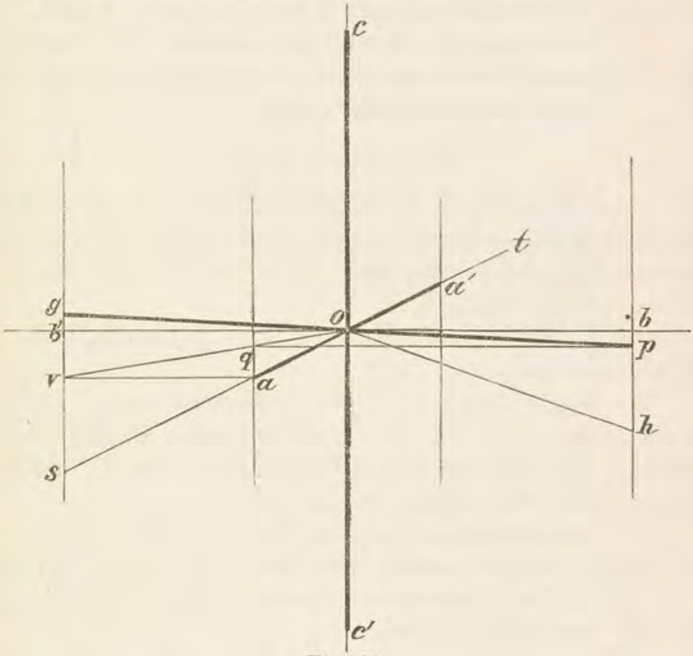


Fig. 30.

Wir geben hier vorläufig blos die Construction eines Systems dreier gleicher Axen (Axenkreuz des regulären Systems). Man ziehe (Fig. 30) zwei senkrechte Linien bb' und cc', theile die horizontale bb' in sechs gleiche Theile, ziehe durch die Punkte b, b' und die zunächst c liegenden $\frac{1}{3}$ Vertikalen, nehme links $b's = \frac{1}{2}\, o b$, ziehe st durch o, so ist das Stück aa' die Axe a.

Jetzt ziehe man av parallel bb', dann vo und qp ebenfalls parallel bb'. Endlich pog, so ist pg die Axe b.

Endlich nehme man $bh = \frac{1}{3}ob$, ziehe ho und trage dieses von o aus in der Vertikalen nach oben und unten ab; so ist cc' die Axe c.

Bei dieser Construction ist die Deklination = 18° 26′, die Elevation = 9° 28′.

So ist die Zeichnung eines gleichaxigen Axensystems (wie sie für das reguläre System erfordert wird), sie lässt sich aber auch für jedes (rechtwinklige) ungleichaxige verwerthen, wenn man die Axe b bestehen lässt und entweder c allein oder a und c in dem erforderlichen Masse ihrer Länge nach ändert.

Die Zeichnung des Axenkreuzes gestattet die Construction aller einfachen Formen und ihrer Combinationen, wovon später einige Beispiele gegeben werden sollen.

Krystallmessung.

Durch Ermittelung der Kantenwinkel in den verschiedenen Zonen eines Krystalls gelangt man zur Kenntniss des Symmetriegesetzes (Krystallsystems) und der krystallographischen Constanten (Axenverhältniss).

Dies geschieht durch Messung jener Winkel mittelst eines Goniometers.

Wir beschreiben ein solches Instrument nicht, weil dies in allen mineralogischen und krystallographischen Werken geschieht, und weil man seinen Gebrauch nur durch praktische Demonstration und eigene Uebung erlernt.

Goniometermessungen setzen Krystalle mit ebenen, gut spiegelnden Flächen voraus, was freilich bei vielen Krystallen nicht der Fall ist. Deshalb sind die Resultate der Beobachtungen von sehr ungleichem Werth.

Krystallberechnung.

Gesetzt, man habe an einer Combination alle Kantenwinkel gemessen, so berechnet man aus den Winkeln einer der in der Combination enthaltenen und dazu geeigneten einfachen Formen (z. B. eines Oktaids) das Axenverhältniss (das Verhältniss der Axeneinheiten). Aus den Winkelmessungen der übrigen Formen leitet man sodann ihre Axenverhältnisse ab und stellt die aus diesen berechneten Winkel den direkt gemessenen gegenüber, um die mehr oder minder nahe Uebereinstimmung beider zu erkennen; hierbei kommt das Gesetz von der Rationalität der Flächenparameter zur Geltung.

Die wichtigsten Fälle solcher Rechnungen werden wir später durchgehen.

Zur weiteren Kenntniss der Messung und Berechnung von Krystallen möge man benutzen:

Naumann, Elemente der Mineralogie. 11. Aufl. von Zirkel. Leipzig 1881.

Groth, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1876.

Pfaff, Grundriss der mathematischen Verhältnisse der Krystalle. Nördlingen 1853.

Klein, Einleitung in die Krystallberechnung. Stuttgart 1876.

F. v. Kobell, Zur Berechnung der Krystallformen.

Liebisch, Geometrische Krystallographie. Leipzig 1881.

Die Krystallsysteme.

Alle Krystalle, welche ein und dasselbe Symmetriegesetz zeigen, bilden eine Gruppe, welche man ein Krystallsystem nennt. Man bezieht die Krystalle auf ein System dreier (rechtwinkliger) Coordinaten- oder Axenebenen, deren Durchschnitte (Axen) die Richtungen gleicher Symmetrie am Krystall sind.

Sind diese drei Richtungen von gleicher Symmetrie, so nennt man das System das gleichgliedrige oder reguläre. Ein regulärer Krystall kann also nach jeder der drei gleichwerthigen Axen aufrecht gestellt werden. Er zeigt keine Verschiedenheit in der Richtung der Axen. Diese werden mit a bezeichnet. Jede der drei Axenebenen theilt ihn in zwei gleiche Hälften.

Ist die Symmetrie in einer Richtung eine andere als in derjenigen der beiden anderen, so heisst der Krystall ein viergliedriger. Jene eminente Richtung wird senkrecht gestellt, heisst Hauptaxe und wird mit c gegenüber den Nebenaxen $= a$ bezeichnet. Die Krystalle des viergliedrigen Systems haben ein Oben (und Unten), verschieden vom Rand. Die Hauptaxe ist bei ihren einfachen Formen, deren Flächen a und c schneiden, länger oder kürzer als die Nebenaxen.

Ist die Symmetrie in allen drei Richtungen eine andere, so heisst der Krystall ein zweigliedriger. Da jede der drei

Axen senkrecht gestellt werden kann, so ist seine Stellung an und für sich eine willkürliche. Die drei ungleichwerthigen Axen werden mit *a*, *b*, *c* bezeichnet. Ein Krystall des zweigliedrigen Systems ist verschieden symmetrisch an den drei Endpunkten der Axen. Sein Oben und Unten tritt dem Vorn und Hinten und dem Rechts und Links gegenüber. Die drei Axen der einfachen Formen sind von ungleicher Länge.

In beiden Systemen theilt, gleichwie im regulären, jede Axenebene den Krystall in zwei gleiche Hälften.

Nun giebt es Krystalle, die sich bezüglich der Symmetrie wie die zweigliedrigen verhalten, mit dem Unterschiede jedoch, dass ein Vorn von einem Hinten abweicht, so dass eine Differenz in der Ausbildung hervortritt zwischen dem, was in den beiden entgegengesetzten Richtungen einer der Axen vom Mittelpunkt aus geschieht. Solche Krystalle heissen zwei- und eingliedrige. Indem man diese different gewordene Axe $= a$ dem Beobachter zukehrt, die senkrechte aber *c* nennt, theilt die Axenebene *ac* (Symmetrieebene) den Krystall in eine gleiche rechte und linke Hälfte, während die Axenebene *bc* ihn (in Beziehung auf die am oberen oder unteren Ende erscheinenden Begrenzungselemente) in eine vordere und hintere Hälfte theilt, welche verschieden sind.

Obwohl nun bewiesen ist, dass bei einzelnen zwei- und eingliedrigen Krystallen drei rechtwinklige Axen angenommen werden können, so scheint es doch, als sei die different gewordene Axe (*a*) in den meisten Fällen gegen die andere in der Symmetrieebene liegende (*c*) nicht genau rechtwinklig geneigt. Man kann sehr wohl eine solche Abweichung und die physikalische Differenz des Vorn und Hinten als sich gegenseitig bedingend ansehen. (S. Eisenvitriol S. 30.)

Wie wir später sehen werden, ist bei einem zwei- und eingliedrigen Krystall nur die auf der Symmetrieebene senkrechte Axe *b* von der Natur gegeben, während die in jener Ebene liegenden Axen *a* und *c* so gewählt werden können, dass die Flächen möglichst einfache Ausdrücke erhalten. Dann sind sie aber, wie die zweite Betrachtungsweise des Eisenvitriols lehrt, oft sehr schief geneigt. Wir verzichten jedoch auf die einfacheren Flächenzeichen zu Gunsten einer Annahme von nahe rechtwinkligen Axen. Schon vor langer Zeit hat

Neumann gezeigt, dass am Gyps, der diesem System angehört, die thermischen, optischen, akustischen und Cohäsionsaxen unter sich und mit drei rechtwinkligen Richtungen zusammenfallen, die man zugleich als krystallographische Axen betrachten kann.

Ferner giebt es Krystalle, bei welchen eine Differenz in der Richtung zweier Axen eintritt. Solche Krystalle sind am einen Ende, nicht blos wie die zwei- und eingliedrigen, vorn und hinten, sondern auch rechts und links geometrisch und physikalisch verschieden. Sie heissen eingliedrige. (Siehe Kupfervitriol S. 31.) Auch bei ihnen gelingt es, drei Axen zu finden, welche sich rechtwinkligen nähern, wenngleich dadurch die Flächenausdrücke minder einfach werden, als bei Annahme anderer Axen, die von der normalen Richtung weit mehr abweichen.

Endlich giebt es Krystalle, deren Symmetrieverhältnisse und optisches Verhalten die meisten Krystallographen veranlassen, sie auf vier Axen zu beziehen, von denen eine, die Hauptaxe, verschieden ist von den anderen, die senkrecht zu jener stehen. Es sind die Krystalle des sechsgliedrigen Systems.

Reguläres System.

(Gleichgliedriges System.)

In dieses System gehören, nach dem zuvor Gesagten, alle Krystalle mit gleicher Symmetrie in drei auf einander normalen Richtungen. Wegen der Gleichheit aller drei Axen giebt es für alle regulär krystallisirte Substanzen nur eine Grundform, das reguläre Oktaeder $a : a : a$.

Ausser den Axen a, welche durch die Ecken des Oktaeders gelegt gedacht werden, sind für die Kenntniss der Formen noch zwei Arten von Axen wichtig:

1. Die rhombischen Zwischenaxen $= s$. Sie liegen zwischen je zwei Axen a und bilden mit ihnen Winkel von 45°.

2. Die rhomboedrischen Zwischenaxen $= t$. Sie liegen zwischen je drei Axen a und neigen sich gegen diese unter 54° 44′, gegen die s unter 35° 16′.

A. Vollflächner.

Das reguläre Oktaeder.

Es ist das Oktaid des regulären Systems. Fig. 31. Sein Zeichen ist $a : a : a$. Die vier Flächen stossen bei idealer Ausbildung in Ecken zusammen, welche die Endpunkte der Parameter $a = 1a$ bilden. Alle Kanten sind gleich, ebenso alle Ecken. Die Flächen der idealen Form sind gleichseitige Dreiecke, die der wirklichen Krystalle sind Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecke, je nach dem wechselnden Abstande der Flächen von ihren Parallelen. S. Fig. 1—3.

Die rhombischen Zwischenaxen s treffen die Mitte je zweier gegenüberliegenden Kanten. Sie stehen senkrecht auf den Kanten. Die rhomboedrischen Zwischenaxen t treffen die Mitte je zweier parallelen Flächen. Sie stehen senkrecht auf den Flächen. S. Fig. 32.

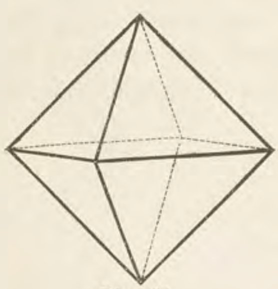


Fig. 31.

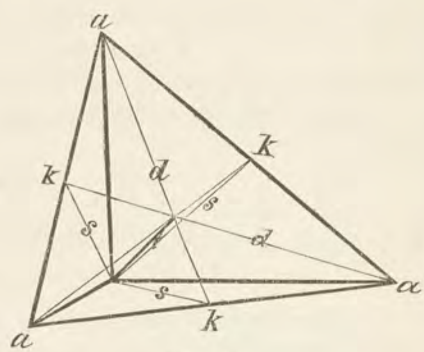


Fig. 32.

Wir verstehen hier und überall unter a, s und t ihre Hälften, vom Mittelpunkt bis zu den Ecken, Kanten oder Flächen gedacht, und setzen stets $a = 1$, wenn es sich um die Werthe von s, t u. s. w. handelt.

Ist nun die Axe $a = 1$, so ist, wie die geometrische Betrachtung lehrt:

die Flächendiagonale $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

die Kante $k = \sqrt{2}$

die rhombische Zwischenaxe $s = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

die rhomboedrische Zwischenaxe $t = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Also

$$a : s : t = 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$
$$= 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Für die Neigung der Kante zur Axe (a) ist die $tg = 1$ also $= 45°$. Zwei Kanten jenseits a also $= 90°$.

Für die Neigung der Fläche zur Axe ist *sin: cos* $= s : a$, also $tg = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, d. h. $= 35° \, 15' \, 52''$. Zwei Flächen jenseits $a = 70° \, 31' \, 44''$. Mithin ist der Kantenwinkel der idealen Form $= 109° \, 28' \, 16''$. Beide Winkel erscheinen gewöhnlich an den wirklichen Krystallen.

Der Würfel.

Er ist das Hexaid des regulären Systems. Fig. 33. Sein Zeichen ist $a : \infty a : \infty a$. An der idealen Form sind die Flächen Quadrate, an wirklichen Würfeln blos Rechtecke. Die Kanten wie die Ecken sind unter sich gleich. Die Kanten sind gleichsam die Axen a.

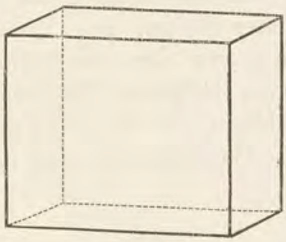


Fig. 33.

Die Axen a treffen (am idealen Würfel) die Mitte der Flächen, die Zwischenaxen s die Mitte der Kanten und die t die Ecken.

Beim Würfel ist

$$a : s : t = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

Da s des Oktaeders $= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ und t desselben $= \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$ ist, so ist, bezogen auf diese als Einheit gedachten absoluten Werthe des Oktaeders, beim Würfel der relative Werth von $s = 2$, von $t = 3$.

Combination mit dem Oktaeder.[1]) Hier gilt das,

1) Die Combinationen und ihre Form sind hier auf die wichtigsten Fälle beschränkt. Mineralogische Werke behandeln sie ausführlicher.

was vom Oktaid und dem zugehörigen Hexaid gesagt ist. Am Würfel stumpft das Oktaeder die Ecken gerade ab, am Oktaeder stumpft der Würfel die Ecken gerade ab, so dass die Würfelfläche gleichzeitig in zwei Zonen des Oktaeders fällt. Von der unsymmetrischen Ausbildung der Combination zeigen die Fig. 34 und 35 einige Beispiele.

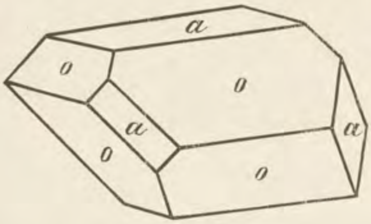


Fig. 34.

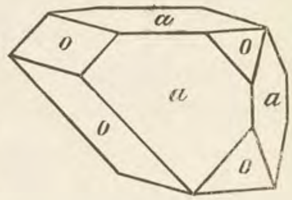


Fig. 35.

Das Granatoeder.

Es ist das Dodekaid des regulären Systems, sein Zeichen also $a : a : \infty a$. Fig. 36. Die ideale Form hat lauter Rhomben zu Flächen. Wir unterscheiden die vierflächigen Oktaederecken an den Axen a von den dreiflächigen Würfelecken. Die jene verbindenden längeren Flächendiagonalen sind die Oktaederkanten, während die die Würfelecken verbindenden Querdiagonalen den Würfelkanten und den Axen parallel gehen.

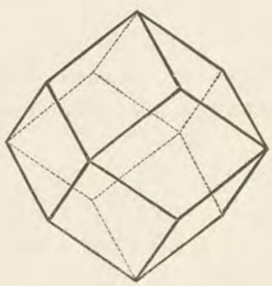


Fig. 36.

Die Construction ist sehr leicht; sie ist in Fig. 37 für eine Würfelecke dargestellt. Jede Kante läuft von a nach der Ecke des aus den beiden anderen a gebildeten Quadrats. Diese ganze Kante k ist $= \sqrt{3}.$

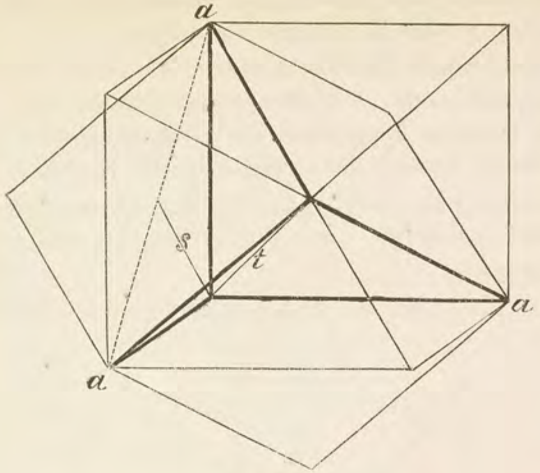


Fig. 37.

Die rhombische Axe s trifft die Mitte der Flächen; sie ist $= s$ des Oktaeders.

Die rhomboedrische Axe t trifft die Würfelecken und ist gleich der halben Kante k.

Mithin ist beim Granatoeder

$$a : s : t = 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{3}{4}}.$$

Der relative Werth von s (s. Würfel) ist mithin $= 1$, der von $t = \frac{3}{2}$.

Es verhalten sich beim Oktaeder, Würfel und Granatoeder

$$\text{die } s = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \sqrt{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 1 : 2 : 1,$$

$$\text{die } t = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} : \sqrt{3} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1 : 3 : \tfrac{3}{2}.$$

Für die Neigung der Fläche zur Axe ist $tg = 1$; diese Neigung also $= 45°$; zwei Flächen über $a = 90°$.

Für die Neigung der Kante zur Axe ist $tg = \sqrt{2} = 54° \, 44' \, 8''$. Also zwei Kanten über a bilden den Oktaederwinkel (109° 28′ 16″).

Neigung der Flächen in den Kanten (Kantenwinkel des Granatoeders). Für den halben Winkel, d. h. für die Neigung einer Fläche gegen die halbirende Ebene, gebildet aus einem a und der Kante, ist $tg = \sqrt{3} = 60°$. Der Kantenwinkel ist also $= 120°$.

Die häufige Unsymmetrie des Granatoeders entsteht durch Ausdehnung in der Richtung eines a oder t.

Granatoeder und Oktaeder. An jenem stumpft dieses die Würfelecken ab. Die Combinationskanten sind unter sich und den längeren Diagonalen der Granatoederflächen parallel. Am Oktaeder stumpft das Granatoeder die Kanten ab. Fig. 38.

Granatoeder und Würfel. An jenem stumpft dieses die Oktaederecken ab. Am Würfel stumpft das Granatoeder die Kanten ab.

Dies Alles folgt aus dem bei den Deduktionskörpern Gesagten.

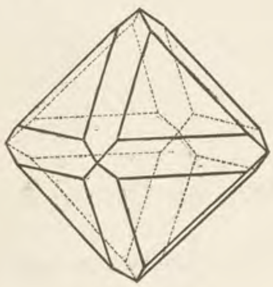


Fig. 38.

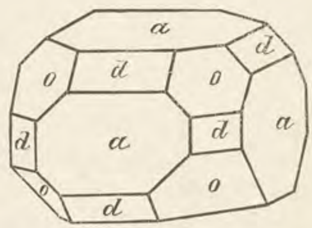


Fig. 39.

Granatoeder, Oktaeder und Würfel. In dieser dreifachen Combination herrscht bald die eine, bald die andere Form. Fig. 39 zeigt den Würfel herrschend. Eine solche Combination ist sehr lehrreich für den Zonenverband (S. 11).

Die Gruppe der Leucitoide.

Zwischen der Oktaederfläche $a:a:a$ und der Würfelfläche $a:\infty a:\infty a$ muss es viele Flächen $a:na:na = a:a:\frac{1}{n}a$ geben. Eine solche Fläche muss 12mal auftreten, und so entsteht eine Gruppe von Formen, die mit den Parallelen 24 Flächen haben und Leucitoide heissen.[1]) Ein Leucitoid ist also eine Form, deren Flächen zwischen Oktaeder und Würfel liegen. Die Zahl n ist hauptsächlich $= 2$ oder 3.

1) Nach dem Leucit, obwohl sein Leucitoid neuerlich für viergliedrig gehalten wird.

In symmetrischer oder idealer Ausbildung sind die Leucitoide von symmetrischen Trapezoiden umschlossen, die je zwei und zwei gleiche Seiten haben und von deren Winkeln zwei gegenüberliegende gleich, zwei ungleich sind. Fig. 40 ist das Leucitoeder $= a : 2a : 2a = a : a : \frac{1}{2}a$.

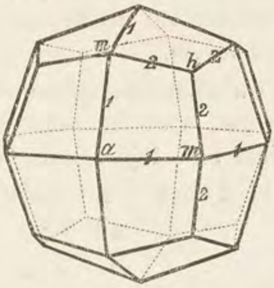


Fig. 40.

Ein Leucitoid hat zweierlei Kanten: 1. gebrochene Oktaederkanten und 2. gebrochene Würfelkanten. Der Ecken giebt es drei verschiedene: Die vierflächigen und vierkantigen Ecken a bezeichnen die Lage der Axen, sie heissen Oktaederecken; die dreiflächigen und dreikantigen h heissen Würfelecken; die zwei- und zweikantigen m heissen mittlere Ecken.

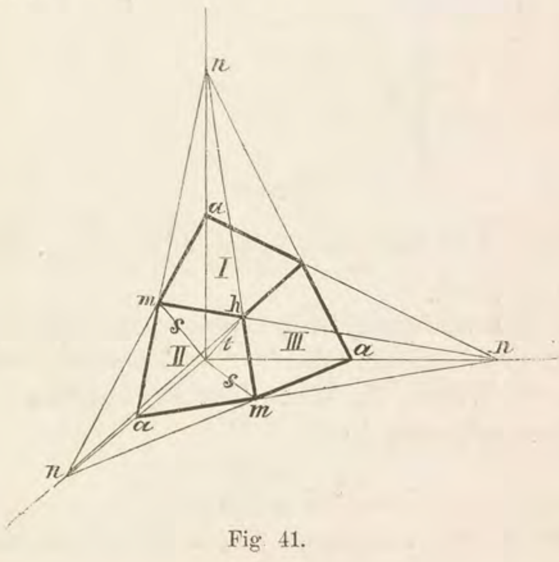


Fig 41.

Construction. Sie ist in Fig. 41 für die drei in der vorderen rechten Würfelecke zusammenstossenden Flächen ausgeführt, und danach leicht für das ganze Leucitoid zu vervollständigen.

Die gebrochenen Oktaederkanten gehen von a nach na. Die gebrochenen Würfelkanten gehen von na nach dem Durchschnitt der $na : a$ und $a : na$.

Die rhombische Zwischenaxe s geht nach der mittleren Ecke. Sie ist in Fig. 42 $= om$, und ist grösser als os (dem s des Oktaeders), und kleiner als oh (dem s des Würfels). Ihr Werth liegt also zwischen $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$. Ganz allgemein ist

$$om = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Dies ist ihr absoluter Werth. Verglichen mit dem s des

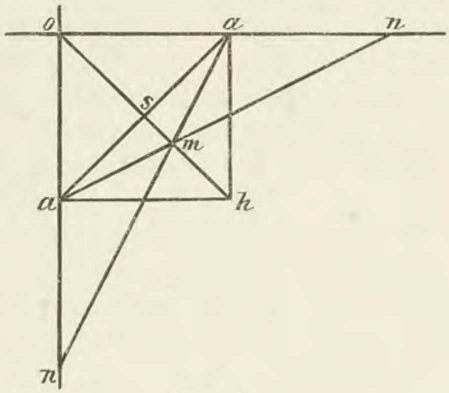


Fig. 42.

Oktaeders $= 1$ ist das s eines Leucitoids $= \frac{2n}{n+1}$. Dies ist sein relativer Werth.

Die rhomboedrische Zwischenaxe t geht nach der Würfelecke h; sie ist grösser als das t des Oktaeders und kleiner als das des Würfels, ihr Werth liegt also zwischen $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$. Ganz allgemein ist

$$t = \frac{n\sqrt{3}}{n+2}.$$

Dies ist sein absoluter Werth. Verglichen mit dem t

des Oktaeders $= 1$ ist das t der Leucitoide $= \frac{3n}{n+2}$. Dies ist sein relativer Werth.

Hiernach ist bei den Leucitoiden

$$a:s:t = 1 : \frac{n\sqrt{2}}{n+1} : \frac{n\sqrt{3}}{n+2}.$$

Und also ist z. B. für

	s	t
$a:a:\frac{1}{2}a$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$a:a:\frac{1}{3}a$	$\frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\frac{3}{5}\sqrt{3}$

Bei dem ersten, dem Leucitoeder, ist also die rhomboedrische Axe t gleich der des Granatoeders, d. h. die Würfelecke des Leucitoeders hat genau dieselbe Lage wie die des Granatoeders; die Kanten des letzteren sind die Längendiagonalen der Leucitoederflächen, d. h. letztere stumpfen jene Kanten ab.

Neigung der Fläche zur Axe a. Man bezeichnet die Lage einer Leucitoidfläche gegen die Axe als die $n$fach stumpfere wie die der Oktaederfläche. Für ihre Neigung ist $tg = n\sqrt{\frac{1}{2}}$ $= \frac{n}{2}\sqrt{2}$. Es ist mithin diese Neigung

bei $a:a:\frac{1}{2}a = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 54° \ 44' \ 8''$

„ $a:a:\frac{1}{3}a = 3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = 64° \ 45' \ 30''$

Bei jenem, dem Leucitoeder, ist die doppelte $= 109° \ 28' \ 16'$ die Neigung zweier Flächen jenseits der Axe, gleich dem Kantenwinkel des Oktaeders. Bei dem stumpferen Leucitoid ist jener Winkel $= 129° \ 31'$.

Neigung der Kanten zu den Axen. a) Der gebrochenen Oktaederkanten. Sie laufen von a nach na. Also ist für den Neigungswinkel $tg = n$.

für $a:a:\frac{1}{2}a$ $\quad$ $\mathrm{tg} = 2 = 63° \ 26'$

$a:a:\frac{1}{3}a$ $\quad$ $\mathrm{tg} = 3 = 71° \ 34'$;

die doppelten Werthe, 126° 52′ und 143° 8′, bezeichnen die Neigung zweier solcher Kanten über a.

b) Der gebrochenen Würfelkanten. Sie laufen von na nach m, dem Endpunkt von s, es ist mithin für den Winkel

$$\mathrm{tg} = \frac{s}{n} = \frac{1}{n+1}\sqrt{2}.$$

Also für

$$a : a : \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}$$
$$a : a : \tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Neigung der Flächen in den Kanten. (Kantenwinkel), und zwar a) in den gebrochenen Oktaederkanten. Die halbirende Ebene ist eine Axenebene. Für die Neigung einer Fläche gegen eine solche ist na der sin, und eine Normale p aus dem Mittelpunkt auf die Kante der cos. Also $\mathrm{tg} = \frac{n}{p} = \sqrt{n^2 + 1}$.

Also ist für

$a : a : \tfrac{1}{2}a$ $\qquad \mathrm{tg} = \sqrt{5} = 65° \; 54' \; 30''$

$a : a : \tfrac{1}{3}a$ $\qquad \mathrm{tg} = \sqrt{10} = 72° \; 27'$

Mithin sind die Winkel in den gebrochenen Oktaederkanten bei jenem 131° 49′, bei diesem 144° 54′.

b) In den gebrochenen Würfelkanten. Die halbirende Ebene wird durch a, s und die Kante gebildet. Für den Winkel ist $tg = \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n - 1}$.

Also für

$a : a : \tfrac{1}{2}a$ $\qquad \mathrm{tg} = \sqrt{11} = 73° \; 13' \; 30''$

$a : a : \tfrac{1}{3}a$ $\qquad \mathrm{tg} = 3\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 64° \; 45' \; 30''$

Die ganzen Winkel sind demnach 146° 27′ und 129° 31′.

Der letztere ist aber zugleich der der Neigung zweier Flächen dieses Leucitoids über a (S. oben).

Die Leucitoide erscheinen oft in einer ziemlich symmetrischen, der idealen nahekommenden Form. Ebenso oft aber sind sie in der Richtung einer Axe ausgedehnt, und zwar

1. nach einem a, so dass die vier oberen und unteren Flächen gegen die übrigen sehr zurücktreten.

2. nach einer rhombischen Zwischenaxe s.

3. nach einer rhomboedrischen Zwischenaxe t. Fig. 43 zeigt das Leucitoeder in dieser Weise; bei ihm bilden die herrschenden Flächen ein sechsseitiges Prisma, dessen Zonenaxe $= t$ ist. Bei den übrigen Leucitoiden fallen diese Flächen nicht in eine Zone.

Leucitoide und Oktaeder. Letzteres stumpft die Würfelecken ab. Am Oktaeder bilden die Leucitoide vierflächige Zuspitzungen der Ecken, aufgesetzt auf die Flächen.

Leucitoide und Würfel. Dieser stumpft die Oktaederecken ab. Am Würfel bilden die Leucitoide dreiflächige Zuspitzungen der Ecken, aufgesetzt auf die Flächen.

Leucitoide und Granatoeder. Das Granatoeder stumpft die mittleren Ecken der Leucitoide ab. Am Granatoeder bildet das Leucitoeder $a:a:\frac{1}{2}a$ Abstumpfungen der Kanten. Die stumpferen Leucitoide aber bilden vierflächige Zuspitzungen der Oktaederecken, aufgesetzt auf die Kanten.

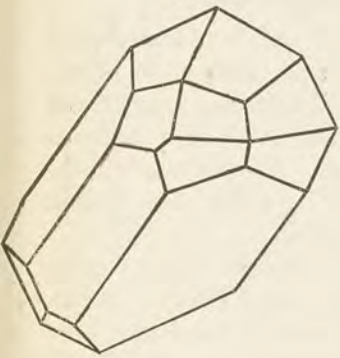


Fig. 43.

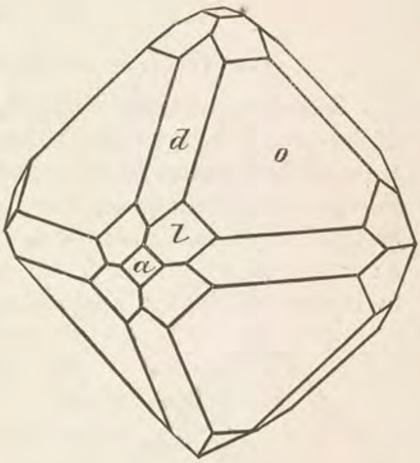


Fig. 44.

Fig. 44 ist eine Combination des Oktaeders *o* mit dem Granatoeder *d*, dem Würfel *a* und einem Leucitoide *l*, welches das Leucitoeder sein muss, weil je zwei Flächen *d* mit einem *l* in eine Zone fallen.

Fig. 45 ist ein nicht vollständig ausgeführtes Bild des Granatoeders in Combination mit dem Oktaeder und einem stumpferen Leucitoid, wobei zwei auf der Granatoederfläche gegenüberliegende Flächen des Leucitoids mit dieser in eine Zone fallen, so dass es $a:a:\frac{1}{3}a$ sein muss. (Man projicire die Combination.)

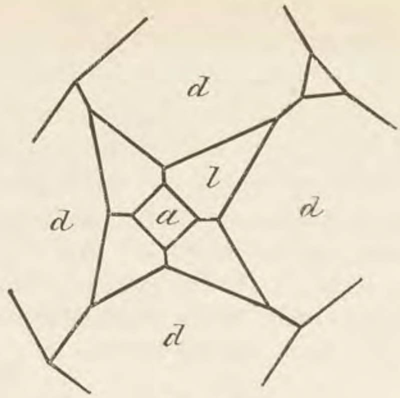


Fig. 45.

Die Gruppe der Pyramidenoktaeder.

Zwischen der Oktaederfläche $a:a:a$ und der Granatoederfläche $a:a:\infty a$ liegen alle Flächen $a:a:na$. Eine solche Fläche muss 12 Mal vorhanden sein, und so entsteht eine Gruppe von Formen, welche (mit den Parallelen) von 24 Flächen begrenzt sind und Pyramidenoktaeder heissen. Ihr Zeichen ist also $a:a:na$, wo $n=2$ oder 3 u. s. w. ist. Ihre Flächen liegen zwischen Oktaeder und Granatoeder.

Fig. 46.

In idealer symmetrischer Gestalt (Fig. 46) sind ihre Flächen gleichschenklige Dreiecke. Sie haben Oktaederkanten (von a nach a) und kürzere Pyramidenkanten. Ihre Oktaederecken sind vier- und vierkantig und achtflächig, ihre Würfelecken sind dreikantig und dreiflächig.

Construktion. Die Construktion der rechten oberen Würfelecke s. Fig. 47. Hieraus folgt: Die Pyramidenkanten laufen von a nach dem Durchschnitt von $a:na$ und $na:a$.

Die rhombische Zwischenaxe s, welche die Mitte der Oktaederkante trifft, ist gleich der des Oktaeders und Granatoeders, also $=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Die rhomboedrische Zwischenaxe t, welche die Würfelecke trifft, muss grösser als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (t des Oktaeders) und kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (t des Granatoeders) sein. Sie ist $= \frac{n\sqrt{3}}{2n+1}$. Ihr relativer Werth, t des Oktaeders $=1$ gesetzt, ist $\frac{3n}{2n+1}$.

So z. B. ist für

	t
$a:a:2a$	$\frac{2}{5}\sqrt{3} = \frac{6}{5}$
$a:a:3a$	$\frac{3}{7}\sqrt{3} = \frac{9}{7}$
$a:a:\frac{3}{2}a$	$\frac{3}{8}\sqrt{3} = \frac{9}{8}$

u. s. w.

Es ist also bei einem Pyramidenoktaeder

$$a:s:t = 1:\tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{n\sqrt{3}}{2n+1}.$$

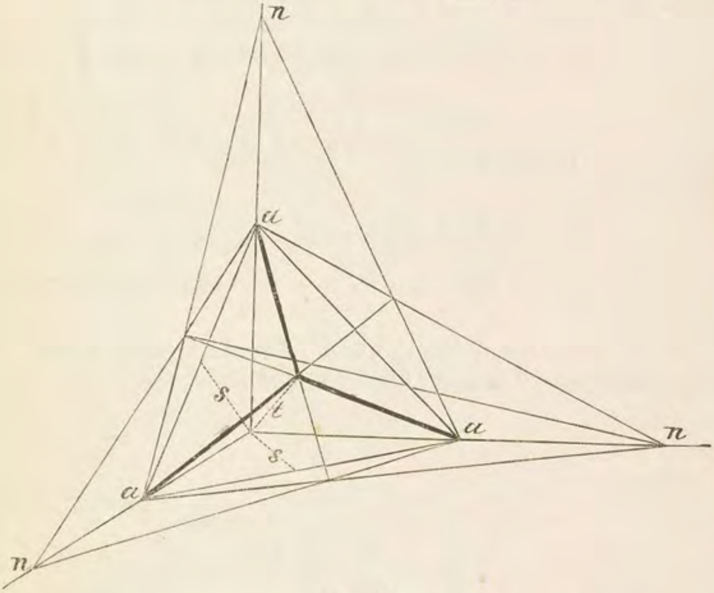


Fig. 47.

N e i g u n g d e r F l ä c h e n z u d e n A x e n. Jede Fläche hat zwei solche Neigungen:

1. Gegen a. $tg = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2. Gegen na. $tg = \frac{1}{2n}\sqrt{2}.$

N e i g u n g d e r K a n t e n z u d e n A x e n, und zwar 1. der O k t a e d e r k a n t e n. Sie ist natürlich wie beim Oktaeder $= 45°$.

2. der Pyramidenkanten. Für den Winkel ist das s der Leucitoide der sin und a der cos, also $tg = \frac{n\sqrt{2}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\sqrt{2}$.

Wir haben gesehen (S. 57), dass die Neigung einer Leucitoidfläche $a:a:\frac{1}{m}a$ zur Axe $a = \frac{m}{2}\sqrt{2}$ ist. Ist nun $\frac{m}{2} = \frac{n}{n+1}$ oder $m = \frac{2n}{n+1}$, d. h. m im Zeichen eines Leucitoids $= \frac{2n}{n+1}$ im Zeichen eines Pyramidenoktaeders, so liegt die Fläche jenes genau so wie die Pyramidenkante von diesem, d. h. jene Fläche stumpft diese Kante ab. Dieser Fall würde also z. B. eintreten bei

$$\left.\begin{array}{l} a:\ a:\frac{3}{4}a \\ = a:\frac{4}{3}a:\frac{4}{3}a \end{array}\right\} \text{ und } a:a:2a \quad m=\tfrac{4}{3} \quad n=2$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} a:\ a:\frac{2}{3}a \\ = a:\frac{3}{2}a:\frac{3}{2}a \end{array}\right\} \text{ und } a:a:3a \quad m=\tfrac{3}{2} \quad n=3$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} a:\ a:\frac{5}{6}a \\ = a:\frac{6}{5}a:\frac{6}{5}a \end{array}\right\} \text{ und } a:a:\tfrac{3}{2}a \quad m=\tfrac{6}{5} \quad n=\tfrac{3}{2}$$

Neigung der Flächen in den Kanten (Kantenwinkel), und zwar

1. In den Oktaederkanten. Die halbirende Ebene ist eine Axenebene. Für den halben Winkel ist $sin : cos = na : s$ also $tg = \frac{n}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$.

Für

	tg	halber Winkel	ganzer Winkel
$a:a:2a$	$2\sqrt{2}$	70° 31′ 44″	141° 3′ 28″
$a:a:3a$	$3\sqrt{2}$	76° 44′	153° 28′
$a:a:\frac{3}{2}a$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	64° 45′ 30″	129° 31′

Der letzte Winkel ist also gleich dem, welchen zwei Flächen von $a:a:\frac{1}{3}a$ sowohl über a als in den gebrochenen Würfelkanten bilden (S. 57).

2. In den Pyramidenkanten. Die halbirende Ebene wird von a, der Pyramidenkante und dem Leucitoid-s gebildet. Also $tg = \frac{\sqrt{3n^2+2n+1}}{n-1}$.

Für

	tg	halber Winkel	ganzer Winkel
$a:a:2a$	$\sqrt{17}$	76° 22′	152° 44′
$a:a:3a$	$\frac{\sqrt{34}}{2}$	71° 4′	142° 8′

Die Pyramidenoktaeder finden sich fast nie selbstständig.

Pyramidenoktaeder und Oktaeder. An einem Pyramidenoktaeder bildet das Oktaeder die Abstumpfung der Würfelecken. Am Oktaeder bildet ein Pyramidenoktaeder eine Zuschärfung der Kanten.

Pyramidenoktaeder und Würfel. An einem Pyramidenoktaeder stumpft der Würfel die Oktaederecken ab. Am Würfel bildet ein Pyramidenoktaeder dreiflächige Zuspitzungen der Ecken, aufgesetzt auf die Kanten.

Pyramidenoktaeder und Granatoeder. An einem Pyramidenoktaeder stumpft das Granatoeder die Oktaederkanten ab. Am Granatoeder bildet ein Pyramidenoktaeder dreiflächige Zuspitzungen der Würfelecken, aufgesetzt auf die Flächen; die Combinationskanten sind den längeren Diagonalen der Granatoederflächen parallel.

Gruppe der Pyramidenwürfel.

Zwischen der Fläche des Granatoeders $a:a:\infty a$ und der des Würfels $a:\infty a:\infty a$ liegen die Flächen $a:na:\infty a$. Eine solche Fläche ist 12 Mal vorhanden. Die dadurch entstehende Form heisst Pyramidenwürfel; sie ist (mit den Parallelen) von 24 Flächen begrenzt, und ihr Zeichen ist $a:na:\infty a = \frac{1}{n} a:a:\infty a$. Ihre Flächen liegen also zwischen Würfel und Granatoeder.

In idealer symmetrischer Gestalt (Fig. 48) sind die Flächen gleichschenklige Dreiecke. Die Kanten sind theils Würfelkanten h, theils Pyramidenkanten p. Die Oktaederecken a sind vierkantig, die Würfelecken a drei- und dreikantig.

Die Construktion einer Würfelecke für $a:na:\infty a$ s. Fig. 49.

Die Linien $a:na$ sind die Flächendiagonalen, und haben die Lage der gebrochenen Oktaederkanten der Leucitoide. Die Pyramidenkanten laufen von a nach der Ecke des aus na gebildeten Quadrats.

Die Axen a treffen die Oktaederecken, die rhombischen

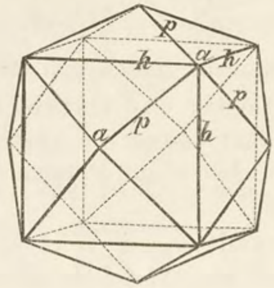


Fig. 48.

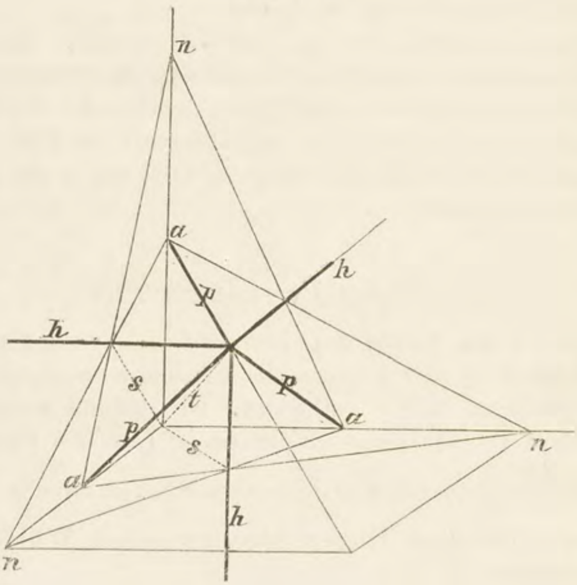


Fig. 49.

Zwischenaxen s treffen die Mitte der Würfelkanten. Sie sind die s der Leucitoide, also $= \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$. Ihr relativer Werth ist also $\frac{2n}{n+1}$. Die rhomboedrischen Zwischenaxen t treffen die

Würfelecken; sie sind $= \frac{n\sqrt{3}}{n+1}$, also ist ihr relativer Werth $= \frac{3n}{n+1}$.

Mithin ist für die Pyramidenwürfel

$$a:s:t = 1 : \frac{n\sqrt{2}}{n+1} : \frac{n\sqrt{3}}{n+1}$$

Beispielsweise ist für

	s	t
$a : \frac{3}{2}a : \infty a$	$\frac{3}{5}\sqrt{2}$	$\frac{3}{5}\sqrt{3}$
$a : 2a : \infty a$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$a : 3a : \infty a$	$\frac{3}{4}\sqrt{2}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$

Ist bei einem Pyramidenwürfel $a : na : \infty a$ und einem Leucitoid $a : a : \frac{1}{m} a$ der Werth $n = m$, so sind ihre Axen s gleich; dann sind die gebrochenen Oktaederkanten des Leucitoids zugleich die Flächendiagonalen des Pyramidenwürfels; dann stumpft der letztere jene Kanten ab.

Dies findet also statt bei

$a : \frac{3}{2}a : \infty a$	und	$a : a : \frac{2}{3}a$
$a : 2a : \infty a$	„	$a : a : \frac{1}{2}a$
$a : 3a : \infty a$	„	$a : a : \frac{1}{3}a$

Sind die Axen t beider Arten von Formen gleich, so haben ihre Würfelecken gleiche Lage; dann stumpfen die Flächen des Leucitoids die Pyramidenkanten des Pyramidenwürfels ab.

So ist z. B. t von $a : a : \frac{1}{3}a = \frac{3}{5}\sqrt{3}$, also $= t$ von $a : \frac{3}{2}a : \infty a$. Ebenso ist t von $a : a : \frac{1}{4}a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, also $= t$ von $a : 2a : \infty a$.

Neigung der Flächen zu den Axen a. Die tg des Winkels ist $= n$. Mithin ist jene für

$$a : 2a : \infty a = 2 = 63^\circ\ 26'$$
$$a : 3a : \infty a = 3 = 71^\circ\ 34'$$

Das Doppelte, $126^\circ\ 52'$ und $143^\circ\ 8'$, ist die Neigung je zweier Flächen über a. Diese Neigungen sind, dem Gesagten zufolge, auch die der gebrochenen Oktaederkanten von Leucitoiden, wenn $n = m$ ist.

Neigung der Pyramidenkanten zu den Axen a. Für einen solchen Winkel ist $tg = n\sqrt{2}$.

Vergleicht man die tg der Neigungen zur Axe

der Granatoederkante . . . . $= \sqrt{2}$

der Leucitoidfläche . . . . $= \frac{n}{2}\sqrt{2}$

der Pyramidenkante der Pyramidenoktaeder . $= \frac{n}{n+1}\sqrt{2}$

derselben Kante der Pyramidenwürfel . . . . $n\sqrt{2}$

so folgen daraus die einfachen Beziehungen der betreffenden Werthe unter sich, und ihre Gleichheit bei bestimmten Werthen von n.

Neigung der Flächen in den Kanten (Kantenwinkel). 1. In den Würfelkanten. Die halbirende Ebene geht durch ein a und s. Der sin des halben Winkels ist die halbe Oktaederkante = dem s des Oktaeders, der cos = dem s des Pyramidenwürfels – dem des Oktaeders. Mithin $tg = \frac{n+1}{n-1}$.

Also für	tg	halber Winkel.	ganzer Winkel.
$a : \frac{3}{2}a : \infty a$	5	78° 41′	157° 22′
$a : 2a : \infty a$	3	71° 34′	143° 8′
$a : 3a : \infty a$	2	63° 26′	126° 52′

Mithin sind gleich

	die Neigungen in den Würfelkanten.		die Neigungen in den gebr. Oktaederkanten.
bei	$a : 2a : \infty a$	und bei	$a : a : \frac{1}{3}a$.
„	$a : 3a : \infty a$	„ „	$a : a : \frac{1}{2}a$.

Die Flächen eines solchen P. stumpfen die gebrochenen Oktaederkanten eines solchen Leucitoids ab. (S. oben.)

2. In den Pyramidenkanten. Die halbirende Ebene wird von a und der Kante gebildet. Für den Winkel ist das verlängerte $s = n\sqrt{2}$ der sin, und eine Normale auf die Kante der cos. Also $tg = \sqrt{2n^2+1}$.

Für $a : 2a : \infty a$ ist $tg = 3 = 71° 34'$ (der ganze Winkel $= 143° 8'$). Also sind bei diesem P. die Würfelkanten gleich den Pyramidenkanten (es ist ein gleichkantiger P.).

Pyramidenwürfel kommen selbstständig vor, namentlich $a : 2a : \infty a$ und erscheinen oft sehr symmetrisch.

Pyramidenwürfel und Oktaeder. Letzteres stumpft an jenem die Würfelecken ab. Am Oktaeder bilden die P. vierflächige Zuspitzungen der Ecken, aufgesetzt auf die Kanten. Der P. $a : 2a : \infty a$ fällt in die Diagonalzone der Oktaederflächen, d. h. je zwei Flächen von ihm und eine Oktaederfläche bilden eine Zone.

Pyr. und Würfel. Der Würfel stumpft die Oktaederecken jener ab. Ein P. schärft die Kanten des Würfels zu.

Pyr. und Granatoeder. Dieses stumpft die Würfelkanten jener ab. Am Granatoeder bildet ein P. vierflächige Zuspitzungen der Oktaederecken, aufgesetzt auf die Flächen.

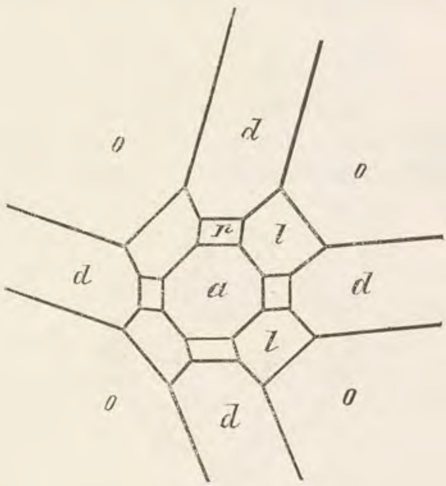


Fig. 50.

Fig. 50 ist eine lehrreiche Combination des Oktaeders o, des Würfels a und des Granatoeders d mit einem Leucitoid l, welches das Leucitoeder sein muss, weil es mit zwei d in eine Zone fällt, und einem Pyramidenwürfel p, welcher $a : 2a : \infty a$ sein muss, weil p in die Zone zweier l fällt, d. h. die gebrochenen Oktaederkanten des Leucitoeders abstumpft.

Gruppe der Achtundvierzigflächner.

Es bleibt nur noch eine Flächenlage übrig, nämlich eine solche, welche die drei Axen a in ungleichen Verhältnissen trifft, $a : na : ma$. Eine solche Fläche muss innerhalb dreier Axen sechsmal auftreten, und daraus gehen Formen von 24, oder mit den Parallelen, von 48 Flächen begrenzt hervor, welche deshalb Achtundvierzigflächner heissen und die einfachen Formen mit dem Maximum der Flächenzahl sind.

Im Zeichen $a : na : ma$ setzen wir stets $m > n > 1$ voraus. Es ist also a das kleinste a, na das mittlere und ma das grösste a. Man schreibt sie häufig auch

$$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{m} a$$

so dass a das grösste, $\frac{1}{n} a$ das mittlere, $\frac{1}{m} a$ das kleinste a ist.

So z. B.

$$a : \tfrac{3}{2} a : 3a = a : \tfrac{1}{2} a : \tfrac{1}{3} a$$
$$a : 2a : 4a = a : \tfrac{1}{2} a : \tfrac{1}{4} a.$$

In symmetrischer, idealer Ausbildung Fig. 51 sind die Flächen ungleichseitige Dreiecke.

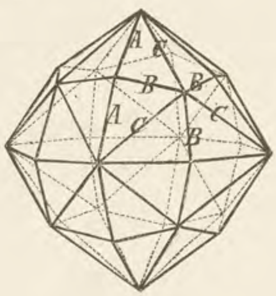


Fig. 51.

Der Körper hat dreierlei Kanten: gebrochene Oktaederkanten A, gebrochene Würfelkanten B und Granatoederkanten C. Er hat dreierlei Ecken: Oktaederecken, welche die Lage der Axen bezeichnen; in ihnen stossen 4 Kanten A und vier Kanten C zusammen; Würfelecken, von drei B und drei C gebildet; und mittlere Ecken, von zwei A und zwei B gebildet.

Construction der Würfelecke (Fig. 52). Aus der Construction folgt:

Die gebrochenen Oktaederkanten A gehen von a nach na, vom kleinsten nach dem mittleren a.

Die gebrochenen Würfelkanten gehen von ma nach dem Durchschnitt je zweier a und na.

Die Granatoederkanten gehen von a nach dem Durchschnitt je zweier na und ma.

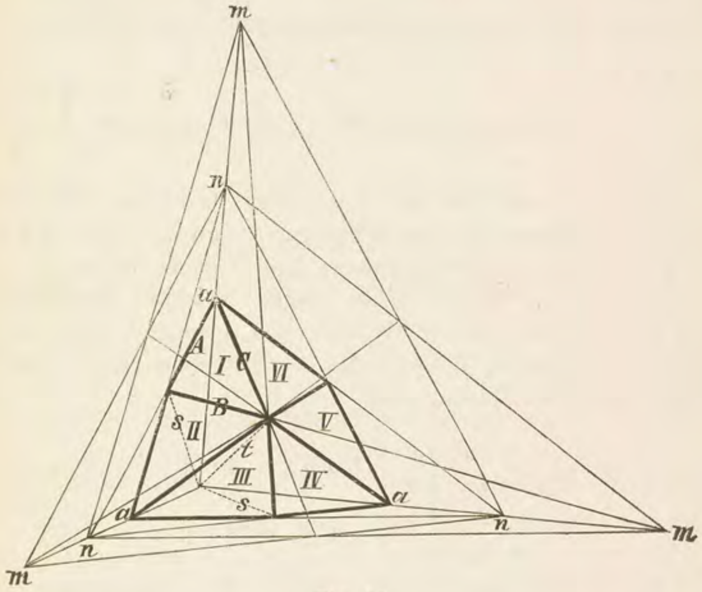


Fig. 52.

Die rhombischen Zwischenaxen s treffen die mittleren Ecken. Sie sind die s der Leucitoide, also $= \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$.

Die rhomboedrischen Zwischenaxen t treffen die Würfelecken. Sie sind $\frac{mn\sqrt{3}}{mn+m+n}$. Bezogen auf das t des Oktaeders $= 1$, ist ihr relativer Werth $= \frac{3mn}{mn+m+n}$.

Beispielsweise ist für

$$\begin{array}{rl} & \qquad s \qquad\qquad t \\ \left.\begin{array}{r} a : \frac{3}{2}a : 3a \\ = a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a \end{array}\right\} & \frac{3}{5}\sqrt{2} \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \left.\begin{array}{r} a : \frac{4}{3}a : 4a \\ = a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a \end{array}\right\} & \frac{4}{7}\sqrt{2} \quad \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

Bei beiden ist also t gleich, und zwar gleich dem t des Granatoeders.

Dies findet statt bei allen Achtundvierzigflächnern, in deren Zeichen, gleichwie bei jenen beiden

$$n = \frac{m}{m-1} \text{ oder } m = mn - n \text{ oder } mn = m + n$$

ist, welche also

$$a : \frac{1}{n}a : \frac{1}{n+1}a \text{ oder } a : \frac{1}{m}a : \frac{1}{m-1}a$$

sind.

Dadurch zerfallen die A. in zwei Gruppen; die obenerwähnten heissen Pyramidengranatoeder. Ihre Würfelecken sind die des Granatoeders; ihre Granatoederkanten sind wirklich solche. Ihre Flächen liegen zwischen Granatoeder und Leucitoeder, dessen Würfelecken genau dieselbe Lage haben. Die zweite Gruppe der A. hat diese Eigenschaften nicht. Beispiele solcher sind:

$$\begin{array}{rl} & \qquad s \qquad\qquad t \\ \left.\begin{array}{r} a : \frac{5}{3}a : 5a \\ = a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a \end{array}\right\} & \frac{5}{8}\sqrt{2} \quad \frac{5}{9}\sqrt{3} \\ \left.\begin{array}{r} a : 2a : 4a \\ = a \cdot \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a \end{array}\right\} & \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad \frac{4}{7}\sqrt{3} \end{array}$$

Das s des letzteren ist = dem s des Leucitoeders und des Pyramidenwürfels $a : 2a : \infty a$, daher schärft dieser A. die gebrochenen Oktaederkanten des Leucitoeders zu, und der Pyramidenwürfel stumpft die Kanten A dieses A. ab.

Das vollständige Axenverhältniss eines A. ist also

$$a : s : t = 1 : \frac{n\sqrt{2}}{n+1} : \frac{mn\sqrt{3}}{mn + m + n}$$

Neigung der Flächen zu den Axen. Jede Fläche ist gegen die drei Axen geneigt. Man wähle z. B. Fläche I, welche oben a, vorn na, seitlich ma schneidet.

1. Gegen a. Für den Winkel ist eine Normale p auf

die Linie nm der sin, während a der cos ist. Also $tg = p = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

2. Gegen na. Hier ist der sin eine Normale p auf am, $cos = n$. Also $tg = \frac{p}{n} = \frac{m}{n \sqrt{m^2 + 1}}$.

3. Gegen ma. Hier ist der sin eine Normale auf an, $cos = m$; $tg = \frac{p}{m} = \frac{n}{m \sqrt{n^2 + 1}}$.

Neigung der Kanten zu den Axen. 1. Der gebrochenen Oktaederkanten A. Dieselben gehen von a nach na. Also ist für den Neigungswinkel $tg = n$ (wie bei den Leucitoiden).

2. Der gebrochenen Würfelkanten B. Sie gehen von ma nach dem Endpunkt von s. $tg = \frac{s}{m} = \frac{n \sqrt{2}}{mn + m}$.

3. Der Granatoederkanten C. Für den Winkel ist das verlängerte s der sin, a der cos. Also $tg = \frac{mn \sqrt{2}}{m + n}$.

Neigung der Flächen in den Kanten. (Kantenwinkel.)

1. In den gebrochenen Oktaederkanten. Die halbirende Ebene ist eine Axenebene; demnach ist für den halben Winkel $tg = \frac{m \sqrt{n^2 + 1}}{n}$.

2. In den gebrochenen Würfelkanten. Die halbirende Ebene wird von der Kante, von ma und s gebildet.

$$tg = \frac{\sqrt{m^2 + (n+1)^2 + 2n^2}}{m \sqrt{2}}$$

3. In den Granatoederkanten. Die halbirende Ebene wird von a, der Kante und dem verlängerten s gebildet.

$$tg = \frac{\sqrt{(m+n)^2 + 2m^2 n^2}}{m - n}$$

Berechnet man die tg ad 2 und 3, beispielsweise für $a : \frac{3}{2} a : 3a$, so findet man beide gleich, nämlich $= 3 \sqrt{3}$.

Dies findet immer statt, wenn $n = \frac{2m}{m + 1}$ ist. Also auch bei $a : \frac{5}{3}a : 5a = a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a$. Solche A. heissen gleichkantige (isogonale), weil bei ihnen die Neigung in den gebrochenen Würfelkanten und in den Granatoederkanten gleich ist.

Die A. sind die allgemeinsten Formen des regulären Systems. In ihnen sind gleichsam alle übrigen enthalten, da bei diesen die Werthe n und m entweder gleich oder $= 1$ oder $= \infty$ sind. Dies spricht sich in ihrem Aeusseren schon dadurch aus, dass je nach dem Werthe von n und m die einen oder anderen Ecken und Kanten schärfer oder stumpfer sind. Werden die Kanten $A = 0$, so entstehen Pyramidenwürfel; werden die $B = 0$, so entstehen Pyramidenoktaeder; werden die $C = 0$, so entstehen Leucitoide u. s. w.

A. und Oktaeder. Das Oktaeder stumpft die Würfelecken ab. Am Oktaeder bildet ein A. achtflächige Zuspitzungen der Ecken.

A. und Würfel. Letzterer stumpft die Oktaederecken ab. Am Würfel bildet ein A. sechsflächige Zuspitzungen der Ecken.

A. und Granatoeder. Letzteres stumpft die mittleren Ecken ab. Am Granatoeder bildet ein Pyramidengranatoeder Zuschärfungen der Kanten. Ist der A kein Pyramidengranatoeder, so gehen im ersten Fall die Combinationskanten nicht parallel den Granatoederkanten des A. und im zweiten Fall bildet der A. entweder achtflächige Zuspitzungen der Oktaederecken des Granatoeders, wenn $mn > m + n$, oder sechsflächige Zuspitzungen der Würfelecken, wenn $mn < m + n$ ist.

Die Zonen des regulären Systems.

Die wichtigsten sind:

1. die Kantenzone des Würfels. Zonenaxe $= a$. Ein a ist $= \infty$. Es gehören in diese Zone

$$a : \infty a : \infty a$$
$$a : a : \infty a$$
$$a : na : \infty a$$

2. die Kantenzone des Oktaeders. Zonenaxe $= a : a$ Zwei Axen a von gleichem Werth.

$$a : a : a$$
$$a : a : na$$
$$a : na : na$$
$$a : \infty a : \infty a.$$

3. die Kantenzone des Granatoeders.

$a : a : \infty a$

$a : 2a : 2a$

$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n+1} a$ (Pyramidengranatoeder).

4. die Diagonalzone des Oktaeders. Zonenaxe die Normale von a auf die Oktaederkante.

$a : a : a$

$a : 2a : \infty a$

$a : 3a : 3a$

$a : \frac{3}{2} a : 3a$

$a : na : ma$ (gewisse A.).

Hälftflächner.

Wir haben früher (S. 42) das Wesen der Hälftflächigkeit oder Hemiedrie entwickelt.

Die Gesetze der Hemiedrie im regulären System lassen sich nur an der allgemeinsten Form, dem Achtundvierzigflächner, erkennen. Es sind dieser Gesetze drei:

I. Das Gesetz der tetraedrischen Hemiedrie.
II. Das Gesetz der pyritoedrischen Hemiedrie.
III. Das Gesetz der gyroedrischen Hemiedrie.

1. Das Gesetz der tetraedrischen Hemiedrie.

Es lautet: Eine Flächengruppe zwischen den drei Axen verhält sich gleich. Ist eine solche Gruppe die bleibende, so sind die drei (in Kanten) anstossenden die verschwindenden. Die so entstehenden Hälftflächner sind geneigtflächig (einer Fläche entspricht keine Parallele).

Obwohl nach dem früher Gesagten jeder Vollflächner nach jedem Gesetz hemiedrisch werden kann, so werden nach dem tetraedrischen Gesetz doch nur diejenigen Vollflächner sich äusserlich sichtbar in Formen mit der halben Flächenzahl verwandeln, d. h. eigene Hälftflächner geben, bei welchen die Flächengruppe zwischen den a in Kanten an die übrigen Gruppen anstösst. Dies ist aber der Fall beim Oktaeder, den Leucitoiden, den Pyramidenoktaedern und den Achtundvierzigflächnern. Denkt man sich die übrigen Vollflächner: Würfel, Granatoeder, Pyramidenwürfel in den Fig. 53—55 durch angemessene Theilung ihrer Flächen als Achtundvierzigflächner, und wendet das Gesetz auf sie an, indem man sich die in der Würfelecke zusammenstossenden Flächen als eine bleibende (oder verschwindende) Gruppe vorstellt, so begreift man, dass bei ihnen die bleibenden Flächen in die Ebene der verschwindenden fallen, dass also die tetraedrischen Hälftflächner dieser Formen das Ansehen (aber nicht die Bedeutung) der Vollflächner haben. Die Beschreibung richtet sich daher ausschliesslich auf die Hälftflächner der erstgenannten Formen.[1])

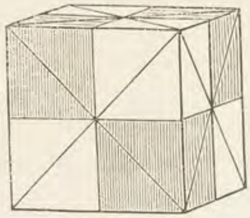


Fig. 53.

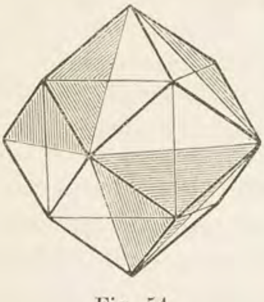


Fig. 54.

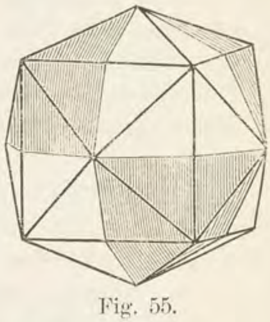


Fig. 55.

Das Tetraeder.

Es ist der Hälftflächner des Oktaeders. Die Flächengruppe wird hier von der Oktaederfläche gebildet. Sie bleibt und die drei anstossenden verschwinden. Fig. 56. So entstehen zwei Gegenkörper, und zwar ein linkes Tetraeder (Fig. 57) und ein rechtes (Fig. 58), je nachdem die obere rechte oder linke Oktaederfläche die bleibende ist. Sie haben eine um 90° verschiedene Stellung und durch Drehung wird das eine zum andern.

1) Vgl. Sadebeck, Ueber geneigtflächige Hemiedrie. Zeitschr. d. d. geolog. Ges. 30, 567.

Bei idealer symmetrischer Ausbildung sind die Flächen gleichseitige Dreiecke. Die Kanten (die beim unsymmetrischen Oktaeder sichtbar werden) und Ecken sind gleich; jene laufen den drei Kanten einer Oktaederfläche parallel.

Ihr Zeichen ist $\frac{1}{2}$ $(a : a : a)$ und zur Unterscheidung beider Gegenkörper setzt man r oder l hinzu.

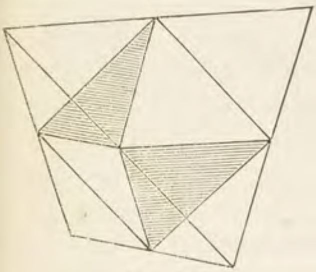


Fig. 56.

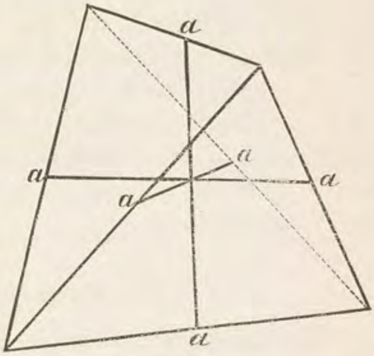


Fig 57.

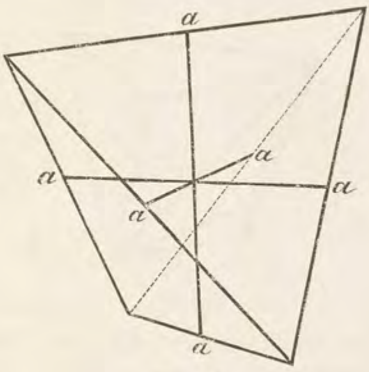


Fig. 58.

Treten beide Tetraeder zusammen an einem Krystall auf, so unterscheiden sie sich durch die Ausdehnung und die physikalische Beschaffenheit ihrer Flächen. Welches von ihnen als r oder l zu betrachten sei, ist an und für sich gleichgültig; oft nimmt man das herrschende als das rechte.

Wir übergehen bei den hemiedrischen Formen im Allgemeinen die Zwischenaxen und die Formeln für die Berechnung der Kanten- und Flächenneigungen.

Tetraeder und Tetraeder. Das eine stumpft am anderen die Ecken ab. Sind beide im Gleichgewicht, so sieht die Combination wie ein Oktaeder aus (wie überhaupt die beiden Gegenkörper in solchem Fall stets dem Vollflächner gleichen).

Tetraeder und Würfel. Der Würfel stumpft am Tetraeder die Kanten ab. Am Würfel bildet das Tetraeder die Abstumpfung der abwechselnden Ecken.

Tetraeder und Granatoeder. Letzteres bildet am Tetraeder dreiflächige Zuspitzungen der Ecken, auf die Flächen aufgesetzt. Die Combinationskanten sind parallel den Tetraederkanten. Am Granatoeder stumpft das Tetraeder die abwechselnden Würfelecken ab.

Die Pyramidentetraeder.

Sie sind die tetraedrischen Hälftflächner der Leucitoide und entstehen, indem die drei um eine Würfelecke liegenden Flächen sich gleich verhalten. In Fig. 59 ist die rechte Flächengruppe

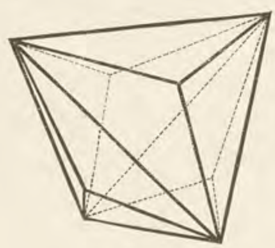


Fig. 59.

des Leucitoids die bleibende, so dass die drei anstossenden Gruppen verschwinden.

Die Pyramidentetraeder in symmetrischer Ausbildung haben gleichschenklige Dreiecke zu Flächen. Ihre Kanten sind: 1. Tetraederkanten, welche die Kanten des Tetraeders sind, also wie die Oktaederkanten verlaufen; und 2. Pyramidenkanten, die verlängerten gebrochenen Würfelkanten des Vollflächners. Die Axen *a* treffen die Mitte der Tetraederkanten. Ein Pyramidentetraeder hat vier drei- und dreikantige Tetraederecken und vier dreikantige Pyramidenecken. Sein Zeichen ist $\frac{1}{2}$ $(a : na : na)$ r oder l = $\frac{1}{2}$ $(a : a : \frac{1}{n} a)$ r oder l.

Pyramidentetraeder und Tetraeder. Sind beide gleicher Stellung, so stumpft das Tetraeder die Pyramidenecken ab; oder das Pyramidentetraeder schärft die Kanten des Tetraeders zu. An einem rechten Pyramidentetraeder stumpft das linke Tetraeder die Tetraederecken ab und umgekehrt. Am rechten Tetraeder bildet das linke Pyramidentetraeder dreiflächige Zuspitzungen der Ecken, aufgesetzt auf die Kanten.

Pyramidentetraeder und Würfel. Dieser stumpft die Tetraederkanten ab. Am Würfel bildet ein Pyramidentetraeder dreiflächige Zuspitzungen der abwechselnden Ecken.

Pyramidentetraeder und Granatoeder. Letzteres bildet an jenem dreiflächige Zuspitzungen der Tetraederecken, aufgesetzt auf die Pyramidenkanten. Fällt die Pyramidentetraederfläche mit zwei Granatoederflächen in eine Zone, so ist jenes der Hälftflächner des Leucitoeders. Am Granatoeder bildet $\frac{1}{2}$ $(a : a : \frac{1}{2}a)$ die Abstumpfungen der Kanten an den abwechselnden Würfelecken. Die stumpferen Pyramidentetraeder, wie z. B. $\frac{1}{2}$ $(a : a : \frac{1}{3}a)$ bilden Zuschärfungen der Oktaederecken, aufgesetzt auf die Kanten.

Die Trapezoidtetraeder.

Sie sind die tetraedrischen Hälftflächner der Pyramidenoktaeder. Drei um eine Würfelecke liegende Flächen bleiben;

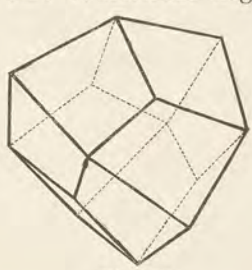


Fig. 60.

die in Kanten anstossenden verschwinden. Fig. 60 ist das rechte Trapezoidtetraeder $\frac{1}{2}$ $(a : a : 2a)$.

Die Flächen der idealen Form sind symmetrische Trape zoide, gleich denen der Leucitoide. Die Kanten sind:

1. gebrochene Tetraederkanten und 2. Pyramidenkanten, welche die ursprünglichen des Vollflächners sind. Die Ecken sind 1. Oktaederecken, zwei- und zweikantig; es sind die ursprünglichen, 2. Tetraederecken, durch die drei neuen Tetraederkanten gebildet, und 3. Pyramidenecken (die ursprünglichen Würfelecken).

Die Axen a verbinden je 2 Oktaederecken.

Ihr Zeichen ist $\frac{1}{2}$ $(a : a : na)$ r oder l.

Die die gleichen Winkel verbindenden Flächendiagonalen sind die Kanten des Oktaeders.

Trapezoidtetraeder und Tetraeder. Bei gleicher Stellung stumpft das T. die Pyramidenecken, bei ungleicher die Tetraederecken ab. Am Tetraeder bildet ein Trapezoidtetraeder gleicher Stellung dreiflächige Zuspitzungen der Ecken auf den Flächen, nicht zu verwechseln mit der ähnlichen Combination, welche das Granatoeder bildet. An einem Tetraeder bildet ein Trapezoidtetraeder ungleicher Stellung eine ähnliche Combination, jedoch ist die Zuspitzung eine sehr stumpfe.

Trapezoidtetraeder und Würfel. Dieser stumpft die Oktaederecken ab. Am Würfel erscheint ein Trapezoidtetraeder wie der Vollflächner, natürlich an den abwechselnden Ecken.

Die gebrochenen Pyramidentetraeder.

Sie sind die tetraedrischen Hälftflächner der Achtundvierzigflächner, und entstehen, indem die sechs um eine Würfelecke liegenden Flächen bleiben, die in Kanten anstossenden Gruppen verschwinden. Fig. 61 ist der rechte Hälftflächner von $a : \frac{3}{2}a : 3a$.

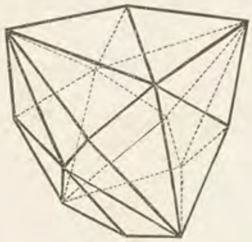


Fig. 61.

Die Flächen sind ungleichseitige Dreiecke. Die Granatoederkanten des Vollflächners sind geblieben, die gebrochenen Würfelkanten der bleibenden Flächen haben sich verlängert; ausserdem sind neue gebrochene Tetraederkanten entstanden. Die Ecken sind 1. die ursprünglichen Pyramidenecken (Würfelecken); 2. die Oktaederecken, zwei- und zweikantig, die Lage der Axen bezeichnend, und 3. Tetraederecken, drei- und dreikantig, durch das Zusammentreffen der gebrochenen Würfelkanten je dreier bleibenden Flächen über der verschwindenden Gruppe gebildet.

Ihr Zeichen ist $\frac{1}{2}(a : na : ma)\ r$ oder $l = \frac{1}{2}(a : \frac{1}{n}\ a : \frac{1}{m}\ a)$ r oder l.

Das Tetraeder gleicher Stellung stumpft an ihnen die Pyramidenecken, der Würfel die Oktaederecken ab; das Granatoeder bildet dreiflächige Zuspitzungen der Tetraederecken, aufgesetzt auf die gebrochenen Würfelkanten. An den (scheinbaren) Vollflächnern treten die gebrochenen Pyramidentetraeder in gleicher Art wie die Vollflächner, jedoch nur an den abwechselnden Stellen auf.

II. Das Gesetz der pyritoedrischen Hemiedrie.

Es lautet: die abwechselnden Glieder einer Flächengruppe zwischen den drei Axen und die in der Nachbargruppe anstossenden Glieder verhalten sich gleich.

Die beiden so entstehenden Hälftflächner sind parallelflächig.

Dieses Gesetz kommt nur beim Achtundvierzigflächner und dem Pyramidenwürfel zum äusseren Ausdruck. Bei allen übrigen Formen hat es keine Aenderung des Vollflächners zur Folge, weil die bleibenden und verschwindenden Glieder in eine Ebene fallen, wie die Fig. 62—66 beweisen, in welchen alle

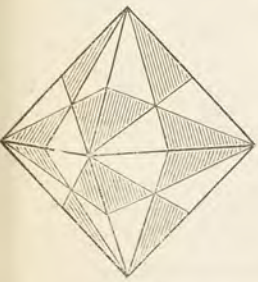


Fig. 62.

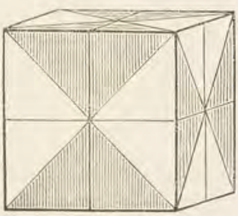


Fig. 63.

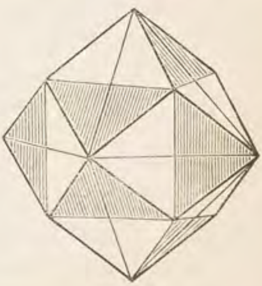


Fig. 64.

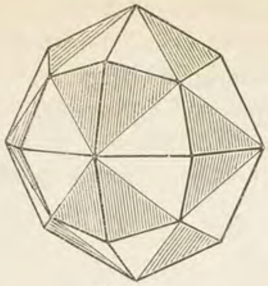


Fig. 65.

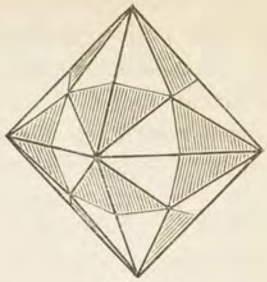


Fig. 66.

Formen als Achtundvierzigflächner gedacht sind. Wenn aber ein pyritoedrischer Hälftflächner sich in Combination mit Oktaeder Würfel, Granatoeder, einem Leucitoid oder Pyramidenoktaeder findet, so sind diese nicht als Vollflächner, sondern als pyritoedrische Hälftflächner zu betrachten.

Die Pentagondodekaeder.

Sie sind die Hälftflächner der Pyramidenwürfel, und entstehen dadurch, dass eine Fläche bleibt und die drei anstossenden verschwinden. Wir nennen von den beiden Gegenkörpern Fig. 67 das rechte, Fig. 68 das linke Pentagondodekaeder von $a : 2a : \infty a$.

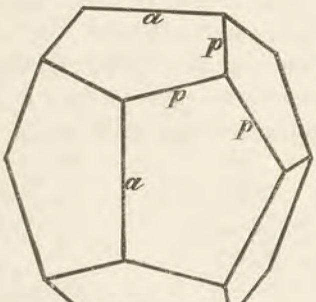


Fig. 67.

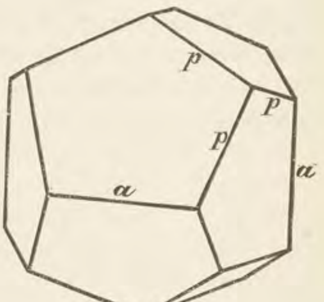


Fig. 68.

Die Flächen sind symmetrische (vier- und einseitige) Fünfecke. Die Kanten sind: Hauptkanten a (Würfelkanten), den Kanten des Würfels, d. h. den Axen a parallel, und Pyramidenkanten p. Die Ecken sind dreikantige Würfelecken, und zwei- und einkantige Ecken an den Hauptkanten. Die Lage der letzteren ergiebt sich, wenn man vom Endpunkt der Axen a Diagonalen der Pyramidenwürfelflächen (nach der Mitte der Würfelkanten) zieht, und diese verlängert, bis sie die den drei Axen parallelen Hauptkanten treffen.

Das häufigste Pentagondodekaeder $\frac{1}{2}$ $(a:2a:\infty a)$ heisst Pyritoeder.

Pentagondodekaeder und Oktaeder. Letzteres stumpft die Würfelecken ab; die Combinationskanten sind parallel den Diagonalen der Pentagondodekaederflächen. Am Oktaeder bildet ein Pentagondodekaeder Zuschärfungen der Ecken, aufgesetzt auf zwei gegenüberliegende Kanten. Fallen zwei dieser Flächen mit einer Oktaederfläche in eine Zone (Diagonalzone des Oktaeders), so gehören sie dem Pyritoeder an. — Sind beide Formen im Gleichgewicht, so verschwinden die Pyramidenkanten der Pentagondodekaeder, und das Ganze ist ein von gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecken begrenztes Ikosaeder.

Pentagondodekaeder und Würfel. Dieser stumpft die Hauptkanten ab. Am Würfel bildet ein Pentagondodekaeder schiefe Abstumpfungen der Kanten.

Pentagondodekaeder und Granatoeder. Letzteres stumpft die Ecken an den Hauptkanten so ab, dass zwei Flächen über diesen Kanten rechtwinklig gegen einander geneigt sind. Am Granatoeder bildet ein Pentagondodekaeder Zuschärfungen der Oktaederecken, aufgesetzt auf zwei gegenüberliegende Flächen.

Combination zweier Pentagondodekaeder.

a) In gleicher Stellung. Das eine (mit grösserem n) schärft die Hauptkanten des anderen zu. Oder das eine stumpft die Ecken an den Hauptkanten ab (ähnlich wie das Granatoeder), wenn das n von jenem das kleinere ist.

b) In ungleicher Stellung. Die Combination gleicht der obenerwähnten.

Die gebrochenen Pentagondodekaeder.

Sie sind die pyritoedrischen Hälftflächner der Achtundvierzigflächner, und entstehen, indem die drei abwechselnden Flächen einer (um die Würfelecke liegenden) Gruppe und die in den gebrochenen Oktaederkanten anstossenden der Nachbargruppen sich gleich verhalten. Dadurch entsteht ein linkes (Fig. 69) und ein rechtes (Fig. 70) gebrochenes Pentagondodekaeder.

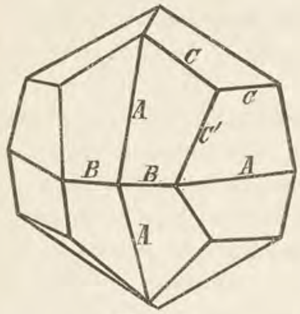


Fig. 69

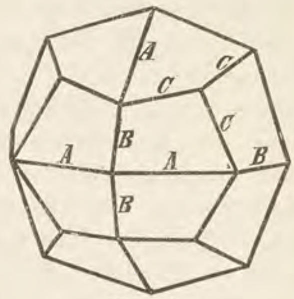


Fig. 70.

Bei der Entstehung dieser Körper verlängern sich die gebrochenen Oktaederkanten A zwischen je zwei bleibenden Flächen, während sich über je zwei verschwindenden die neuen kürzeren Kanten B bilden, welche von a nach ma laufen, und von den Würfelecken nach dem Schnittpunkt jener beiden die neuen gebrochenen Würfelkanten C entstehen.

Die Flächen der gebrochenen Pentagondodekaeder sind Trapezoide von zwei gleichen und zwei ungleichen Seiten. Die Kanten sind längere (A) und kürzere (B) gebrochene Oktaederkanten, und gebrochene Würfelkanten C. — Die Ecken sind zwei- und zweikantige (aus A und B gebildete) Oktaederecken (die ursprünglichen), die Lage der Axen bezeichnend, dreikantige (durch C gebildete) Würfelecken (gleichfalls die ursprünglichen) und zwei- ein- und einkantige mittlere Ecken (durch zwei C, ein A und ein B gebildet).

Das Zeichen dieser Formen ist $\frac{1}{2}(a : na : ma) \mp r$ oder l, wo $\mp$ zum Unterschied von dem tetraedrischen Hälftflächner steht.

Ist in ihrem Zeichen $m = n^2$, so sind die gegenüberliegenden Kanten A und C der Flächen parallel, diese sind Paralleltrapeze. So z. B. $a : 2a : 4a = a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$.

G e b r o c h e n e   P e n t a g o n d o d e k a e d e r   u n d   O k t a e d e r. Dieses stumpft die Würfelecken ab; die Combinationskanten laufen parallel den Diagonalen der Flächen. Am Oktaeder bildet ein gebrochenes Pentagondodekaeder vierflächige Zuspitzungen der Ecken, so dass je zwei Flächen auf zwei gegenüberliegende Kanten aufgesetzt sind.

Gebrochene Pentagondodekaeder und Würfel. Dieser stumpft die Oktaederecken ab. Am Würfel bildet ein gebrochenes Pentagondodekaeder dreiflächige Zuspitzungen der Ecken, auf die Kanten schief aufgesetzt, und dadurch von Pyramidenoktaederflächen zu unterscheiden.

Gebrochene Pentagondodekaeder und Granatoeder. Letzteres stumpft die mittleren Ecken schief ab.

Gebrochene Pentagondodekaeder und Pentagondodekaeder. — Hier sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden.

A. Beide sind von gleicher Stellung (zwei rechte oder zwei linke).

1. An einem Pentagondodekaeder $a : na : \infty a$ bildet ein gebrochenes Pentagondodekaeder $a : n'a : m'a$ entweder Abstumpfungen der Pyramidenkanten, oder Zuschärfungen der Ecken an den Hauptkanten, oder dreiflächige Zuspitzungen der Würfelecken, je nach den Werthen von n und m.

2. An einem gebrochenen Pentagondodekaeder bildet ein Pentagondodekaeder entweder Abstumpfungen der Kanten A (wenn $n = n'$), oder Zuschärfungen der Oktaederecken (wenn $n' > n$), oder Abstumpfungen der mittleren Ecken (wenn $n > n'$).

B. Beide sind verschiedener Stellung.

1. An einem rechten Pentagondodekaeder bildet ein linkes gebrochenes Pentagondodekaeder (oder umgekehrt) Abstumpfungen der Pyramidenkanten $\left(\text{wenn } m' = \frac{n^2 n'}{nn' - 1}\right)$, oder schiefe dreiflächige Zuspitzungen der Würfelecken.

2. An einem gebrochenen P. bildet ein P. unter gleichen Umständen Abstumpfungen der kürzeren Kanten B (wenn $n = m'$) oder Zuschärfungen der Oktaederecken oder Abstumpfungen der mittleren Ecken.

Während die beiden tetraedrischen Gegenkörper sich sehr häufig an einem und demselben Krystall finden und durch Grösse, Glanz u. s. w. sich unterscheiden, findet dies bei den pyritoedrischen fast niemals statt.

Vgl. G. Rose, in den Monatsber. d. Berl. Akad. 1870.

III. Das Gesetz der gyroedrischen Hemiedrie.

Dieses Gesetz lautet: Die abwechselnden Glieder einer um die Würfelecke liegenden Flächengruppe und die nicht anstossenden Glieder der Nachbargruppen verhalten sich gleich.

Zunächst stellen wir uns einen Achtundvierzigflächner nach allen drei Gesetzen hemiedrisch vor.

Fig. 71 zeigt die tetraedrische, Fig. 72 die pyritoedrische und Fig. 73 die gyroedrische Hemiedrie. Nur die Achtund-

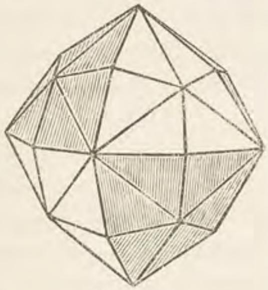


Fig. 71.

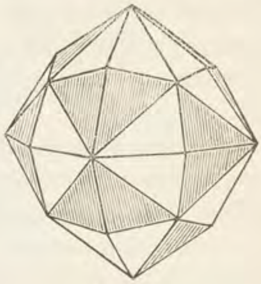


Fig. 72.

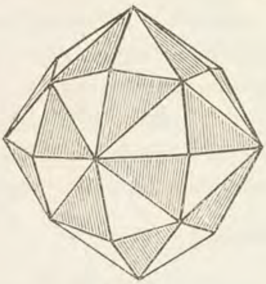


Fig. 73.

vierzigflächner können die gyroedrische Hemiedrie äusserlich zeigen, bei allen übrigen regulären Vollflächnern bringt dieses Gesetz keine äussere Veränderung hervor, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man sie sich gleichwie in den Fig. 62—66 (mit Hinzufügung der Pyramidenwürfel) als Achtundvierzigflächner und dann die betreffenden Flächentheile als bleibende oder verschwindende denkt.

Die Gyroeder oder Pentagon-Ikositetraeder entstehen aus dem Achtundvierzigflächner auf die oben (Fig. 73) angedeutete Art. Fig. 74 und 75 sind die beiden Gegenkörper von $a : \frac{3}{2} a : 3 a$.

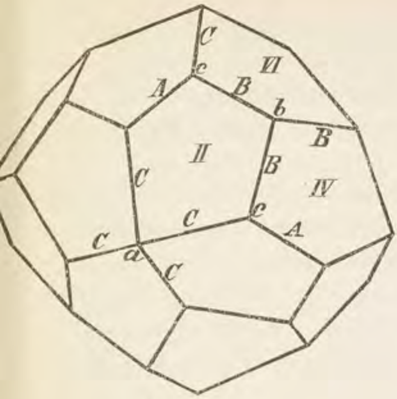


Fig. 74.

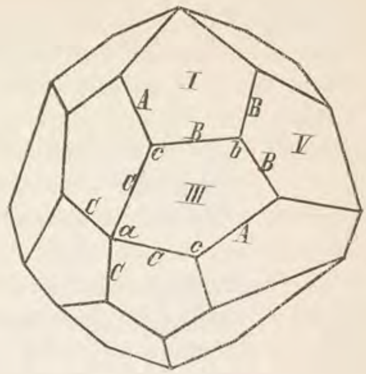


Fig. 75.

Bei ihrer Entstehung erhalten sich die Oktaeder- und Würfelecken des Vollflächners.

An dem einen Hälftflächner (Fig. 75) bleiben von der um die Würfelecke liegenden Flächengruppe (Fig. 52) I, III, V, an dem Gegenkörper bleiben II, IV, VI.

Diese Körper haben dreierlei Kanten: *A*, *B* und *C*. Sie haben ferner dreierlei Ecken: 1. Oktaederecken *a*, in welchen vier Kanten *C*, Würfelecken *b*, in welchen drei Kanten *B* zusammenstossen, und mittleren Ecken *c*, in welchen je eine Kante *A*, *B* und *C* sich treffen. Die Flächen sind unregelmässige Fünfecke.

An dem Gegenkörper haben die gleichnamigen Kanten die entgegengesetzte Lage. Beide sind also enantiomorph, ein rechter und ein linker Hälftflächner. Vgl. S. 42.

Die Kanten *B* an den Würfelecken sind die Würfelkanten der gebrochenen Pentagondodekaeder, jedoch so, dass die abwechselnden Würfelecken je eines der beiden Körper die Kanten des einen und des anderen gebrochenenen Pent. zeigen.

Diese Art der Hemiedrie ist bisher blos am Salmiak von Tschermak beobachtet worden.

C. Viertelflächner.

Obwohl jeder Vollflächner viertelflächig oder tetartoedrisch, d. h. jeder Hälftflächner nochmals hemiedrisch gedacht werden kann, tritt doch die Tetartoedrie nicht bei allen in die Erscheinung.

Aus einem Achtundvierzigflächner entsteht der Viertelflächner dadurch, dass aus den abwechselnden Flächengruppen drei abwechselnde Flächen sich gleich verhalten. Oder er entsteht durch Hemiedrie jedes der drei Hälftflächner des A. und heisst ein Tetartoeder oder tetraedrisches Pentagondodekaeder. Sein Zeichen ist $\frac{1}{4}$ $(a : na : ma)$.

1. Wenn der pyritoedrische Hälftflächner, das gebrochene Pentagondodekaeder, nach dem tetraedrischen Gesetz hemiedrisch wird, so verhalten sich die drei um eine Würfelecke liegenden Flächen gleichartig, es bleibt also eine solche Gruppe, die anstossenden Gruppen verschwinden.

Bleibt die obere, vordere, rechte Gruppe des rechten Hälftflächners (Fig. 70), so bleibt auch die linke hintere u. s. w.; dann bleiben auch die gebrochenen Würfelkanten. Die in den Oktaederecken gegenüberliegenden Flächen kommen in den Kanten A zum Durchschnitt, während die Kanten B sich über den verschwindenden Gruppen durch das Zusammenstossen je zweier Flächen der umgebenden Gruppen bilden.

Wenn an demselben rechten gebrochenen Pentagondodekaeder die obere vordere linke Gruppe die bleibende ist, so entsteht der Gegenkörper des vorigen, bei welchem die entsprechenden Kanten entgegengesetzt liegen. Beide sind also enantiomorph. Fig. 76. 77.

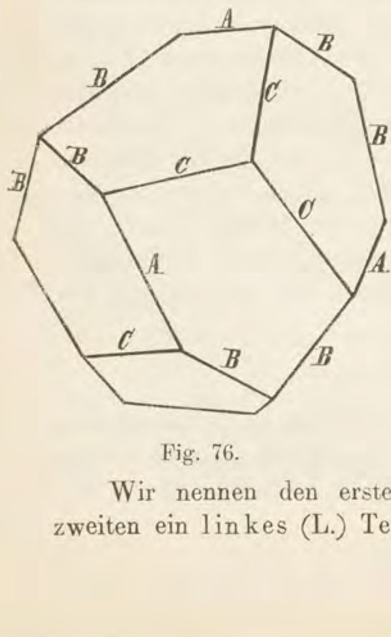


Fig. 76.

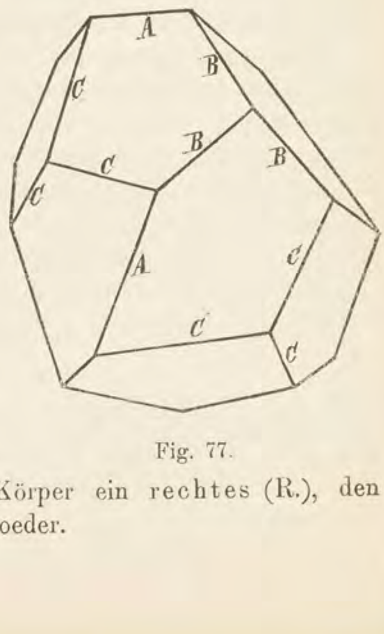


Fig. 77.

Wir nennen den ersten Körper ein rechtes (R.), den zweiten ein linkes (L.) Tetartoeder.

Bleibt am linken gebrochenen Pentagondodekaeder (Fig. 69) die rechte Gruppe, so entsteht derselbe linke Viertelflächner, bleibt die linke Gruppe, so entsteht der rechte Viertelflächner.

2. Wenn der tetraedrische Hälftflächner, das gebrochene Pyramidentetraeder, nach dem pyritoedrischen Gesetz hemiedrisch wird, so entstehen dieselben beiden Viertelflächner. In diesem Fall bleiben die drei abwechselnden Flächen jeder Gruppe. Auch hier gehen aus jedem der beiden Gegenkörper der rechte und der linke hervor.

3. Wenn am Gyroeder die drei an den abwechselnden Würfelecken liegenden Flächen sich gleichartig verhalten, so entstehen dieselben Viertelflächner. Aus dem rechten G. gehen ebenso der rechte und linke, wie aus dem linken hervor.

Die Flächen dieser Tetartoeder sind zwei- zwei- und einkantige, d. h. von zwei Kanten *B*, zwei *C* und einer *A* begrenzte Fünfecke. Der Kanten sind also drei: Tetraederkanten *A*, durch deren Mitte die Axen *a* gehen; stumpfere Kanten *C*, die verlängerten Würfelkanten der gebrochenen Pentagondodekaeder, und schärfere Kanten *B*. Die Ecken sind dreierlei: die stumpferen, in welchen drei *C* sich treffen (Würfelecken); die schärferen (Tetraederecken) an den drei *B*, und mittlere Ecken, an welchen je eine Kante *A*, *B* und *C* sich treffen.

Siehe salpetersaurer Baryt. S. 88.

Wenn man die übrigen Vollflächner tetartoedrisch oder ihre Hälftflächner hemiedrisch werden lässt, so sieht man leicht ein, dass Pyramidenwürfel, Pyramidenoktaeder, Leucitoide und das Oktaeder Viertelflächner geben vom Ansehen ihrer Hälftflächner, d. h. dass letztere durch Hemiedrie sich im Ansehen nicht ändern, während Granatoeder und Würfel, die schon durch Hemiedrie sich nicht ändern, als Viertelflächner ihr Ansehen ebenfalls behalten müssen.

Wenn also an einem Krystall anscheinend gleichzeitig tetraedrische und pyritoedrische Formen sich finden, so sind dies keine hemiedrische, sondern tetartoedrische. So erklärt sich das Vorkommen des Würfels mit Tetraeder und Pyritoeder am chlorsauren Natron etc. (Siehe weiterhin die Beispiele.)

Berechnung der Formen des regulären Systems.

Die Aufgabe ist, aus den durch Messung gefundenen Kantenwinkeln die übrigen Elemente zu berechnen.

Für das Oktaeder, den Würfel und das Granatoeder ist dies unnöthig, da es nur eine solche Form giebt, deren Elemente bereits angegeben sind.

Die übrigen Formen, in deren Zeichen *n* und *m* enthalten sind, finden sich seltener, so dass von ihrer Berechnung hier Abstand genommen ist.

Beispiele vom regulären System.

Die Zahl der regulär krystallisirten Körper ist zwar nicht gering, allein in der Regel bieten sie nur wenige Formen und Combinationen dar.

Das Oktaeder herrschend: Arsenige Säure, Kalium- und Ammonium-Zinnchlorid, die Nitrate von Baryum, Strontium und Blei, die Alaune.

Der Würfel herrschend: die Chloride, Bromide und Jodide der Alkalimetalle, chlor- und bromsaures Natron.

Tetraeder: Natriumsulfantimoniat, essigsaures Uranoxyd-Natron.

Pyramidentetraeder: Oxalsaures Chromoxyd-Natron.

Salpetersaurer Baryt.

Die Krystalle sind in der Regel nur Oktaeder, deren Ecken oft durch den Würfel abgestumpft sind. Zuweilen erhält man aber Combinationen, wie Fig. 78. Hier sieht man die

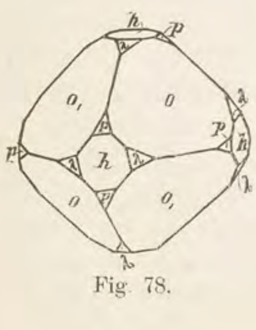


Fig. 78.

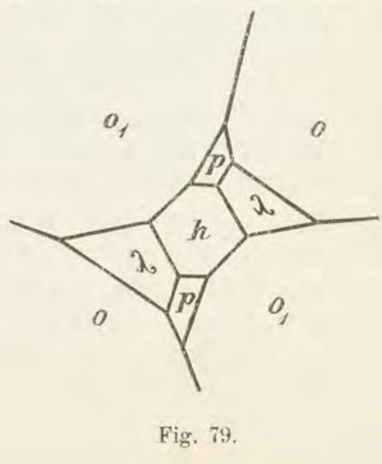


Fig. 79.

Würfelflächen h von je vier Flächen, zwei p und zwei λ, umgeben. Die p, deren Zahl 12 (mit den Parallelen 24) beträgt, gehören einem Pentagondodekaeder an, da sie zwischen Würfel und dem die Oktaederkanten abstumpfenden Granatoeder liegen. Sie bilden das gewöhnliche Pyritoeder, und zwar, Fig. 68 gemäss, das linke $= \frac{1}{2}(a : 2a : \infty a)\, l$. Die auf die Oktaederkanten schief aufgesetzten Flächen λ können nur einem Achtundvierzigflächner angehören. Da aber an jeder der sechs Oktaederecken nur zwei vorhanden sind, so bilden sie einen Viertelflächner, ein Tetartoeder.

Wenn bei anderer Flächenausdehnung p und λ sich in Kanten schneiden, wie in Fig. 79, so sieht man, dass o, p und λ eine Zone bilden.

λ ist ein rechtes Tetartoeder, $\frac{1}{4}(a : 2a : 4a)\, r$, und lässt sich als Hälftflächner des rechten gebrochenen Pentagondodekaeders (Fig. 70) betrachten.

Eine andere Combination zeigt Fig. 80. Die Flächen a

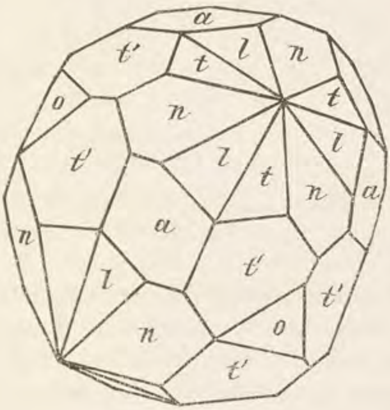


Fig. 80.

gehören dem Würfel, o dem linken Tetraeder an. Ferner bilden l den rechten Hälftflächner des Leucitoids $a : a : \frac{1}{3}a$, t aber und t' sind zwei Viertelflächner $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{4}a$, während n gleichfalls ein Tetartoeder $a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{5}a$ ist.

Chlorsaures Natron.

Die Krystalle dieses Salzes sind Würfel, an denen, wie die nicht vollständig gezeichneten Fig. 81 und 82 zeigen, das

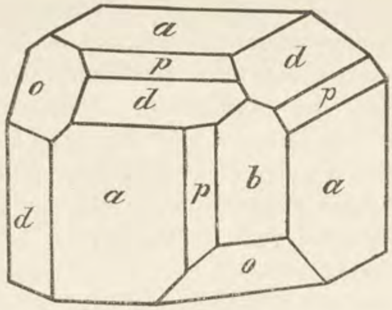


Fig. 81.

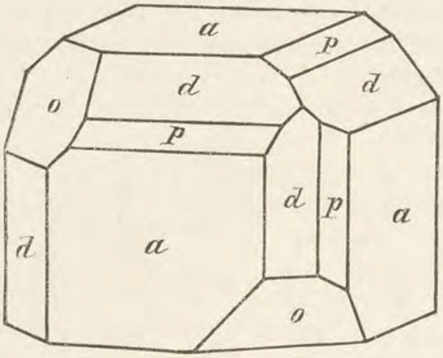


Fig. 82.

linke Tetraeder o die abwechselnden Ecken abstumpft. Die Würfelkanten werden durch die Flächen d und p zugeschärft. Die ersteren gehören dem Granatoeder an, und eine jede solche Fläche d ist gegen die beiden Würfelflächen a gleich geneigt, mit denen sie in eine Zone fällt, während jede Fläche p für sich eine schiefe Abstumpfung der Würfelkante bilden würde. Die p gehören also dem Hälftflächner eines Pyramidenwürfels, dem Pentagondodekaeder (Pyritoeder) $a : 2a : \infty a$ an.

Beide Arten von Krystallen unterscheiden sich jedoch. Die p in Fig. 81 sind das rechte Pentagondodekaeder (Fig. 67), die in Fig. 82 sind das linke (Fig. 68).

Beide zeigen Circularpolarisation, die ersten (Fig. 81) sind links drehend, die anderen rechts drehend.

Viergliedriges System.

(Quadratisches System. Zwei- und einaxiges System.)

Der Charakter der hierher gehörigen Formen wurde S. 38 und 47 entwickelt.

Das viergliedrige Oktaid heisst Quadratoktaeder; sein Zeichen ist $a : a : c$. In idealer symmetrischer Ausbildung sind seine Flächen gleichschenklige Dreiecke. Wir unterscheiden an ihm die Endkanten $a : c$, und die Seitenkanten $a : a$, sowie die Endecken an der Hauptaxe c, und die zwei- und zweikantigen Seitenecken an a.

Je mehr die Längen a und c sich der Gleichheit nähern, um so mehr gleicht ein Quadratoktaeder dem regulären, um so mehr gleichen sich die End- und Seitenkantenwinkel. Doch kennt man kein Oktaeder, welches geometrisch das reguläre, physikalisch ein Quadratoktaeder wäre.

Ist $c > a$, so heisst ein Qu. überhaupt ein scharfes (spitzes), im Gegentheil ein stumpfes.

Die wirklich vorkommenden Qu. sind mehr oder minder unsymmetrisch in ganz ähnlicher Art wie das reguläre, so dass dadurch die Gestalt der Flächen und der Durchschnitte [1]) verändert werden.

Jede in diesem System krystallisirende Substanz hat ihr eigenes Quadratoktaeder, bei welchem das Verhältniss $a : c$ aus Messungen berechnet wird.

Allein fast jede solche Substanz hat überhaupt oft mehr als ein Quadratoktaeder. Ist dies der Fall, so stehen alle ihre Qu. in krystallonomischer Abhängigkeit von einander, d. h. sie bilden nach dem S. 40 entwickelten Gesetz eine Reihe, deren Glieder unter einander in einer solchen Beziehung stehen, dass die Werthe der einen Axe, z. B. der Hauptaxe c, bei Gleichheit der anderen Axen, sich rational und einfach verhalten. Aus dieser Reihe wird die Grundform, das Hauptoktaeder, passend gewählt; das bei ihm herrschende Verhältniss $a : c$ ist dann das der Einheiten; es erhält das Zeichen $a : a : c$, und alle übrigen bei derselben Substanz vorkommenden Oktaeder sind dann

1) Das Quadrat der Basis (Axenebene der a) wird ein Oblongum etc.

$$\text{schärfere} = a : a : nc, \text{ oder}$$
$$\text{stumpfere} = a : a : \frac{1}{n} c$$

$a : a : 2c$ heisst das zweifach schärfere, $a : a : \frac{1}{2}c$ das zweifach stumpfere.

Hexaid. — Das viergliedrige Hexaid ist ein quadratisches Prisma mit Endfläche, d. h. zwei seiner Flächen sind von der dritten physikalisch verschieden. Jene beiden $= a : \infty a : \infty c$ heissen zweites Prisma (Hexaidprisma), die dritte Fläche $c : \infty a : \infty a$ heisst Endfläche. Das Ansehen dieses Hexaids ist ebenso veränderlich wie das des Würfels; es hat oft einen oblongen Durchschnitt, und ist ebenso oft nach c ausgedehnt als verkürzt (tafelartig).

An den Quadratoktaedern erscheint es als Abstumpfung der Ecken, doch ist natürlich das Vorkommen des zweiten Prismas an den Seitenecken ganz unabhängig von dem der Endfläche, welche die Endecken abstumpft. Tritt am Hexaid ein Quadratoktaeder auf, so bildet letzteres Abstumpfungen der Ecken in Gestalt gleichschenkliger Dreiecke, deren Neigung gegen die Endflächen eine andere ist wie gegen die beiden Prismenflächen (S. 39).

Dodekaid. — Jedes Quadratoktaeder muss ein zugehöriges Dodekaid haben, welches die Kanten jenes abstumpft. Da aber End- und Seitenkanten verschieden sind, so zerfällt jedes viergliedrige Dodekaid in zwei Theile. Die beiden Flächen $a : a : \infty c$, welche die Seitenkanten aller Quadratoktaeder abstumpfen, bilden das erste Prisma (Dodekaidprisma), welches an sich offen ist, und durch die Endfläche oder anderen Flächen geschlossen wird. Dieses erste Prisma kehrt dem Beobachter eine Kante zu, während das zweite Prisma ihm eine Fläche zuwendet.

Die vier Dodekaidflächen aber, welche die Endkanten eines Quadratoktaeders abstumpfen, bilden eine neue Reihe von Quadratoktaedern, in ihrer Stellung verschieden von den früheren, indem sie dem Beobachter nicht eine Seitenecke, sondern eine Seitenkante zukehren.

Man nennt nun diejenigen Oktaeder, aus deren Reihe das Hauptoktaeder gewählt wurde, Oktaeder erster Ordnung, diejenigen aber, welche als Stücke der Dodekaide ihre Flächen so liegen haben, wie jene ihre Endkanten, Oktaeder zweiter Ordnung.

Das Zeichen eines Oktaeders zweiter Ordnung ist

$$a : c : \infty a$$

$$a : nc : \infty a$$

$$a : \frac{1}{n} c : \infty a.$$

Zu jedem Oktaeder erster Ordnung stehen immer zwei O. zweiter Ordnung in nächster Beziehung, nämlich: 1. dasjenige, welches die Endkanten des gegebenen abstumpft, und welches das erste stumpfere des gegebenen heisst; und 2. dasjenige, dessen Endkanten von den Flächen des gegebenen abgestumpft werden, und welches das erste schärfere desselben heisst.

Obgleich nun jedes bei einer Substanz vorkommende O. erster Ordnung sein erstes stumpferes und sein erstes schärferes haben kann, so sind beide doch besonders für das Hauptoktaeder von Wichtigkeit.

Ist das Hauptoktaeder $= a : a : c$, so ist
das erste stumpfere $= a : \ c : \infty a$,
das erste schärfere $= a : 2c : \infty a$.

Allein sehr oft findet man die Reihe dieser vom Hauptoktaeder sich ableitenden Quadratoktaeder noch mehr entwickelt.

Dasjenige Oktaeder, welches die Endkanten des ersten stumpferen abstumpft, d. h. das erste stumpfere des ersten stumpferen, heisst das zweite stumpfere; es ist $= a : a : \frac{1}{2} c$, d. h. es ist ein O. erster Ordnung, und zwar zugleich das zweifach stumpfere.

Dasjenige O., dessen Endkanten vom ersten schärferen abgestumpft werden, d. h. das erste schärfere des ersten schärferen, heisst das zweite schärfere; es ist $= a : a : 2c$, d. h. es ist wieder erster Ordnung, und zugleich das zweifach schärfere.

Das dritte stumpfere $= a : \frac{1}{2} c : \infty a$
das dritte schärfere $= a : 4c : \infty a$
das vierte stumpfere $= a : a : \frac{1}{4} c$
das vierte schärfere $= a : a : 4c$

u. s. w.

Die von einem gegebenen O. erster Ordnung ausgehende Reihe der stumpferen und schärferen O. enthält also abwechselnd Oktaeder

erster Ordnung: das zweite, vierte, sechste etc. stumpfere oder schärfere,
zweiter Ordnung: das erste, dritte, fünfte etc. stumpfere oder schärfere.

Es ist leicht, die Basen dieser Oktaeder bei gleichen c, oder die Längen von c bei gleichen a zu vergleichen.

Eine solche vom Hauptoktaeder ausgehende Reihe ist zwar die wichtigste, allein neben ihr kann es noch andere Reihen geben, deren Ausgangspunkt ein anderes Quadratoktaeder der Substanz ist. So z. B. würde das dreifach schärfere $= a : a : 3c$ geben können

ein erstes stumpferes $= a : 3c : \infty a$
ein erstes schärferes $= a : 6c : \infty a$
ein zweites stumpferes $= a : a : \frac{3}{2}c$
ein zweites schärferes $= a : a : 6c$

u. s. w.

Aber auch ein Oktaeder zweiter Ordnung kann als Ausgang einer solchen Reihe dienen. So z. B. $a : \frac{5}{2}c : \infty a$, für welches

das erste stumpfere $= a : a : \frac{5}{4}c$
das erste schärfere $= a : a : \frac{5}{2}c$
das zweite stumpfere $= a : \frac{5}{4}c : \infty a$
das zweite schärfere $= a : a : 5c$

u. s. w. sein würde.

Im letzteren Fall müssen natürlich das 1., 3., 5. etc. stumpfere oder schärfere erster Ordnung, das 2., 4., 6. etc. zweiter Ordnung sein.

Spricht man schlechthin vom ersten, zweiten etc. stumpferen oder schärferen O., so meint man die vom Hauptoktaeder abgeleiteten. Im anderen Falle ist ein Zusatz nöthig; also für die gegebenen Beispiele würde es heissen: das $n$te stumpfere oder schärfere vom dreifach schärferen $(a : a : 3c)$ oder vom fünfhalbfach schärferen zweiter Ordnung $(a : \frac{5}{2}c : \infty a)$.

Combination der Quadratoktaeder.

a) Oktaeder erster Ordnung. An einem gegebenen bildet ein stumpferes vierflächige Zuspitzungen der Endecken, ein schärferes Zuschärfungen der Seitenkanten. Die Combinationskanten gehen natürlich den Seitenkanten des gegebenen parallel.

b) Oktaeder zweiter Ordnung. Sie verhalten sich ebenso.

c) Oktaeder erster und zweiter Ordnung. An einem O. erster Ordnung bildet ein O. zweiter Ordnung entweder die Abstumpfung der Endkanten, dann ist es das erste stumpfere. Oder vierflächige Zuspitzungen der Endecken, aufgesetzt auf die Endkanten, dann ist das O. zweiter Ordnung überhaupt ein stumpferes. Oder: Zuschärfungen der Seitenecken, aufgesetzt auf die Endkanten, dann ist es ein schärferes. Sind die Combinationskanten unter sich (und der Flächendiagonale) parallel, so ist es das erste schärfere.

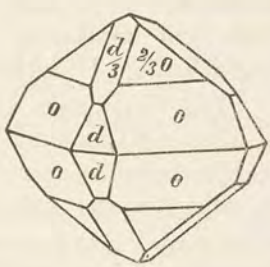


Fig. 83.

Ist in Fig. 83

$$o = a : a : c \quad = \text{Hauptoktaeder},$$
$$\tfrac{2}{3}o = a : a : \tfrac{2}{3}c = \text{zweidrittelfach stumpferes},$$

so ist

$$d \;= a : 2c : \infty\, a = \text{erstes schärferes},$$
$$\frac{d}{3} = a : \tfrac{2}{3}c : \infty\, a = \text{erstes stumpferes von } \tfrac{2}{3}o.$$

Combination der Oktaeder und Prismen. — Oktaeder erster Ordnung und erstes Prisma. Letzteres stumpft die Seitenkanten jener ab. Am Prisma bilden die O. vierflächige Zuspitzungen, aufgesetzt auf die Flächen. — Oktaeder zweiter Ordnung und zweites Prisma. Sie verhalten sich ebenso. — Oktaeder und Prismen verschiedener Ordnung. An einem Oktaeder erster Ordnung bildet das zweite Prisma Abstumpfungen der Seitenecken. Am Prisma bilden die Oktaeder vierflächige Zuspitzungen, aufgesetzt auf die Kanten. Diese Combination stellt das Dodekaid dar.

Ebenso verhalten sich die Oktaeder zweiter Ordnung zum ersten Prisma.

Combination der beiden Primen. — Sie bildet ein regelmässiges achtseitiges Prisma.

Die Vierkantner. — Jede Fläche $a : na : mc$ ist acht Mal vorhanden. Die so entstehende einfache Form, von 16 Flächen (mit den Parallelen) umschlossen, heisst ein Vierkantner. Fig. 84. Er hat zweierlei Endkanten, abwechselnd längere von c nach a, und kürzere, von c nach einer rhombischen Zwischenaxe s laufend; ausserdem gleiche Seitenkanten. Die Endecken (an c) sind vier- und vierkantig, die Seitenecken an a sind ebenso wie die an s zwei- und zweikantig. Die Flächen sind ungleichseitige Dreiecke.

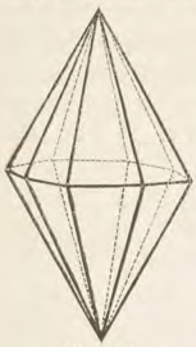


Fig. 84.

Die Vierkantner kommen nur in Combination mit Quadratoktaedern vor, und die Axenverhältnisse aller dieser Formen stehen in rationalen und einfachen Verhältnissen.

Quadratoktaeder und Vierkantner. Unter den Vierkantnern sind am häufigsten solche, welche $a : c$ im Zeichen haben, also $a : na : c$ oder $a : \frac{1}{n} a : c$. Sie fallen in die Endkantenzone des Hauptoktaeders. Die ersteren bilden an ihm Zuschärfungen der Endkanten; ihre Flächen liegen zwischen denen des Hauptoktaeders und seines ersten stumpferen. Die $a : \frac{1}{n} a : c$ aber stumpfen die Kanten zwischen dem Hauptoktaeder und dem zweiten Prisma ab.

Vierkantige Prismen. — Gleichsam durch Abstumpfung der Seitenkanten der Vierkantner entstehen vierkantige Prismen, $a : na : \infty c$. Ihr Durchschnitt ist die Basis der Vierkantner, ein vier- und vierwinkliges Achteck. Sie werden von der Endfläche begrenzt, oder sie treten in Combination mit anderen Formen auf.

Ein vierkantiges Pr. schärft die Kanten jedes der beiden quadratischen Prismen zu, oder stumpft an der Combination derselben die Kanten ab.

Zonen des viergliedrigen Systems.

1. Horizontalzone. Zonenaxe $= c$. Das erste und zweite (quadratische) Prisma, die vierkantigen Prismen.

2. Vertikalzone des zweiten Prismas (Seitenkantenzone der Oktaeder zweiter Ordnung). Zonenaxe $= a$. Das zweite Prisma, die Oktaeder zweiter Ordnung, die Endfläche.

3. Vertikalzone des ersten Prismas (Seitenkantenzone der Oktaeder erster Ordnung). Zonenaxe $a : a$. Das erste Prisma, die Oktaeder erster Ordnung, die Endfläche.

4. Endkantenzone des Hauptoktaeders. Zonenaxe $a : c$. Das Hauptoktaeder, das erste stumpfere, die Vierkantner $a : na : c$ und $a : \frac{1}{n} a : c$, das zweite Prisma.

5. Diagonalzone des Hauptoktaeders. Zonenaxe $c : s$. Das Hauptoktaeder, das erste schärfere, gewisse Vierkantner (alle, deren diagonale Endkanten durch das Hauptoktaeder abgestumpft werden).

Der beiden letzten Zonen giebt es so viele, wie es Oktaeder giebt. Die Diagonalzone eines Oktaeders ist die Endkantenzone seines ersten schärferen, und die Endkantenzone eines O. ist die Diagonalzone seines ersten stumpferen.

Hemiedrie.

Die Hemiedrie hat im viergliedrigen System weit geringere Bedeutung als im regulären, weshalb sie hier nur kurz abgehandelt wird.

Es giebt hier vier Gesetze der Hemiedrie, welche aber in ihrer Gesammtheit nur an den Vierkantnern in die Erscheinung treten.

1. Tetraedrische Hemiedrie. Die abwechselnden oberen und unteren Flächen oder Flächengruppen zwischen den drei Axen verhalten sich gleich. Dadurch entstehen zwei geneigtflächige Hälftflächner.

Aus einem Oktaeder erster Ordnung entstehen zwei Quadrattetraeder, den regulären ähnlich. Ein Vierkantner liefert zwei gebrochene Quadrattetraeder.

Die übrigen Formen werden durch dieses Gesetz nicht verändert.

2. Pyramidale Hemiedrie. Die rechten oder linken Hälften der zwischen zwei Axen a gelegenen oberen und unteren Glieder[1]) verhalten sich gleich. Aus einem Vierkantner entstehen so zwei Quadratoktaeder dritter Ordnung, welche nur durch ihre diagonale Stellung sich von den gewöhnlichen unterscheiden. Also parallelflächige Hälftflächner. Vierkantige Prismen werden zu quadratischen von gleicher Stellung. An den übrigen Formen ändert das Gesetz nichts.

3. Trapezoedrische Hemiedrie. Eine rechte obere und eine linke untere Fläche (oder umgekehrt) eines jeden Gliedes verhält sich gleich. Aus dem Vierkantner entstehen zwei Quadrattrapezoeder, welche geneigtflächig und enantiomorph sind.

4. Rhombotype Hemiedrie. Die abwechselnden rechten und linken Hälften der einzelnen Glieder verhalten sich gleich. Dadurch verwandelt sich ein Vierkantner in zwei Rhombenoktaeder. Also parallelflächige Hemiedrie.

Berechnung der Quadratoktaeder und der Axen.

Wir bezeichnen an einem Quadratoktaeder mit

$2A$ den Endkantenwinkel,

$2C$ den Seitenkantenwinkel,

(die Neigung der Flächen zur Hauptaxe c ist $= 90° - C$.)

α die Neigung der Endkanten zur Hauptaxe.

$$\cos A = \sin C \cos 45°.$$

$$\sin C = \frac{\cos A}{\cos 45°}.$$

$$\cos \alpha = \operatorname{cotg} A.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a, \text{ wenn } c = 1.$$

$$\operatorname{tg} (90° - \alpha) = c, \text{ wenn } a = 1.$$

Im viergliedrigen System krystallisiren: Quecksilberchlorür, Cyanquecksilber, schwefelsaures Nickel, schwefelsaure Beryllerde, wasserfreies überjodsaures Natron, phosphor- und arsensaures Kali und Ammoniak (H^2RPO^4), Kalium- und Ammonium-Kupferchlorid, essigsaures Uranoxyd-Kali, Hämatoxylin, Erythrit, Harnstoff u. s. w.

1) Unter einem Glied verstehen wir also beim Vierkantner die vier um ein s herumliegenden oberen und unteren Flächen.

Als Beispiel wählen wir **schwefelsaures Nickel**, $NiSO^4 + 6\,aq$, welches dimorph und dessen eine Form eine viergliedrige ist. An dem Krystall, welcher in Fig. 85 (nicht vollständig ausgeführt) dargestellt ist, treten drei Oktaeder erster Ordnung, 0, $\frac{o}{2}$, $\frac{o}{3}$, zwei Oktaeder zweiter Ordnung, d und f, das zweite Prisma a und die Endfläche c auf.

Gehen wir vom unteren o als Hauptoktaeder $= a : a : c$ aus, so ist d, welches die Endkanten von o abstumpft, das erste stumpfere, $= a : c : \infty a$. Eine Fläche $\frac{o}{2}$ fällt mit zwei Flächen d in eine Zone, d. h. $\frac{o}{2}$ ist das erste stumpfere von d, d. h. das zweite stumpfere des Hauptoktaeders, also auch (S. 93) das zweifach stumpfere $= a : a : \frac{1}{2}c$.

Das stumpfere Oktaeder f fällt (Fig. 85a) mit einem $\frac{o}{2}$ rechts und einem o links und umgekehrt in eine Zone, und die Projection lehrt, dass es $\frac{3}{2}a : c : \infty a = a : \frac{2}{3}c : \infty a$ sein muss. Das Oktaeder $\frac{o}{3}$ endlich ist (Fig. 85b) das erste stumpfere von f und deswegen das dreifach stumpfere des Hauptoktaeders, also $= a : a : \frac{1}{3}c$.

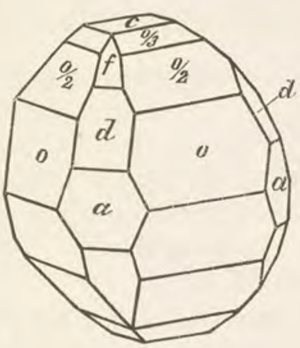


Fig. 85.

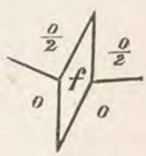


Fig. 85a.

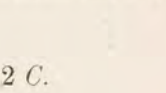


Fig. 85b.

Für die Berechnung sei der Endkantenwinkel von o (Neigung $o : o$ über d) $= 96° \; 57'$ gefunden.

$2A = 96° \; 57'$, $A = 48° \; 28{,}5'$.

Daraus folgt der Seitenkantenwinkel $2\,C$.

$$sin\ C = \frac{cos\ A}{cos\ 45°}$$

$$\begin{aligned} lg\ cos\ 48° \; 28',5 &= 9{,}8214800 \\ lg\ cos\ 45° \quad &= \underline{9{,}8494850} \\ &\ 9{,}9719950 = lg\ sin\ 69° \; 39'. \end{aligned}$$

Also $C = 69° \ 39'$, $2C = 139° \ 18'$.

Da $cos\ \alpha = cotg\ A$, und $lg\ cotg\ 48° \ 28',5 = 9{,}9\,471\,800 = lg\ cos\ 27° \ 41'$, so ist dies die Neigung der Endkanten zur Axe c.

Da ferner $tg\ \alpha = a$, wenn $c = 1$, und $lg\ tg\ \alpha = 27° \ 41' = 9{,}7198\,620 = lg\ 0{,}52\,464$, so ist

$$a : c = 0{,}52464 : 1 = 1 : 1{,}90607.$$

Das zweifach stumpfere Oktaeder $\frac{0}{2}$ hat $\frac{c}{2} = 0{,}95\,303$ $(a = 1)$ oder $2a = 1{,}04928$ $(c = 1)$.

$lg\ 1{,}04928 = 10{,}0208997 = lg\ tg\ 46° \ 23' = \alpha$.

$lg\ cos\ 46° \ 23' = 9{,}8387422 = lg\ cotg\ A = 55° \ 24'$.

$$\begin{array}{rl} lg\ cos\ 55° \ 24' & = 9{,}7542288 \\ lg\ cos\ \ 45° \quad & = 9{,}8494850 \\ \hline & \ \ \ 9{,}9047438 = lg\ sin\ C. \end{array}$$

$= 53° \ 25'$; also $2\,C = 106° \ 50'$.

In ganz gleicher Art ist für $\frac{0}{3} = 3a : 3a : c$ der Werth von $3\,a = 1{,}57392$ $(c = 1)$; $lg\ 1{,}57392 = 10{,}1969771 = lg\ tg\ \alpha$ $57° \ 34$.

$lg\ cos\ 57° \ 34' = 9{,}7294223 = lg\ cotg\ A = 61° \ 48'$. Also $2\,A = 123° \ 36'$.

Ferner ist

$$\begin{array}{rl} sin\ C = lg\ cos\ 61° \ 48' & = \ 9{,}6744485 \\ lg\ cos\ 45° \quad & = \ 9{,}8494850 \\ \hline & \ \ \ 9{,}8249635 \end{array}$$

dies ist $lg\ sin\ 41° \ 56'$. Also $2\,C = 83° \ 52'$.

Die Fläche des ersten stumpferen Oktaeders d hat dieselbe Neigung gegen die Axe c, wie die Endkante von 0, also wie α von $0 = 27° \ 41'$. Mithin ist $C = 90° - 27° \ 41' = 62° \ 19'$. Also $2\,C = 124° \ 38'$.

$$lg\ cos\ A = \begin{array}{rl} lg\ sin\ C = 62° \ 19' & = \ 9{,}9472027 \\ -\ lg\ cos\ \ 45° \quad & = \ 9{,}8494850 \\ \hline & \ \ \ 9{,}7966877 \end{array}$$

$= lg\ cos\ 51° \ 14'$. Also $2\,A = 102° \ 28'$.

Das Oktaeder f ist das erste schärfere von $\frac{0}{3}$, denn dies stumpft seine Endkanten ab. Die Neigung α dieser Endkanten gegen die Hauptaxe ist mithin $= 90° - C = 90° - 41° \ 56' = 48° \ 4'$.

$lg\,cos\,48°\,4' = 9{,}8249490$ ist $= lg\,cotg\,A = 56°\,15'$, so dass $2\,A = 112°\,30'$.

Endlich ergiebt sich C, da

$$\begin{array}{rl} lg\,cos\,56°\,15' = & 9{,}7447390 \\ -\,lg\,cos\,45° \;\;= & \underline{9{,}8494850} \\ & 9{,}8952540 \end{array}$$

$= lg\,sin\,51°\,47'$, so dass $2\,C = 103°\,34'$.

Ebenso leicht berechnen sich die Winkel der Combination.

Für die Neigung $o:a$ hat man $180° - A = 180° - 48°\,28',5 = 131°\,31',5$.

Für $o:c$ gilt $180° - C = 180° - 69°\,39' = 110°\,21'$.

Der Kantenwinkel $o:d$ ist $= A + 90° = 48°\,28',5 + 90° = 138°\,28',5$.

Die Neigung $o:\frac{o}{2}$ in den Seitenkanten ist $= o:c + C$ von $\frac{o}{2} = 110°\,21' + 53°\,25' = 164°\,18'$ u. s. w.

Zweigliedriges System

(Rhombisches System. Ein- und einaxiges System.)

Wie bereits S. 38 u. 47 gesagt, gehören hierher alle diejenigen Krystalle, deren Symmetrie in drei auf einander senkrechten Richtungen ungleich ist. Indem wir diese Richtungen Axen nennen, sind sie die Durchschnitte dreier Axenebenen oder Symmetrieebenen, deren jede von den anderen verschieden ist.

Wir nennen die auf den Beobachter gerichtete Axe a, die ihm parallele horizontale b und die vertikale c.

Das zweigliedrige Oktaid heisst Rhombenoktaeder. Sein Zeichen ist $a:b:c$. In idealer symmetrischer Ausbildung sind seine Flächen ungleichseitige Dreiecke. Gewöhnlich erscheint es aber, gleich dem regulären und dem Quadratoktaeder, mehr oder minder unsymmetrisch. Es hat dreierlei Kanten: Seitenkanten ab und zweierlei Endkanten; ist $a < b$, so sind die vorderen und hinteren Endkanten ac die stumpferen, die seitlichen bc die schärferen. Das Rhombenoktaeder hat ferner dreierlei Ecken: Endecken an c, und zweierlei Seitenecken an a und b, die sämmtlich zwei- und zweikantig sind. Die drei Axenebenen der symmetrischen Form sind Rhomben und deren Diagonalen je zwei Axen.

Jede Substanz, welche zweigliedrig krystallisirt, kann eine ganze Reihe von Rhombenoktaedern haben, deren Glieder unter sich krystallonomisch zusammenhängen in der Art, dass, wenn man bei allen eine der Axen gleich setzt, die gleichnamigen beiden anderen unter sich rationale und einfache Verhältnisse bilden, wie dies S. 40 für den Schwefel gezeigt wurde. Unter ihnen wählt man eins zum Hauptoktaeder $a:b:c$, sein Axenverhältniss bezeichnet dann das der Einheiten. Und alle übrigen können nun sein

1	2	3	4
$a:b:nc$	$a:nb:c$	$na:b:c$	$ma:nb:c$
$a:b:\frac{1}{n}c$	$a:\frac{1}{n}b:c$	$\frac{1}{n}a:b:c$	$\frac{1}{m}a:\frac{1}{n}b:c$

Combinationen der Rhombenoktaeder. Wir verfolgen hier den einfachsten Fall: die Combinationen des Hauptoktaeders mit einem anderen.

1. Die $a:b:nc$ bilden an $a:b:c$ Zuschärfungen der Seitenkanten, die $a:b:\frac{1}{n}c$ Zuspitzungen der Endecken. Die Combinationskanten sind parallel den Seitenkanten.

2. Die $a:nb:c$ schärfen die Endkanten ac zu; die $a:\frac{1}{n}b:c$ bilden Zuspitzungen der Seitenecken b.

3. Die $na:b:c$ schärfen die Endkanten bc zu; die $\frac{1}{n}a:b:c$ bilden Zuspitzungen der Seitenecken a.

Auch bei 2 und 3 laufen die Combinationskanten wie die Kanten ac oder bc des Hauptoktaeders.

4. Diejenigen, welche mit dem Hauptoktaeder nicht zwei Axen gemein haben, bilden vierflächige Zuspitzungen der Ecken an ihm, wobei die Combinationskanten den Kanten desselben nicht parallel gehen.

Hiernach ergiebt sich die Art der Combination zweier oder mehrerer Rhombenoktaeder überhaupt.

Das zweigliedrige Hexaid ist ein rechtwinkliges Hexaid von den drei physikalisch ungleichwerthigen Flächen $a:\infty b:\infty c$; $b:\infty a:\infty c$; $c:\infty a:\infty b$, welche ein rektanguläres Prisma mit gerader Endfläche bilden, wiewohl ein solches ein beliebiges Längenverhältniss der Kanten, mithin unter Umständen auch das Ansehen eines quadratischen Prismas oder eines Würfels haben kann.

An einem Rhombenoktaeder stumpft es die Ecken gerade ab. Von seinen Flächen können aber auch blos zwei, ja es kann blos eine vorhanden sein. An dem Hexaid bildet jedes Rhombenoktaeder schiefe Abstumpfungen der Ecken, d. h. ungleichseitige Dreiecke, mit ungleicher Neigung gegen die drei Hexaidflächen.

Das Dodekaid. Da die Kanten des Rhombenoktaeders dreifach verschieden sind, so zerfällt das sie abstumpfende Dodekaid in drei von einander unabhängige Flächenpaare oder offene rhombische Prismen, deren jedes durch eine Hexaidfläche geschlossen wird. Wir nennen diese drei, die Kanten eines und desselben Oktaeders abstumpfenden Dodekaidflächenpaare die drei zugehörigen Paare, und zwar in Bezug auf das Hauptoktaeder $a : b : \infty c$ das erste Paar. Es ist ein vertikales Prisma und stumpft die Seitenkanten $(a : b)$ des Oktaeders ab. Wir nennen ebenso $b : c : \infty a$ das zweite Paar. Es ist ein horizontales Prisma und stumpft die seitlichen Endkanten $(b : c)$ ab. Endlich $a : c : \infty b$ das dritte Paar. Es ist gleichfalls ein horizontales Prisma und stumpft die vorderen und hinteren Endkanten $(a : c)$ ab.

Jedes einzelne Rhombenoktaeder hat seine drei zugehörigen Paare, allein ein und dasselbe Paar ist allen denjenigen Oktaedern gemein, welche mit ihm gleiche Werthe der beiden Axen haben. So z. B. ist $a : b : \infty c$ das erste Paar

des Hauptoktaeders $a : b : c$

und aller Oktaeder $a : b : nc$ und $\frac{1}{n} c$

$b : c : \infty a$ ist das zweite Paar für

$a : b : c$

$na : b : c$ und $\frac{1}{n} a : b : c$

$a : c : \infty b$ ist das dritte Paar für

$a : b : c$

$a : nb : c$ und $a : \frac{1}{n} b : c.$

Alle übrigen ersten Paare $a : nb : \infty c$ und $na : b : \infty c$

gehören zu

$a : nb : c \qquad\qquad na : b : c$

$a : nb : mc$ oder $\frac{1}{m} c \qquad\qquad na : b : mc$ oder $\frac{1}{m} c$

Alle übrigen zweiten Paare $b : nc : \infty a$ und $nb : c : \infty a$ gehören zu

$a : b : nc \qquad\qquad a : nb : c$

ma oder $\frac{1}{m} a : b : nc \qquad\qquad ma$ oder $\frac{1}{m} a : nb : c$

Und alle übrigen dritten Paare $a : nc : \infty b$ und $na : c : \infty b$ gehören zu

$a : b : nc \qquad\qquad na : b : c$

$a : mb : nc \qquad\qquad na : mb : c$

$a : \frac{1}{m} b : nc \qquad\qquad na : \frac{1}{m} b : c$

Combination der Dodekaidpaare unter sich und mit den Hexaidflächen. — Zwei erste oder zwei zweite oder zwei dritte Paare erscheinen stets in gleicher Weise. Das eine schärft die scharfen oder stumpfen Kanten des anderen zu.

Combination zweier verschiedenen Paare. An dem herrschenden bildet das untergeordnete eine auf die (stumpfen oder scharfen) Kanten aufgesetzte Zuschärfung, und die Combination heisst wohl ein Oblong- oder Rektangularoktaeder, besonders wenn durch Verkürzung jene Kanten fortfallen.

An einem einzelnen Paar bilden die beiden Hexaidflächen, welche mit ihm in eine Zone fallen, die Abstumpfung seiner Kanten.

Erscheint an der Combination zweier Paare eine Hexaidfläche, und herrscht dieselbe vor, so entsteht eine rektanguläre Tafel mit zweifach verschiedener Zuschärfung der Ränder.

Combination dreier verschiedener Paare. — Sie bilden immer ein Dodekaid, mehr oder weniger ähnlich dem regulären (Granatoeder) oder einem viergliedrigen. Sind die Paare zusammengehörige (zu einem und demselben Rhombenoktaeder), so fallen drei Flächen von ihnen in eine Zone. Fig. 86, 87, 88.

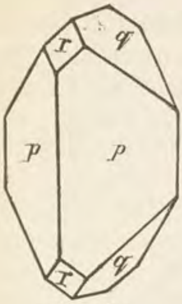


Fig. 86.

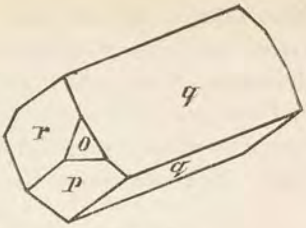


Fig. 87.

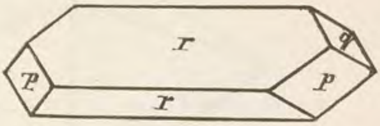


Fig. 88.

Combination der Rhombenoktaeder mit nicht zugehörigen Paaren. — An einem Rhombenoktaeder treten häufig nicht die zugehörigen, sondern andere erste, zweite oder dritte Paare auf. Wählen wir als Beispiel das Hauptoktaeder $a : b : c$.

1. Ein erstes Paar $a : nb : \infty c = \frac{1}{n} a : b : \infty c$ bildet Zuschärfungen der Seitenecken an a. Ein solches $na : b : \infty c = a : \frac{1}{n} b : \infty c$ bildet Zuschärfungen der Ecken an b. Die Zuschärfungskanten sind der Axe c parallel. Die Prismenflächen sind auf die Seitenkanten aufgesetzt.

2. Ein zweites Paar $nb : c : \infty a = b : \frac{1}{n} c : \infty a$ schärft die Endecken, ein solches $b : nc : \infty a = \frac{1}{n} b : c : \infty a$ die Seitenecken an b zu. Die Kanten der Zuschärfung gehen der Axe a parallel. Die Prismenflächen sind auf die seitlichen Endkanten $(b : c)$ aufgesetzt.

3. Ein drittes Paar $a : nc : \infty b = \frac{1}{n} a : c : \infty b$ schärft die Seitenecken an a, ein solches $na : c : \infty b = a : \frac{1}{n} c : \infty b$ die Endecken zu. Die Kanten der Zuschärfung sind der Axe b parallel. Die Prismenflächen sind auf die Endkanten $a : c$ aufgesetzt.

Sehr häufig dehnen sich in solchen Fällen die Prismenflächen so aus, dass die Kanten, auf welche sie aufgesetzt sind, verschwinden. Dies giebt z. B. für den Fall 1 die Fig. 89a und *b*. Solche Combinationen sehen wie Dihexaeder (sechsgliedrig) aus, und kommen diesen mitunter auch in Hinsicht auf die Winkel sehr nahe (Schwefelsaures Kali, salpetersaures Kali).

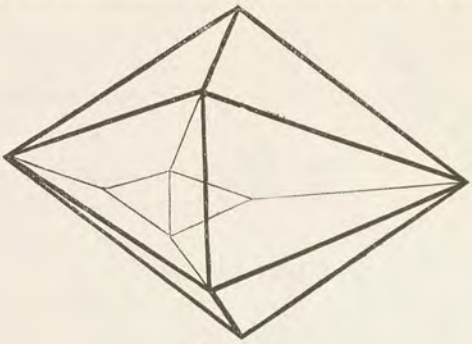


Fig. 89a.

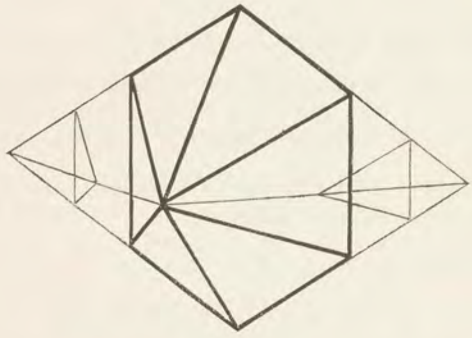


Fig. 89b.

Zonen des zweigliedrigen Systems.

1. Zone der ersten Paare. Zonenaxe $= c$. Enthält alle Flächen mit ∞c, also zwei Hexaidflächen und alle ersten Paare.

2. Zone der zweiten Paare. Zonenaxe $= a$.

3. Zone der dritten Paare. Zonenaxe $= b$.

4. Zone der Seitenkanten des Hauptoktaeders. Zonenaxe $a{:}b$. Enthält alle Flächen mit $a : b$ im Zeichen.

5. Zone der seitlichen Endkanten desselben. Zonenaxe $b : c$.

6. Zone der vorderen (und hinteren) Endkanten. Zonenaxe $a : c$.

Diese drei letzten Zonen wiederholen sich für jedes einzelne Oktaeder.

Ausbildung und Stellung der Krystalle.

Zweigliedrige Krystalle haben keine Hauptaxe; ihre Stellung ist daher an und für sich willkürlich. Regel ist, die Einheit a kleiner als b zu wählen. Nicht immer sind Oktaeder vorhanden, doch lässt sich aus zwei Dodekaidpaaren stets ein Hauptoktaeder ableiten. Eine herrschende Hexaidfläche macht die Krystalle tafelartig, und bei der nämlichen Substanz sind sie nicht selten bald nach der einen, bald nach der anderen Axenrichtung prismatisch entwickelt.

Hemiedrie.

Sie ist im zweigliedrigen System bei Weitem nicht so wichtig, wie im regulären, jedoch von besonderem Interesse.

Wenn an einem Rhombenoktaeder eine Fläche bleibt, die drei anstossenden verschwinden, so entsteht ein Rhombentetraeder. Allein die beiden Hälftflächner, welche so entstehen, sind nicht congruent, sondern enantiomorph; die Lage der gleichartigen Kanten und Ecken ist bei ihnen eine entgegengesetzte; sie sind also ein linkes und ein rechtes Tetraeder. Das eine ist das Spiegelbild des anderen.

Diese Hemiedrie findet sich z. B. bei weinsteinsauren Salzen (Seignettesalz, Brechweinstein), beim Asparagin etc.

Berechnung der zweigliedrigen Formen.

Zur Berechnung des Axenverhältnisses dienen die Kantenwinkel der drei zum Hauptoktaeder gehörigen Paare, weil deren Diagonalen die Axen sind. Die Winkel zweier Paare müssen durch Messung gegeben sein; dann folgt der dritte durch Rechnung.

Bezeichnet man

$p = a : b : \infty c$ (erstes Paar),

$q = b : c : \infty a$ (zweites Paar),

$r = a : c : \infty b$ (drittes Paar),

und nennt

2α den Winkel $r : r$ an c, also

α die Neigung der Kante $ac : c$.

2β den Winkel $q:q$ an c, also
β die Neigung $bc:c$.
2γ den Winkel $p:p$ an b, also
γ die Neigung $ab:b$,

so ist

$$\text{I. } tg\,\gamma = a;\ cotg\,\beta = c;\ tg\,\alpha = \frac{a}{c}$$

Mit Hülfe der Winkel α, β, γ lassen sich nun die Winkel des Hauptoktaeders berechnen. Es sei an diesem

$2A$ der Winkel in den Endkanten ac.
$2B$ „ „ „ „ „ bc.
$2C$ „ „ „ „ Seitenkanten.

$$\text{II. } cotg\ A = sin\ \alpha\ \ cotg\ \beta$$
$$\text{III. } cotg\ B = cotg\ \alpha\ \ sin\ \beta$$
$$\text{IV. } tg\ C = \frac{cotg\ \beta}{sin\ \gamma}.$$

Auch aus den Winkeln des Hauptoktaeders lassen sich die der drei Paare berechnen:

$$\text{V. } cos\ \alpha = \frac{cos\ B}{sin\ A}\quad sin\ \alpha = \frac{cos\ C}{sin\ A}$$
$$\text{VI. } cos\ \beta = \frac{cos\ A}{sin\ B}\quad sin\ \beta = \frac{cos\ C}{sin\ B}$$
$$\text{VII. } cos\ \gamma = \frac{cos\ B}{sin\ C}\quad sin\ \gamma = \frac{cos\ A}{sin\ C}$$

Die Combinationswinkel von Oktaid, Hexaid und Dodekaid sind dann leicht zu berechnen.

Die Winkel des Dodekaids, d. h. die gegenseitige Neigung der drei Paare ergeben sich folgendermassen:

Für die Neigung

VIII. von $p:q$ ist $cos = cos\ \beta\ \ sin\ \gamma$
IX. „ $q:r$ „ $cos = sin\ \alpha\ \ sin\ \beta$
X. „ $p:r$ „ $cos = cos\ \alpha\ \ cos\ \gamma$.

Die Berechnung aller übrigen Formen folgt dann leicht aus ihren Axenverhältnissen.

Beispiele.

Schwefelsaures Kali K^2SO^4.

Einige der gewöhnlichsten Combinationen stellen die Fig. 90 bis 93 dar. Insbesondere aus dem Durchschnitt Fig. 93 ergeben

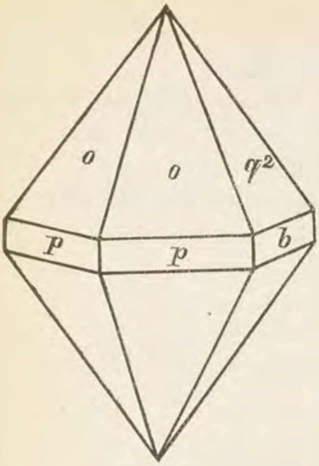


Fig. 90.

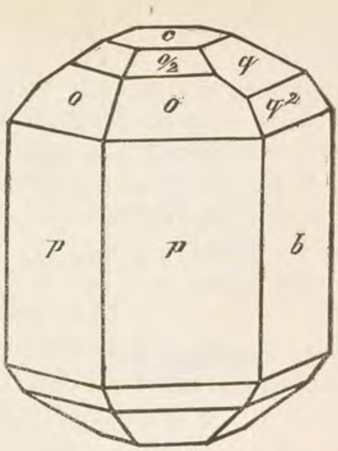


Fig. 91.

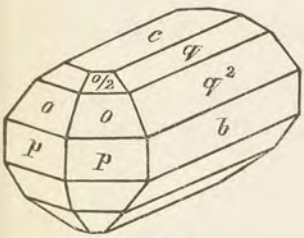


Fig. 92.

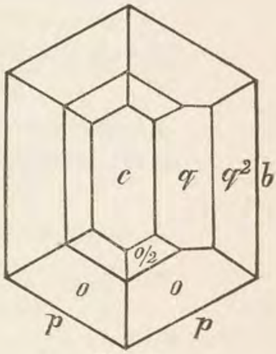


Fig. 93.

sich die Zonenverhältnisse. Wird o als Hauptoktaeder gewählt, so ist p das erste, q das zweite zugehörige Paar, b und c aber sind Hexaidflächen. Das Oktaeder $\frac{o}{2}$ fällt in die Zonen p, o, c und q, p links, und das zweite Paar q^2 (die Fl. rechts) gehört zugleich der Zone o, p links an. Mit Hülfe einer Projection findet man leicht die Zeichen für beide, und hat so

$$o = a : b : c \qquad p = a : b : \infty c \qquad b = b : \infty a : \infty c$$

$$\frac{o}{2} = a : b : \tfrac{1}{2} c \qquad q = b : c : \infty a \qquad c = c : \infty a : \infty b.$$

$$q^2 = b : 2c : \infty a$$

Mitscherlich fand

$$p:p \text{ an } a = 120^\circ\ 24'$$
$$q^2:q^2 \text{ an } b = 112^\circ\ 22'$$

Aus beiden Winkeln berechnen wir alle nöthigen Werthe.

1. Da $p:p$ an $b = 2\gamma = 59^\circ\ 36'$, so ist $\gamma = 29^\circ\ 48'$.
$lg\ tg\ \gamma = 9{,}7579313 = lg\ 0{,}5727 = a\ (b = 1)$;

2. Da $q^2:q^2$ an $c = 67^\circ\ 38' = 2\beta$, so ist $\beta = 33^\circ\ 49'$;
$lg\ cotg\ \beta = 10{,}1742873 = lg\ 1{,}4903 = 2c\ (b = 1)$
also $c = 0{,}7451$.

Mithin ist

$$a:b:c = 0{,}5727:1:0{,}7451$$

$$\begin{aligned} \text{und } lg\ c &= 9{,}8722146 = lg\ cotg\ \beta = 53^\circ\ 19' \\ lg\ a &= 9{,}7579313 \\ -\ lg\ c &= \underline{9{,}8722146} \\ & \ 9{,}8857167 = lg\ tg\ \alpha = 37^\circ\ 33' \end{aligned}$$

3. Berechnung des Hauptoktaeders o.

$$\begin{aligned} lg\ sin\ \alpha &= 9{,}7849406 \\ ,,\ cotg\ \beta &= \underline{9{,}8722146} \\ & \ 9{,}6571552 = lg\ cotg\ A = 65^\circ\ 35' \\ lg\ cotg\ \alpha &= 10{,}1142350 \\ ,,\ sin\ \beta &= \underline{\ 9{,}9041470} \\ & \ 10{,}0183820 = lg\ cotg\ B = 43^\circ\ 47' \\ lg\ cotg\ \beta &= 9{,}8722146 \\ ,,\ sin\ \gamma &= \underline{9{,}6963336} \\ & \ 10{,}1758810 = lg\ tg\ C = 56^\circ\ 18'. \end{aligned}$$

Mithin ist an o

$2A = 131^\circ\ 10'$; $2B = 87^\circ\ 34'$; $2C = 112^\circ\ 36'$.

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} C + 90^\circ &= o:p = 146^\circ\ 18' \\ B + 90^\circ &= o:q = 133\ \ 47 \\ 180^\circ - A &= o:b = 114\ \ 22 \\ 180^\circ - C &= o:c = 123\ \ 42 \\ \gamma + 90^\circ &= p:b = 119\ \ 48 \\ 180^\circ - \beta &= q:b = 126\ \ 41 \\ \beta + 90^\circ &= q:c = 143\ \ 19 \end{aligned}$$

4. Berechnung von $\frac{o}{2}$. Das Axenverhältniss ist hier $a:b:\frac{1}{2}c = 0{,}5727:1:0{,}3725$. Es bleibt also $\gamma = 29^\circ\ 48'$

$$lg \frac{c}{2} = 9{,}5711263 = lg\ cotg\ \beta = 69^\circ\ 34'$$

$$lg\ a = 9{,}7579313$$

$$-\ lg \frac{c}{2} = 9{,}5711263$$

$$\overline{10{,}1868050} = lg\ tg\ \alpha = 56^\circ\ 58'$$

$$lg\ sin\ \alpha = 9{,}9234272$$

$$„\ cotg\ \beta = \underline{9{,}5711263}$$

$$9{,}4945535 = lg\ cotg\ A = 72^\circ\ 39'$$

$$lg\ cotg\ \alpha = 9{,}8130704$$

$$„\ sin\ \beta = \underline{9{,}9717762}$$

$$9{,}7848466 = lg\ cotg\ B = 58^\circ\ 39'$$

$$lg\ cotg\ \beta = 9.5711263$$

$$„\ sin\ \gamma = \underline{9.6963336}$$

$$9{,}8747927 = lg\ tg\ C = 36^\circ\ 51'$$

Also ist an $\frac{o}{2}$:

$$2A = 145^\circ\ 18';\quad 2B = 117^\circ\ 18';\quad 2C = 73^\circ\ 42'.$$

Die nahe Uebereinstimmung der Winkel

$$p : p = 120^\circ\ 24' \text{ und } p : b = 119^\circ\ 48'$$

lässt das sechsseitige Prisma ppb fast als ein sechsgliedriges erscheinen.

Ebenso sind die nahe gleichen Winkel

$$o : p = 146^\circ\ 18' \text{ und } q^2 : b = 146^\circ\ 11'$$
$$o : c = 123^\circ\ 42' \quad „ \quad q^2 : c = 123^\circ\ 49'$$

sowie

$$\frac{o}{2} : p = 126^\circ\ 51' \text{ und } q : b = 126^\circ\ 41'$$

$$\frac{o}{2} : c = 143^\circ\ \ 9' \quad „ \quad q : c = 143^\circ\ 19'$$

die Ursache, dass man die o und q^2, gleichwie die $\frac{o}{2}$ und q für zwei Dihexaeder, die Krystalle für sechsgliedrig halten könnte, wenn nicht die physikalische Differenz der Flächen und das optische Verhalten der Krystalle sie als zweigliedrig erwiese.

Im zweigliedrigen System krystallisiren sehr viele Körper. Wir nennen hier nur ausser obigem Beispiel: Schwefel, Jod, Chlorbaryum, normales chromsaures Kali, Kalisalpeter, Bittersalz, Zinkvitriol, Nickelsulfat (mit 7 aq.), ameisensauren Baryt, Weinstein, Seignettesalz, Brechweinstein, Asparagin.

Zwei- und eingliedriges System.

(Monoklines System.)

Der Charakter dieses Systems wurde S. 48 entwickelt. Die senkrechte Axe heisst c, die horizontnle b, die von vorn nach hinten aufgerichtete a. Axe b ist rechtwinklig gegen a und c, welche schiefwinklig sind, Die Axenebenen ab und bc sind Rhomben, ac ist ein Rhomboid. Die hintere Halbaxe a wird accentuirt (a').

Das zwei- und eingliedrige Oktaid ist keine einfache Form mehr, denn, obwohl seine Flächen isoparametrisch ($a:b:c$), sind sie nicht gleich und ähnlich. Es zerfällt in zwei offene vierseitige Prismen oder Paare, welche wir Augitpaare nennen, und zwar in

ein vorderes Augitpaar $= a:b:c$

und ein hinteres Augitpaar $= a':b:c$.

Beide erscheinen oft in Combination als Oktaeder, allein ebenso oft eines von ihnen allein, natürlich alsdann im Verein mit anderen Flächen. Im letzteren Fall lässt sich durch Rechnung das vollständige Oktaeder stets bestimmen.

Da bei jeder zwei- und eingliedrigen Substanz mehrere solcher vorderen oder hinteren Augitpaare vorkommen, so wählt man auch hier ein Hauptoktaeder für die Axeneinheiten. Der Zusammenhang dieser Formen ist ganz derselbe, wie bei den Rhombenoktaedern einer Substanz. Dasselbe gilt von den Combinationen.

Ein vorderes und ein hinteres Augitpaar, welche zu einem Oktaeder sich ergänzen, sind daran kenntlich, dass die seitlichen Endkanten $b:c$ mit der Axe c eine Ebene bilden.

Das Hexaid besteht auch hier aus den drei Einzelflächen $a = a:\infty b:\infty c$, $b = b:\infty a:\infty c$, $c = c:\infty a:\infty b$, und da Fläche a und b, gleichwie b und c, rechtwinklig, a und c aber schiefwinklig sind, so ist es ein rektanguläres Prisma mit schief angesetzter, aber (auf a) gerade aufgesetzter Endfläche (Fläche c). Seine äussere Form ist sehr veränderlich.

Das Dodekaid. Die Begriffe der ersten und zweiten Paare sind dieselben wie im zweigliedrigen System. Das dritte Paar jedoch zerfällt in zwei physikalisch verschiedene Einzelflächen, schiefe Endflächen, eine vordere $a:c:\infty b$ und eine hintere $a':c:\infty b$, wegen der Verschiedenheit der Richtungen (Kanten) $a:c$ und $a':c$.

Alle zwei- und eingliedrigen Krystalle sind Combinationen.

Zonenverhältnisse.

1. Horizontalzone. Zonenaxe c. Alle Flächen haben ∞c im Zeichen. Sie enthält die beiden Hexaidflächen a und b und alle ersten Paare (vertikale Prismen) $a:b:\infty c$, $na:b:\infty c$ und $a:nb:\infty c$.

2. Vertikalzone. Zonenaxe b. Alle Flächen haben ∞b im Zeichen. Da in diese Zone ausser den Hexaidflächen a und c alle vorderen und hinteren schiefen Endflächen $a:c:\infty b$, $a:nc:\infty b$, $na:c:\infty b$ und $a':c:\infty b$, $na':c:\infty b$, $a':nc:\infty b$ fallen, so heisst sie auch Zone der schiefen Endflächen. Von diesen, als Dodekaidflächen, wird die Hexaidfläche c, welche ja ebenfalls eine schiefe Endfläche ist, als basische Endfläche unterschieden, weil sie der Basis des Oktaeders, der Axenebene ab, parallel ist.

3. Diagonalzonen der schiefen Endflächen. Zwei gepaarte Flächen, welche mit einer schiefen Endfläche eine Zone bilden, fallen in die Diagonalzone derselben, d. h. sie haben mit ihr die Werthe in a und c gemein.

Die Diagonalzone der basischen Endfläche, deren Zonenaxe a ist, ist zugleich die Zone der zweiten Paare $b:c:\infty a$, $b:nc:\infty a$ und $nb:c:\infty a$ und der Hexaidfläche b. Jede andere vordere oder hintere schiefe Endfläche hat ihre besondere Diagonalzone. So z. B. fallen in die D. der vorderen schiefen E. $a:c:\infty b$ die vorderen Augitpaare $a:nb:c$, $a:b:c$, $a:\frac{1}{n}b:c$, und die Hexaidfläche b. Letztere ist allen diesen Zonen gemein, denn sie ist ja die Axenebene (Symmetrieebene) ac, in welcher alle Kanten liegen, die die gepaarten Flächen (erste Paare, zweite Paare, Augitpaare) unter sich bilden.

4. Erste Kantenzonen. Man versteht hierunter diejenigen Zonen, deren Zonenaxe die Seitenkanten des Hauptoktaeders, also $a : b$ ($a' : b$) sind. Alle Flächen derselben haben $a : b = 1 : 1$ oder $\infty : \infty$. Es fallen in eine solche Zone die Flächen $a : b : \infty c$, $a : b : nc$, $a : b : c$, $a : b : \frac{1}{n} c$, $c : \infty a : \infty b$, $a' : b : \frac{1}{n} c$, $a' : b : c$, $a' : b : nc$. Solcher Zonen giebt es immer zwei. Andere Zonen sind minder wichtig.

Hemiedrie.

Nur in wenigen Fällen hat man sie an zwei- und eingliedrigen Krystallen beobachtet, und dann ruft sie auch hier Enantiomorphie hervor. Die Rechts- und Linksweinsäure sind wohl die wichtigsten Beispiele der Art, obgleich das Auftreten von einzelnen Flächen von Augitpaaren noch weiterer Untersuchungen bedarf.

Ausbildung zwei- und eingliedriger Krystalle.

Dieselbe ist prismatisch oder tafelartig, oktaedrisch oder rhomboedrisch.

Prismatisch sind die Krystalle bei Vorherrschen einer Zone. Oft ist dies die Horizontalzone (Verlängerung nach der Axe c), oft die Vertikalzone (Verlängerung nach b), seltener sind sie nach einer ersten Kantenzone oder nach der Axe a verlängert.

Tafelartig sind sie, wenn eine Fläche vorherrscht. Oft ist dies die basische oder eine andere schiefe Endfläche, auch wohl die Hexaidfläche a oder b.

Oktaedrisch erscheinen sie, wenn ein vorderes und ein hinteres Augitpaar vorherrschen.

Rhomboedrisch, wenn ein Flächenpaar, z. B. ein erstes Paar und eine Einzelfläche, z. B. die basische Endfläche, überwiegen.

Zeichnung eines zwei- und eingliedrigen Axenkreuzes.

Wenn der Winkel (o), den die Axen a und c bilden, von einem rechten wenig abweicht, so kann man die Construktion für rechtwinklige Axen (S. 45) benutzen. Ist aber jener Winkel ein entschieden schiefer (nach vorn stumpfer), so verfährt man folgendermassen:

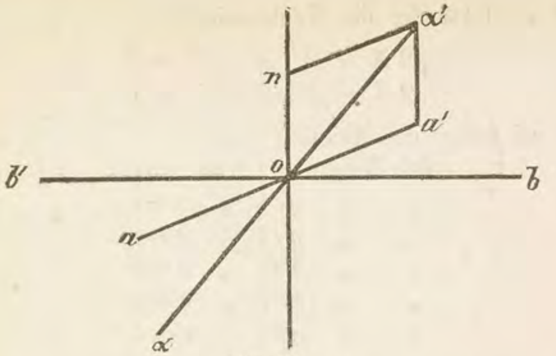


Fig. 94.

Man zeichnet in Fig. 94 das rechtwinklige Axenkreuz Fig. 30, an welchem $aa' = a$, bb' (gg' der Fig.) $= b$ und $cc' = c$ und $a = b = c$ ist. Dann trägt man $on = oc \,.\, \cos o$ (Axenwinkel ac) ab, zieht die Parallelen $n\alpha'$ und $a'\alpha'$, zieht ferner $\alpha o \alpha'$ und macht $\alpha o = o\alpha'$, so ist $\alpha\alpha'$ die Axe a.

Ist z. B. $a : b : c = 0{,}8 : 1 : 0{,}5$ und Winkel $o = 75°$, so werden $o\alpha$ und $o\alpha'$ $\frac{4}{5}$ ihrer Länge, oc und oc' die Hälften erhalten. Nun ist

$$\begin{array}{rl} lg\ 0{,}5 & = 9{,}6989700 \\ lg\ \cos 75° & = \underline{9{,}4129962} \\ & \ 9{,}1119662 = lg\ 0{,}1294. \end{array}$$

Die Länge on würde, da $\dfrac{0{,}1294}{0{,}5} = 3{,}8$, $\dfrac{1}{3{,}8}$ oder $\frac{1}{4}$ der Länge von $\frac{1}{2}\, oc$ sein.

Berechnung.

Zur Bestimmung eines zwei- und eingliedrigen Krystalls gehört 1. das Axenverhältniss und 2. die Grösse des Winkels der Axen a und c (als welchen man den spitzen hinten liegenden $= o$ angiebt). Hierzu ist die Kenntniss von drei Kantenwinkeln aus verschiedenen Zonen erforderlich. Da diese aber sehr verschieden sein können, so wird es hier genügen, einige der wichtigsten weil häufigsten Fälle anzuführen.

Wir bezeichnen alle auf das hintere $a = a'$ sich beziehenden Stücke mit dem Accent.

Es sei die Neigung einer Fläche des Hauptoktaeders

	$a : b : c$	$a' : b : c$
gegen die Ebene $ac =$	X	X'
„ „ „ $bc =$	Y	Y'
„ „ „ $ab =$	Z	Z'

so sind am Oktaeder die Kantenwinkel

$$2X = A \quad Y + Y' = B$$
$$2X' = A' \quad Z + Z' = C$$

Es sei ferner die Neigung

der Kante ac : Axe $c = \mu$
„ „ ac : „ $a = \nu$
„ „ $a'c$: „ $c = \mu'$
„ „ $a'c$: „ $a = \nu'$
„ „ bc : „ $c = \varrho$
„ „ ab : „ $a = \sigma$

Der Winkel o, welchen die Axen a und c bilden, ist oft durch Messung zu bestimmen; er ist die Neigung der Hexaidflächen a und c.

Fehlt die Fläche a, so hat man es häufig mit einer Combination des ersten Paares $p = a : b : \infty c$ und der basischen Endfläche $c = c : \infty a : \infty b$ zu thun. Ist in diesem Fall

$$p : p \text{ an } a = 2f$$
$$p : c \quad = g$$

so ist

$$\cos o = \frac{\cos g}{\sin f} \qquad \text{(I.)}$$

Berechnung des Axenverhältnisses.

Ist

$$p : p \text{ an } b = 2\gamma$$
$$q : q \text{ an } b = 2\beta \quad (q = b : c : \infty a)$$

so ist (Fig. 95)

$$tg\, \gamma = s$$

$$s = a \sin o. \quad \text{Also } a = \frac{s}{\sin o} \quad (b = 1) \qquad \text{(II.)}$$

und

$$tg\, \beta = s'$$

$$s' = c \sin o. \quad \text{Also } c = \frac{s'}{\sin o} \quad (b = 1) \qquad \text{(III.)}$$

Fehlen aber die Flächen q, und ist dafür $r' = a' : c : \infty b$ vorhanden, so lässt sich c aus a und o berechnen, wenn der Winkel $c : r' = 180° - \nu'$ gemessen ist. Denn hieraus folgt

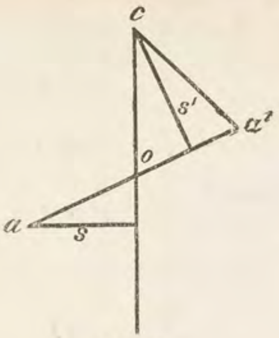


Fig. 95.

ν', und da $\mu' + \nu' + o = 180°$, so ist $\mu' = 180° - (\nu' + o)$. Nun ist

$$a : c = \sin \mu' : \sin \nu' \qquad \text{(IV.)}$$

Berechnung von o, wenn die basische Endfläche fehlt, dafür aber die Hexaidfläche a und die beiden Hälften des dritten Paares $r = a : c : \infty b$ und $r' = a' : c : \infty b$ vorhanden sind. Man misst die Winkel $a : r$ und $a : r'$ (oder $r : r'$).

$$a : r = 180° - \mu$$
$$a : r' = 180° = \mu';$$

dann ist

$$tg\ o = \frac{2.\ \sin \mu . \sin \mu'}{\sin (\mu' - \mu)} \qquad \text{(V.)}$$

Berechnung der Winkel der Axenebenen aus dem Axenverhältniss und dem Winkel o.

$$tg\ \mu = \frac{a . \sin o}{c + a . \cos o} \qquad tg\ \mu' = \frac{a . \sin o}{c - a . \cos o} \qquad \text{(VI.)}$$

$$tg\ \varrho = \frac{b}{c} \qquad tg\ \sigma = \frac{b}{a}. \qquad \text{(VII.)}$$

Berechnung der Kantenwinkel des Hauptoktaeders.

$$tg\ X = \frac{tg\ \sigma}{\sin \nu} = \frac{tg\ \varrho}{\sin \mu} \qquad tg\ X' = \frac{tg\ \sigma}{\sin \nu'} = \frac{tg\ \varrho}{\sin \mu'}$$

$$tg\ Y = \frac{tg\ \mu}{\sin \varrho} \qquad tg\ Y' = \frac{tg\ \mu'}{\sin \varrho} \qquad \text{(VIII.)}$$

$$tg\ Z = \frac{tg\ \nu}{\sin \sigma} \qquad tg\ Z' = \frac{tg\ \nu'}{\sin \sigma}$$

Berechnung der Winkel der Axenebenen aus den Kantenwinkeln.

$$\cos\mu = \frac{\cos Y}{\sin X} \qquad \cos\mu' = \frac{\cos Y'}{\sin X'}$$

$$\cos\nu = \frac{\cos Z}{\sin X} \qquad \cos\nu' = \frac{\cos Z'}{\sin X'} \qquad \text{(IX.)}$$

$$\cos\varrho = \frac{\cos X}{\sin Y} = \frac{\cos X'}{\sin Y'} \qquad \cos\sigma = \frac{\cos X}{\sin Z} = \frac{\cos X'}{\sin Z'}.$$

Berechnung des ersten und zweiten Paares.

Ist

$$p:p \text{ an } a = 2f$$
$$q:q \text{ an } c = 2h,$$

so ist

$$tg\, f = \frac{1}{a \,.\, \sin o}; \quad tg\, h = \frac{1}{c \,.\, \sin o}. \qquad \text{(X.)}$$

Beispiele.

Schwefelsaure Ammoniak-Magnesia.

$(Am^2\, SO^4 + Mg\, SO^4) + 6\, aq.$

Ist in der Combination Fig. 96 u. 97 o und o' das Hauptoktaeder, so folgen die Werthe der übrigen Flächen aus ihren Zonen:

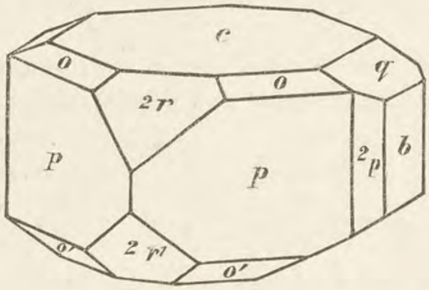


Fig. 96.

$o = a : b : c$

$o' = a' : b : c$

$p = a : b : \infty c$

$^2p = 2a : b : \infty c$

$q = b : c : \infty a$

$^2r = a : 2c : \infty b$

$^2r' = a' : 2c : \infty b$

$b = b : \infty a : \infty c$

$c = c : \infty a : \infty b$

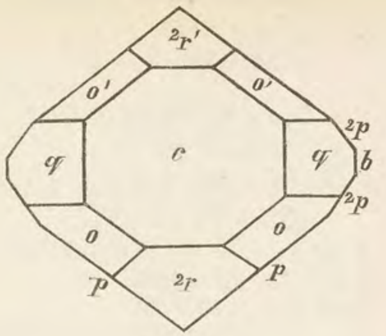


Fig. 97.

Nur für das zweifach schärfere erste Paar $2p$ ist die Zone $2p$ rechts mit o rechts und q links, sowie mit o' links und q rechts in den Zeichnungen nicht sichtbar.

Es sei gegeben

$$p : p \text{ an } a = 109^\circ\ 30' \ (2f)$$
$$p : c \qquad = 104^\circ\ 45' \ (g)$$
$$c : {}^2r' \qquad = 115^\circ\ 30'$$

Da $g = 75^\circ\ 15'$, $f = 54^\circ\ 45'$, so ist nach I

$$lg\ cos\ 75^\circ\ 15' = 9{,}4058617$$
$$lg\ sin\ 54^\circ\ 45' = 9{,}9120315$$
$$\overline{9{,}4938302} = lg\ cos\ o = 71^\circ\ 50'.$$

Da ferner

$$90^\circ - 54^\circ\ 45' = 35^\circ\ 15' = \gamma,$$

so ist

$$lg\ tg\ 35^\circ\ 15' = 9{,}8492536 = lg\ s \quad \text{(Formel II.)}$$

und

$$lg\ s \quad = 9{,}8492536$$
$$-\ lg\ sin\ o = 9{,}9777938$$
$$\overline{9{,}8714598} = lg\ a = 0{,}7438\ (b = 1).$$

Wenn nun $c : {}^2r' = 115^\circ\ 30'$, so ist für ${}^2r'$

$$\nu' = 180^\circ - 115^\circ\ 30' = 64^\circ\ 30'$$
$$\mu' = 115^\circ\ 30' - o \quad = 43^\circ\ 40'.$$

Folglich

$$a : 2c = sin\ \mu' : sin\ \nu' \qquad \text{(Formel IV.)}$$
$$lg\ sin\ \mu' = 9{,}8391396 = lg\ 0{,}69046$$
$$lg\ sin\ \nu' = 9{,}9554882 = lg\ 0{,}90259$$

$$0{,}69046 : 0{,}90259 = 0{,}7438 : x$$
$$x = 0{,}9723 \quad = 2\,c$$
$$\text{Also } 0{,}48615 = 2\,c$$

Mithin ist

$$a : b : c = 0{,}7438 : 1 : 0{,}4861$$
$$o = 71^\circ\, 50'$$

Berechnung der Winkel der Axenebenen.
(Nach VI und VII.)

$$\begin{aligned}
lg\ (a\ sin\ o) &= lg\ s = 9{,}8492536 \\
lg\ a \quad &= 9{,}8714598 \\
lg\ cos\ o &= 9{,}4938302 \\
& \quad\ \ 9{,}3652900 = lg\ 0{,}2319
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= 0{,}4861 & & 0{,}4861 \\
a\,.\,cos\ o &= 0{,}2319 & & -\ 0{,}2319 \\
& \quad\ 0{,}7180 & & 0{,}2542
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
lg\ (a\ sin\ o) &= 9{,}8492536 \\
-\ lg\ 0{,}718 &= 9{,}8561244 \\
& \quad\ 9{,}9931292 = lg\ tg\ \mu = 44^\circ\, 33' \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \nu = 27^\circ\, 17'\ (o - \mu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
lg\ (a\,.\,sin\ o) &= 9{,}8492536 \\
-\ lg\ 0{,}2542 &= 9{,}4051755 \\
& \quad 10{,}4440781 = lg\ tg\ \mu' = 70^\circ\, 13' \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \nu' = 37^\circ\, 57'\ (180^\circ - [\mu' + o])
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} = 2{,}0572 \qquad lg = 10{,}3132765 = lg\ tg\ \varrho = 64^\circ\, 5'$$

$$\frac{1}{a} = 1{,}3444 \qquad lg = 10{,}1285285 = lg\ tg\ \sigma = 53^\circ\, 22'.$$

Berechnung des Hauptoktaeders. (Nach VIII)

$$\begin{aligned}
lg\ tg\ \ \sigma &= 10{,}1285285 & \qquad lg\ tg\ \ \sigma &= 10{,}1285285 \\
-\ „\ sin\ \nu &= \ \ 9{,}6612361 & -\ „\ sin\ \nu' &= \ \ 9{,}7888565 \\
& \quad 10{,}4672924 & & \quad 10{,}3396720 \\
&= lg\ tg\ X = 71^\circ\ 10' & &= lg\ tg\ X' = 65^\circ\ 25' \\
lg\ tg\ \ \mu &= \ \ 9{,}9931292 & lg\ tg\ \ \mu' &= 10{,}4440781 \\
-\ „\ sin\ \varrho &= \ \ 9{,}9539677 & -\ „\ sin\ \varrho &= \ \ 9{,}9539677 \\
& \quad 10{,}0391615 & & \quad 10{,}4901104 \\
&= lg\ tg\ Y = 47^\circ\ 35' & &= lg\ tg\ Y' = 72^\circ\ 4' \\
lg\ tg\ \ \nu &= \ \ 9{,}7124562 & lg\ tg\ \ \nu' &= \ \ 9{,}8920285 \\
-\ „\ sin\ \sigma &= \ \ 9{,}9044291 & -\ „\ sin\ \sigma &= \ \ 9{,}9044291 \\
& \quad\ \ 9{,}8080271 & & \quad\ \ 9{,}9875994 \\
&= lg\ tg\ Z = 32^\circ\ 44' & &= lg\ tg\ Z' = 44^\circ\ 11'
\end{aligned}$$

Also ist an o, o'

$$2X = A = 142^\circ\ 20'$$
$$2X' = A' = 130\quad 50$$
$$Y + Y' = B = 119\quad 39$$
$$Z + Z = C = 76\quad 55$$

Berechnung von q. (Nach X).

$$lg\ c = 9{,}6867256$$
$$lg\ sin\ o = 9{,}9777938$$
$$9{,}6645194 = lg\ 0{,}46187$$
$$\frac{1}{0{,}46187} = 2{,}1651$$
$$lg\ 2{,}1651 = 10{,}3354780 = lg\ tg\ h = 65^\circ\ 12'.$$

Also $q : q$ an $c = 130^\circ\ 24'$.

Um die Neigung von o und o' gegen q zu berechnen, muss man die von q gegen die Axenebene bc (Hexaidfläche a) kennen.

Nennt man den Winkel $q : a = g'$, so ist $cos\ g' = cos\ o\ sin\ h$

$$lg\ cos\ o = 9.4938302$$
$$\text{„}\ sin\ h = 9.9579794$$
$$9{,}4518096 = lg\ cos\ g' = 73^\circ\ 34'.$$

Dies ist die Neigung von q gegen das hintere a, also 106° $26'$ gegen das vordere.

Dann ist

$$o : q = Y + 106^\circ\ 26' = 154^\circ\ 1'$$
$$o' : q = Y' + 73\quad 34 = 145\quad 38$$

Berechnung von ${}^2p$. (Nach X.)

$$tg\ f = \frac{1}{2a\ .\ sin\ o}$$
$$lg\ 2a = lg\ 1{,}4876 = 10{,}1724862$$
$$lg\ sin\ o = 9.9777938$$
$$10{,}1502800 = lg\ 1{,}4135$$
$$\frac{1}{1{,}4135} = 0{,}70745;\ lg = 9{,}8496958 = lg\ tg\ f = 35^\circ\ 17'$$

Also $2p : 2p$ an $a = 70^\circ\ 34'$.

Berechnung von ${}^2r = a : 2c : \infty b$. (Nach VI.)

$$2c = 0{,}9723$$
$$a\ .\ cos\ o = 0{,}2319$$
$$1{,}2042;\ lg = 10{,}0806986$$

$$lg\,(a\,.\,sin\;o) = 9.8492536$$
$$\underline{-\,10{,}0806986}$$
$$9{,}7685550 = lg\;tg\;\mu = 30°\;24'$$

$\nu = o - \mu = 41°\;26'$.

Hieraus folgt

$^2r : c = 180° - \nu = 138°\;34'$

$^2r : {}^2r' = \mu + \mu' = 74°\;\;4'\;(30°\;24' + 43°\;40')$

(über c).

Die hier angenommene Stellung der Krystalle des Salzes ist natürlich nicht die einzig mögliche. Sie führt zu einfachen Parameterverhältnissen, allein sie erfordert, dass die Axen a und c unter $108°\;10'$ oder $71°\;50'$ geneigt seien.

Lässt man die Horizontalzone, also auch die Axe c bestehen, denkt sich aber das Hauptoktaeder aus den Prismen o' und q zusammengesetzt, so dass o' das vordere, q das hintere Augitpaar, mithin Fläche c eine hintere schiefe Endfläche wird, so erhält man ein nahe rechtwinkliges Axensystem, bei welchem die Abweichung der Axen a und c von rechtwinkligen nur $0°\;56'$ beträgt. Es ist dann nämlich

$$a : b : c = 1{,}4123 : 1 : 0{,}4861$$
$$o = 89°\;4'.$$

Man könnte hierbei $a = 3a$ setzen, so dass $a : b : c = 0{,}4708 : 1 : 0{,}4861$ würden. Die Flächenzeichen sind dann

	im ersten Fall	im zweiten Fall
o'	$= \mathfrak{a} : b : c$	$3\,a : b : c$
q	$= a' : b : c$	$3\,a' : b : c$
o	$= \frac{1}{3}a' : b : c$	$a' : b : c$
p	$= a : 2b : \infty\, c$	$3a\; : 2b : \infty\, c$
^2p	$= a : b : \infty : c$	$3a\; : b : \infty\, c$
c	$= a' : c : \infty\, b$	$3\,a' : c : \infty\, b$
$^2r'$	$= a : 3c : \infty\, b$	$a\; : c : \infty\, b$
^2r	$= a' : 5c : \infty\, b$	$3\,a' : 5c : \infty\, b.$

Fläche b bleibt natürlich unverändert.

Schwefelsaures Natron. $Na^2SO^4 + 10aq$
(Glaubersalz.)

Die Krystalle sind, wie Fig. 98 zeigt, prismatisch nach den

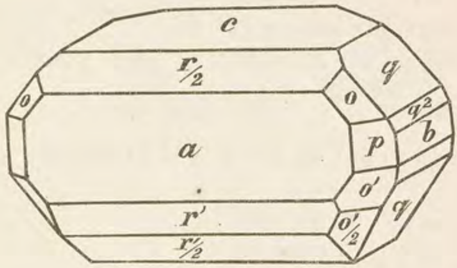


Fig. 98.

Flächen a, c u. s. w., während die Symmetrieebene parallel b geht. Mithin bilden jene die Vertikalzone. Wir denken uns die Flächen a, p, b vertikal, und in Fig. 99 einen Durchschnitt

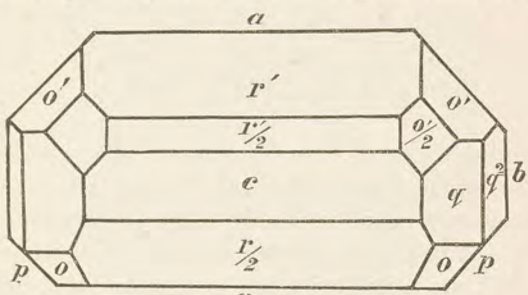


Fig. 99.

durch die Zone derselben, die Horizontalzone. Indem wir das vordere Augitpaar o und das hintere o' als Hauptoktaeder ansehen, ist c die basische Endfläche, q und q^2 sind zweite Paare. Mit Hülfe der Zonen und einer Projection ergeben sich

$o = a : b : c$	$p = a : b : \infty c$	$a = a : \infty b : \infty c$
$o' = a' : b : c$	$q = b : c : \infty a$	$b = b : \infty a : \infty c$
$\frac{o'}{2} = a' : b : \frac{1}{2}c$	$q^2 = b : 2c : \infty a$	$c = c : \infty a : \infty b$
	$r' = a' : c : \infty b$	
	$\frac{r}{2} = 2a : c : \infty b$	
	$\frac{r'}{2} = 2a' : c : \infty b.$	

Für die Berechnung mögen drei Messungen Haidinger's benutzt werden, nämlich:

1. $p : p$ über $a = 86° \ 31'$
2. $a : c \quad = 107 \ \ 45$
3. $a : r' \quad = 130 \ \ 10$

Aus 2. folgt Winkel $o = 72° \ 15'$

$$180° - 86° \ 31' = 93° \ 29' \text{ ist } p : p \text{ an } b,$$

$$\text{und } \frac{93° \ 29'}{2} = 46° \ 44{,}5' = \gamma$$

$$lg\ tg\ 46° \ 44{,}5' = lg\ s = 10{,}0264200$$

und nach II

$$\begin{array}{rl} lg\ s & = 10{,}0264200 \\ -\ \text{„}\ sin\ o & = \underline{\ 9{,}9788175} \\ & \ \ 10{,}0476025 = lg\ a = 1{,}116 \end{array}$$

Da nach 3. $a : r' = 130° \ 10'$, so ist

$$180° - 130° \ 10' = 49° \ 50' = \mu'$$

$$\text{und } 180° - (\mu' + o) = 57 \ \ 55 = \nu'$$

Nach IV·

$$sin\ \mu' : sin\ \nu' = 76417 : 84728$$

$$= 1{,}116 : 1{,}238 = a : c$$

$$\text{Also } a : b : c = 1{,}116 : 1 : 1{,}238$$

$$o = 72° \ 15'.$$

Mit Hülfe dieser Werthe berechnet man wie im vorigen Beispiel das Hauptoktaeder und die übrigen Flächen.

Auch im zwei- und eingliedrigen System krystallisiren viele Substanzen. Ausser den genannten und dem früher (S. 19) behandelten Eisenvitriol seien nur genannt: Oxalsäure, unterschwefligsaures Natron, phosphorsaures Natron, gelbes und rothes Blutlaugensalz, oxalsaures Eisen (Chrom-) oxyd-Kali (Ammoniak), Weinsäure, Borax, essigsaures Blei, Rohrzucker.

Eingliedriges System.

(Triklines System.)

Hierher gehören nach S. 49 diejenigen Krystalle, deren Symmetrie nur die Annahme dreier schiefwinkliger Axen gestattet, wovon der Kupfervitriol S. 31 ein Beispiel lieferte.

Hier lösen sich auch die Prismen auf, und jede Fläche ist eine Einzelfläche. Es folgt also zunächst, dass das eingliedrige Oktaid in vier Einzelflächen zerfällt, die zusammen auftreten können, oft aber auch nur theilweise vorhanden sind. Um sie zu unterscheiden, wird die hintere Axenhälfte $a = a'$, die linke $b = b'$ bezeichnet; also ist von $a : b : c$

die vordere	rechte	Fläche	=	$a : b : c$
„ „	linke	„	=	$a : b' : c$
„ hintere	rechte	„	=	$a' : b : c$
„ „	linke	„	=	$a' : b' : c$

Natürlich gilt dasselbe von allen anderen Flächen $na : mb : c$.

Das eingliedrige Hexaid ist ein schiefes rhomboidisches Prisma, dessen Kanten die Axen repräsentiren.

Das eingliedrige Dodekaid besteht aus lauter Einzelflächen, denn das erste Paar zerfällt in $a : b : \infty c$ und $a : b' : \infty c$, das zweite in $b : c : \infty a$ und $b' : c : \infty a$, und ebenso alle übrigen.

Alle Prismen sind rhomboidische, alle Abstumpfungen von Kanten sind schiefe.

Unter den vorhandenen Flächen einer eingliedrigen Substanz sucht man drei zum Hexaid geeignete, wodurch die Axen gegeben sind. Dann wählt man diejenigen Oktaidflächen, welche die Axeneinheiten liefern sollen.

Zeichnung.

Bezüglich der Axe c gilt das beim vorigen System Bemerkte, allein auch die Axe b erfährt eine Aenderung. Wir verweisen hier auf Naumann's Lehrbuch der Krystallographie 2,480 (1830).

Berechnung.

Wir nennen die senkrechte Axe c, die von rechts nach links laufende b, die von vorn nach hinten (aufwärts) gehende a. Axe b kann nach rechts oder links aufwärts geneigt sein, a kann vorn nach rechts oder nach links gehen, wenn die Axenebene bc dem Beobachter parallel steht.

Die Winkel der Axen sind verschieden von den Winkeln der Axenebenen. An dem eingliedrigen Hexaid sind letztere die Kantenwinkel, jene die ebenen Winkel. Bei der Berechnung geht man am besten von dem vorderen rechten Oktanten des Axenkreuzes aus. Es seien in demselben die Neigungen von

Axe $b : c = \alpha$	Axenebene $ab : ac = A$	(Hexaidflächen $b : c$)
„ $a : c = \beta$	„ $ab : bc = B$	(„ $a : c$)
„ $a : b = \gamma$	„ $ab : bc = C$	(„ $a : b$)

Ferner sei die Neigung der Oktaidfläche $a : b : c$ gegen

die Axenebene $ac = X$

„ „ $bc = Y$

„ „ $ab = Z$

Ferner sei für jenen Oktanten die Neigung

der Kante ac: Axe $c = \mu$

: „ $a = \nu$ — Also $\mu + \nu + \beta = 180°$

bc: „ $c = \varrho$

: „ $b = \pi$ — $\pi + \varrho + \alpha = 180°$

ab: „ $a = \sigma$

: „ $b = \tau$ — $\sigma + \tau + \gamma = 180°$

Ist das Hexaid durch die Winkel A, B, C gegeben, so folgen die Axenwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\cos \beta = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

Die *cos* der stumpfen Winkel werden negativ.

Da

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin A : \sin B : \sin C,$$

so bedarf es blos der Berechnung eines jener Winkel.

Berechnung des Axenverhältnisses. Dies kann geschehen, indem man von der Neigung der Oktaidfläche $o = a : b : c$ gegen die drei Axenebenen ausgeht, d. h. durch Messung der Winkel, die o mit den drei Hexaidflächen bildet, weil

o : Hexaidfläche $a = 180° - Y$

: „ $b = 180° - X$

: „ $c = 180° - Z$

Man berechnet dann aus X, Y, Z die Winkel μ, ν, π, ϱ, σ, τ.

$$\cos \mu = \frac{\cos Y + \cos X \cdot \cos C}{\sin X \cdot \sin C}$$

$$\cos \nu = \frac{\cos Z + \cos X \cdot \cos A}{\sin X \cdot \sin A}$$

$$\cos \pi = \frac{\cos Z + \cos Y \cdot \cos B}{\sin Y \cdot \sin B}$$

$$\cos \varrho = \frac{\cos X + \cos Y \cdot \cos C}{\sin Y \cdot \sin C}$$

$$\cos \sigma = \frac{\cos X + \cos Z \cdot \cos A}{\sin Z \cdot \sin A}$$

$$\cos \tau = \frac{\cos Y + \cos Z \cdot \cos B}{\sin Z \cdot \sin B}$$

Bezüglich stumpfer Winkel gilt auch hier das zuvor Bemerkte.

Natürlich braucht man nur μ, π, σ oder ν, ϱ, τ zu berechnen. Ueberhaupt ist

$$\sin X : \sin Y = \sin \varrho : \sin \mu$$

$$\sin X : \sin Z = \sin \sigma : \sin \nu$$

$$\sin Y : \sin Z = \sin \tau : \sin \pi.$$

Aus diesen Winkeln folgt das Axenverhältnis, $b = 1$ gesetzt:

$$a : c = \sin \mu : \sin \nu$$

$$b : c = \sin \varrho : \sin \pi$$

$$a : b = \sin \tau : \sin \sigma$$

Fehlt aber die Fläche $a : b : c$, so sind wohl die Flächen $p = a : b : \infty c$ und $p' = a : b' : \infty c$ vorhanden. Bezeichnet man deren Neigung gegen die Axenebene ac mit X, gegen bc mit Y, ist also

p oder p' : Hexaidfläche $b = 180° - X$

„ : „ $a = 180° - Y$,

und kennt man nur einen dieser Winkel, weil

$$X + Y + C = 180°$$

so ist

$$\text{Axe } a : b = \sin Y \cdot \sin \alpha : \sin X \cdot \sin \beta,$$

also

$$a = \frac{\sin Y \cdot \sin \alpha}{\sin X \cdot \sin \beta}$$

Ist ferner $q = b : c : \infty a$ oder $q' = b' : c : \infty a$ vorhanden, und ihre Neigung gegen die Ebene $ac = X$, gegen $ab = Z$, d. h.

q oder q' : Hexaidfläche $c = 180° - Z$

„ : „ $b = 180° - X$,

wobei ebenfalls

$$X + Z + A = 180°,$$

so ist

$$b : c = \sin X \cdot \sin \beta : \sin Z \cdot \sin \gamma.$$

Also

$$c = \frac{\sin Z \cdot \sin \gamma}{\sin X \cdot \sin \beta}$$

Kommen die Flächen $r = a : c : \infty b$, und $r' = a' : c : \infty b$ vor, und es ist ihre Neigung gegen die Ebene $bc = Y$, gegen $ab = Z$, so ist

$$\begin{aligned} r \text{ oder } r' &: \text{Hexaidfläche } c = 180° - Z \\ \text{„} \quad &: \quad \text{„} \qquad a = 180° - Y \end{aligned}$$

wobei $Y + Z + B = 180°$;
dann hat man

$$a : c = \sin Y \cdot \sin \alpha : \sin Z \cdot \sin \gamma$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin Y \cdot \sin \alpha}{\sin Z \cdot \sin \gamma}$$

Berechnung der Winkel der Axenebenen aus den Axen und Axenwinkeln.

$$tg\ \mu = \frac{a \cdot \sin \beta}{c + a \cdot \cos \beta} \qquad tg\ \mu' = \frac{a \cdot \sin \beta}{c - a \cdot \cos \beta}$$

$$tg\ \varrho = \frac{b \cdot \sin \alpha}{c + b \cdot \cos \alpha} \qquad tg\ \varrho' = \frac{b \cdot \sin \alpha}{c - b \cdot \cos \alpha}$$

$$tg\ \sigma = \frac{b \cdot \sin \gamma}{a + b \cdot \cos \gamma} \qquad tg\ \sigma' = \frac{b \cdot \sin \gamma}{a - b \cdot \cos \gamma}$$

Die accentuirten sind die entsprechenden Winkel des anstossenden Oktanten, d. h. μ' liegt hinten, ϱ' links und σ' links.

Berechnung der Winkel der Oktaidflächen X, Y, Z.

$$1.\ tg\ \frac{Y + X}{2} = cotg\ \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos \frac{(\mu - \varrho)}{2}}{\cos \frac{(\mu + \varrho)}{2}}$$

$$2.\ tg\ \frac{Y - X}{2} = cotg\ \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{(\mu - \varrho)}{2}}{\sin \frac{(\mu + \varrho)}{2}}$$

$$3.\ tg\ \frac{Y + Z}{2} = cotg\ \frac{B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{(\tau - \pi)}{2}}{\cos \frac{(\tau + \pi)}{2}}$$

$$4.\ tg\,\frac{Y-Z}{2} = cotg\,\frac{B}{2} \cdot \frac{sin\,\frac{(\tau-\pi)}{2}}{sin\,\frac{(\tau+\pi)}{2}}$$

$$5.\ tg\,\frac{X+Z}{2} = cotg\,\frac{A}{2} \cdot \frac{cos\,\frac{(\sigma-\nu)}{2}}{cos\,\frac{(\sigma+\nu)}{2}}$$

$$6.\ tg\,\frac{X-Z}{2} = cotg\,\frac{A}{2} \cdot \frac{sin\,\frac{(\sigma-\nu)}{2}}{sin\,\frac{(\sigma+\nu)}{2}}$$

Auch hier sind die *cos* negativ, wenn A, B, C stumpf sind. Ist $\varrho > \mu$, $\pi > \tau$, $\nu > \sigma$, werden also $\mu - \varrho$, $\tau - \pi$, $\sigma - \nu$ negativ, so wird auch der *sin* negativ, und man hat dann

$$2.\ tg\,\frac{X-Y}{2};\quad 4.\ tg\,\frac{Z-Y}{2};\quad 6.\ tg\,\frac{Z-X}{2}$$

Berechnung der Dodekaidflächen.

Man bestimmt die Winkel X, Y, Z mit Hülfe derselben Formeln.

So ist z. B. für

$$p \text{ oder } p' \quad \nu = 180° - \beta$$
$$\pi = 180° - \alpha$$

Man benutzt die Formeln 3—6 oder nur zwei, da

$$X + Y + C = 180°.$$

Für q oder q' ist $\mu = 180° - \beta$

$$\tau = 180° - \gamma$$

Formeln 1—4 oder nur zwei, weil

$$X + Z + A = 180°.$$

Für r oder r' ist $\varrho = 180° - \alpha$

$$\sigma = 180° - \gamma$$

Formeln 1, 2, 5, 6 oder nur zwei derselben, weil

$$Y + Z + B = 180°.$$

Ausser dem Kupfervitriol nennen wir als Beispiele eingliedriger Krystalle: halb überjodsaures Kali, die Hyposulfate von Magnesium, Nickel, Kobalt, Eisen, Kupfer und Kadmium, salpetersaures Wismuth, zweifach chromsaures Kali (Ammoniak), jodsaures Natron — Chlornatrium, unterschwefligsaurer Kalk, Traubensäure, vierfach oxalsaures Kali.

Sechsgliedriges System.

(Hexagonales System. Drei- und einaxiges System.)

Die hierher gehörigen Krystalle werden auf **vier** Axen bezogen, von welchen drei unter sich gleiche $= a$ sich unter 60° schneiden, während die vierte, von ihnen verschiedene $= c$ zu jenen senkrecht steht und **Hauptaxe** genannt wird.

Die Annahme eines solchen Axensystems ist darauf gegründet, dass die sechsgliedrigen Krystalle gleiche Symmetrie in 3 oder $n \times 3$ Richtungen zeigen, welche in einer Ebene liegen, während die auf jenen normale eine andere Symmetrierichtung bezeichnet und zugleich in optischer Hinsicht (als optische Axe) ausgezeichnet ist. Sechsgliedrige Krystalle gleichen, abgesehen von der Zahl der gleichen Symmetriestellen, den viergliedrigen darin, dass sie um die Hauptaxe gedreht werden können (um 60°, wie jene um 90°), ohne ihre Stellung zu ändern, d. h. dass auch sie kein vorn und hinten, kein rechts und links haben.

Für ihre rein mathematische Betrachtung können sie auf drei gleiche schiefe Axen bezogen werden, doch entspricht dies ihrem physikalischen Charakter nicht.

A. Vollflächner.

Dihexaeder.

Eine Fläche, welche zwei Axen a in der Gleichheit schneidet, geht dem dritten a parallel. Schneidet sie zugleich die Hauptaxe c in irgend einem Punkt γc, so ist sie sechsmal vorhanden und bildet mit ihren sechs Parallelen das **Dihexaeder**

$$a : a : \infty a : \gamma c.$$

Wir wollen einstweilen $\gamma = 1$ setzen, also das Zeichen

$$a : a : \infty a : c$$

schreiben.

Ein Dihexaeder (Fig. 100) hat Endkanten von a nach c und Seitenkanten von a nach a. Es hat Endecken an c, die sechskantig, und Seitenecken an a, die zwei- und zweikantig sind. Die Flächen der idealen Form sind gleichschenklige Dreiecke. Die Basis (Axenebene der a) ist ein regelmässiges Sechseck. Die drei durch c und ein a gelegten Schnitte sind Rhomben.

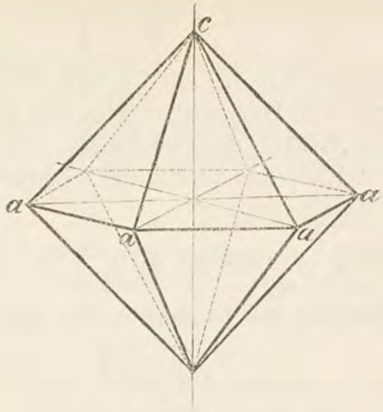


Fig. 100.

Das Verhältniss $a:c$ ist ein irrationales und wird aus einem End- oder Seitenkantenwinkel berechnet.

Ist in Fig. 101 aa eine Seitenkante eines Dihexaeders, so ist oaa ein gleichseitiges Dreieck mit Winkeln von 60°. Die Seitenkante des Dihexaeders ist gleich einer Axe a.

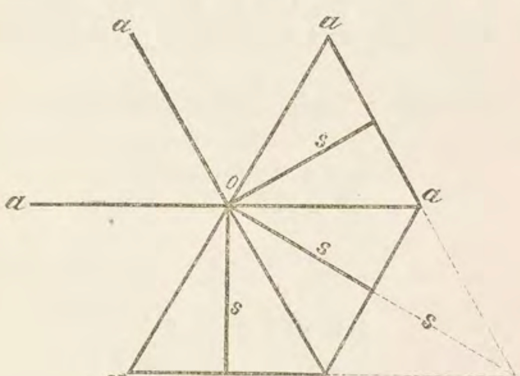


Fig. 101.

Eine Linie vom Mittelpunkt auf die Mitte, also senkrecht auf die Seitenkante, heisst eine Zwischenaxe s. Ein s steht immer senkrecht auf einem a.

Nun ist $s = a \,.\, sin\ 60°$.

Setzt man $a = 1$, so ist

$$s = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

d. h. gleich dem t des Granatoeders (bei gleichen a).

Die Neigung der Dihexaederfläche zur Hauptaxe ist gegeben durch den Winkel, den die Flächendiagonale (eine Linie von c nach dem Endpunkt s) mit der Hauptaxe c bildet. Für diesen Winkel ist $sin : cos = s : c$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{4}} : c, \text{ oder die } tg = \frac{s}{c} = \frac{\sqrt{\tfrac{3}{4}}}{c}.$$

Für die Neigung der Endkanten zur Axe c ist ebenso

$$tg = \frac{a}{c} = \frac{1}{c}$$

Denkt man sich drei Dihexaederflächen und ihre s und verlängert die beiden äusseren über die mittlere, so treffen sie deren s in $2\,s$, und es ist (Fig. 101)

$$a : 2\,s = 1 : \sqrt{3}.$$

Setzt man $2\,s = b$, so sind jene beiden Dihexaederflächen $= a : b : c$, die dritte aber ist $\frac{1}{2}\,b : c : \infty\,a$. Auf solche Art kann man die sechsgliedrigen Formen auf drei rechtwinklige Axen beziehen, von denen $a : b = 1 : \sqrt{3}$ ist, eine Betrachtung, die für ihre physikalischen und besonders optischen Eigenschaften von Interesse ist.

Das vollständige Zeichen eines Dihexaeders ist

$$\begin{array}{c} \gamma\,c \\ a : a : \infty\,a \\ 2\,s : s : 2\,s \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{c} \gamma\,c \\ a \quad : \quad a \quad : \quad \infty\,a, \\ \sqrt{3} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} : \sqrt{3} \end{array}$$

$a = 1$ gesetzt.

Jede Substanz kann aber eine ganze Reihe von Dihexaedern haben, welche gleich den Quadratoktaedern unter sich in der Beziehung stehen, dass ihre Axen a bei gleichen c oder ihre c bei gleichen a sich rational und einfach verhalten. Eines dieser Dihexaeder wird zum H a u p t d i h e x a e d e r gewählt $= a : a : \infty\,a : c$. Die übrigen sind dann

$$\text{stumpfere} = a : a : \infty a : \frac{1}{n} c$$

$$\text{oder schärfere} = a : a : \infty a : nc,$$

und werden nach dem Werth von n als zweifach, dreifach etc. stumpferes oder schärferes unterschieden.

Alle diese Dihexaeder heissen Dihexaeder erster Ordnung.

Kommen mehrere derselben in Combination vor, so bilden die stumpferen sechsflächige Zuspitzungen der Endecken, die schärferen dagegen Zuschärfungen der Seitenkanten an einem gegebenen, wobei die Combinationskanten den letzteren parallel gehen.

Die Endkanten eines jeden Dihexaeders werden abgestumpft durch ein neues Dihexaeder, welches in Bezug auf jenes das erste stumpfere desselben heisst. Seine Flächen schneiden die drei Axen a stets in dem Verhältniss $2a : a : 2a$ oder $a : \frac{1}{2} a : a$ etc.

So ist das erste stumpfere des Hauptdihexaeders

$$= 2a : a : 2a : c = a : \tfrac{1}{2} a : a : \tfrac{1}{2} c.$$

Eine gleiche Lage wie dieses hat dasjenige Dihexaeder, dessen Endkanten durch die Flächen eines gegebenen Dihexaeders erster Ordnung abgestumpft werden und welches in Bezug auf jenes das erste schärfere desselben heisst.

So ist das erste schärfere des Hauptdihexaeders

$$= \tfrac{3}{2} a : \tfrac{3}{4} a : \tfrac{3}{2} a : c = 2a : a : 2a : \tfrac{4}{3} c = a : \tfrac{1}{2} a : a : \tfrac{2}{3} c.$$

Diese beiden Dihexaeder, gleich allen übrigen, deren Flächen in der Richtung der Endkanten von Dihexaedern erster Ordnung liegen, heissen Dihexaeder zweiter Ordnung. Ihr Zeichen ist allgemein $2a : a : 2a : \gamma c$ oder $a : \frac{1}{2} a : a : \gamma c$. Ihre Seitenkanten stehen senkrecht auf den Axen a. Sie verhalten sich gegen die Zwischenaxen s ebenso, wie die Dihexaeder erster Ordnung gegen die a.

Das erste stumpfere und schärfere sind die ersten Glieder einer Reihe von Dihexaedern, gerade so wie eine solche bei den Quadratoktaedern sich ergab.

Die Endkanten des ersten stumpferen werden durch das zweite stumpfere abgestumpft, welches ein Dihexaeder erster Ordnung und zwar $\frac{4}{3} a : \frac{4}{3} a : \infty a : c = a : a : \infty a : \frac{3}{4} c$ ist.

Das erste stumpfere von diesem oder das dritte stumpfere ist wieder ein Dihexaeder zweiter Ordnung $= \frac{8}{3} a : \frac{4}{3} a : \frac{8}{3} a : c = 2 a : a : 2 a : \frac{3}{4} c$ u. s. w.

Das erste schärfere des ersten schärferen, d. h. das zweite schärfere, ist ein Dihexaeder erster Ordnung $= \frac{3}{4} a : \frac{3}{4} a : \infty a : c = a : a : \infty a : \frac{4}{3} c$.

Das dritte schärfere, wiederum zweiter Ordnung, ist $= \frac{9}{8} a : \frac{9}{16} a : \frac{9}{8} a : c = 2 a : a : 2 a : \frac{16}{9} c$. U. s. w.

Wir haben also hier folgende Reihe:

Erstes stumpferes	$=$	$2 a : a : 2 a : c = a : \frac{1}{2} a : a : \frac{1}{2} c$
Zweites „	$=$	$a : a : \infty a : \frac{3}{4} c$
Drittes „	$=$	$2 a : a : 2 a : \frac{3}{4} c = a : \frac{1}{2} a : a : \frac{3}{8} c$
Viertes „	$=$	$a : a : \infty a : \frac{9}{16} c$.
Erstes schärferes	$=$	$2 a : a : 2 a : \frac{4}{3} c = a : \frac{1}{2} a : a : \frac{2}{3} c$
Zweites „	$=$	$a : a : \infty a : \frac{4}{3} c$
Drittes „	$=$	$2 a : a : 2 a : \frac{16}{9} c = a : \frac{1}{2} a : a : \frac{8}{9} c$
Viertes „	$=$	$a : a : \infty a : \frac{16}{9} c$ u. s. w.

Diese Reihe geht vom Hauptdihexaeder aus, und wenn man vom ersten oder n ten stumpferen oder schärferen spricht, so meint man die Glieder dieser Reihe. Allein sie erschöpft nicht die Zahl der bei einer Substanz vorkommenden Dihexaeder. So findet sich häufig neben dem Hauptdihexaeder ein Dihexaeder zweiter Ordnung, welches in die Zone zweier abwechselnder Endkanten desselben fällt (die Rhombenfläche des Quarzes) und welches also $= 2 a : a : 2 a : 2 c = a : \frac{1}{2} a : a : c$ ist. Das erste stumpfere und schärfere ist hier erster Ordnung:

jenes $= \frac{2}{3} a : \frac{2}{3} a : \infty a : c = a : a : \infty a : \frac{3}{2} c$,

dieses $= \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a : \infty a : c = a : a : \infty a : 2 c$

(zweifach schärferes des Hauptdihexaeders). Auch andere Dihexaeder erster oder zweiter Ordnung können Ausgangspunkte besonderer Reihen bilden.

Bei den Dihexaedern zweiter Ordnung liegen die Axen a und s umgekehrt wie bei denen erster Ordnung. Die Seitenecken bezeichnen die Lage der s, die Mitte der Seitenkanten diejenige der a.

Ist ein Dihexaeder zweiter Ordnung $= 2 a : a : 2 a : \gamma c$, also das mittlere $a = 1$, so sind seine $s = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$.

Mithin sind die vollständigen Zeichen der beiden Arten von Dihexaedern:

Erster Ordnung: γc

$$a : a : \infty a$$
$$2s : s : 2s$$

oder γc

$$a : a : \infty a$$
$$\sqrt{3} : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} : \sqrt{3}.$$

Zweiter Ordnung: γc

$$2a : a : 2a$$
$$\tfrac{4}{3}s : \tfrac{4}{3}s$$

oder γc

$$2a : a : 2a$$
$$\tfrac{2}{3}\sqrt{3} : \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Die Combinationen der Dihexaeder zweiter Ordnung unter sich gleichen denen erster Ordnung.

Combination der Dihexaeder erster und zweiter Ordnung. — An einem Dihexaeder erster Ordnung bildet ein solches zweiter Ordnung:

a) Abstumpfungen der Endkanten, wenn letzteres das erste stumpfere ist.
b) Sechsflächige Zuspitzungen der Endecken, aufgesetzt auf die Endkanten, wenn es überhaupt ein stumpferes ist.
c) Zuschärfungen der Seitenecken, aufgesetzt auf die Endkanten, wenn es überhaupt ein schärferes ist. Sind in diesem Fall die Combinationskanten unter sich und den Diagonalen der Flächen parallel, so ist es das erste schärfere.

Ganz ebenso verhalten sich natürlich die Dihexaeder erster Ordnung an denen zweiter Ordnung.

Sechsseitige Prismen. Endfläche.

Durch Abstumpfung der Seitenkanten der Dihexaeder entstehen regelmässige sechsseitige Prismen, und zwar aus denen erster Ordnung das erste Prisma $= a : a : \infty a : \infty c$, aus denen zweiter Ordnung das zweite Prisma $2a : a : 2a : \infty c = a : \tfrac{1}{2}a : a : \infty c$. Beide Prismen werden durch die Endfläche $= c : \infty a : \infty a : \infty a$ zu geschlossenen Formen.

An dem einen stumpft das andere die Kanten ab.

In der Combination eines Dihexaeders und eines Prismas gleicher Ordnung bildet jenes eine sechsflächige Zuspitzung, aufgesetzt auf die Prismenflächen. Ist das Prisma durch die Endfläche geschlossen, so stumpft das Dihexaeder die Kanten zwischen Prisma und Endfläche ab. An dem herrschenden Dihexaeder bildet das Prisma Abstumpfungen der Seitenkanten. Sind beide verschiedener Ordnung, so bildet das Dihexaeder eine auf die Prismenkanten aufgesetzte Zuspitzung. Ist die Endfläche vorhanden, so stumpft das Dihexaeder die Ecken ab.

An dem herrschenden Dihexaeder bildet das Prisma Abstumpfungen der Seitenecken.

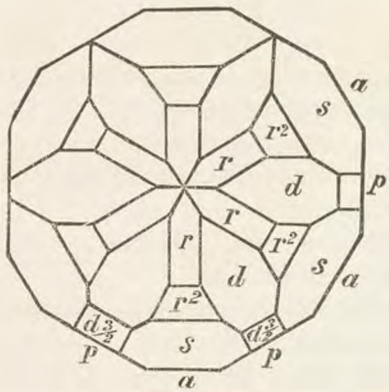


Fig. 102

Fig. 102 zeigt beide Prismen im Durchschnitt; $d =$ Hauptdihexaeder lässt die übrigen aus den Zonen erkennen (wozu die Projection sehr geeignet ist). Die Figur enthält also

$d = \ \ a : a : \infty a : c$ Hauptdihexaeder,
$r = 2a : a : \ 2a : c$ Erstes stumpferes,
$r^2 = 2a : a : \ 2a : \frac{4}{3}c$ Erstes schärferes,
$s = 2a : a : \ 2a : 2c$ Sogenannte Rhombenfläche.
$d\frac{3}{2} = \ \ a : a : \infty a : \frac{3}{2}c$ Erstes stumpferes von s,
$p = \ \ a : a : \infty a : \infty c$ Erstes Prisma,
$a = 2a : a : \ 2a : \infty c$ Zweites Prisma.

Sechskantner.

Eine Fläche, welche die vier Axen schneidet, die a jedoch in ungleicher Art, ist zwölf Mal vorhanden. Indem die Parallelen hinzutreten, entsteht der Sechskantner, dessen

Zeichen $a:na:ma:\gamma c$ oder $a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{m}a:\gamma c\,(a:\frac{3}{2}a:3\,a:3\,c$ $= a:\frac{1}{2}\,a:\frac{1}{3}\,a:c)$ ist (Fig. 103)

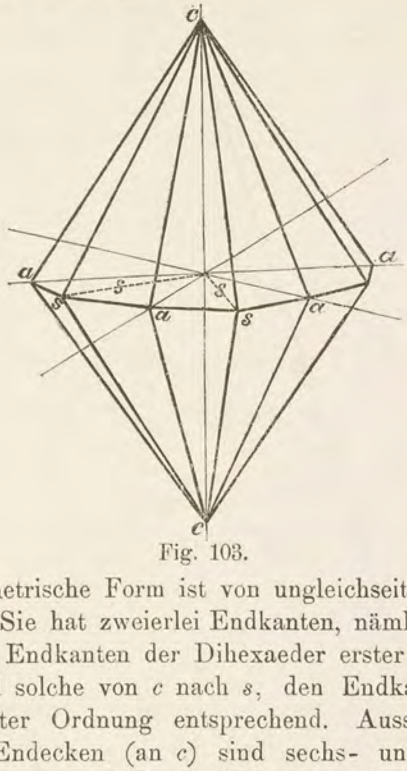


Fig. 103.

Die symmetrische Form ist von ungleichseitigen Dreiecken umschlossen. Sie hat zweierlei Endkanten, nämlich solche von c nach a, den Endkanten der Dihexaeder erster Ordnung entsprechend, und solche von c nach s, den Endkanten der Dihexaeder zweiter Ordnung entsprechend. Ausserdem Seitenkanten. Die Endecken (an c) sind sechs- und sechskantig. Die Seitenecken an a sind verschieden von denen an s, beide sind zwei- und zweikantig.

Wird das Zeichen eines Sechskantners so geschrieben, dass a das grösste a, $\frac{1}{n}a$ das kleinste a ist, so ist $\frac{1}{m}a$ oder das mittlere stets $\frac{1}{n-1}\,a$, d. h. das Zeichen ist $a:\frac{1}{n}a:\frac{1}{n-1}a:\gamma c$.

Ist also (Fig. 104) $on = \frac{1}{3}\,a$, so ist $om = \frac{1}{2}\,a$ und der Sechskantner ist $a:\frac{1}{3}\,a:\frac{1}{2}\,a:\gamma c$.

Wird $n = 2$, so ist $n - 1 = 1$, d. h. die Fläche gehört einem Dihexaeder zweiter Ordnung an.

Sehr wichtig ist der Werth der drei Zwischenaxen s, welche mit op, oq und or bezeichnet sind, während os das s des Dihexaeders $a : a : \infty a : \gamma c$ darstellt. Fig. 104.

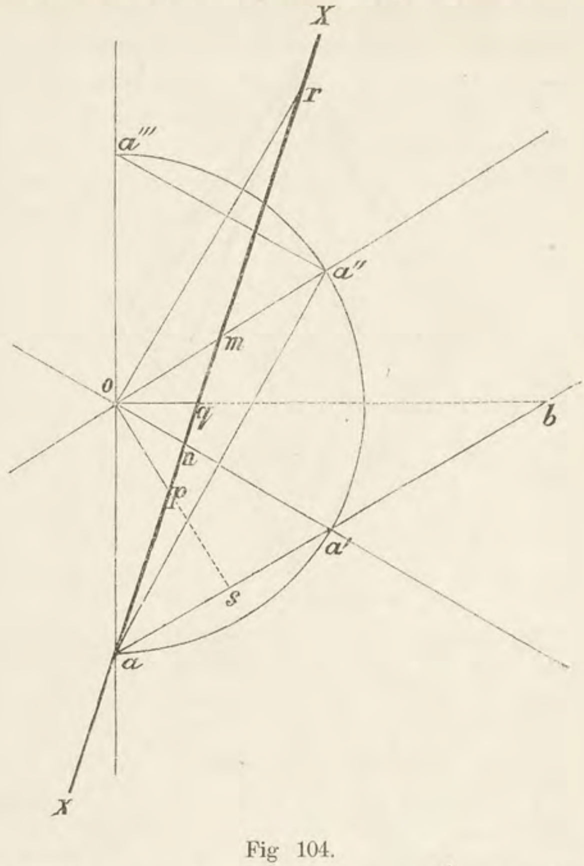


Fig 104.

Während $oa = a$ das grösste a, $on = \frac{1}{n} a$ das kleinste a, $om = \frac{1}{n-1} a$ das mittlere a ist, ist op das mittlere, oq das kleinste, or das grösste s.

Die Construction lehrt, dass

$$\begin{array}{ll} \text{das grösste } a = a, & \text{das grösste } s = \frac{2}{n-2} s, \\ \text{das mittlere } a = \frac{1}{n-1} a, & \text{das mittlere } s = \frac{2}{n+1} s, \\ \text{das kleinste } a = \frac{1}{n} a, & \text{das kleinste } s = \frac{2}{2n-1} s \end{array}$$

ist. Mithin liegt das kleinste s zwischen dem kleinsten und mittleren a, das mittlere s zwischen dem grössten und kleinsten a und das grösste s zwischen dem mittleren und grössten a, und es ist das vollständige Zeichen eines Sechskantners

$$\begin{array}{ccccc} & & \gamma c & & \\ a & : & \frac{1}{n} a & : & \frac{1}{n-1} a \\ \text{gr.} & & \text{kl.} & & \text{mittl.} \\ \frac{2}{n+1} s & : & \frac{2}{2n-1} s & : & \frac{2}{n-2} s, \\ \text{mittl.} & & \text{kl.} & & \text{gr.} \end{array}$$

und da $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$, so heisst dies

$$\begin{array}{c} \gamma c \\ a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a \\ \frac{1}{n+1} \sqrt{3} : \frac{1}{2n-1} \sqrt{3} : \frac{1}{n-2} \sqrt{3} \end{array}$$

Ist z. B. $n = 3$, $\gamma = 1$, so heisst der Sechskantner

$$\begin{array}{ccc} c & & c \\ a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a & = & a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a \\ \frac{1}{2} s : \frac{2}{5} s : 2 s & & \frac{1}{4} \sqrt{3} : \frac{1}{5} \sqrt{3} : \sqrt{3} \end{array}$$

Immer steht

das kleinste s senkrecht auf dem grössten a,
das mittlere s „ „ „ mittleren a,
das grösste s „ „ „ kleinsten a.

Die Sechskantner sind bisher nur in Combinationen beobachtet worden und die bei einer Substanz vorkommenden stehen zu deren Dihexaedern in krystallonomischer Beziehung.

Combination mit Dihexaedern. — Am häufigsten sind solche Sechskantner, welche mit dem Hauptdihexaeder c und ein a gemein haben, also in die Endkantenzone desselben fallen. Sie bilden entweder Zuschärfungen der Endkanten oder sie stumpfen die Kanten zwischen Dihexaeder und Prisma verschiedener Ordnung ab.

Sechskantige Prismen. — Durch Abstumpfung der Seitenkanten der Sechskantner entstehen sechskantige Prismen,

$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a : \infty c$, welche durch die Endfläche geschlossen werden.

Diese Prismen schärfen die Kanten der sechsseitigen Prismen zu oder stumpfen die Combinationskanten beider ab.

Durch Abstumpfung der beiderlei Endkanten eines Sechskantners entstehen zwei Dihexaeder.

Das Dihexaeder der Endkanten ac ist zweiter Ordnung. Sein mittleres a ist das kleinste a $\left(\text{d. h.} \frac{1}{n} a\right)$ des Sechskantners. Seine äusseren a sind also $= \frac{2}{n} a$.

Z. B. für $a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{3} a : c$ ist das Dihexaeder $= \frac{2}{3} a : \frac{1}{3} a : \frac{2}{3} a : c$ $= 2a : a : 2a : 3c$.

Das Dihexaeder der Endkanten sc ist erster Ordnung. Sein s ist das kleinste s des Sechskantners $= \frac{2}{2n-1} s = \frac{1}{2n-1} \sqrt{3}$, seine beiden a sind also $= \frac{2}{2n-1} a$.

Z. B. für $a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{3} a : c$ sind die $a = \frac{2}{5} a$,

also $\frac{2}{5} a : \frac{2}{5} a : \infty a : c = a : a : \infty a : \frac{5}{2} c$.

Zonen des sechsgliedrigen Systems.

1. Horizontalzone. Zonenaxe $= c$. Sämmtliche Prismen.

2. Vertikalzone des ersten Prismas (Seitenkantenzone der Dihexaeder erster Ordnung). Zonenaxe $= a$. Erstes Prisma, die Dihexaeder erster Ordnung, die Endfläche.

3. Vertikalzone des zweiten Prismas. (Seitenkantenzone der Dihexaeder zweiter Ordnung.) Zonenaxe $= s$. Zweites Prisma, die Dihexaeder zweiter Ordnung, die Endfläche.

Aehnlich ist die Vertikalzone der sechskantigen Prismen.

4. Endkantenzone des Hauptdihexaeders, überhaupt der Dihexaeder erster Ordnung.

In jene fallen zwei Flächen des Hauptdihexaeders, das erste stumpfere, die Sechskantner mit $a : c$ im Zeichen, das Dihexaeder zweiter Ordnung $a : \frac{1}{2} a : a : c$,[1] das erste Prisma u. s. w.

Zeichnung des sechsgliedrigen Axenkreuzes.

Zeichnung des sechsgliedrigen Axenkreuzes. — Die Stellung der drei Axen a wird entweder so gewählt, dass eine dem Beobachter parallel geht, gleich Axe b der früheren Systeme, oder so, dass eine gerade auf ihn gerichtet ist, gleich dem a der früheren.

Man zeichnet nun das Axenkreuz des zweigliedrigen Systems, so dass, wenn die erste Stellung gewählt wird, $a : b : c = \sqrt{3} : 1 : 1 = 1 : 0{,}6 : 0{,}6 = 1\frac{2}{3} : 1 : 1$ sei. Die Axenebene ab ist dann ein Rhombus mit Winkeln von 120° (an b) und 60° (an a). (Fig. 105). Jetzt nimmt man $\frac{a}{2}$, zieht Linie $a' \, a''$ parallel der Axe b (wodurch eine Fläche $a : 2c : \infty b$ sich ergiebt) und vom Mittelpunkt Linien nach a' und a''. So sind a', a'' und a (früher b) die Einheiten der Axen. Die Linien von ihnen nach c sind die Endkanten des Dihexaeders.

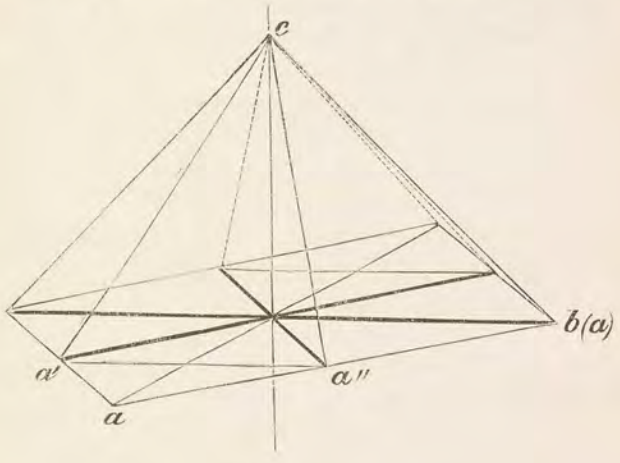


Fig. 105.

Bei Wahl der zweiten Stellung wird $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 1 = 0{,}6 : 1 : 0{,}6$ genommen, Axe b halbirt und die Parallele $a' \, a''$ gezogen. Dann sind die a, a', a'' die Einheiten der a.

An sich gleichgültig, ist die zweite Stellung in mancher Hinsicht vorzuziehen, schon weil sie gestattet, vordere rechts- und links liegende Flächen zu unterscheiden.

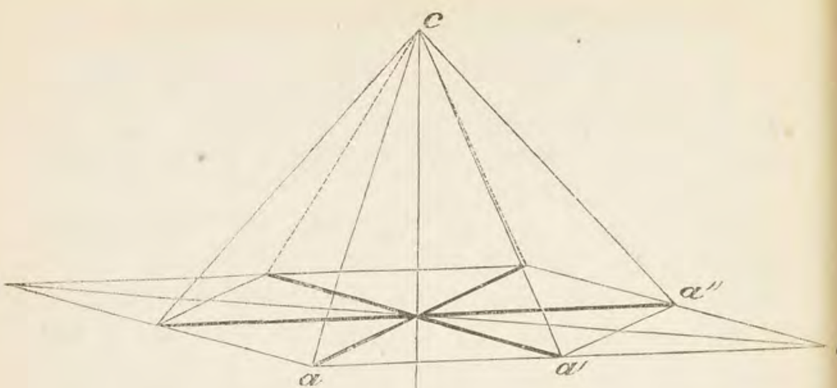


Fig. 106.

Berechnung.

Ist an einem Dihexaeder erster Ordnung $a : a : \infty a : \gamma c$
$2A$ der Endkantenwinkel,
$2C$ der Seitenkantenwinkel,
α die Neigung der Endkanten zur Axe c,
so ist

$$cos\ A = \frac{sin\ C}{2} \qquad \text{(I.)}$$

$$sin\ C = 2 \,.\, cos\ A \qquad \text{(II.)}$$

$$cos\ \alpha = cotg\ A \,.\, cotg\ 30^\circ \qquad \text{(III.)}$$

$$cotg\ A = \frac{cos\ \alpha}{cotg\ 30^\circ} \qquad \text{(IV.)}$$

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = a\ (c = 1) \\ cotg\ \alpha = c\ (a = 1) \end{array}\right\} \qquad \text{(V.)}$$

Für die Dihexaeder zweiter Ordnung $= 2a : a : 2a : \gamma c$ gelten dieselben Formeln nur ist hier

$$tg\ C = c\ (a = 1)$$

$$cotg\ C = a\ (c = 1)$$

α eines Dihexaeders erster Ordnung ist $= 90^\circ - C$ seines ersten stumpferen, und $90^\circ - C$ eines Dihexaeders erster Ordnung ist $= \alpha$ seines ersten schärferen.

Schwefelsaures Ceroxyddioxyd.

Die braunrothen Krystalle (Fig. 107) sind Combinationen des sechsseitigen Prismas p, der Dihexaeder d, d^3 und v und

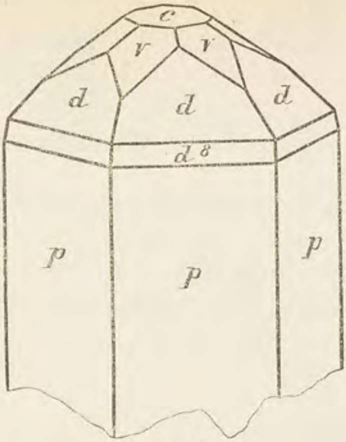


Fig. 107.

der Endfläche c. Wir wählen d zum Hauptdihexaeder; dann ist p das erste Prisma und v ein Dihexaeder zweiter Ordnung. Das Zeichen von v lässt sich finden, wenn man sieht, dass das linke d, beide v und das rechte d in eine Zone fallen. Der Zonenpunkt dieser beiden Flächen d liegt (in der Projection) so, dass zwei Sectionslinien, von ihm aus senkrecht gegen die beiden nächsten a gezogen, diese in $\frac{3}{2}$ treffen, also $3a : \frac{3}{2}a : 3a$ laufen. Das Dihexaeder d^8 lässt sich nur durch Messung bestimmen.

Wir haben also

$$d = a : a : \infty a : c \qquad p = a : a : \infty a : \infty c$$

$$d^8 = a : a : \infty a : 8c \qquad c = c : \infty a : \infty a : \infty a$$

$$v = 3a : \tfrac{3}{2}a : 3a : c$$

$$= 2a : a : 2a : \tfrac{2}{3}c$$

$$= a : \tfrac{1}{2}a : a : \tfrac{1}{3}c$$

Es sei gegeben $d : c = 110^\circ\ 15'$, so ist

für d $C = 180^\circ - 110^\circ\ 15' = 69^\circ\ 45'$

also $2C = 139^\circ\ 30'$ (Seitenkantenwinkel).

Hieraus folgt nach 1

$$\begin{array}{rl} lg\ sin\ 69^\circ\ 45 = & 9,9722914 \\ -\ \text{„}\quad 2 = & \underline{0,3010300} \\ & 9,6712614 \end{array}$$

$= lg\ cos\ A = 62^\circ\ 1'$

also $2A = 124^\circ\ 2'$ (Endkantenwinkel).

Ferner nach III

$$lg\ cotg\ 62^\circ\ 1' = 9{,}7253695$$
$$\text{„}\ \text{„}\ 30^\circ = \underline{10{,}2385606}$$
$$9{,}9639301$$
$$= lg\ cos\ \alpha = 23^\circ\ 2'\ \text{(Endkante : Axe } c\text{)}$$

und nach V

$$lg\ tg\ 23^\circ\ 2' = 9{,}6285540 = lg\ 0{,}42516 = a\ (c = 1)$$

oder

$$lg\ cotg\ 23^\circ\ 2' = 10{,}3717969 = lg\ 2{,}3538 = c\ (a = 1)$$

Berechnung von v. Die Neigung einer Fläche $3a : \frac{3}{2}a : 3a : c$ zur Hauptaxe ist der Winkel, dessen *sin* $\frac{3}{2}a$, dessen *cos* c ist.

Also $\frac{sin}{cos} = tg = \frac{3}{2}a\ (c = 1)$

$$\tfrac{3}{2}a = 0{,}63774;\ lg = 9{,}8046437 = lg\ tg\ 32^\circ\ 32'.$$

Daraus folgt $C = 90^\circ - 32^\circ\ 32' = 59^\circ\ 28'$

Also $2C = 114^\circ\ 56'$.

$$lg\ sin\ 57^\circ\ 28' = 9{,}9258681$$
$$-\ lg\ 2 = \underline{0{,}3010300}$$
$$9{,}6248481 = lg\ cos\ A = 65^\circ\ 4'$$
$$\text{also } 2A = 130^\circ\ 8'$$

Die Berechnung von d^8 und der Combinationswinkel ist leicht.

Im sechsgliedrigen System (in der holoedrischen Abtheilung) krystallisiren: Zinkoxyd, unterschwefelsaures Kali, unterschwefelsaurer Kalk, Kampher u. s. w.

B. Hälftflächner.

Die Hemiedrie hat im sechsgliedrigen System fast grössere Bedeutung als die Holoedrie. Auch hier muss in den Hälftflächnern die Symmetrie des Systems erhalten sein. Wir nennen die zwischen zwei a oben und unten liegenden Flächen ein Glied. Ein solches besteht beim Sechskantner aus vier, beim Dihexaeder erster Ordnung aus zwei Flächen, beim ersten Prisma aus einer Fläche. Ein Hälftflächner entsteht, indem aus jedem Glied die Hälfte der Flächen sich gleichartig verhält, bleibt oder verschwindet. Hiernach giebt es vier Gesetze der Hemiedrie im sechsgliedrigen System:

I. Die rhomboedrische Hemiedrie. Die abwechselnden oberen und unteren Flächenpaare der einzelnen Glieder verhalten sich gleich.

II. Die pyramidale Hemiedrie. Die rechten oder linken gleichnamigen Flächenpaare der einzelnen Glieder verhalten sich gleich.

III. Die trigonotype Hemiedrie. Gleich II, aber gleiches Verhalten trifft die ungleichnamigen Flächenpaare.

IV. Die trapezoedrische Hemiedrie. Die abwechselnden oberen und unteren Hälften der Paare (Einzelflächen) der einzelnen Glieder verhalten sich gleich.

Diese Gesetze treten blos am Sechskantner vollständig auf.

I. Die rhomboedrische Hemiedrie.

(Skalenoedrische Hemiedrie.)

Rhomboeder.

Ein Dihexaeder erster Ordnung verwandelt sich dadurch in ein Rhomboeder. Eine Fläche bleibt und die drei anstossenden verschwinden. Aus jedem Dihexaeder entsteht ein Rhomboeder und ein Gegenrhomboeder, welche als $a : a : \infty a : \gamma c$ und $a' : a' : \infty a : \gamma c$ oder als linkes (Fig. 108) und rechtes (Fig. 109) unterschieden werden, wobei $\frac{1}{2}$ im Zeichen fortbleiben kann.

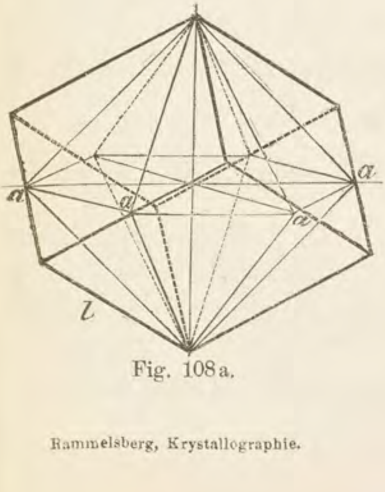


Fig. 108 a.

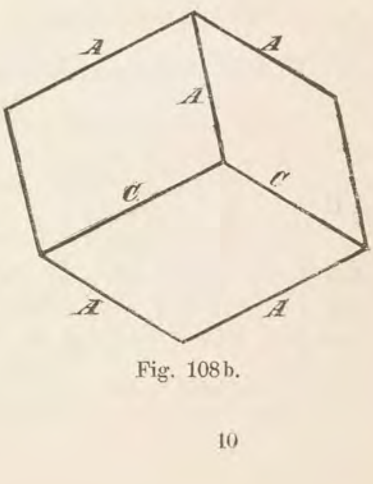


Fig. 108 b.

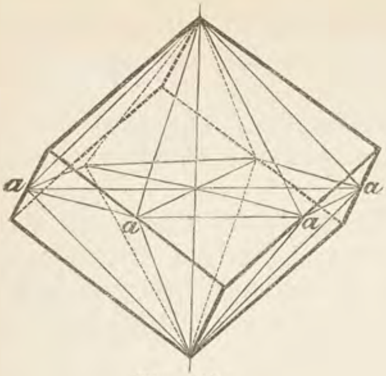


Fig. 109 a.

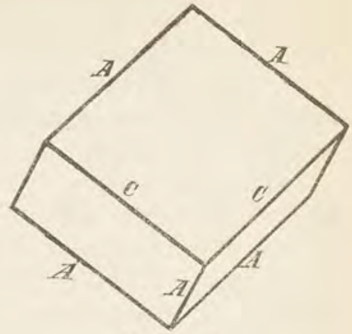


Fig. 109 b.

Ein Rhomboeder hat Endkanten A und Seitenkanten C, Endecken (an c) und Seitenecken. Die a treffen die Mitte der Seitenkanten. In idealer Ausbildung sind die Flächen Rhomben. Eine Ebene durch eine Endkante und die Hauptaxe, welche die gegenüberliegende Fläche in deren Diagonale schneidet, heisst ein Hauptschnitt, und solcher Hauptschnitte sind drei vorhanden. Die Ebene durch die Mitte der Seitenkanten ist ein regelmässiges Sechseck; die Ebenen durch die Seitenecken sind gleichseitige Dreiecke; sie theilen die Hauptaxe in drei gleiche Theile. Alle anderen, zur letzteren normalen Ebenen sind drei- und dreiwinklige Sechsecke.

Wie beim Dihexaeder ist für die Neigung der Fläche zur Hauptaxe $sin : cos = s : c$;

$$tg = \frac{s}{c} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{c}$$

Und für die Neigung der Endkanten zur Axe $sin : cos = 2s : c$;

$$tg = \frac{2s}{c} = \frac{\sqrt{3}}{c}$$

Die Endkante hat die zweifach stumpfere Neigung wie die Fläche.

Der Winkel zweier Flächen in den Endkanten wird halbirt durch eine Ebene aus c, $2s$ und der Endkante. Für die Neigung der Fläche gegen diese Ebene ist a der sin, und eine Normale aus dem Mittelpunkt auf die Endkante der cos; also

$$sin : cos = a : \frac{c \,.\, 2s}{\sqrt{c^2 + 4s^2}} = a\sqrt{c^2 + 4s^2} : c \,.\, 2s$$

Ist $a=1$, $2s=\sqrt{3}$, so ist

$$sin : cos = \sqrt{c^2+3} : c\sqrt{3}\;;\; tg = \frac{\sqrt{c^2+3}}{c\sqrt{3}}$$

Zeichnung der Rhomboeder. — Man verlängert die Seitenkanten zweier abwechselnder oberer Dihexaederflächen und zieht vom unteren c eine Linie nach dem Durchschnitt jener. Sodann zieht man vom oberen c eine Linie durch die Mitte der Seitenkante der zwischen jenen liegenden Dihexaederfläche und verlängert sie, bis sie die erste Hülfslinie trifft. Dieser Punkt wird dann die Seitenecke des Rhomboeders. Von ihm aus zieht man durch die beiden a die Seitenkanten und legt durch c Parallelen u. s. w.

Man unterscheidet stumpfe und scharfe Rhomboeder; bei jenen ist der Endkantenwinkel ein stumpfer, bei diesen ein spitzer. Der Würfel in rhomboedrischer Stellung bildet die Grenze zwischen ihnen.

Eine Substanz kann eine ganze Reihe von Rhomboedern besitzen, welche in demselben krystallonomischen Zusammenhang stehen, wie die Dihexaeder einer Substanz. Auch hier wird ein Hauptrhomboeder gewählt, wodurch sich die $n$fach stumpferen und schärferen ergeben.

Durch Abstumpfung der Endkanten eines gegebenen Rhomboeders entsteht das erste stumpfere desselben. Dasjenige Rhomboeder aber, dessen Endkanten durch das gegebene abgestumpft werden, heisst das erste schärfere desselben. Diese beiden Rhomboeder sind anderer Ordnung wie das gegebene, jedoch gleicher Ordnung wie das Gegenrhomboeder des letzteren.

Die Stellung des zum Hauptrhomboeder gewählten bestimmt die beiden Ordnungen. Alle Rhomboeder, welche mit dem Hauptrhomboeder gleiche Stellung haben (dieselben beiden a schneiden) heissen Rhomboeder erster Ordnung. Ihre Gegenrhomboeder sowohl, wie ihre ersten stumpferen und schärferen, sind Rhomboeder zweiter Ordnung, was durch Accentuiren ihrer a ausgedrückt wird.

Die Bezeichnung eines Rhomboeders als zweites, drittes, viertes etc. stumpferes oder schärferes und der Wechsel der Ordnung ist analog dem bei den Dihexaedern Gesagten.

Wir stellen hier den Anfang einer solchen Reihe zusammen, welche vom Hauptrhomboeder $a : a : \infty a : c$ ausgeht.

Erstes	stumpferes	$= a' : a' : \infty a : \frac{1}{2} c$
Zweites	"	$= a : a : \infty a : \frac{1}{4} c$
Drittes	"	$= a' : a' : \infty a : \frac{1}{8} c$
Viertes	"	$= a : a : \infty a : \frac{1}{16} c$

u. s. w.

Erstes	schärferes	$= a' : a' : \infty a : 2c$
Zweites	"	$= a : a : \infty a : 4c$
Drittes	"	$= a' : a' : \infty a : 8c$
Viertes	"	$= a : a : \infty a : 16c$

u. s. w.

Ausserdem aber können bei derselben Substanz Rhomboeder vorkommen, welche nicht in diese Hauptreihe fallen, und die ihre ersten etc. stumpferen und schärferen haben. Sind solche Rhomboeder zweiter Ordnung, so sind ihre ersten, dritten etc. stumpferen und schärferen erster Ordnung.

Combination der Rhomboeder. An einem Rhomboeder bildet ein stumpferes gleicher Ordnung dreiflächige Zuspitzungen der Endecken, ein schärferes schiefe Abstumpfungen der Seitenecken.

An einem Rhomboeder bildet ein anderes entgegengesetzter Ordnung entweder Abstumpfungen der Endkanten (das erste stumpfere), oder dreiflächige Zuspitzungen der Endecken oder schiefe Abstumpfungen der Seitenecken, in beiden Fällen auf die Endkanten aufgesetzt. Gehen in letzterem Fall die Combinationskanten unter sich und den Diagonalen der Flächen parallel, so ist es das erste schärfere.

Combination der Rhomboeder mit den Prismen und der Endfläche. Das erste Prisma stumpft an allen Rhomboedern die Seitenecken gerade ab. Am Prisma bildet ein Rhomboeder dreiflächige Zuspitzungen, aufgesetzt auf die abwechselnden Flächen.

Das zweite Prisma stumpft an allen Rhomboedern die Seitenkanten ab. Am Prisma bildet ein Rhomboeder dreiflächige Zuspitzungen, aufgesetzt auf die abwechselnden Kanten.

Die Endfläche stumpft an den Rhomboedern die Endecken ab. Bei ihrem Vorherrschen werden die Rhomboederflächen zu Dreiecken oder Vierecken, sie selbst wird zum Sechseck. (Das Ganze ist ein Oktaid.)

Ein Dihexaeder zweiter Ordnung erleidet durch das Gesetz der rhomboedrischen Hemiedrie keine Veränderung. Denn wenn man es durch die Diagonalen der Flächen gleichsam zu einem Sechskantner macht, so gehören zu einem Gliede die Hälften der Flächen. Die bleibenden und verschwindenden Theile eines Gliedes fallen also in eine Ebene.

Deshalb treten Rhomboeder mit Dihexaedern in Combination. Diese sind aber als rhomboedrische Hälftflächner zu betrachten.

Die Prismen bleiben gleichfalls unverändert.

Dreikantner.

Der Sechskantner verwandelt sich durch rhomboedrische Hemiedrie in zwei Dreikantner. Ein Flächenpaar zwischen zwei Axen a bleibt, die drei anstossenden Paare verschwinden. Fig. 110 zeigt die Entstehung eines solchen Hälftflächners, und

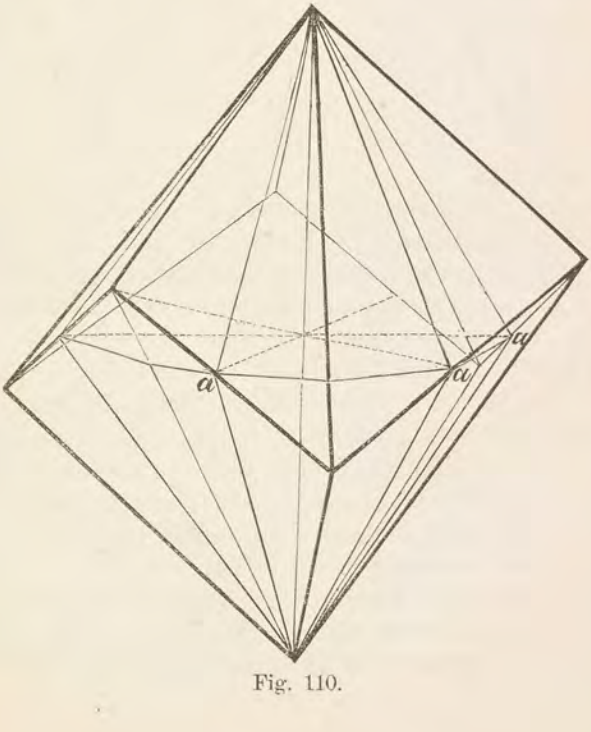


Fig. 110.

die Fig. 111a und b sind die beiden Gegenkörper, von denen wir *a* den linken, *b* den rechten nennen. Ihr Zeichen ist das der

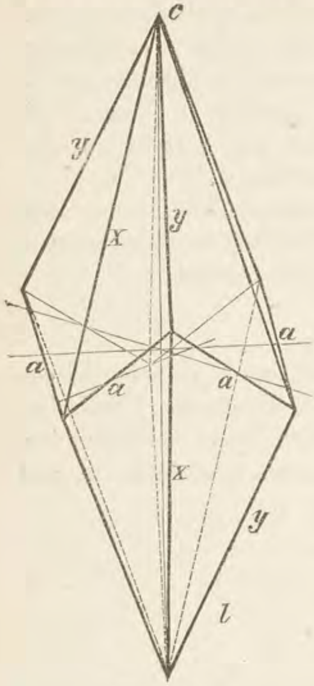


Fig. 111a.

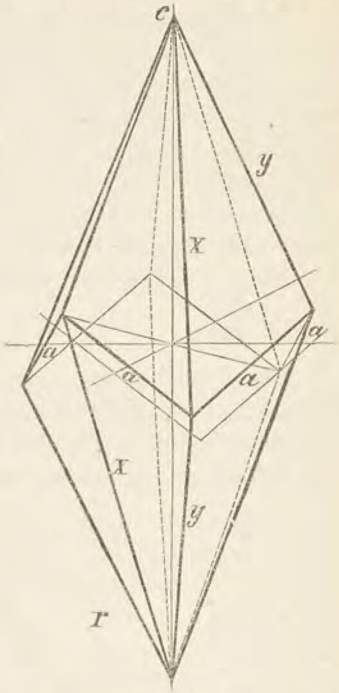


Fig. 111b.

Sechskantner. Sie haben abwechselnd längere stumpfere (X) und kürzere schärfere (Y) Endkanten und auf- und absteigende Seitenkanten (daher auch Skalenoeder). Die Endecken an *c* sind drei- und dreikantig, die Seitenecken zwei- ein- und einkantig. Die Axen *a* treffen die Mitte der letzteren.

Die Werthe der drei Zwischenaxen *s* sind beim Sechskantner erörtert; sie sind hier noch wichtiger, weil die Dreikantner selbständig vorkommen. Das kleinste *s* richtet sich gegen die stumpferen Endkanten und steht senkrecht gegen das grösste *a*. Das mittlere *s* richtet sich gegen die schärferen Endkanten und steht senkrecht gegen das mittlere *a*. Das grösste *s* steht senkrecht zum kleinsten *a*.

Beziehung eines Dreikantners zu den Rhomboedern. — Zu jedem Dreikantner gehören gleichsam drei Rhomboeder, welche in ihn eingeschlossen sind, und deren Kanten dieselbe

Lage haben, wie die dreierlei Kanten des Dreikantners, so dass man sagen könnte: ein Dreikantner entsteht durch Zuschärfung der Kanten dreier Rhomboeder. Diese heissen: 1. das Rhomboeder der Seitenkanten; 2. das Rhomboeder der schärferen und 3. das Rhomboeder der stumpferen Endkanten.

a) Das Rhomboeder der Seitenkanten. Es ist dasjenige, dessen Seitenkanten so liegen, wie die Seitenkanten des Dreikantners. Fig. 112. Um die Beziehungen beider Körper

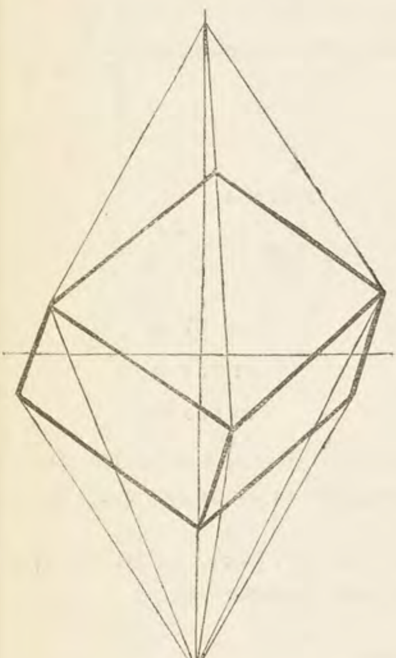


Fig. 112.

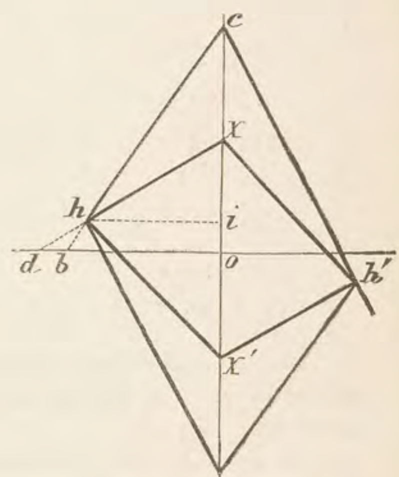


Fig. 113.

aufzufassen, ist in Fig. 113 ein Durchschnitt gezeichnet; $xhx'h'$ ist ein Hauptschnitt des Rhomboeders, xh ist eine Endkante; ox ist sein c. Da od die Ebene der Axen a und s bezeichnet, so ist $od = 2s$.

oc ist das c des Dreikantners, ch eine seiner schärferen Endkanten; also ist ob ein mittleres $s = \frac{2}{n+1}\ s$.

Zieht man die Linie hi parallel do, so ist $ox = 3 \,.\, oi$, also $oi : ix = 1 : 2$ und

$$oi : ic : oc = n - 2 : 2\,(n + 1) : 3n$$

$$oi = \frac{n-2}{3n} \,.\, oc$$

$$\text{also } ox = \frac{n-2}{n} \,.\, oc.$$

Also ist das c des eingeschlossenen Rhomboeders $= \frac{n-2}{n}$ mal dem c des Dreikantners.

Multiplicirt man das Zeichen eines Rhomboeders mit $\frac{n}{n-2}$, so erhält man

für

$$\begin{array}{ccc} \gamma c & & \gamma c \\ a : a : \infty a & & na : na : \infty a \\ 2s : s : 2s & & \frac{2n}{n-2}\,s : \frac{n}{n-2}\,s : \frac{2n}{n-2}\,s \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{d. h. } \frac{n-2}{n}\,\gamma c & \text{oder} & (n-2)\,\gamma c \\ a : a : \infty a & & a : a : \infty a \\ \frac{2}{n}\,s : \frac{1}{n}\,s : \frac{2}{n}\,s & & 2s : s : 2s \end{array}$$

Letzterer Ausdruck kommt also dem Rhomboeder der Seitenkanten eines Dreikantners zu, dessen Hauptaxe (γc) gegeben ist.

Es sei z. B. der Dreikantner $= a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : c$, so ist $n = 3$, $\gamma = 1$; dann ist das Rhomboeder der Seitenkanten

$$\begin{array}{c} c \\ a : a : \infty a \\ \sqrt{3} : \frac{1}{2}\sqrt{3} : \sqrt{3} \end{array}$$

d. h. es ist das Hauptrhomboeder. Seine Hauptaxe c ist $\frac{n-2}{n} \,.\, c$ $= \frac{1}{3}c$ von der des Dreikantners.

Da das grösste s eines Dreikantners $= \frac{2}{n-2}\,s$, so ist es gleich den beiden äusseren s des Rhomboeders der Seitenkanten.

Im vorliegenden Fall ist $\frac{2}{n-2}\,s = 2s$, d. h. = den beiden äusseren s des Hauptrhomboeders.

Ein Dreikantner hat natürlich nur ein einziges Rhomboeder der Seitenkanten, allein ein und dasselbe Rhomboeder kann das Seitenkantenrhomboeder für mehrere Dreikantner sein (d. h. mehrere Dreikantner können die Seitenkanten eines Rhomboeders zuschärfen). Aber alle müssen so beschaffen sein, dass $n - 2$ = dem c des Rhomboeders ist. Ist letzteres = 1, so muss $n - 2 = 1$ sein, oder überhaupt, wenn die Hauptaxe der Dreikantner $= \gamma c$ ist, muss $n - 2 = \gamma c$, oder $\gamma = \frac{1}{n - 2}$ sein.

b) Das Rhomboeder der schärferen Endkanten. — Legt man durch die schärferen Endkanten eines Dreikantners Flächen, so schreibt man ein Rhomboeder ein, dessen Endkanten so laufen wie jene. Fig. 114.

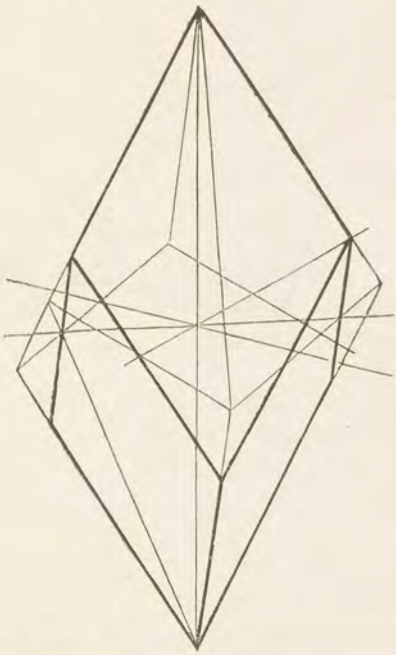


Fig. 114.

Die beiden äusseren s eines solchen Rhomboeders müssen gleich dem mittleren s des Dreikantners, d. h. $= \frac{2}{n + 1} s$ sein.

Es muss also das Rhomboeder sein

$$\begin{array}{ccc} \gamma c & & (n+1)\,\gamma c \\ a : a : \infty a & = & a : a : \infty a \\ \frac{2}{n+1}s : \frac{1}{n+1}s : \frac{2}{n+1}s & & 2s : s : 2s \end{array}$$

In der Fig. 115, welche die Projection des Dreikantners $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : c$ ist, ist oi ein mittleres s, das Dreieck $i\ i_{,}\ i_{,,}$ bezeichnet das Rhomboeder der schärferen Endkanten.

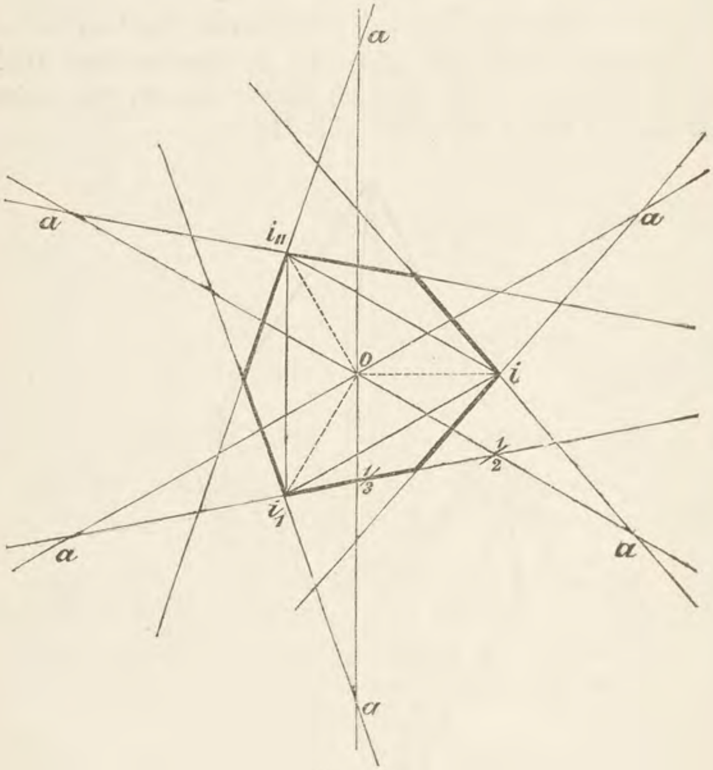


Fig. 115.

Die Hauptaxe c des Rhomboeders der schärferen Endkanten ist also die $n+1$ fache vom c des Dreikantners.

Ist z. B. der Dreikantner $= a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : c$, d. h. $n = 3$, $\gamma = 1$, so ist c des Rhomboeders $= 3 + 1 = 4$; es ist also $a : a : \infty a : 4c$, das zweite schärfere, und die Endkanten dieses Rhomboeders werden von jenem Dreikantner zugeschärft.

c) Das Rhomboeder der stumpferen Endkanten. — Legt man durch die stumpferen Endkanten Flächen, so trägt man ein Rhomboeder ein, dessen Endkanten die Lage jener haben. Fig. 116.

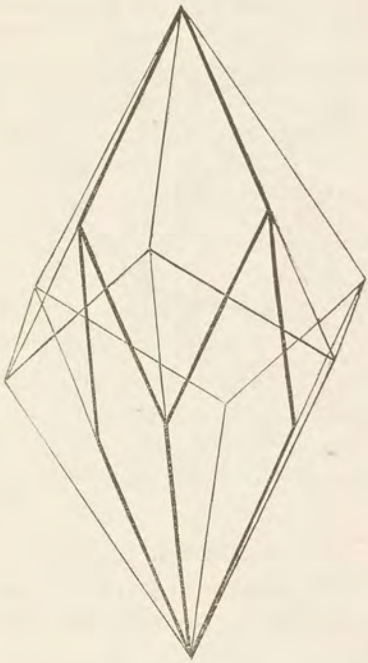


Fig. 116.

Aus der Fig. 117 ersieht man, dass die beiden äusseren s eines solchen Rhomboeders gleich dem kleinsten s des Dreikantners sind, d. h. $= oi$. Da nun dieses $= \frac{2}{2n-1} s$ ist, so muss das Rhomboeder

$$\begin{array}{ccc} \gamma c & & (2n-1)\,\gamma c \\ a' : a' : \infty a & \text{oder} & a' : a' : \infty a \\ \frac{2}{2n-1} s : \frac{1}{2n-1} s : \frac{2}{2n-1} s & & 2s : s : 2s \end{array}$$

sein. Die Hauptaxe des Rhomboeders der stumpferen Endkanten ist also die $(2n-1)$ fache von der des Dreikantners.

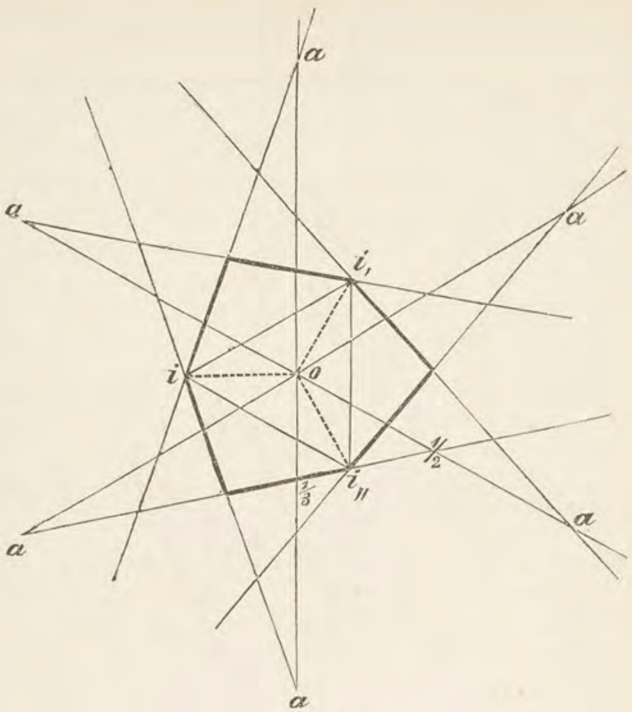


Fig 117.

Ist z. B. der Dreikantner $= a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{3} a : c$, so ist $2n - 1 = 5$, das Rhomboeder also $a' : a' : \infty a : 5c$, das fünffach schärfere (zweiter Ordnung).

Das Rhomboeder der Seitenkanten und das der schärferen Endkanten sind gleicher Ordnung, das der stumpferen ist anderer Ordnung. In den Zeichnungen ist ein rechter Dreikantner gewählt, entsprechend den Rhomboedern erster Ordnung. Hätten wir den linken Dreikantner gewählt (Fig. 111a), so würden die beiden ersten Rhomboeder zweiter Ordnung, das letztere erster Ordnung gewesen sein.

Da $(n - 2) + (n + 1) = 2n - 1$, so ist bei gleichen a das c des Rhomboeders der stumpferen Endkanten gleich der Summe der c der beiden anderen.

Combination von Dreikantnern und Rhomboedern. — An einem Romboeder bilden die Dreikantner entweder Zuschärfungen der Seitenkanten, oder solche der Endkanten.

Die ersteren liegen zwischen dem Rhomboeder und dem zweiten Prisma, die letzteren zwischen dem Rhomboeder und seinem ersten stumpferen.

An einem Dreikantner bilden die Rhomboeder entweder dreiflächige Zuspitzungen der Endecken, aufgesetzt auf die stumpferen Kanten. Sind die Combinationskanten parallel den Seitenkanten des Dreikantners, so ist das Rhomboeder das der Seitenkanten. Oder sie bilden schiefe Abstumpfungen der Seitenecken. Sind die Combinationskanten entweder den schärferen oder den stumpferen Endkanten des Dreikantners parallel, so ist das Rhomboeder dasjenige der einen oder der anderen.

Erscheint der Dreikantner an dem Rhomboeder seiner stumpferen Endkanten, so ist die Kante der beiden Zuschärfungsflächen stumpfer als die Kante über der Rhomboederfläche. Das Umgekehrte findet statt, wenn das Rhomboeder das der schärferen Endkanten ist.

Zu jedem Dreikantner gehören ferner gleichsam zwei Rhomboeder, welche die einen oder anderen Endkanten desselben abstumpfen. Die Flächen dieser Rhomboeder haben also dieselbe Neigung zur Hauptaxe, wie die betreffenden Endkanten des Dreikantners.

Nun ist für die Neigung der schärferen Endkanten zur Axe $sin : cos = \frac{2}{n+1} s : \gamma c$. Ist in Fig. 118 der rechte Dreikantner $a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : c$ gegeben, so ist $oy = \frac{2}{n+1} s$. Die Fläche des die schärferen Endkanten abstumpfenden Rhomboeders v schneidet alse die a in $\frac{2}{n+1} a$. Sein Zeichen ist ganz allgemein

$$\frac{2}{n+1} a : \frac{\gamma c}{\frac{2}{n+1} a : \infty a} \text{ oder } \frac{\frac{2}{n+1} \gamma c}{a : a : \infty a}.$$

Ist $n = 3$, wie in der Figur, so ist das Rhomboeder $= \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a : \infty a : c = a : a : \infty a : 2c$. Dieses Rhomboeder ist immer gleicher Ordnung mit dem Rhomboeder der stumpferen Endkanten.

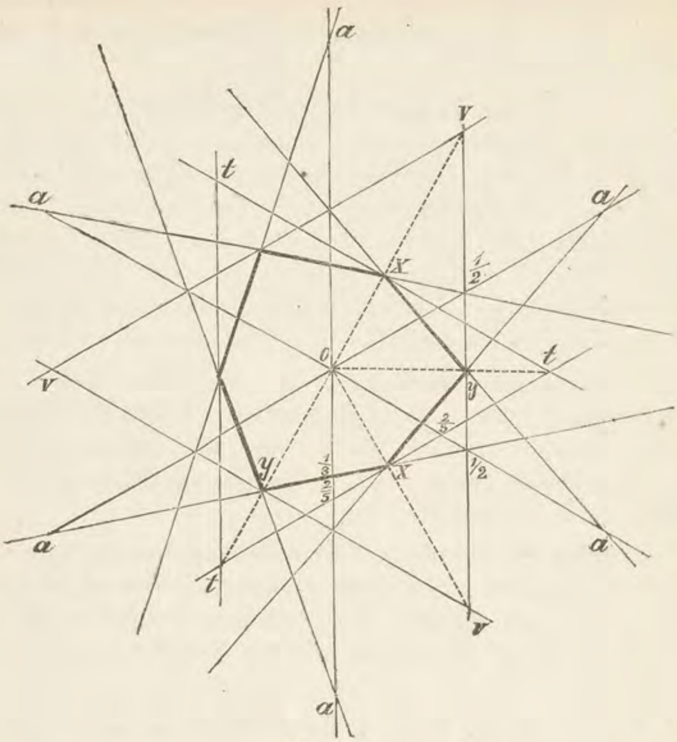


Fig. 118.

Für die Neigung der stumpferen Endkanten zur Axe st $sin : cos = ox : \gamma c = \frac{2}{2n-1} s : \gamma c$. Also ist das Rhomboeder $t =$

$$\frac{2}{2n-1} a : \overset{\gamma c}{\frac{2}{2n-1}} a : \infty a \text{ oder } \frac{\frac{2}{2n-1} c}{a : a : \infty a}$$

Ist $n = 3$, so ist es $\frac{2}{5} a : \frac{2}{5} a : \infty a : c = a : a : \infty a : \frac{5}{2} c$. Ein solches Rhomboeder ist gleicher Ordnung wie das der schärferen Endkanten (und der Seitenkanten).

Combinationen der Dreikantner unter sich. — Haben sie ein und dasselbe Rhomboeder der Seitenkanten, so bildet das eine Zuschärfungen der Seitenkanten des anderen. Haben die einen oder anderen Endkanten gleiche Lage, so erfolgt die Zuschärfung an diesen. Haben Dr. gleiche Werthe in den a, so liegen die Combinationskanten in einer Ebene. Oder das eine bildet sechsflächige Zuspitzungen der Endecken des anderen u. s. w.

Zonen der rhomboedrischen Hälftflächner.

1. Horizontalzone. Die beiden Prismen.
2. Vertikalzone des ersten Prismas. Zonenaxe $= a$. Das erse Prisma, die Rhomboeder erster Ordnung, die Endfläche, die Rhomboeder zweiter Ordnung.
3. Vertikalzone des zweiten Prismas. Zonenaxe $= a : \frac{1}{2}a : a$. Das zweite Prisma, Dihexaeder zweiter Ordnung, Endfläche.
4. Kantenzone der Rhomboeder. Die K. des Hauptrhomboeders enthält dieses selbst, das erste stumpfere, die Dreikantner zwischen beiden, das zweite Prisma und die Dreikantner zwischen ihm und dem Rhomboeder.

Die Diagonalzone eines Rhomboeders ist die Kantenzone seines ersten schärferen, und die Kantenzone eines Rhomboeders ist die Diagonalzone seines ersten stumpferen.

II. Die pyramidale Hemiedrie.

Gleiches Verhalten trifft die gleichnamigen rechten oder linken Flächenpaare der einzelnen Glieder.

In Fig. 119 besteht jedes Glied des Sechskantners aus

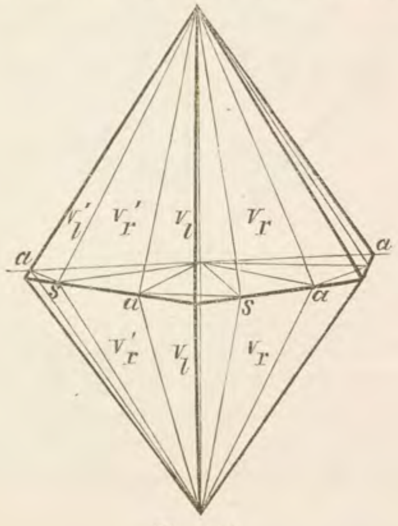


Fig. 119.

zwei Flächen v_r und zwei Flächen v_l. Bleiben die rechten Paare v_r und verschwinden die v_l, so dehnen sich die abwechselnden Seitenkanten aus, die Basis wird ein regelmässiges Sechseck, d. h. es entsteht ein Dihexaeder dritter Ordnung $a : \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a : c$.

Ebenso reducirt sich ein sechskantiges Prisma zu einem sechsseitigen Prisma dritter Ordnung.

Das Gesetz bewirkt an den Dihexaedern und Prismen erster und zweiter Ordnung keine äussere Veränderung.

III. Die trigonotype Hemiedrie.

Gleiches Verhalten trifft die ungleichnamigen Flächenpaare der einzelnen Glieder.

Wenn Fig. 120 die Basis des Sechskantners darstellt, so

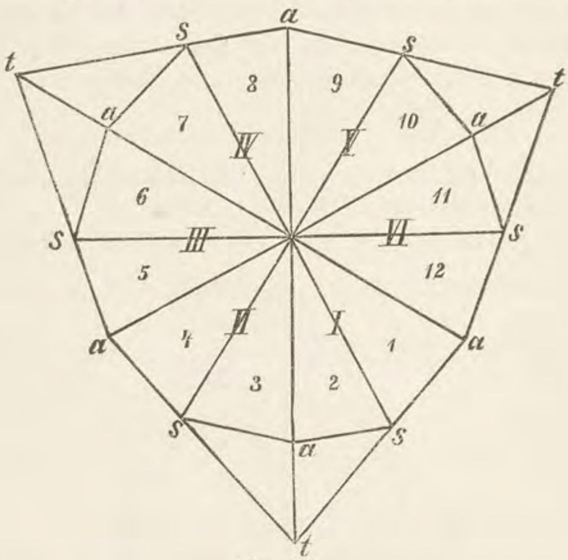


Fig. 120.

sind die Flächen 1, 3, 5, 7, 9, 11, die oberen gleich wie die in den Seitenkanten anstossenden unteren, die rechten Flächenpaare der Glieder, während 2, 4, 6, 8, 10, 12 die linken sind.

Bleiben nun im Gliede I die rechten Flächen 1 oben und unten, so bleiben im Gliede II die linken Flächen 4, in III die rechten 5, in IV die linken 8, in V die rechten 9 und in VI die linken 12. Dadurch entsteht eine ditrigonale Pyramide, deren Basis ein drei- und dreiwinkliges Sechseck ist, und deren Endkanten theils die drei abwechselnden E. $a:c$ des Sechskantners, theils drei neue $t:c$ sind.

Die Basis ist zugleich der Durchschnitt ditrigonaler Prismen, welche aus sechskantigen hervorgehen.

Ein Dihexaeder zweiter Ordnung verwandelt sich nach diesem Gesetz in ein Ditetraeder (Trigonoeder) wie Fig. 121

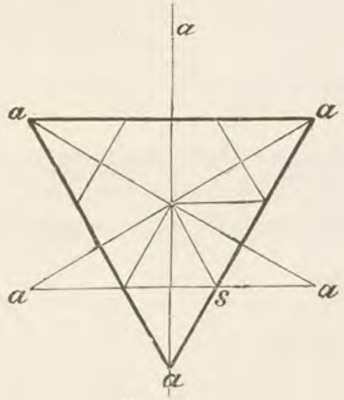


Fig. 121

zeigt. Es bleiben die abwechselnden Flächen und die in den Seitenkanten anstossenden. Seine Basis ist der Durchschnitt des trigonalen Prismas, in welches sich das zweite Prisma verwandelt.

Die Dihexaeder erster Ordnung und das erste Prisma können durch das Gesetz keine Veränderung erleiden.

IV. Die trapezoedrische Hemiedrie.

Die abwechselnden oberen und unteren Hälften (die Einzelflächen) der einzelnen Glieder verhalten sich gleich. Hier sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden.

A. Die Glieder verhalten sich bezüglich der gleichnamigen Flächen gleich. Die bleibenden oberen Flächen sind lauter rechte, die unteren lauter linke, oder umgekehrt.

Wenn die sämmtlichen Glieder eines Sechskantners, die aus vier um den Endpunkt von s gelagerten Flächen, zwei oberen und zwei unteren, bestehen, aufgezeichnet sind:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

so bleiben dem Gesetz gemäss entweder die linken oberen und die rechten unteren

1		3		5		7		9		11	
	14		16		18		20		22		24

oder die rechten oberen und die linken unteren

	2		4		6		8		10		12
13		15		17		19		21		23	

Der Sechskantner zerfällt hierdurch in zwei hexagonale Trapezoeder, die dadurch entstehen, dass an ihm eine Fläche bleibt und die drei anstossenden verschwinden. Fig. 122a u. b.

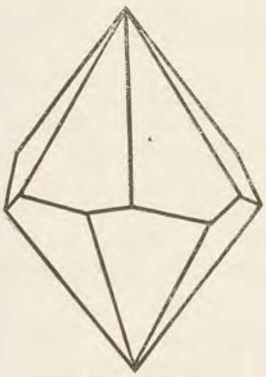


Fig. 122a.

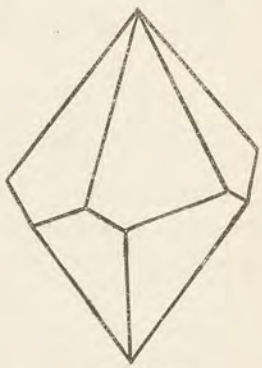


Fig. 122b.

Ihre Flächen sind gleichschenklige Trapezoide; sie haben gleiche Endkanten und längere und kürzere auf- und absteigende Seitenkanten. Ferner Endecken und ein- ein- und einkantige Seitenecken. Die Axen a treffen die Mitte der einen, die s die der anderen Seitenkanten. Beide Hälftflächner sind enantiomorph, a ist ein linker, b ein rechter.

B. Die Glieder verhalten sich bezüglich der gleichnamigen Flächen ungleich. Die bleibenden Flächen sind in den ab-

wechselnden Gliedern lauter obere rechte und lauter untere linke, oder umgekehrt. Es bleiben also

1			4	5			8	9			12
	14	15			18	19			22	23	

oder

	2	3			6	7			10	11	
13			16	17			20	21			24

Wenn ein Sechskantner nach diesem Gesetz hemiedrisch wird, bleiben zwei Flächen an a (oder zwischen zwei s), und die anstossenden Flächenpaare verschwinden. Hierdurch entsteht ein *trapezoedrischer Dreikantner*, welcher alle Eigenschaften eines durch rhomboedrische Hemiedrie entstehenden hat.

Aus einem Dihexaeder zweiter Ordnung gehen nach gleichem Gesetz zwei *trapezoedrische Rhomboeder* hervor, welche sich durch ihre Stellung von den gewöhnlichen unterscheiden.

Die übrigen Formen ändern sich nicht.

Wenn man die zwischen zwei s (oder die an a) liegenden Flächen als ein *Glied* betrachtet und die Gesetze der Hemiedrie auf diese Glieder verwendet, so gelangt man zu denselben Hälftflächnern, jedoch nach einem anderen Gesetz. So z. B. entstehen dann die gewöhnlichen Dreikantner nach IV. B.

C. Viertelflächner.

In keinem System sind die Viertelflächner von grösserer Bedeutung als im sechsgliedrigen.

Wenn an einem Sechskantner aus jedem Glied *eine* Fläche, eine obere oder untere bleibt, so wird aus ihm ein Viertelflächner. Da dies aber in zweierlei Art geschehen kann, so giebt es zwei Arten sechsgliedriger Tetartoedrie, eine rhomboedrische und eine trapezoedrische.

A. *Die rhomboedrische Tetartoedrie.* — Die bleibenden Flächen des Nachbargliedes sind *gleichnamige* (rechte oder linke.) Es bleiben also

1				5				9			
		15				19				23	

und

		3				7				11	
13				17				21			

oder es bleiben

	2				6				10		
			16				20				24

und

			4				8				12
	14				18				22		

Diese vier Viertelflächner entstehen demnach aus einem Sechskantner, indem eine Fläche bleibt und drei rechts, links und unten anstossende Flächen verschwinden. Es sind vier tetartoedrische Rhomboeder $= \frac{1}{4}\ (a : \frac{1}{n}\ a : \frac{1}{n-1} a : \gamma c)$.

Diese Körper sind zugleich die rhomboedrischen Hälftflächner der Dihexaeder dritter Ordnung, ferner die pyramidalen H. der gewöhnlichen (rhomboedrischen) Dreikantner und und auch die H. der trapezoedrischen Dreikantner.

B. Die bleibenden Flächen des Nachbargliedes sind ungleichnamige. Dies ist die trapezoedrische Tetartoedrie. Es bleiben also in den Nachbargliedern eine obere linke und eine untere rechte Fläche oder umgekehrt. Mithin bleiben beim Sechskantner

I.

1				5				9			
			16				20				24

und

II.

		3				7				11	
	14				18				22		

sowie

III.

	2				6				10		
		15				19				23	

und

IV.

			4				8				12
13				17				21			

Es bleibt mithin eine Fläche und es verschwinden drei Flächen rechts, drei links und drei unten der Art, dass die bleibende Fläche über der äussersten dieser unteren liegt.

So liefert der Sechskantner vier **trigonale Trapezoeder** Fig. 123 *a* u. *b*, deren Flächen gleichschenklige Trapezoide

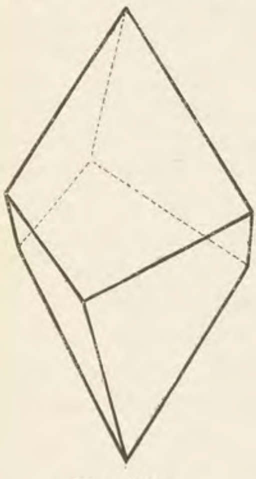


Fig. 123a.

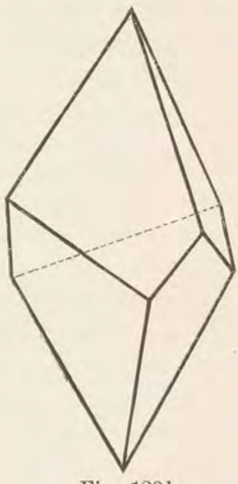


Fig. 123b.

bilden. Sie besitzen sechs Endkanten und sechs auf- und absteigende, abwechselnd längere und kürzere Seitenkanten. Die Endecken sind dreikantig, die Seitenecken ein- ein- und einkantig.

Wir nennen I und II linke, III und IV rechte (Fig. 121a ein linkes, *b* ein rechtes Tr.). Während I und II congruent und nur durch ihre Stellung etwas verschieden sind, und dasselbe für III und IV gilt, sind I und III enantiomorph und ebenso II und IV. Zur speciellen Unterscheidung pflegt man I gegen II, und III gegen IV als positive und negative Formen zu bezeichnen.

Diese wichtigen Viertelflächner sind zugleich die Hälftflächner der gewöhnlichen (rhomboedrischen) Dreikantner, aus denen sie entstehen, indem die abwechselnden Flächen und die in den Seitenkanten anstossenden bleiben.

Auch die trapezoedrischen Dreikantner zerfallen in zwei ähnliche Trapezoeder, nur setzt sich jeder aus den oberen Flächen von I und den unteren von II oder umgekehrt, oder aus den entsprechenden von III und IV zusammen.

Berechnung des Rhomboeders.

Ist an einem Rhomboeder

$2A$ der Endkantenwinkel,

$\left.\begin{array}{l}\alpha \text{ die Neigung der Endkanten} \\ \beta \text{ die der Flächen}\end{array}\right\}$ zur Hauptaxe

so ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \cos A = \cos \beta \, . \, \sin 60^\circ \\ \text{II.} & \operatorname{cotg} A = \cos \alpha \, . \, \operatorname{tg} 60^\circ \\ \text{III.} & \cos \alpha = \operatorname{cotg} A \, . \, \operatorname{cotg} 60^\circ \\ \text{IV.} & \cos \beta = \dfrac{\cos A}{\sin 60^\circ} \\ \text{V.} & \operatorname{tg} \beta = s; \quad \dfrac{s}{\sin 60^\circ} = a \ (c = 1). \end{array}$$

Beispiele.

Schwefelsaures Lithion-Natron.

$$\left\{\begin{array}{c} n\,(Na^2\,SO^4 + 3\,aq) \\ Li^2\,SO^4 + 3\,aq \end{array}\right\}$$

$(n = 2$ und $3)$.

In den flächenreichen Combinationen, Fig. 124 u. 125, finden sich drei Rhomboeder r, $4r$ und $2r'$, zwei Dihexaeder zweiter Ordnung x und y, die Endfläche c und das zweite Prisma a.

Geht man von r als Hauptrhomboeder aus, so ist $2r'$ das erste schärfere. Das Dihexaeder x liegt in der Diagonalzone von $2r'$, welches die abwechselnden Endkanten abstumpft, woraus sein Zeichen folgt. (Man projicire die Flächen.) Das

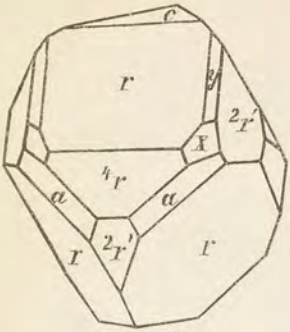


Fig. 124.

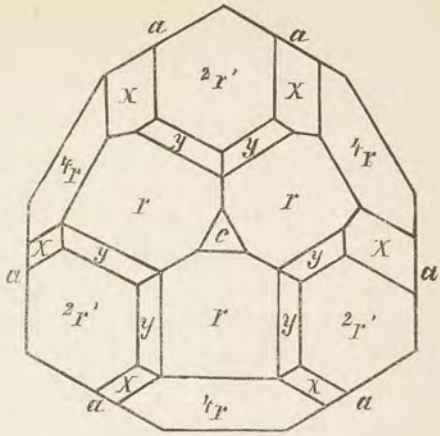


Fig. 125.

Dihexaeder y liegt in der Diagonalzone von r und fällt zugleich mit a und x in eine Zone. Die Flächen $4\,r$ gehören einem Rhomboeder erster Ordnung an und da seine Endkanten durch $2\,r'$ abgestumpft werden, so ist es das zweite schärfere.

Wir haben also

$$
\begin{aligned}
r &= a : a : \infty a : c \\
{}^4r &= a : a : \infty a : 4c, \\
{}^2r' &= a' : a' : \infty a : 2c, \\
x &= 2a : a : 2a : \tfrac{8}{3}c, \\
y &= 2a : a : 2a : \tfrac{4}{3}c, \\
a &= 2a : a : 2a : \infty c, \\
c &= c : \infty a : \infty a : \infty a.
\end{aligned}
$$

Gemessen wurde der Winkel $r : c = 133^\circ\ 50'$.

Hieraus folgt die Neigung der Fläche zur Axe $= \beta = 133^\circ\ 50' - 90^\circ = 43^\circ\ 50'$. Mithin ist nach I (S. 166.)

$$
\begin{aligned}
lg\ cos\ 43^\circ\ 50' &= 9{,}8581505 \\
lg\ sin\ 60^\circ\ \ 0' &= \underline{9{,}9375306} \\
& \ 9{,}7956811 = lg\ cos\ A = 51^\circ\ 20'.
\end{aligned}
$$

Also der Endkantenwinkel des Hauptrhomboeders $r = 2\,A = 102^\circ\ 40'$.

Ferner ist nach V

$$
\begin{aligned}
lg\ tg\ \ 43^\circ\ 50' &= 9{,}9823087 \\
-\ lg\ sin\ 60^\circ &= \underline{9{,}9375306} \\
& \ 10{,}0447781 = lg\ a = 1{,}1086\ (c = 1)
\end{aligned}
$$

oder $c = 0{,}902$ $(a = 1)$.

Berechnung des ersten schärferen Rhomboeders $2r' = a' : a' : \infty a : 2c$. Seine Endkanten haben dieselbe Neigung gegen c, wie die Flächen von r. Es ist also $\alpha = 43° 50'$.

Und nach IV

$$\begin{array}{ll} lg\ cos\ 43° 50' = & 9{,}8581505 \\ lg\ tg\ \ 60° \quad = & \underline{10{,}2385606} \\ & \overline{10{,}0967111} = lg\ cotg\ A = 38° 40'. \end{array}$$

Also $2A = 77° 20'$.

Das zweite oder vierfach schärfere Rhomboeder $4r = a : a : \infty a : 4c$. — Da $a : 4c = \frac{1}{4}a : c = 0{,}27715 : 1$, so ist

$$\begin{array}{ll} lg\ 0{,}27715 = & 9{,}4427149 \\ lg\ sin\ 60° \ = & \underline{9{,}9375306} \\ & \overline{9{,}3802455} = lg\ s = lg\ tg\ \beta = 13° 30' \end{array}$$

Nun ist nach IV $cos\ A = cos\ \beta\ .\ sin\ 60°$.

Also

$$\begin{array}{ll} lg\ cos\ 13° 30' = & 9{,}9878315 \\ -\ sin\ 60° \quad = & \underline{9{,}9375306} \\ & \overline{9{,}9253621} = lg\ cos\ A = 32° 38' \end{array}$$

$2A = 65° 16'$

Die beiden Dihexaeder zweiter Ordnung x und y sind scheinbare Vollflächner, weil das Gesetz der rhomboedrischen Hemiedrie sie nicht ändert. (S. 149.)

$y = 2a : a : 2a : \frac{4}{3}c$. — Für die Neigung seiner Flächen zur Hauptaxe ist $sin : cos = a : \frac{4}{3}c = \frac{3}{4}a : c = 0{,}83145 : 1$, also nach S. 142

$$lg\ 0{,}83145 = 9{,}9198361 = lg\ cotg\ 50° 15'$$

Mithin $2C = 100° 30'$.

Ferner nach I (S. 142)

$$\begin{array}{ll} lg\ sin\ 50° 15' = & 9{,}8858370 \\ -\ lg\ 2 \quad = & \underline{0{,}3010300} \\ & \overline{9{,}5848070} = lg\ cos\ A = 67° 23' \end{array}$$

$2A = 134° 46'$

Da $x = 2a : a : 2a : \frac{8}{3}c$, so ist hier für jene Neigung $sin : cos = \frac{3}{8}a : c = 0{,}41577 : 1$

$lg\ 0{,}41577 = 9{,}6188531 = lg\ cotg\ C = 67° 25'$

$2C = 134° 50'$.

und

$$
\begin{aligned}
lg\ sin\ 67^\circ\ 25' &= 9{,}9653532 \\
-\ lg\ 2 \quad &= \underline{0{,}3010300} \\
& \quad 9{,}6643232 = lg\ cos\ A = 62^\circ\ 30'
\end{aligned}
$$

$2\ A = 125^\circ\ \ 0'$.

Die wichtigsten Combinationswinkel lassen sich nun leicht berechnen.

Unterschwefelsaures Blei.

$Pb\, S^2\, O^6 + 4\, aq.$

Wenn die an diesem Salze beobachteten Formen gleichzeitig und vollflächig auftreten, würde ein Krystall das Bild von Fig. 126 darbieten.

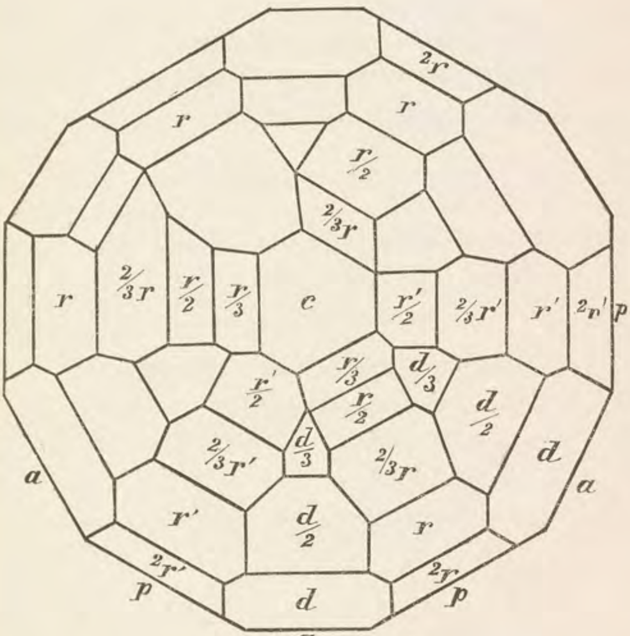


Fig. 126.

r und r' sind die beiden Gegenrhomboeder, von denen r als Hauptrhomboeder gewählt ist. Dann ist p das erste, a das zweite Prisma; c ist die Endfläche. Zwischen r und c, und r'

und c sehen wir die Rhomboeder $\frac{2}{3}r$, $\frac{r}{2}$ und ihre Gegenkörper, $\frac{r}{3}$ aber ohne einen solchen, und zwischen den r und p die Rhomboeder $2\,r$ und $2\,r'$. Die mit d bezeichneten Flächen bilden Dihexaeder zweiter Ordnung. Von ihnen stumpft $\frac{d}{2}$ die Kanten rr' ab, ist also $= 2\,a : a : 2\,a : c$. Dagegen fällt d in eine Zone mit zwei Flächen r, r', ist also $a : \frac{1}{2}a : a : c$. Hieraus folgt wieder, dass $2\,r$ und $2\,r'$ Rhomboeder erster Ordnung mit $2\,c$ sind.

Die zweiten Zonen für die beiden Rhomboeder $\frac{2}{3}r$ und $\frac{2}{3}r'$ sind in der Figur nicht zu verfolgen. Es sei daher bemerkt, dass eine solche Zone von ${}^{2}r'$ links über $\frac{d}{2}$ vorn nach $\frac{2}{3}r$ rechts und r' rechts geht. Dadurch sind dann beide als $\frac{3}{2}a : \frac{3}{2}a : \infty\,a : c$ bestimmt. Die Endkanten des aus ihnen entstehenden Dihexaeders stumpft das Dihexaeder zweiter Ordnung $\frac{d}{3}$ ab, welches daher $= 3a : \frac{3}{2}a : 3a : c$ ist. Andererseits stumpfen die $\frac{r}{2}$ und $\frac{r'}{2}$ die Endkanten von $\frac{d}{3}$ ab, sind also $2\,a : 2\,a : \infty\,a : c$. Endlich fällt das Rhomboeder $\frac{r}{3}$ mit $\frac{d}{3}$ rechts und einem p in eine Zone, hat daher $3\,a : 3\,a : \infty\,a : c$.

Wir finden also an den Krystallen

a) Rhomboeder erster Ordnung:

$r = a : a : \infty\,a : c$ (Hauptrhomboeder)
${}^{2}r = a : a : \infty\,a : 2\,c$ (erstes schärferes von r)
$\frac{2}{3}r = a : a : \infty\,a : \frac{2}{3}\,c$
$\frac{r}{2} = a : a : \infty\,a : \frac{1}{2}\,c$ (erstes stumpferes von r')
$\frac{r}{3} = a : a : \infty\,a : \frac{1}{3}\,c$.

b) Rhomboeder zweiter Ordnung.

$r' = a' : a' : \infty\,a : c$ (Gegenrh. von r)
${}^{2}r' = a' : a' : \infty\,a : 2\,c$ (erstes schärferes desselben)
$\frac{2}{3}r' = a' : a' : \infty\,a : \frac{2}{3}\,c$
$\frac{r'}{2} = a' : a' : \infty\,a : \frac{1}{2}\,c$ (erstes stumpferes von r).

c) Dihexaeder zweiter Ordnung.

$d = 2\,a : a : 2\,a : 2\,c$ (Rhombenfläche)

$\frac{d}{2} = 2\,a : a : 2\,a : c$

$\frac{d}{3} = 2\,a : a : 2\,a : \frac{2}{3}\,c.$

Endlich

$p = a : \quad a : \infty\,a : \infty\,c$ (Erstes Prisma)

$a = 2\,a : \quad a : \; 2\,a : \infty\,c$ (Zweites Prisma)

$c = \quad c : \infty\,a : \infty\,a : \infty\,a$ (Endfläche).

Jedoch sind die Krystalle niemals vollflächig.

Zunächst erscheinen Combinationen von r, ${}^2r'$ und c Fig. 127, an denen die Endfläche oft vorherrscht, so dass sie tafelartig werden.

Die Krystalle zeigen Circularpolarisation, sind theils rechtsdrehende (R), theils linksdrehende (L), ein Verhalten, welches erwarten lässt, dass Enantiomorphie an ihnen auftreten werde, wenn die dazu geeigneten Flächen vorhanden sind.

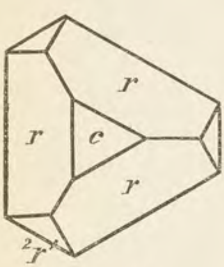


Fig. 127.

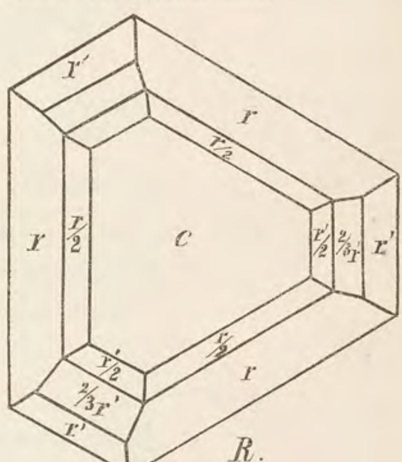


Fig. 128.

Der Krystall, Fig. 128, trägt ausser c die Gegenrhomboeder r und r', $\frac{r}{2}$ und $\frac{r'}{2}$, aber nur $\frac{2}{3}\,r'$, und ist rechtsdrehend (R). Es hat sich überhaupt gefunden, dass in den allermeisten Fällen $\frac{2}{3}\,r'$ an R, und $\frac{2}{3}\,r$ an L auftritt. Da bisweilen aber diese Regel eine Ausnahme erleidet, gleichwie dies mit den Trapezflächen des Quarzes der Fall ist, so sieht man, dass der optische Gegensatz nicht immer durch rechte oder linke Flächen sich ausspricht.

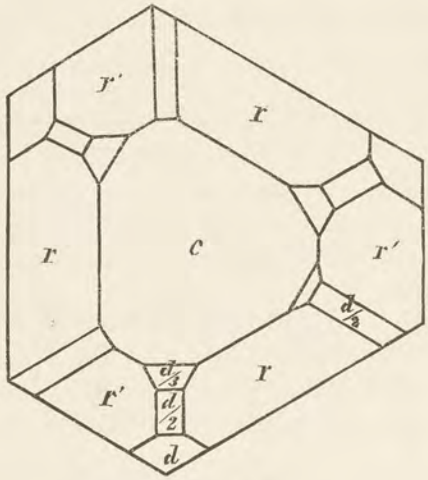


Fig. 129.

Auch Fig. 129 stellt einen R-Krystall dar, der das eigenthümliche Verhalten der Dihexaeder zweiter Ordnung darlegt. Während $\frac{d}{2}$ stets vollflächig ist, erscheinen d und $\frac{d}{3}$ hälftflächig, und zwar hier linksliegend, so, dass einer bleibenden Fläche eine in der Seitenkante entspricht. Die Dihexaeder

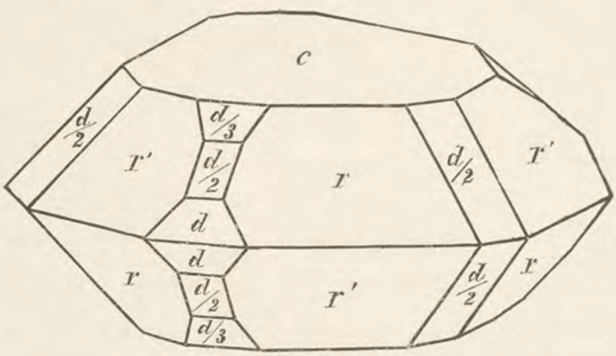


Fig. 130.

zweiter Ordnung d und $\frac{d}{3}$ sind also durch trigonotype Hemiedrie in zwei Ditetraeder oder Trigonoeder (S. 161) zerfallen. An den R treten, wie hier, die linken, an den L die rechten auf. S. Fig. 130.

Fig. 131 ist ein L-Krystall mit denselben Flächen, nur sind von d und $\frac{d}{3}$ die rechten Ditetraeder vorhanden. Ausserdem erscheint das zweite Prisma a hälftflächig als rechtes dreiseitiges Prisma. (Das linke findet man an R-Krystallen.)

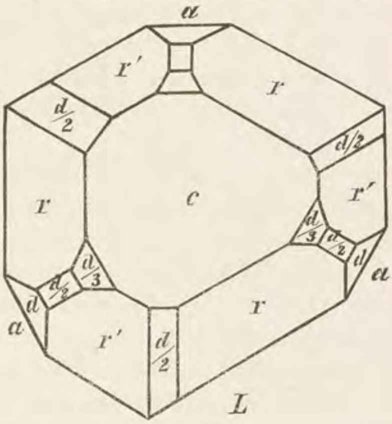


Fig. 131.

Die Grundlage für die Rechnung bildet der Winkel $r:c = 119° 44'$ (nach Brezina). Aus ihm folgt, dass das Haupt- und Gegenrhomboeder Endkantenwinkel von 82° 28′ haben und dass $a:c = 1:1{,}516 = 0{,}6596:1$ ist.

Die Berechnung der einzelnen Formen ist hiernach leicht.

Sehr zahlreich sind anderweitige Beispiele insbesondere in Rhomboedern krystallisirender Substanzen: Wismuth, Antimon, Arsen, salpetersaures Natron, überjodsaures Natron (mit 3 aq), essigsaures Uranoxyd-Kupfer.

Zwillingskrystalle.

Beim Krystallisiren lagern sich die Krystalle einer Substanz so neben einander, dass sie sich in mehr oder minder grosser Ausdehnung berühren, was ebenso, wie bei ihrem Aufwachsen auf einer festen Grundlage die Folge hat, dass an den Verwachsungsstellen die äusseren Flächen nicht zur Ausbildung gelangen. Hierbei liegen die einzelnen Krystalle gewöhnlich ganz regellos neben- und durcheinander, seltener sind sie in paralleler Stellung gruppirt.

Wenn zwei Krystalle derselben Substanz in nichtparalleler Stellung nach einem bestimmten Gesetz verwachsen, so entsteht ein Zwilling. Beide Krystalle liegen symmetrisch nach rechts und links von einer gemeinsamen Fläche aus, welche an ihnen entweder wirklich vorhanden oder doch krystallonomisch möglich ist. Diese Fläche heisst Zwillingsfläche und eine Normale auf ihr Zwillingsaxe. Die Zwillingsfläche ist aber nicht nothwendig zugleich die Verwachsungsfläche, denn diese kann dadurch sich ändern, dass der Krystall in paralleler Lage gleichsam fortgerückt ist.

Alle Flächen, welche senkrecht zur Zwillingsfläche stehen, sind beiden Krystallen gemein (fallen in eine Ebene).

Die äussere Erscheinung eines Zwillings wird dadurch bestimmt, dass beide Krystalle entweder an einander gewachsen (Juxtaposition) oder durch einander gewachsen (Penetration) sind. Ein- und ausspringende Winkel an der Zwillingsgrenze sind häufig, doch nicht immer vorhanden, und manche Zwillinge gleichen einfachen Krystallen vollkommen, so dass sie mitunter nur durch andere Hülfsmittel (optische Eigenschaften) sich erkennen lassen.

Was die Lage der Axen beider Krystalle betrifft, so treten folgende Fälle ein:

1. Alle Axen des einen sind verschieden von denen des anderen. Dies findet bei Zwillingen aller Systeme statt.

2. Zwei Axen sind parallel, die dritte liegt entgegengesetzt. Zwillinge des zwei- und eingliedrigen Systems, bei welchen *b* und *c* parallel sind, die *a* aber entgegengesetzt liegen.

3. Eine Axe ist parallel. Dies findet bezüglich der Axe *c* im sechs-, vier- und zweigliedrigen System statt, wenn die Endfläche die Zwillingsfläche ist.

4. Alle Axen sind parallel. Dies ist der Fall bei gewissen Zwillingen hemiëdrischer Formen. Zwei Hälftflächner, die einen Zwilling bilden, sind Gegenkörper. Beim Tetraeder und bei Rhomboedern beobachtet man diese Erscheinung.

Sehr gewöhnlich sind die zwillingsartig verwachsenen Krystalle nach der Zwillingsaxe verkürzt, tafelartig.

Setzt sich an den einen Krystall ein dritter an, so ist er dem ersten entweder parallel oder nicht. Im letzteren Fall nennt man die Gruppe einen Drilling.

Im Folgenden sind nur die wichtigsten Zwillingsgesetze in den einzelnen Systemen behandelt. Für ein tieferes Eingehen sind grössere krystallographische oder mineralogische Schriften zu studiren.

Reguläres System.

Zwillingsfläche ist eine Fläche des Oktaeders.

Verwachsen zwei Oktaeder nach einer ihrer Flächen, so ist eine rhomboedrische Axe t die Zwillingsaxe.

In Fig. 132 sind beide Oktaeder so gezeichnet, dass a eine

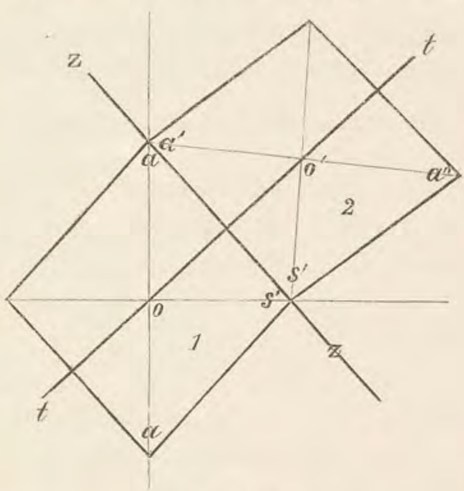


Fig. 132.

Axe, as eine Flächendiagonale, os = Zwischenaxe s ist. Dann ist zz die Zwillingsfläche, tt die auf jener normale Zwillingsaxe. Da der Kantenwinkel 109° 28′, der an a 70° 32′ beträgt, so sind die beiden a unter diesem Winkel geneigt und der einspringende Winkel $a s a''$ ist = 141° 4′.

Häufig ist ein dritter Krystall parallel dem ersten angewachsen und dies wiederholt sich wohl vielfach an dünnen

Lamellen, deren Ränder stets Wechsel ein- und ausspringender Winkel zeigen.

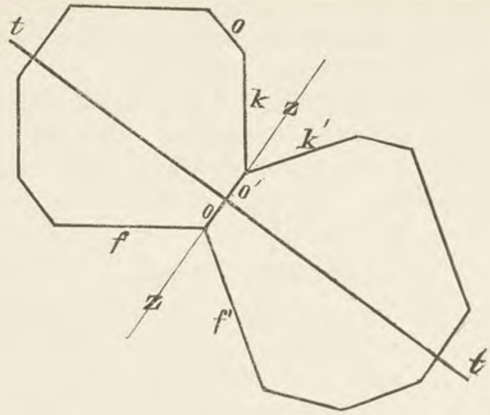


Fig. 133.

Zwei Würfel verwachsen, wie Fig. 133 zeigt, wo f den Durchschnitt einer Fläche (2 s des Oktaeders), k eine Kante (a) darstellt. Da die Oktaederfläche o gegen f unter $90° + \frac{70° \, 32'}{2}$ $= 125° \, 16'$, gegen k unter $144° \, 44'$ $\left(90° + \frac{109° \, 28'}{2}\right)$ geneigt ist, so sind die einspringenden Winkel zweier Würfelflächen ($f:f'$) $= 109° \, 28'$ und die zweier Würfelkanten ($k:k'$) $= 70° \, 32'$, wie am Oktaeder. Die Durcheinanderwachsung zweier Würfel zeigt der Durchschnitt Fig. 134.

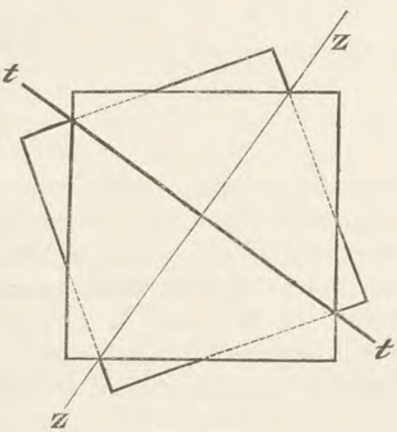


Fig. 134.

Fig. 135 versinnlicht einen Zwilling der Combination von Oktaeder (o), Würfel (a, herrschend) und Granatoeder (d). An der Zwillingsgrenze bilden die a abwechselnd ein- und ausspringende Winkel, während die d in eine Ebene fallen.

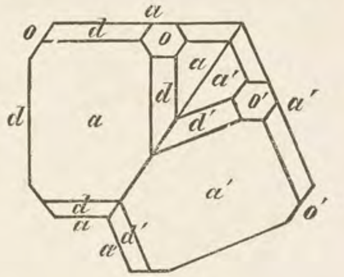


Fig. 135.

Viergliedriges System.

Zwillingsfläche ist eine Oktaederfläche.

Die Erscheinung ist hier eine ganz ähnliche.

Zweigliedriges System.

Zwillingsfläche ist eine Fläche eines der drei Paare.

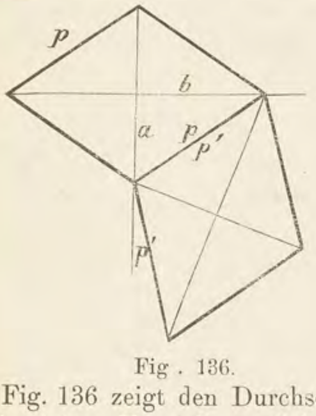


Fig. 136.

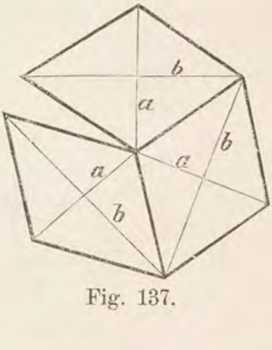


Fig. 137.

Fig. 136 zeigt den Durchschnitt eines ersten Paares p; oft ist ein dritter Krystall parallel dem ersten vorhanden und der zweite erscheint nur als ein feines Blättchen. In Fig. 137 ist ein Drilling dargestellt, dessen Mittelpunkt an a liegt. Ist der Winkel $p : p = 120°$, so entsteht keine Lücke. In Fig. 138

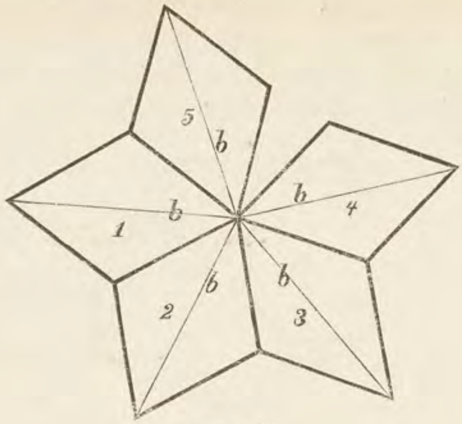


Fig. 138.

ist Axe b das Centrum, hier würden, wenn $p : p = 120°$ wäre, sechs Krystalle den Raum erfüllen.

Sehr häufig sind Durchwachsungen von zwei oder drei Krystallen.

Ein Beispiel der letzten Art bietet das schwefelsaure Kali dar, dessen einfache Combination Fig. 139 aus dem Hauptoktaeder o, dem ersten Paar p und der Hexaidfläche b besteht, zu denen nun noch das dreifach schärfere Paar $3\,p = 3\,a : b : \infty\,c$ hinzutritt. Drei solche Krystalle, deren Oktaeder als o, o', o'' unterschieden sind, durchkreuzen sich in Fig. 140. Da $p : p$ fast

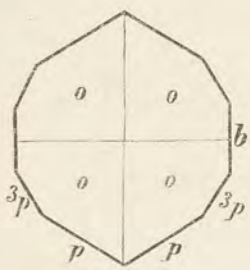


Fig. 139.

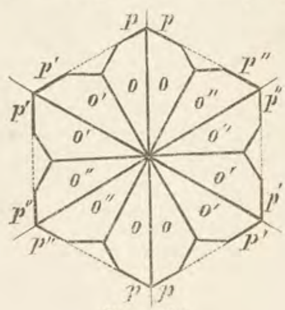


Fig. 140.

genau $= 120°$ ist, so dass auch $3\,p$ Winkel von $60°$ und 120_0 hat, so fallen eine Fläche p und p' und p und p'' sowie p' und p'' fast genau in eine Ebene, der Drilling bildet fast genau ein reguläres Sechseck im Durchschnitt und die $3\,p$ bilden einspringende Winkel, die aber auch oft fehlen. Die Zwillingsfläche ist eine Fläche $3p$, welche fast senkrecht auf einem p steht. Ebenso fällt ein o und o'', ein o' und o'' fast zusammen und daher sieht ein solcher Drilling wie ein sechsgliedriger Krystall aus, wiewohl bei genauer Betrachtung sich immer zeigt, dass der Parallelismus nicht vollkommen ist.

Zwei- und eingliedriges System.

Zwillingsfläche ist die Hexaidfläche a.

Bei beiden Krystallen sind dann die Axen b und c parallel, während die a umgekehrt liegen. Beide haben sämmtliche Flächen der Horizontalzone gemein, während die der Vertikalzone und der Augitpaare umgekehrt liegen. In der Regel ist von jedem Krystall gleichsam nur eine Hälfte da, weshalb in der Horizontalzone die einspringenden Winkel fehlen. Ist die Endigung von einer schiefen Endfläche gebildet, so bringt diese am einen Ende des Zwillings eine Zuschärfung, am anderen einen einspringenden Winkel hervor. Ist ein Augitpaar vorhanden, so entsteht am einen Ende des Zwillings in geometrischer Hinsicht ein Rhombenoktaeder. Sind zwei Augitpaare vorhanden, ein vorderes o und ein hinteres o', so zeigt das eine Ende des Zwillings das Rhombenoktaeder o, das andere o'.

Fig. 141 sei ein Krystall von Borax, an welchem

$o' = a' : b : c$ $\quad p = a : b : \infty c$ $\quad a = a : \infty b : \infty c$

$2o' = a' : b : 2c$ $\quad q^4 = b : 4c : \infty a$ $\quad b = b : \infty a : \infty c$

$c = c : \infty a : \infty b$

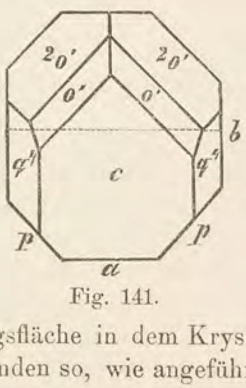


Fig. 141.

Ist a die Zwillingsfläche in dem Krystall, Fig. 142 u. 143, so sehen die beiden Enden so, wie angeführt, aus; an dem einen bilden c und $\underline{c}$ sowie die kleinen Reste von q^4 einspringende Winkel, am anderen thun dies die Reste von o'. Aber o' und $2\,o'$ erscheinen an jenem wie Rhombenoktaeder.

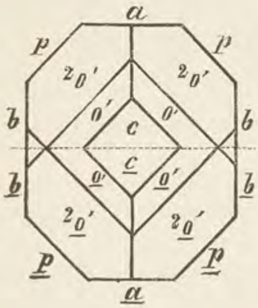


Fig. 142.

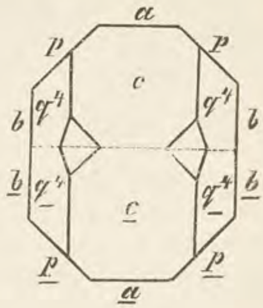


Fig. 143.

Eingliedriges System.

Die Zwillingsgesetze, besonders an Mineralien untersucht, sind hier vorläufig zu übergehen.

Sechsgliedriges System.

1. Zwillingsfläche ist die Endfläche.

Trifft dieses Gesetz die Rhomboeder, so verwachsen zwei derselben ungefähr so, wie zwei Würfel nach der Oktaederfläche.

2. Zwillingsfläche ist eine Rhomboederfläche.

Am Kalkspath ist eine Fläche des ersten stumpferen die Zwillingsfläche.

Ausbildung und Unvollkommenheit der Krystalle.

Von der Hemimorphie und der Theilflächigkeit war schon S. 41 die Rede. Auch die veränderliche Gestalt der Flächen, die sogenannte Unsymmetrie oder Verzerrung idealer symmetrischer Krystalle ist mehrfach besprochen worden.

Auf die Ausbildung der Krystalle haben die Umstände bei ihrer Bildung den grössten Einfluss. Am regelmässigsten geht dieselbe vor sich, wenn ein fertiger Krystall durch Aufhängen in der Lösung sich allmählich vergrössert. Er ist dann allseitig ausgebildet, und selbst wenn die Flüssigkeit voll suspendirter fester Theile eines fremden Körpers ist, bilden sich darin oft sehr regelmässige Krystalle.[1]) So sind die in geschmolzenen Gesteinen krystallisirten Mineralien (Leucit in Lava) oder die in Thonschlamm entstandenen (Eisenkieskrystalle in Mergel und Thon) durch ihre um und um ausgebildeten Formen ausgezeichnet. Entstehen die Krystalle aber am Boden oder an den Wänden eines Gefässes, so lagern sie sich mit einer Fläche darauf ab und ihre Ausbildung ist nach dieser Richtung hin gehindert, ebenso wie durch das Nebeneinander der einzelnen jeder nur zum Theil mit seinen Flächen sich frei entwickeln kann. Durch Versuche hat man die Richtungen ermittelt, in welchen in einzelnen Fällen der Ansatz neuer Masse an einem gegebenen Krystall innerhalb der Flüssigkeit erfolgt; fehlt es dabei an Masse, so entsteht öfter eine Art Skelet, oder die Flächen zeigen trichterförmige Vertiefungen (Kochsalz, Wismuth). Beim Krystallisiren bleiben mitunter Hohlräume oder feine Spalten, welche Mutterlauge einschliessen, oder es werden selbst fremde Körper, andere Krystalle eingeschlossen, was namentlich bei Mineralien sehr häufig ist.

Eine Folge von Störungen bei der Bildung der Krystalle ist der nicht vollständige Parallelismus der betreffenden Flächen, was auf die Kantenwinkel und das optische Verhalten nicht ohne Einfluss ist. Sehr häufig giebt eine spiegelnde Fläche bei der Messung zwei oder mehr Bilder, sie besteht also aus mehr als einer Fläche und entweder ist das Ganze ein Complex von zwei oder mehreren nicht genau parallelen Krystallen oder es treten aus einer Fläche andere unter sehr stumpfen Winkeln hervor.[2])

Hiermit steht die Streifung von Krystallflächen im Zusammenhang, welche meist dadurch entsteht, dass eine andere Fläche gleichsam das Streben hat, sich auszubilden, und diese Kantenbildung sich auf der Fläche vielfach wiederholt. Auch eingeschobene Zwillingslamellen können sie hervorrufen. Bei zwei Hälftflächnern ist öfter der eine gestreift, der andere glatt.

---

1) Grosse Krystalle von phosphorsaurer Ammoniak-Magnesia findet man in Schichten, die aus Kloakenüberresten entstanden sind.

2) Vgl. Scacchi, über die Polyedrie der Krystalle. Zeitschr. d. d. geol. Ges. 15, 19.

Auch mehrfache Streifung auf einer Fläche ist beobachtet und hat in Hemiedrie oder Zwillingsbildung ihre Ursache.

Drusige Flächen entstehen mitunter, indem ein grösserer Krystall aus einer Unzahl paralleler kleiner Krystalle besteht. Rauhe und matte Flächen verdanken ihre Beschaffenheit äusseren mechanischen oder chemischen Angriffen, gleichwie diese auf die Abrundung der Flächen, Kanten und Ecken wirken. Gekrümmte Flächen sind oft nur ein Complex vieler in einer Zone liegender unter stumpfen Winkeln sich schneidender Flächen.

Bildung und Zersetzung der Krystalle. Pseudomorphosen.

Die Krystallbildung erfolgt aus Flüssigkeiten auf nassem oder trockenem Wege oder aus Dämpfen. Wenn die Auflösung einer Substanz durch Verdampfen oder Abkühlung Krystalle absetzt, oder wenn eine freie Kohlsensäure enthaltende Flüssigkeit beim Stehen kohlensauren Kalk abscheidet, so war die Verbindung als solche schon vorhanden. Oft aber bildet sie sich erst durch das Zusammentreffen mehrerer aufgelöster Stoffe und dann gelangt diejenige Verbindung zuerst zur Ausscheidung, welche unter den möglicherweise vorhandenen die schwerlöslichste ist.

Aus einer Auflösung von salpetersaurem Kali und schwefelsaurem Natron krystallisirt schwefelsaures Kali. Aus einer Salzmutterlauge, welche Natron und Magnesia, Chlor und Schwefelsäure enthält, krystallisirt in Winterkälte Glaubersalz, während beim Verdampfen Kochsalz erhalten wird. Ein Wasser, welches unter anderen Kalksalze und Sulfate enthält, hinterlässt nach dem Abdampfen einen Rückstand, der, mit Wasser behandelt, sich als schwefelsaurer Kalk erweist, gebildet aus dem gesammten Kalkgehalt oder dem gesammten Schwefelsäuregehalt der vorhandenen Salze.

Krystallisationen dieser Art sind viele Niederschläge (nicht die amorphen), deren Bildung durch grössere Mengen des Lösungsmittels verzögert oder verhindert wird. Ebenso ist die Bildung sehr vieler Mineralien erfolgt, freilich aus sehr verdünnten Lösungen und innerhalb langer Zeiträume, und dies gilt von Quarz, Schwerspath, Flussspath, gleichwie von Gips, Kalkspath und anderen leichter löslichen.

Krystalle aus geschmolzenen Substanzen sind häufig (Metalle, Schwefel, Schwefelmetalle, Salze, Schlacken); die in plutonischen und vulkanischen Gesteinen enthaltenen Mineralien sind durch Schmelzung oder Sublimation krystallisirt. Oft wird das Krystallisiren durch Zusatz eines Flussmittels ermöglicht. So erhielt Ebelmen durch Anwendung von Borsäure Krystalle von Spinell u. s. w. auf synthetischem Wege. Selbst vor dem Löthrohr kann man Titansäure etc., aus Flüssen krystallisirt gewinnen.

Wenn Dämpfe sich verdichten, entstehen Krystalle. So Salmiak, Quecksilberchlorid und Chlorür, Jod, Arsen, arsenige Säure.

Sehr interessant ist die indirekte Sublimation als Mittel zur Bildung krystallisirter an sich nicht flüchtiger Verbindungen. Treibt man Zinnchlorid oder Titanchlorid und Wasser dampfförmig durch glühende Röhren, so bilden sich Krystalle von Zinnsäure oder Titansäure. Eisenchlorid liefert hierbei krystallisirtes Eisenoxyd, und so ist der Eisenglanz in Lavenspalten und Höhlungen entstanden. In den Mansfelder Schmelzöfen beobachtet man in den oberen Theilen die Bildung von Orthoklaskrystallen, deren Bestandtheile Silicium, Aluminium und Kalium als flüchtige Fluor- und Chlorverbindungen in die Höhe stiegen und durch Wasserdampf zersetzt wurden. Eine ähnliche Bildung ist den Augitkrystallen zuzuschreiben, welche auf den Blättchen vulkanischen Eisenglanzes sich finden.

Wenn eine krystallisirte Verbindung eine chemische Veränderung erleidet, so kann dabei unter günstigen Umständen die Krystallform sich erhalten. Die chemische Natur und die äussere Form gehören dann nicht zusammen und man nennt solche Krystalle Pseudomorphosen. Wenn Eisen- oder Kupfervitriol, wenn Soda, Borax, Glaubersalz etc. verwittern, also Wasser verlieren, so behält das wasserfreie oder wasserärmere Salz äusserlich die ursprüngliche Form. Werden Krystalle von Rothgültigerz (Schwefelantimonsilber) mit Schwefelkaliumlösung digerirt, so bestehen sie zuletzt nur noch aus Schwefelsilber. Legt man Krystalle von Weissbleierz

(Bleicarbonat) in Schwefelwasserstoffwasser, so verwandeln sie sich in schwarzes Schwefelblei.

Solche umgewandelte Krystalle beobachtete man zuerst bei Mineralien und bei ihnen sind sie oft sehr ausgezeichnet. Mitunter schliesst die Substanz noch einen Kern der ursprünglichen ein (Olivin in Serpentin, Cordierit in seinen Pseudomorphosen). Die chemischen Prozesse, durch welche die Pseudomorphosen entstehen, sind mehrfacher Art: höhere Oxydation, Hydratbildung, aber auch Reduktion, Wasserverlust, Entstehung von Oxyden, Hydroxyden, Carbonaten, Sulfaten, Phosphaten aus Schwefelmetallen, oder Fällungserscheinungen, wobei auf Krystalle Flüssigkeiten wirkten, deren Stoffgehalt die Bildung einer noch schwerer löslichen Substanz zur Folge hatte. Diese Prozesse haben eine grosse geologische Bedeutung, weil sich die Umwandlung oft auf grosse Massen erstreckt hat und die Erhaltung einzelner Krystalle nur zufällig und relativ selten ist.

Paramorphosen sind solche Umwandlungen, wobei die chemische Natur nicht geändert wird, die Masse des Krystalls aber sich unter Erhaltung der Form in ein Aggregat anderer Krystalle verwandelt. So werden die Krystalle des zwei- und eingliedrigen Schwefels schnell undurchsichtig, indem sie sich in zweigliedrigen Schwefel verwandeln. Zweigliedrige Krystalle von Nickelsulfat mit 7 Mol. Wasser bestehen nach einiger Zeit aus Quadratoktaedern. Aragonitkrystalle findet man, welche aus lauter kleinen Kalkspathkrystallen bestehen. Viele durchsichtige Krystalle von Salzen, die trübe werden und eine fasrige Struktur annehmen, ohne Wasser zu verlieren, sind in dieser Weise verändert.

Cohäsionsverhältnisse.

Die Cohäsion fester Körper unterscheidet amorphe und krystallisirte. Amorphe Körper zeigen bei ihrer Zerkleinerung gleiches Verhalten nach jeder Richtung; die Bruchstücke sind unbestimmt, die Bruchfläche ist mehr oder minder gekrümmt, muschlig.

Krystallisirte Körper zeigen ganz bestimmte Unterschiede der Cohäsion nach gewissen Richtungen, welche äusseren Flächen parallel sind; sie besitzen Spaltbarkeit, und die Spaltungsstücke haben eine bestimmte Form, welche zu der äusseren Form in genauer Beziehung steht. Man könnte die Spaltungsflächen als innere Krystallflächen betrachten und voraussetzen, dass jeder äusseren Fläche eine innere parallele entspreche. Freilich gelingt es nicht, dies thatsächlich nachzuweisen, theils wohl, weil die Hülfsmittel, die Spaltbarkeit zu untersuchen, höchst mangelhaft sind, theils weil die Cohäsionsunterschiede sehr verschiedene Grade haben, so dass sie bis zur Undeutlichkeit herabsinken. Allein allen gleichwerthigen Flächen entsprechen stets gleich vollkommene Spaltungsflächen.

Die Unterschiede zwischen leichter, minder leichter und unvollkommener (versteckter) Spaltbarkeit lassen sich numerisch nicht feststellen, und doch ist die letztere eine wichtige Eigenschaft, welche, zumal beim Fehlen äusserer Flächen, oft das Symmetriegesetz (Krystallsystem) verräth, weil sie der Ausdruck desselben im Innern der Masse ist.

Ein Körper mit drei rechtwinkligen und gleich vollkommenen Spaltungsflächen kann nur ein regulär krystallisirender sein, weil jene Flächen die des Würfels sind. Umgekehrt kann ein Körper mit nur einer deutlichen Spaltungsfläche diesem System nicht angehören. Geht man die einzelnen Krystallsysteme durch, so wird man leicht finden, wie gross die Zahl der Spaltungsflächen und ihre (normale oder schiefe) Lage zu einander und wie gross die Zahl der gleichwerthigen Spaltungsrichtungen möglicherweise sein kann.

Wenn ein Krystall mit einem Lösungsmittel in Berührung kommt, so entstehen auf seinen Flächen Aetzfiguren, da die Löslichkeit nur in der Richtung gleicher Symmetrie dieselbe ist. Sie sind für die Kenntniss des Symmetriegesetzes von Bedeutung.

Auch die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, welche von der Cohäsion abhängig sind, stehen in Beziehung zu ihrer Symmetrie.

Härte. — Mit der Cohäsion steht der Widerstand, den die Theile eines festen Körpers ihrer Trennung entgegensetzen, d. h. die Härte in unmittelbarer Beziehung. Bei einem amorphen Körper ist sie überall und nach jeder Richtung die gleiche. Nicht so bei einem krystallisirten Körper. Hier muss sie verschieden sein nach den einzelnen geometrisch und physikalisch verschiedenen Richtungen. Selten aber treten diese Unterschiede so deutlich hervor, dass sie sich leicht beobachten lassen. Ein Kalkspathkrystall, dem sechsgliedrigen System angehörig, erweist sich weit härter auf den Prismenflächen als auf der Endfläche oder auf den Flächen des Hauptrhomboeders, und auf diesen ist der Härtegrad ein anderer parallel den Kanten oder der einen oder anderen Diagonale.

Nur die unvollkommenen Hülfsmittel, welche wir zur Härteprüfung an Krystallen benutzen, wobei solche Verschiedenheiten unberücksichtigt bleiben, sind der Grund, weshalb man z. B. in der Mineralogie jedem Körper eine bestimmte Härte zuschreibt, welche durch eine sogenannte Härteskala, deren Glieder in ihrer Härtedifferenz durchaus nicht gleiche Abstände haben, bestimmt ist. Dies ist ein rohes, unwissenschaftliches Verfahren.

Verhalten der Krystalle gegen das Licht.

Es wurde wiederholt hervorgehoben, dass ein Krystall ein geometrischer Körper von bestimmten physikalischen Eigenschaften sei und dass diese mit der geometrischen Form in genauem Zusammenhang stehen. Wenn wir von einem Krystall sagen, er besitze verschiedene Symmetrierichtungen, so heisst dies zugleich, er verhalte sich nach diesen Richtungen physikalisch verschieden, also in Bezug auf das Licht, die Wärme, die Elektricität und den Magnetismus.

Ein viergliedriger Krystall z. B. zeigt eine andere Symmetrie in einer Richtung (Hauptaxe) als in den zu dieser senkrechten Richtungen (Axenebene der *a* und *s*). Geometrisch spricht sich diese Symmetriedifferenz in den Kantenwinkeln des Quadratoktaeders und in dem Auftreten der Hexaid- und Dodekaidflächen aus. Physikalisch äussert sie sich ebenso bestimmt darin, dass ein Lichtstrahl, welcher parallel der Hauptaxe in einen solchen Krystall eindringt, sich ganz anders verhält, als wenn er senkrecht zur Hauptaxe den Krystall trifft. Und wenn ein solcher Krystall erwärmt wird, ist die Ausdehnung in der Richtung der Hauptaxe eine andere, als senkrecht gegen dieselbe.

Das Verhalten der Krystalle gegen das Licht (Krystalloptik) ist ein Gegenstand von grösster Wichtigkeit, denn in vielen

Fällen verschafft erst die optische Untersuchung Gewissheit über das Krystallsystem einer Substanz, weil die Winkelmessungen wegen der nicht vollkommenen Beschaffenheit der Flächen nicht entscheidend sind. Ueberhaupt aber ist die Kenntniss des optischen Verhaltens der Krystalle von grossem Interesse und der Chemiker sollte neben dem Studium der Krystallographie auch das der Krystalloptik betreiben. Ausführliche Belehrung findet er in physikalischen Werken, wie z. B. in

Müller (Pouillet), Lehrbuch der Physik, 8. Aufl. von Pfaundler, dessen zweiter Band (1879) die Optik enthält.

Sodann in

Groth, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1876.

Tschermak, Lehrbuch der Mineralogie. Wien 1881.

E. S. Dana A Text-book of Mineralogy. New-York 1877.

Ein kurzer Abriss findet sich wohl in allen mineralogischen Lehrbüchern.

Das Nachfolgende hat lediglich den Zweck, auf den Zusammenhang von Krystallform und optischem Verhalten aufmerksam zu machen, vornämlich zu zeigen, dass jede krystallographische (geometrische) Symmetrierichtung zugleich eine optische (überhaupt physikalische) ist.

I. Reguläre Krystalle.

Reguläre Krystalle sind solche, welche drei zu einander senkrechte und unter sich gleiche Symmetrieebenen (Axenebenen), mithin drei rechtwinklige unter sich gleichwerthige Axen haben. Ihre Substanz hat in der Richtung dieser drei Axen gleiche Elasticität. Die optische Elasticität, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts, ist bei ihnen nach diesen Richtungen gleich; sie sind einfach brechend (isotrop). Blättchen von ihnen, jeder Richtung angehörig, verhalten sich im polarisirten Licht wie solche von doppelbrechenden Substanzen, die senkrecht zu einer optischen Axe geschnitten sind. Zwischen gekreuzten Nicols lassen sie das Feld dunkel, zwischen parallelen hell. (Ebenso amorphe Körper). Es treten keine Interferenzfarben auf.

II. Vier- und sechsgliedrige Krystalle.

Hierher gehören alle Krystalle, bei welchen die Symmetrie in einer Richtung (der Hauptaxe c) eine andere ist, als in der zu derselben senkrechten (den Nebenaxen). Jede der beiden Axenebenen ac theilt die Krystalle in zwei gleiche Hälften. In der Richtung der Hauptaxe haben sie die grösste, und senkrecht zu ihr die kleinste Elasticität, oder umgekehrt. Die krystallographische Hauptaxe ist die optische Axe. Sie sind optisch einaxig.

Der positive und negative Charakter ist nicht immer constant bei derselben Substanz. Dasselbe gilt für isomorphe Substanzen.

III. Zweigliedrige Krystalle.

Ihr geometrischer Charakter besteht darin, dass sie nach drei auf einander senkrechten Richtungen ungleiche Symmetrie zeigen. Sie haben keine Hauptaxe, ihr Stellung ist an und für sich willkürlich. Je zwei dieser Richtungen bilden eine besondere Symmetrieebene, deren der Krystall mithin drei hat. Diese drei geometrischen Symmetrieebenen sind zugleich physikalische, also auch optische. Die Elasticität ist verschieden nach den drei Axen; die Krystalle sind optisch zweiaxig.

Ausserdem aber sind die drei krystallographischen Axenebenen hier zugleich die optischen Elasticitätsebenen für alle Farben. Die Ebene der optischen Axen ist eine von ihnen, und die Mittellinie ist eine der drei Krystallaxen.

In der Regel ist die Lage der Ebene der optischen Axen bei einer zweigliedrigen Substanz constant. Doch kommen auch Ausnahmen vor, weshalb es nicht thunlich ist, die Mittellinie immer als Axe c zu wählen.

Chemisch analoge und vollkommen isomorphe Körper unterscheiden sich nicht selten durch die Lage der optischen Axenebene. Dasselbe gilt von dem positiven und negativen Charakter.

Bei den zweigliedrigen Krystallen entsprechen die optischen Axen allen Farben, liegen in derselben Ebene und haben dieselbe Mittellinie. Von dieser Linie nach rechts und links sind die Erscheinungen vollkommen symmetrisch, daher eine Platte, senkrecht zur Mittellinie geschnitten, in einem Bündel polarisirten weissen Lichts die isochromatischen Curven und die die Axen umgebenden Ringe vollkommen gleich zeigt. Neigt sich die Ebene der optischen Axen unter 45° gegen die Polarisationsebene, so zeigen auch die Hyperbelzweige, welche jedes der beiden Centra durchsetzen, dieselbe Gleichheit, und die Farben, mit denen sie gesäumt sind, geben die Art der Dispersion der Axen an.

Die Farben der Hyperbelränder liegen immer entgegengesetzt denen der Enden der centralen Ringe, welche ihnen gegenüberliegen. Ist der äussere (concave) Theil der Hyperbelstücke roth gesäumt, ihr innerer oder convexer Rand aber blau, so ist der Axenwinkel der rothen Strahlen kleiner als der der blauen ($\varrho < v$); bei entgegengesetzter Lage der Farben findet das Gegentheil statt ($\varrho > v$).

IV. Zwei- und eingliedrige Krystalle.

Eine einzige Ebene giebt es, welche einen solchen Krystall in zwei gleiche Hälften theilt; es ist die Axenebene *ac*, die Symmetrieebene, welche am Krystall als Hexaidfläche *b* erscheint. Nur die auf ihr senkrechte Axe *b* ist von der Natur gegeben, während die Axen *a* und *c* in der Symmetrieebene liegen und oft sehr willkürlich gewählt werden. Jeder zwei- und eingliedrige Krystall zeigt eine geometrische Differenz an dem nach vorn und dem nach hinten gerichteten Ende der Axe *a*.

Im Zusammenhange mit den geometrischen Symmetrieverhältnissen ist nun die Axe *b* eine der drei optischen Elasticitätsaxen, so dass die beiden anderen in der Axenebene *ac* liegen. Letztere ist die Ebene der optischen Axen, wenn die Axen der grössten und kleinsten Elasticität in ihr liegen. In vielen Fällen ist aber die Axe *b* die der grössten oder kleinsten Elasticität; dann liegt die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Symmetrieebene *ac*. Im ersten Fall hat die Mittellinie gegen die angenommenen Krystallaxen *a* und *c* keine im Voraus zu bestimmende Lage; im zweiten Fall ist die Mittellinie (des spitzen Axenwinkels) entweder die Axe *b* oder sie liegt ebenfalls in der Axenebene *ac*.

Während eine Dispersion der Mittellinie im zweigliedrigen System nicht stattfindet, wo sie mit einer Krystallaxe zusammenfällt, zeigt sich hier eine solche. Die optischen Axen, welche den verschiedenen Farben des Spectrums entsprechen, haben nicht mehr nothwendig dieselbe Mittellinie, und die Lage derselben bedingt drei Arten der Dispersion, welche Des Cloizeaux die geneigte, horizontale und drehende (gekreuzte) genannt hat.

a) Geneigte Dispersion. — Wenn die optische Axenebene = ac ist, so sind die Mittellinien beider optischen Axen für alle Farben in dieser Ebene dispergirt. Dieser Mangel an Symmetrie zeigt sich durch einen Unterschied in der mehr oder weniger ovalen Form der Ringe beider Systeme und in dem Glanz der Farben. Letztere sind in derselben Weise angeordnet, mag die Axenebene parallel der ursprünglichen Polarisationsebene sein, oder mögen beide sich unter 45° neigen. In manchen Fällen sind die Farben beider Ringsysteme entgegengesetzt angeordnet, und ebenso die der Hyperbelsäume, wenn jene Neigung = 45° ist. Der eine innere Ring zeigt dann aussen Roth, innen Blau; der andere aussen Blau, innen Roth, oder umgekehrt. Mitunter lassen sich beide Erscheinungen gleichzeitig beobachten.

b) Horizontale Dispersion. — Ist die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Symmetrieebene ac und liegt die Mittellinie in derselben, so liegt jedes Axenpaar einer einzelnen Farbe des Spectrums in einer Ebene, parallel der Krystallaxe b. Diese Ebene steht nicht genau senkrecht auf einer der Flächen der Vertikalzone, der angenommenen basischen Endfläche oder einer anderen Fläche dieser Zone. Beobachtet man in weissem Licht eine Platte, welche senkrecht zur Mittellinie z. B. der gelben Axen geschnitten ist, so sieht man die Farben der Ringe unsymmetrisch geordnet zu beiden Seiten der diese Axen einschliessenden Ebene. Ist die Ebene der blauen Axen von der der rothen ziemlich entfernt, so ist der Gegensatz der Farben sehr merklich; er ist am grössten oberhalb oder unterhalb, rechts oder links des die Ringsysteme durchsetzenden Streifens, sobald die Ebene der optischen Axen parallel oder senkrecht zur Polarisationsebene des Instruments ist. Dieser Streifen ist dann am einen Rande roth, am anderen blau.

c) Drehende (gekreuzte) Dispersion. — Ist im vorigen

Fall die Mittellinie die Axe *b*, so sind die, den verschiedenen Farben entsprechenden Axen symmetrisch gelagert rings um den Punkt, wo ihre gemeinsame Mittellinie die zu derselben senkrechte Platte durchsetzt. Die Axen der verschiedenen Farben liegen fächerförmig um die Mittellinie. Die Anordnung der rothen und blauen Ringe ist rings um denselben Punkt symmetrisch. Machen die Ebenen der rothen und blauen Axen einen nicht zu kleinen Winkel, so lässt sich diese Art der Dispersion beobachten, gleichviel ob die Ebene der mittleren optischen Axen parallel oder senkrecht oder unter 45° geneigt zur Polarisationsebene ist. Immer aber erkennt man sie an den Hyperbelsäumen und dem die Ringe durchsetzenden Streifen.

V. Eingliedrige Krystalle.

Die Wahl der Krystallaxen ist sehr willkürlich, und nicht immer glückt es, ein passendes Hexaid zu finden, dessen Kanten also die Axen liefern. Es fehlt die Symmetrie. Die Ebene der optischen Axen steht daher in keiner nothwendigen Beziehung zu den geometrischen Axenebenen. Die Dispersionserscheinungen setzen sich aus den einzelnen Arten gleichzeitig zusammen.

Wir sehen also, dass die Krystalle des regulären Systems einfach brechend sind, gleich den amorphen festen, den flüssigen und gasförmigen Körpern, dass alle anderen aber doppelbrechend sind, wobei der Unterschied hervortritt, dass die Krystalle mit einer Hauptaxe (die vier- und sechsgliedrigen) optisch einaxig, die übrigen optisch zweiaxig sind. Die Hauptaxe (*c*) jener ist ihre optische Axe, d. h. die Richtung, nach welcher ein einfallender Lichtstrahl keine Brechung erleidet.

Circularpolarisation. — Ein optisch-einaxiger Krystall zeigt im parallel-polarisirten Licht, wenn dasselbe in der Richtung der optischen oder Hauptaxe einfällt, nur hell oder dunkel, je nach der Stellung des polarisirenden und des analysirenden Nicols. Von diesem Verhalten weichen gewisse Krystalle ab, wie Arago am Quarz zuerst nachwies, welcher im sechsgliedrigen System krystallisirt. Eine senkrecht zur Hauptaxe geschnittene Quarzplatte erscheint niemals farblos hell, sondern beim Drehen des Analysators zeigt sie die Farben des Spectrums. Dies beruht darauf, dass die Strahlen beim Austritt aus der Platte eine andere Schwingungsrichtung haben, als beim Eintritt, ihre Polarisationsebene also im Krystall gedreht ist. Diese Erscheinung heisst Circularpolarisation. Die prismatige Farbenfolge ist beim Drehen nach rechts die entgegengesetzte von der beim Drehen nach links. Ist sie bei Rechtsdrehung die von Roth, Gelb, Grün, Blau, Violet, so ist der Krystall rechtsdrehend; während ein Krystall der dieselbe Farbenfolge beim Drehen nach links zeigt, linksdrehend heisst.

Aber von einer und derselben Substanz giebt es rechtsdrehende und linksdrehende Krystalle, wovon der Quarz unter den natürlichen das schönste Beispiel liefert.

Folgende künstliche Verbindungen verhalten sich ebenso:

A. Sechsgliedrige.

Ueberjodsaures Natron (3aq).
Unterschwefelsaures Kali.
Unterschwefelsaures Blei.
Unterschwefelsaurer Strontian.
Unterschwefelsaurer Kalk.
Benzil.
Maticokampher.

B. Viergliedrige.

Schwefelsaures Strychnin (6aq).
Schwefelsaures Aethylendiamin.
Kohlensaures Guanidin.
Diacetylphenolphtalein.

Wenn beim Strychninsulfat bisher blos links drehende Krystalle beobachtet wurden, so lässt sich erwarten, dass sich später auch rechtsdrehende finden werden.

Selbst unter den regulären Krystallen giebt es solche, welche Circularpolarisation zeigen, wie

Chlorsaures Natron,
Bromsaures Natron.
Essigsaures Uranyl-Natron.
Natriumsulfantimoniat.
Amylaminalaun.

Die rechts- und linksdrehenden Krystalle tragen gleichzeitig den krystallographischen Gegensatz des Rechts und Links an sich. Es sind hälft- oder viertelflächige Krystalle.

Hierbei ist (nach S. 42) daran zu erinnern, dass zwei congruente Hälftflächner nur conventionell als ein rechter und ein linker bezeichnet werden, dass man diese Bezeichnung auch umkehren kann und sie nur für die Combinationen Bedeutung hat. Dies gilt für die Hälftflächner nach dem tetraedrischen und dem pyritoedrischen Gesetz im regulären System, für die tetraedrischen und pyramidalen Hälftflächner des viergliedrigen und für die rhomboedrischen, pyramidalen und trigonotypen Hälftflächner des sechsgliedrigen Systems.

Wenn aber die beiden Gegenkörper, welche als Hälftflächner aus einer Form hervorgehen, in der Lage ihrer Begrenzungselemente entgegengesetzt, wenn sie nicht congruent sondern enantiomorph sind, so ist der Gegensatz eines rechten und eines linken wirklich vorhanden (S. 42).

Von dieser Art sind folgende Hälftflächner:

Im regulären System die nach dem gyroedrischen Gesetz entstehenden Gyroeder (S. 84).

Im viergliedrigen System die nach dem trapezoedrischen Gesetz entstehenden Quadrattrapezoeder. Im sechsgliedrigen System die nach dem trapezoedrischen Gesetz entstehenden hexagonalen Trapezoeder (S. 162).

Im zweigliedrigen und im zwei- und eingliedrigen System die Rhombentetraeder (S. 107.).

Ferner sind enantiomorph die meisten Viertelflächner.

Im regulären System die Tetartoeder (S. 86).

Im sechsgliedrigen System die trigonalen Trapezoeder (S. 165).

Nun lässt sich behaupten: Enantiomorphie ist mit Circularpolarisation verknüpft.

Dies ist zuerst am Quarz nachgewiesen, dessen Krystalle entweder rechte oder linke Trapezflächen (trigonale Trapezoeder) zeigen und danach rechts- oder linksdrehend sind.

Allerdings hat man an manchen der oben aufgeführten circularpolarisirenden Körper bisher noch keine Flächen beobachtet. welche Enantiomorphie nachweisen, allein dies lässt die Möglichkeit ihres Vorkommens offen, denn auch die grosse

Mehrzahl der Quarzkrystalle entbehrt solcher Flächen. Auch muss daran erinnert werden, dass Hemiedrie und Tetartoedrie an den Krystallen dann nicht nachweisbar sind, wenn das betreffende Gesetz keine Aenderung in den Formen bewirken kann (S. 42).

An den Hyposulfaten von Kalium, Strontium und Calcium, dem Benzil und den oben genannten viergliedrigen Krystallen liessen sich bisher keine enantiomorphen Formen auffinden.

Wenn man mit Naumann die Ansicht theilt, dass die Krystalle einer Substanz nur einem Gesetz der Hemiedrie folgen können, welches alle ihre Formen beherrscht, dass also die an ihr auftretenden Vollflächner die Bedeutung von Hälftflächnern haben, nur scheinbar Vollflächner sind, so muss das Auftreten zweier verschiedener Gesetze der Hemiedrie, wie wir es beim chlorsauren Natron gefunden haben (S. 87 u. 90), dadurch erklärt werden, dass die hemiedrischen Formen nur scheinbar solche, in Wirklichkeit aber tetartoedrische sind.

Auch reguläre Krystalle, wie die des genannten Salzes, zeigen Circularpolarisation. Bei solchen Krystallen ist es nicht, wie bei den optisch einaxigen, eine einzige Richtung, in welcher das Licht sie durchdringen muss, damit die Polarisationsebene eine Drehung erleide, sondern eine solche findet statt, sobald das Licht durch zwei parallele Flächen ein- und austritt.

Man hat die Frage aufgeworfen, ob Enantiomorphie unbedingt Circularpolarisation mit sich führe. Die Krystalle der Weinsäure (zwei- und eingliedrig), besonders diejenigen gewisser weinsaurer Salze, namentlich des Kali-Natron- und des Ammoniak-Natronsalzes (zweigliedrig) zeigen theils rechte, theils linke Tetraederflächen, welche in diesen Systemen enantiomorph sind. Dennoch besitzen weder die rechten noch die linken Krystalle Circularpolarisation, welche jedoch an ihren Lösungen hervortritt. Man glaubt, dass jene in den Krystallen durch die Doppelbrechung verdeckt werde.

Andererseits kennt man reguläre Krystalle mit enantiomorphen Formen, welche keine Circularpolarisation zeigen, wie dies bei den Nitraten von Baryum (S. 88), Strontium und Blei der Fall ist.

Wir wissen, dass dünne Platten von optisch zweiaxigem Glimmer, wenn sie so übereinandergelegt werden, dass ihre optischen Axenebenen einen gewissen Winkel bilden, die Erscheinung der Circularpolarisation zeigen. Vielleicht ist eine analoge innere Struktur aller drehenden Krystalle, also auch der regulären, die Ursache der Circularpolarisation.

Farbe. — In der Physik wird erörtert, dass die Farbe eines Körpers von der Art abhängt, wie das Licht von seiner Oberfläche reflektirt wird. Je mehr Licht dieselbe regelmässig reflektirt, um so weniger ist der Körper sichtbar. Bei diffuser Reflexion wird ein Theil des auffallenden Lichts reflektirt, ein anderer absorbirt. Die Farbe eines Körpers in weissem Licht setzt sich aus den Farben des reflektirten Antheils zusammen. Durchsichtige Körper sind solche, bei denen die Absorption gering ist; erscheinen sie gefärbt, so ist der Grund der, dass von dem absorbirten Theil die einzelnen Farben in verschiedenem Grade absorbirt werden. Diese Farbe heisst Körperfarbe und ist bei amorphen und regulär krystallisirten Substanzen in jeder Richtung dieselbe. Dagegen müssen alle Krystalle der übrigen Systeme nach verschiedenen Richtungen verschiedene Farben zeigen. Dies heisst Pleochroismus (Dichroismus, Trichroismus). Bei manchen Krystallen entspricht dem Trichroismus des durchgehenden Lichts ein solcher des reflektirten. Dann ist die Körperfarbe verschieden von der Oberflächenfarbe (die Doppelcyanüre des Platins, Kaliumsulfomolybdat, Hydrochinon).

Verhalten der Krystalle gegen die Wärme.

Die thermischen Eigenschaften der Krystalle sind ganz analog den optischen. Die Ausdehnung durch die Wärme ist nur gleich in den Richtungen gleicher Elasticität. Hieraus folgt, dass reguläre Krystalle beim Erwärmen zwar ihr Volum vergrössern, ihre Winkel aber nicht ändern. Vier- und sechsgliedrige Krystalle dehnen sich nach der Hauptaxe anders aus als nach allen darauf senkrechten Richtungen, so dass an einem Quadratoktaeder oder Rhomboeder Winkeländerungen erfolgen. Bei zweigliedrigen Krystallen ist die Veränderung nach den drei Axen eine dreifach verschiedene.

Verhalten der Krystalle gegen den Magnetismus.

Alle Körper werden vom Magnet entweder angezogen (magnetische) oder abgestossen (diamagnetische). Jene stellen sich, wenn sie in Form von Stäbchen angewandt werden, zwischen den Polen eines Magnets axial, diese äquatorial.

Das magnetische Verhalten der Krystalle entspricht ebenfalls ihrem optischen und thermischen. Reguläre Krystalle, seien sie magnetisch oder diamagnetisch, zeigen in keiner Richtung ein verschiedenes Verhalten. Vier- und sechsgliedrige besitzen ein Maximum und ein Minimum des Magnetismus oder Diamagnetismus, welche in der Richtung der Hauptaxe und der darauf senkrechten liegen.

Ein magnetischer gleichwie ein diamagnetischer Krystall stellt sich axial, wenn das Maximum bei ersterem parallel der Hauptaxe, bei letzterem senkrecht zu ihr liegt. Beide stellen sich dagegen äquatorial, wenn das Minimum in den angedeuteten Richtungen liegt. Zweigliedrige Krystalle besitzen in der Richtung ihrer drei Axen ein Maximum, ein Minimum und einen mittleren Werth ihrer magnetischen oder diamagnetischen Kraft, jedoch ist die Ebene des Maximums und Minimums nicht nothwendig zugleich die Ebene der optischen Axen.

Verhalten der Krystalle gegen die Elektricität.

Leitungsfähigkeit. — In Krystallen ist sie nach denjenigen Richtungen verschieden, welche krystallographisch, optisch und thermisch verschiedenwerthig sind. Zwischen den beiden Polen frei aufgehängt, nehmen Krystalle eine bestimmte Lage an, und zwar eine diagonale, wenn derselbe Krystall sich zwischen den Magnetpolen axial stellt, eine axiale aber, wenn er zwischen jenen sich äquatorial stellt.

Thermo- oder pyroelektrisches Verhalten. — Manche Krystalle zeigen bei steigender oder sinkender Temperatur Polarität, d. h. beide Arten der Elektricität treten an zwei entgegengesetzten Stellen des Krystalls im Maximum ihrer Stärke auf. Die verbindende elektrische Axe ist eine krystallographische, optische und thermische Axe. Die Art der Elektricität ist an demselben Pol bei steigender und sinkender Temperatur die entgegengesetzte. Solche Krystalle sind häufig hemiedrisch oder hemimorph und das bekannteste Beispiel ist der Turmalin. Bisher ist das thermoelektrische Verhalten überhaupt nur bei Mineralien untersucht worden.

Bestimmung der Krystalle.

Zur Bestimmung eines Krystalls ist zu ermitteln 1. sein Krystallsystem und 2. die Grösse derjenigen Kantenwinkel, welche zur Berechnung des Axenverhältnisses erforderlich sind.

Die Kenntniss des Krystallsystems oder des Symmetriegesetzes, welches an dem Krystall herrscht, ergiebt sich durch Messungen am Goniometer, in dessen Gebrauch man sich üben muss. (Vgl. S. 46.)

Ist an dem Krystall eine Zone herrschend, ist er nach derselben prismatisch ausgebildet, so stellt man ihn nach dieser Richtung aufrecht und entwirft eine vorläufige Zeichnung, in welcher die Flächen dieser Prismenzone im Durchschnitt erscheinen, worauf man die Flächen der Endigung in die Zeichnung einträgt und jeden wirklichen oder doch scheinbaren Kantenparallelismus beachtet.

Man misst sodann die Prismenzone und die übrigen Zonen durch, wiederholt die Messungen an verschiedenen Exemplaren und stellt die verschiedenen durch das Goniometer erkannten Zonen fest. Bei nicht sehr flächenreichen und nicht sehr unsymmetrischen Krystallen von nicht zu geringer Grösse und gut ausgebildeten Flächen gelangt man auf diese Art oft sehr bald zur Kenntniss des Krystallsystems.

Gesetzt, das herrschende Prisma sei ein sechsseitiges, und man habe an ihm zwei unter sich gleiche und vier ebenfalls unter sich gleiche Winkel gefunden, so ist es ein rhombisches Prisma, dessen scharfe oder stumpfe Kante gerade abgestumpft ist. Der Krystall ist dann zweigliedrig oder zwei- und eingliedrig. Hierüber giebt die Beschaffenheit der Flächen in der Endigung Aufschluss. Wir wollen annehmen, es seien deren vier auf die Flächen des vertikalen rhombischen Prismas gerade aufgesetzte, d. h. Oktaidflächen vorhanden. Sind der vordere und hintere stumpfere Endkantenwinkel einander gleich, so ist es ein Rhombenoktaeder, während an einem zwei- und eingliedrigen jene beiden Winkel verschieden sind.

Sind statt der Oktaidflächen in der Endigung Dodekaidflächen und eine Hexaidfläche vorhanden, so wird letztere bei einem zweigliedrigen Krystall eine gerade sein, d. h. gegen die herrschenden Prismenflächen unter 90° geneigt sein. In diesem Fall wird sich auch ergeben, dass die beiden Flächen des dritten Paares gegen die Endfläche gleich geneigt sind.

Ueberhaupt verräth sich der Charakter des Systems in solchen Fällen oft dadurch, dass die Flächen, welche im zweigliedrigen System als dritte Dodekaidpaare vorn und hinten an Zahl und Art gleich sind, an einem zwei- und eingliedrigen Krystall vorn und hinten verschieden sind und dass die Fläche, welche man als Hexaidfläche (basische Endfläche) bezeichnet, mit den Flächen des vertikalen rhombischen Prismas keine rechten Winkel bildet.

Kommt die die vordere (stumpfe oder scharfe) Kante dieses Prismas abstumpfende Hexaidfläche *a*, zugleich aber auch die zu ihr normale Hexaidfläche *b* vor, so müssen an einem zwei- und eingliedrigen Krystall alle Flächen der dritten Paare (vordere und hintere schiefe Endflächen) gleichwie die basische Endfläche *c* rechtwinklig gegen *b* liegen.

Jetzt wollen wir den Fall setzen, das vertikal gestellte sechsseitige Prisma habe in drei aufeinanderfolgenden Kanten drei verschiedene Neigungswinkel ergeben, während sich in der Endigung eine Einzelfläche findet, welche gegen alle Prismenflächen senkrecht liegt. Dann ist der Krystall höchst wahrscheinlich ein zwei- und eingliedriger, die herrschende Zone ist die Vertikalzone, ihre Zonenaxe ist die Axe *b* und die Endfläche ist die Hexaidfläche *b*, wie wir es z. B. beim schwefelsauren Natron (S. 123) gefunden haben.

Sechsgliedrige, oder, was meistens der Fall ist, rhomboedrische Krystalle zeigen entweder vorherrschend ein sechsseitiges Prisma von gleichen Winkeln, oder es überwiegen die Rhomboederflächen, deren alsdann drei vorhanden sind, welche unter sich gleiche (Endkanten-) Winkel bilden und ebenso gleichgeneigt sind gegen das Prisma oder gegen die häufig auftretende Endfläche.

An viergliedrigen Krystallen ist fast immer das erste oder zweite quadratische Prisma zu beobachten, in der Endigung ein Oktaid mit vier gleichen Kantenwinkeln und mit gleicher Neigung seiner Flächen gegen das eine oder andere Prisma (oder gegen die Endfläche).

Zeigt ein Krystall mehrere Oktaide oder Dodekaidpaare oder Rhomboeder, so wählt man vorläufig ein bestimmtes Oktaeder, Rhomboeder oder zwei Dodekaidpaare, bezieht dieselben auf Axen und entwirft eine Projection der ganzen Combination. Bei genügend vorhandenen Zonen ergeben sich dann die Flächenzeichen aller oder eines Theils der übrigen Formen.

Die Berechnung geht von der Grundform aus, für welche im vier- und sechsgliedrigen System ein Winkel, im zweigliedrigen deren zwei, im zwei- und eingliedrigen drei, im eingliedrigen fünf bekannt sein müssen. Man berechnet aus den gegebenen Winkeln die übrigen Winkel der Grundform und das Axenverhältniss.

Als Basis der Rechnung werden nur solche Winkel gewählt, welche sich möglichst genau messen liessen. Zuweilen zieht man vor, von Messungen an einer der übrigen Formen auszugehen.

Die Zeichen der letzteren folgen aus der Projection ohne Weiteres. Die für sie berechneten Winkel müssen mit den beobachteten möglichst nahe übereinstimmen. Stehen aber zu ihrer Bestimmung nur Winkelmessungen zur Verfügung, so berechnet man aus diesen ihr Zeichen, führt für dasselbe die Rechnung durch und vergleicht die gefundenen Winkel mit den berechneten.

Dann entwirft man eine oder mehrere Zeichnungen und Durchschnitte des Krystalls.

Die Bestimmung der Krystalle kann einfach und leicht, sie kann aber auch mühsam oder schwierig sein, und specielle Vorschriften lassen sich nicht geben, während durch Uebung der Blick für die Symmetrieverhältnisse sehr geschärft wird.

Die Untersuchung der optischen Eigenschaften ist an und für sich schon für jeden Krystall wünschenswerth, sie wird aber nothwendig in allen Fällen, wo Winkelmessungen über die Art des Krystallsystems keine sichere Entscheidung liefern.[1]) Freilich setzt sie voraus, dass der Krystall durchsichtig und in seinem Stoffe homogen sei, weil sonst das optische Verhalten leicht Anomalien zeigt, die man nicht zu deuten vermag.

---

1) S. Groth, Physikalische Krystallographie, S. 490.

Anhang.

Krystallographische Terminologie.

Das Studium krystallographischer Werke und Abhandlungen wird dem Anfänger erschwert durch die verschiedene von den Verfassern benutzte Terminologie. Um ihn in den Stand zu setzen, ihren Sinn zu verstehen, fügen wir hier eine kurze Erläuterung hinzu, indem wir uns dabei auf die in deutschen Schriften vorkommenden Bezeichnungen beschränken.

Nomenklatur der Formen. — Im vorliegenden Werke sind mit Vorliebe die von Weiss eingeführten Namen angewendet, welche an die äussere Erscheinung oder an gewisse Mineralien erinnern, wie z. B. Granatoeder, Leucitoeder, Pyramidenoktaeder, Pyramidenwürfel, Vierkantner, Sechskantner, Dreikantner, Augitpaare u. s. w.

Statt dessen hat man die Zahl der Flächen, und zwar aus dem Griechischen abgeleitet, oder die äussere Gestalt, in gleicher Weise ausgedrückt, als Namen der einfachen Formen benutzt, wie folgender Vergleich lehrt:

Reguläres System.

Würfel = Hexaeder.
Granatoeder = Rhombendodekaeder.
Leucitoide = Ikositetraeder.
Pyramidenoktaeder = Triakisoktaeder.
Pyramidenwürfel = Tetrakishexaeder.
Achtundvierzigflächner = Hexakisoktaeder.
Pyramidentetraeder = Trigondodekaeder.
Trapezoidtetraeder = Deltoiddodekaeder.
Gebrochene Pyramidentetraeder = Hexakistetraeder.
Gebrochene Pentagondodekaeder = Dyakisdodekaeder.

Viergliedriges System.

Quadratoktaeder = Tetragonale Pyramiden.
Qu. erster und zweiter Ordnung = Proto- und Deuteropyramiden.

Erstes Prisma = Protoprisma.
Zweites Prisma = Deuteroprisma.
Endfläche = Pinakoid.
Vierkantner = Ditetragonale Pyramiden.
Vierkantige Prismen = Ditetragonale Prismen.
Quadrattetraeder = Tetragonale Sphenoide.
Gebrochene Quadrattetraeder = Tetragonale Sphenoeder.

Zweigliedriges System.

Rhombenoktaeder = Rhombische Pyramiden.
Erste Paare = Rhombische Prismen.
Zweite Paare = Längs-Domen.
Dritte Paare = Quer-Domen.
Hexaidfläche *a* = Makropinakoid.
" *b* = Brachypinakoid.
" *c* = Basisches Pinakoid.
Rhombentetraeder = Rhombische Sphenoide

Zwei- und eingliedriges System.

Zwei- und eingliedrige Oktaeder = Monokline Pyramiden.
Vordere Augitpaare = Negative Hemipyramiden.
Hintere Augitpaare = Positive Hemipyramiden.
Erste Paare = Prismen.
Zweite Paare = Klinodomen.
Schiefe Endflächen = Hemidomen.
Hexaidfläche *a* = Orthopinakoid.
" *b* = Klinopinakoid.
Basische Endfläche = Basisches Pinakoid.

Eingliedriges System.

Eingliedrige Oktaeder = Triklinopyramiden.
Einzelflächen derselben = Tetartopyramiden.
Einzelflächen der Prismen = Hemiprismen.
Einzelflächen der zweiten und dritten Paare = Hemidomen.
Hexaidflächen = Pinakoide.

Sechsgliedriges System.

Dihexaeder = Hexagonale Pyramiden.
Dihexaeder erster Ordnung = Protopyramiden.
Dihexaeder zweiter Ordnung = Deuteropyramiden.
Analog beide Prismen.

Sechskantner = Dihexagonale Pyramiden.
Endfläche = Pinakoid.
Rhomboeder erster Ordnung = Positive Rhomboeder.
Rhomboeder zweiter Ordnung = Negative Rhomboeder.
Dreikantner = Skalenoeder.

Flächenbezeichnung. — Weit wichtiger ist es, die abweichenden Arten dieser zu kennen. So viele es deren giebt, sind sie doch sämmtlich aus der von uns gebrauchten und von Weiss zuerst gegebenen hervorgegangen, welche das Verhältniss der Parameter einer Fläche, bezogen auf dasjenige der Fläche einer sogenannten Grundform angiebt, d. h. einer Fläche, deren Parameter = 1 sind. Mithin gilt für alle Flächen einer isoparametrischen Form dasselbe Zeichen. Kommt es einmal darauf an, jede Fläche einzeln zu bezeichnen, so nenne man das hintere $a = a^{h}$, das linke $b = b^{l}$, das untere $c = c^{u}$, reservire aber die accentuirten a' und b' für das zwei- und eingliedrige und das eingliedrige System.

Die Flächenzeichen sind in dieser Art für Schrift und Sprache gleich geeignet, sie sind in jedem einzelnen Fall unzweideutig und im höchsten Grade anschaulich, da sie die Lage der Fläche gegen die gewählten Axen direkt ausdrücken.

Wegen ihrer Länge aber sind sie zur Bezeichnung der Flächen in Figuren nicht geeignet. Diesem Zweck dienen ganz willkürlich gewählte Buchstaben, in deren Anwendung jedoch eine gewisse Consequenz herrschen muss.

Wir führen hier die von Naumann und die von Miller gegebene Flächenbezeichnung an, welche den Vorzug der Kürze, dagegen den grossen Nachtheil haben, dass ihre Zeichen theils sich nur schreiben, nicht aber aussprechen lassen, theils die Lage der Flächen, wenn auch mathematisch correct, doch nicht unmittelbar angeben.

Naumann geht in allen dreiaxigen Systemen von dem als Grundform gewählten Oktaid aus, in dessen Zeichen die Axen = 1 sind, bezeichnet aber blos das reguläre Oktaeder mit O, die übrigen mit P (Pyramide). Vor und hinter dieses Symbol setzt er die Coefficienten, welche, die dritte Axe = 1 gesetzt, die Parameter der beiden anderen Axen sind.

Während wir die Achtundvierzigflächner = $a : na : ma$

setzen (S. 68), sind sie bei Naumann $= mOn$. Z. B. $a : \frac{3}{2}a : 3a = 3O\frac{3}{2}$. Ebenso werden die Vierkantner $= a : na : mc$ und $a : na : \frac{1}{m}c = mPn$; z. B. $a : 3a : 2c = 2P3$; $a : 3a : \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}P3$.

Aber das Zeichen mPn gilt auch für die Rhombenoktaeder und zwar als $m\breve{P}n$ für $na : b : mc$ und $\frac{1}{n}a : b : \frac{1}{m}c$ und als $m\bar{P}n$ für $a : nb : mc$ und $a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{m}c$. Mithin $3\breve{P}2 = 2a : b : 3c$, $\frac{1}{3}\breve{P}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a : b : \frac{1}{3}c$, während $3\bar{P}2 = a : 2b : 3c$ und $\frac{1}{3}\bar{P}\frac{1}{2} = a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$ ist. Man sage sich selbst, ob in solchen Fällen die Kürze der Zeichen sie empfehlenswerth macht.

Sind zwei Axen $= 1$, und ist die dritte > 1, so ist das Zeichen mO oder mP. So z. B. sind die Pyramidenoktaeder $a : a : ma = mO$, die Quadratoktaeder $a : a : mc = mP$. Allein auch die Rhombenoktaeder $a : b : mc$ erhalten dasselbe Zeichen mP. Zugleich dient dasselbe bei diesen Oktaedern für die stumpferen $a : a : \frac{1}{m}c$ und $a : b : \frac{1}{m}c$, denn wenn z. B. $m = 2$ ist, so wird $a : a : \frac{1}{2}c$ gerade ebenso wie $a : b : \frac{1}{2}c$ mit $\frac{1}{2}P$ bezeichnet. Im regulären System darf man aber unter mO nicht auch die Leucitoide $a : a : \frac{1}{m}a$ verstehen und $a : a : \frac{1}{2}a$ nicht $\frac{1}{2}O$ schreiben, weil Naumann diese Formen, entsprechend $a : ma : ma$, mit mOm bezeichnet.

Hierin liegen offenbare Mängel der abgekürzten Bezeichnungsweise.

Eine Fläche, welche zwei Axen in der Einheit schneidet und der dritten parallel geht, ist ∞O, wenn im regulären System (Granatoeder), sonst ∞P, wobei man aber nicht wissen kann, ob dies das erste quadratische Prisma des viergliedrigen Systems $= a : a : \infty c$ oder das erste Dodekaidpaar des zweigliedrigen $= a : b : \infty c$ sein soll.

Ebenso gilt das Zeichen $0P$ in diesen Systemen sowohl wie im zwei- und eingliedrigen und im eingliedrigen für die Endfläche, welche c schneidet und den beiden anderen Axen parallel geht.

Da aber trotz dieser und ähnlicher Mängel die Bezeichnungsweise Naumanns vielfach und namentlich in Krystallfiguren gebraucht wird, dürfte dem Anfänger die nachfolgende Uebersicht willkommen sein.

Reguläres System.		Reguläres System.
O	=	$a : a : a$
∞ O		$a : a : \infty a$
∞ O ∞		$a : \infty a : \infty a$
m O m		$a : ma : ma \; (a : a : \frac{1}{m} a)$
m O		$a : a : ma$
∞ O n		$a : na : \infty a$
m O n		$a : \frac{1}{m} a : \frac{1}{n} a$
Tetragonalsystem.		**Viergliedriges System.**
P	=	$a : a : c$
m P		$\begin{cases} a : a : mc \\ a : a : \frac{1}{m} c \end{cases}$
P ∞		$a : c : \infty a$
m P ∞		$\begin{cases} a : mc : \infty a \\ a : \frac{1}{m} c : \infty a \end{cases}$
∞ P		$a : a : \infty c$
∞ P ∞		$a : \infty a : \infty c$
o P		$c : \infty a : \infty a$
m P n		$\begin{cases} a : na : mc \\ a : na : \frac{1}{m} c \end{cases}$
∞ P n		$a : na : \infty c$
Rhombisches System.		**Zweigliedriges System.**
P	=	$a : b : c$
m P		$\begin{cases} a : b : mc \\ a : b : \frac{1}{m} c \end{cases}$
m P̆ n		$\begin{cases} na : b : mc \\ \frac{1}{n} a : b : \frac{1}{m} c \end{cases}$

$m\bar{P}n$	$=$	$\begin{cases} a : nb : mc \\ a : \frac{1}{n}b : \frac{1}{m}c \end{cases}$
∞P		$a : b : \infty c$
$\infty\breve{P}n$		$na : b : \infty c$
$\infty\bar{P}n$		$a : nb : \infty c$
$\breve{P}\infty$		$b : c : \infty a$
$m\breve{P}\infty$		$\begin{cases} b : mc : \infty a \\ b : \frac{1}{m}c : \infty a \end{cases}$
$\bar{P}\infty$		$a : c : \infty b$
$m\bar{P}\infty$		$\begin{cases} a : mc : \infty b \\ a : \frac{1}{m}c : \infty b \end{cases}$
$\infty\bar{P}\infty$		$a : \infty b : \infty c$
$\infty\breve{P}\infty$		$b : \infty a : \infty c$
oP		$c : \infty a : \infty b$

Monoklines System. Zwei- und eingliedriges System.

$-P$	$=$	$a : b : c$
$+P$		$a' : b : c$
$\mp mP$		$\left.\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right\} : b : mc$
$\mp m\,\text{Ᵽ}\,n$ (früher $\mp mPn$)		$\left\{\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix}\right. : nb : mc$
$\mp m\not{P}n$ (früher $[\mp mPn]$)		$\left\{\begin{matrix} na \\ na' \end{matrix}\right. : b : mc$
∞P		$a : b : \infty c$
$\infty\,\text{Ᵽ}\,n$ (früher ∞Pn)		$a : nb : \infty c$
$\infty\not{P}n$ (früher $[\infty Pn]$)		$na : b : \infty c$
$\not{P}\infty$ oder $(P\infty)$		$b : c : \infty a$
$m\not{P}\infty$ oder $(mP\infty)$		$\begin{cases} b : mc : \infty a \\ b : \frac{1}{m}c : \infty a \end{cases}$

$\mp$ Ᵽ ∞ oder $\mp$ P ∞	=	$\begin{cases} a \\ a' \end{cases} : c : \infty b$
$\mp$ m Ᵽ ∞ oder $\mp$ m P ∞		$\begin{cases} a \\ a' \end{cases} : mc : \infty b$
∞ Ᵽ ∞ oder ∞ P ∞		$a : \infty b : \infty c$
∞ P ∞ oder (∞ P ∞)		$b : \infty a : \infty c$
o P		$c : \infty a : \infty b.$

Triklines Eingliedriges System.

P'	=	$a : b : c$
$'\mathrm{P}$		$a : b' : c$
$_{\prime}\mathrm{P}$		$a' : b : c$
$\mathrm{P}_{\prime}$		$a' : b' : c$
$\infty \mathrm{P}_{\prime}'$		$a : b : \infty c$
$\infty\, _{\prime}'\mathrm{P}$		$a : b' : \infty c$
$_{\prime}\breve{\mathrm{P}}' \infty$		$b : c : \infty a$
$'\breve{\mathrm{P}}_{\prime} \infty$		$b' : c : \infty a$
$'\bar{\mathrm{P}}' \infty$		$a : c : \infty b$
$_{\prime}\bar{\mathrm{P}}_{\prime} \infty$		$a' : c : \infty b$
$\infty \bar{\mathrm{P}} \infty$		$a : \infty b : \infty c$
$\infty \breve{\mathrm{P}} \infty$		$b : \infty a : \infty c$
o P		$c : \infty a : \infty b.$

Die Werthe m und n wie vorher.

Hexagonales Sechsgliedriges System.

Vollflächner.

P	=	$a : a : \infty a : c$
m P		$a : a : \infty a : mc$ oder $\frac{1}{m} c$
P 2		$2\, a : a : 2\, a : c$
m P 2		$2\, a : a : 2\, a : mc$ oder $\frac{1}{m} c$
P n		$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a : c$

m P n	$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a : mc$ und $\frac{1}{m} c$
∞ P	$a : a : \infty a : \infty c$
∞ P 2	$2 a : a : 2 a : \infty c$
∞ P n	$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a : \infty c$
o P	$c : \infty a : \infty a : \infty a.$

Rhomboedrische Hälftflächner.

R =	$a : a : \infty a : c$
m R	$a : a : \infty a : mc$ und $\frac{1}{m} c$
− R	$a' : a' : \infty a : c$
− m R	$a' : a' : \infty a : mc$ und $\frac{1}{m} c$
R n	$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a : c$
m R n	$a : \frac{1}{n} a : \frac{1}{n-1} a : mc$ oder $\frac{1}{m} c$
− R n	$a' : \frac{1}{n} a' : \frac{1}{n-1} a' : c$
− m R n	$a' : \frac{1}{n} a' : \frac{1}{n-1} a' : mc$ oder $\frac{1}{m} c$

Von Grassmann, Frankenheim und Whewell wurde eine andere Flächenbezeichnung begründet, welche durch Miller eine grössere Verbreitung gefunden hat. Sie bringt jede Fläche auf den Ausdruck $\frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l}$, in welchem diese Buchstaben (die Indices der Fläche) ganze Zahlen, und zwar $h > k > l$ sind. Sie sind den Flächenparametern umgekehrt proportional.

Wenn man die Parameter einer Fläche $a : na : ma$ mit $\frac{1}{mn}$ multiplicirt, so erhält man

$$\frac{a}{mn} : \frac{a}{m} : \frac{a}{n} = \frac{1}{mn} : \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$$

Ist die Fläche $= a : \frac{3}{2} a : 3a$, also $n = \frac{3}{2}$, $m = 3$, so ist $mn = \frac{9}{2}$, sie wird also $\frac{1}{\frac{9}{2}} : \frac{1}{3} : \frac{1}{\frac{3}{2}}$ sein, und dem Obigen zufolge $\frac{9}{2}\, 3\, \frac{3}{2} = 963 = 321$ geschrieben.

Will man ein solches Zeichen in das gewöhnliche über-setzen, so macht man die sogenannten Indices zu Nennern der Brüche $\frac{1}{n}$, und hat also im vorliegenden Fall $321 = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{1} = \frac{1}{3}a : \frac{1}{2}a : a$.

Die Bezeichnung ist für alle Systeme gleichmässig; man kann also aus dem Zeichen das System nicht erkennen und 111 kann $= a : a : a = a : a : c = a : b : c$ sein, doch werden die Indices stets in der Reihenfolge der Axen a, b, c geschrieben.

Eine Fläche mit ∞ im Zeichen erhält für die betreffende Axe den Index o. So ist $110 = a : a : \infty a$ oder $a : a : \infty c$ oder $a : b : \infty c$.

120 ist $2a : a : \infty a$ oder $2a : a : \infty c$ oder $2a : b : \infty c$.
210 ist $a : 2a : \infty a$ oder $a : 2a : \infty c$ oder $a : 2b : \infty c$.
012 ist $\infty a : a : \frac{1}{2}a$ oder $\infty a : a : \frac{1}{2}c$ oder $\infty a : b : \frac{1}{2}c$.
021 ist $\infty a : \frac{1}{2}a : a$ oder $\infty a : \frac{1}{2}a : c$ oder $\infty a : \frac{1}{2}b : c$.
102 ist $a : \infty a : \frac{1}{2}a$ oder $a : \infty a : \frac{1}{2}c$ oder $a : \infty b : \frac{1}{2}c$.
201 ist $\frac{1}{2}a : \infty a : a$ oder $\frac{1}{2}a : \infty a : c$ oder $\frac{1}{2}a : \infty b : c$.
100 ist $a : \infty a : \infty a$ oder $a : \infty a : \infty$ e oder $a : \infty b : \infty c$.
010 ist $\infty a : a : \infty a$ oder $\infty a : a : \infty c$ oder $\infty a : b : \infty c$.
001 ist $\infty a : \infty a : a$ oder $\infty a : \infty a : c$ oder $\infty a : \infty b : c$.

Um jede einzelne Fläche einer Form oder Combination zu bezeichnen, werden die Axen a hinten, b links und c unten negativ gedacht und ihre Indices mit Strichen versehen. So z. B. sind die acht Oktaederflächen

$\mathrm{I\,I\,I}$, $\mathrm{I}\,\bar{\mathrm{I}}\,\mathrm{I}$, $\bar{\mathrm{I}}\,\mathrm{I\,I}$, $\bar{\mathrm{I}}\,\bar{\mathrm{I}}\,\mathrm{I}$, $\mathrm{I\,I}\,\bar{\mathrm{I}}$, $\mathrm{I}\,\bar{\mathrm{I}}\,\bar{\mathrm{I}}$, $\bar{\mathrm{I}}\,\mathrm{I}\,\bar{\mathrm{I}}$, $\bar{\mathrm{I}}\,\bar{\mathrm{I}}\,\bar{\mathrm{I}}$

In Figuren findet man jedoch häufig statt der Indices willkürlich gewählte Buchstaben.

Am Schluss sei noch erwähnt, dass in der neueren Zeit Viele nicht die Kantenwinkel selber, sondern statt ihrer die Complemente, d. h. Winkel der Flächennormalen angeben.

Druck von Gebr. Unger (Th. Grimm) in Berlin, Schönebergerstr. 17a.