CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANÁLISIS FUNCIONAL

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

Actualizado el 19 de noviembre de 2005.

Índice

NOTAS SOBRE ESPACIOS EUCLÍDEOS

1. Espacios euclídeos

Un espacio lineal $\mathbf{E}$ (sobre el cuerpo de los complejos o los reales) se dice **euclídeo** si tiene definida una regla que a todo par de vectores de $\mathbf{E}$ le asigna un número complejo (real en el segundo caso), llamado **producto escalar**, que satisface los siguientes axiomas: $\forall\, x, y, z \in \mathbf{E}$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), el producto escalar es

- **lineal** respecto del segundo argumento,

(1.1) $$(z, \alpha\, x + \beta\, y) = \alpha(z, x) + \beta(z, y)\,,$$

- **Hermítico** (**simétrico** en un espacio real),

(1.2) $$(y, x) = (x, y)^*$$

  (donde A^* indica el complejo conjugado de A),

- **positivo definido**,

(1.3) $$(x, x) \geq 0, \text{ y } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}\,,$$

  donde $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$ es el vector nulo de ese espacio.

Nótese que los primeros dos axiomas implican que el producto escalar en un espacio complejo es **antilineal** respecto de su primer argumento,

(1.4) $$(\alpha\, x + \beta\, y, z) = (z, \alpha\, x + \beta\, y)^* = \alpha^*(x, z) + \beta^*(y, z)\,,$$

mientras que en un espacio real es **bilineal**.

Toda forma cuadrática definida sobre un espacio vectorial $\mathbf{E}$, que sea lineal, Hermítica y positiva definida puede ser tomada como producto escalar, para así darle a $\mathbf{E}$ la estructura de un espacio euclídeo.

Ejemplos:

• Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define

(1.5) $$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,,$$

y para $x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i^* \, y_i \,. \tag{1.6}$$

En ambos casos se verifican los anteriores axiomas.

• Se denomina $\mathcal{C}(a, b)$ al conjunto de las **funciones continuas** $x(t)$ definidas en el intervalo $-\infty < a \leq t \leq b < \infty$. Este conjunto se estructura como un espacio vectorial respecto de las operaciones usuales de suma de funciones y de producto de funciones por números, cuyo elemento neutro $\mathbf{0}(t)$ es la función idénticamente nula. Puede definirse en $\mathcal{C}(a, b)$ el siguiente producto escalar: para $x(t), y(t) \in \mathcal{C}(a, b)$,

$$(x, y) := \int_a^b x(t)^* \, y(t) \, dt \,, \tag{1.7}$$

que satisface todos los axiomas necesarios. En particular,

$$(x, x) := \int_a^b |x(t)|^2 \; dt \geq 0 \,, \tag{1.8}$$

y si $(x, x) = 0$, entonces

$$0 = \int_a^b |x(t)|^2 \; dt \geq \int_{a_1}^{b_1} |x(t)|^2 \; dt \geq 0 \,, \tag{1.9}$$

para todo $a \leq a_1 \leq b_1 \leq b$. En consecuencia, $x(t) \equiv 0$. En efecto, como $x(t)$ es continua, si fuese distinta de cero en un punto también lo sería en todo un entorno de dicho punto, en contradicción con (1.9).

Estructurado con ese producto escalar, el espacio euclídeo de las funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ se denota por $\mathcal{C}_2(a, b)$. ◇

Los dos primeros axiomas implican que, dadas dos combinaciones lineales de vectores, $x = \alpha_1 \, x_1 + \cdots + \alpha_k \, x_k$, $y = \beta_1 \, y_1 + \cdots + \beta_l \, y_l$, donde $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{E}$, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{C}$, tenemos

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \alpha_i^* \, \beta_j \, (x_i, y_j) \,. \tag{1.10}$$

Además, el producto escalar por el vector nulo es siempre cero,

$$(x, y) = (x + \mathbf{0}, y) = (x, y) + (\mathbf{0}, y) \Rightarrow (\mathbf{0}, y) = 0 \,, \ \forall \, y \in \mathbf{E} \,. \tag{1.11}$$

Definición 1.1. El axioma de positividad permite definir una **norma** o longitud para cada vector de un espacio euclídeo:

$$\parallel x \parallel := +\sqrt{(x, x)} \geq 0 \,. \tag{1.12}$$

En particular, $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$.

Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\| \lambda\, x \| = \sqrt{|\lambda|^2 (x,x)} = |\lambda| \, \| x \| \; . \tag{1.13}$$

Esto permite **normalizar** todo vector de longitud no nula. En efecto, si $x \neq \mathbf{0}$ entonces $\| x \| > 0$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = \| x \|^{-1}$, y sea $y = \lambda\, x$. Entonces,

$$\| y \| = |\lambda| \, \| x \| = 1 \, . \tag{1.14}$$

Ejemplos:

• Para $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

$$\| x \| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2} \, . \tag{1.15}$$

• Para $x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$

$$\| x \| = \left\{ \int_a^b |x(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \, . \tag{1.16}$$

$\diamond$

Definición 1.2. Un subconjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ se dice **acotado** si la longitud de todos los vectores $x \in \mathbf{F}$ está acotada por una misma constante, $\| x \| \leq K$.

Ejemplo:

• La esfera de radio 1 en $\mathbf{E}$, que contiene a todos los vectores de longitud $\| x \| \leq 1$, es un conjunto acotado. $\diamond$

Consideremos dos vectores no nulos $x, y \in \mathbf{E}$ para los cuales $(x,y) = e^{i\theta}\, |(x,y)|$, y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, el cuadrado de la norma de la combinación lineal $\lambda\, e^{i\theta}\, x - y$,

$$P(\lambda) := \| \lambda\, e^{i\theta}\, x - y \|^2 = \left(\lambda\, e^{i\theta}\, x - y, \lambda\, e^{i\theta}\, x - y \right) =$$

$$\lambda^2 (x,x) - \lambda\, e^{-i\theta} (x,y) - \lambda\, e^{i\theta} (y,x) + (y,y) = \tag{1.17}$$

$$= \lambda^2 \, \| x \|^2 - 2\lambda\, |(x,y)| + \| x \|^2 \geq 0 \, ,$$

es un polinomio cuadrático en λ que no toma valores negativos. En consecuencia, $P(\lambda)$ no puede tener dos raíces reales distintas, lo que requiere que el discriminante de la ecuación $P(\lambda) = 0$ sea no positivo,

$$\big(-2\, |(x,y)| \big)^2 - 4 \parallel x \parallel^2 \parallel y \parallel^2 \leq 0\,.$$

De aquí se deduce la siguiente

Propiedad 1.3.

$$\big|(x,y)\big| \leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel \quad . \tag{1.18}$$

Esta es la **desigualdad de Cauchy - Schwarz**, que vale para todo par de vectores de un espacio euclídeo.

Ejemplos:

• Para $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, la desigualdad de Cauchy - Schwarz se reduce a

$$\big|(x,y)\big| = \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^* \, \eta_k \right| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \,. \tag{1.19}$$

• Para $x(t), y(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$ tenemos

$$\big|(x,y)\big| = \left| \int_a^b x(t)^* \, y(t) \, dt \right| \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |y(t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} \,. \tag{1.20}$$

$\diamond$

Supongamos que para un dado par de vectores $x, y \in \mathbf{E}$ la desigualdad (1.18) se reduce a una igualdad, es decir, $\big|(x,y)\big| = \parallel x \parallel \parallel y \parallel$. En ese caso el discriminante de la ecuación $P(\lambda) = 0$ es cero, y $P(\lambda)$ tiene una raíz real doble: $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$P(\lambda_0) = \parallel \lambda_0 \, e^{i\theta} \, x - y \parallel^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = \big(\lambda_0 \, e^{i\theta}\big) \, x\,. \tag{1.21}$$

Dos vectores no nulos proporcionales entre sí se dicen **colineales**.

En un espacio euclídeo real, la desigualdad de Cauchy - Schwarz permite definir el **ángulo** entre dos vectores mediante la relación

$$\cos \widehat{x\,y} := \frac{(x,y)}{\parallel x \parallel \parallel y \parallel}\,. \tag{1.22}$$

Dos vectores $x, y \in \mathbf{E}$ se dicen **ortogonales** si $(x,y) = 0$, lo que se denota por $x \perp y$. En particular, el vector nulo es ortogonal a todo vector de $\mathbf{E}$.

En un espacio euclídeo real, el ángulo entre dos vectores no nulos ortogonales entre sí es $\pi/2$ ($\cos\widehat{x\,y} = 0$).

Ejemplos:

• En $\mathbb{R}^n$, los vectores $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ son ortogonales entre sí.

• En $\mathcal{C}_2(a,b)$,

$$x(t) \perp y(t) \;\Rightarrow\; \int_a^b x(t)^*\, y(t)\, dt = 0\,. \tag{1.23}$$

◇

El **sistema trigonométrico**,

$$\big\{\cos(k\,t), k = 0, 1, \ldots;\; \sin(l\,t), l = 1, 2, \ldots\big\} \subset \mathcal{C}_2(-\pi, \pi)\,, \tag{1.24}$$

es un conjunto infinito de vectores ortogonales entre sí (demostrarlo!).

Lema 1.4. *Si los vectores no nulos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ son ortogonales entre sí, entonces son linealmente independientes.*

En efecto, supongamos que, por el contrario, son linealmente dependientes. Entonces existen k números C_i, no todos nulos, tales que $C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + \cdots + C_k\, x_k = \mathbf{0}$. Supongamos, por ejemplo, que $C_1 \neq 0$, y tomemos el producto escalar de esa combinación lineal nula con el vector x_1. Como $x_i \perp x_j$ para $i \neq j$, tenemos que

$$0 = (x_1, \mathbf{0}) = C_1 (x_1, x_1) = C_1 \parallel x_1 \parallel^2 \Rightarrow\; x_1 = \mathbf{0}\,, \tag{1.25}$$

en contradicción con la hipótesis. En consecuencia, $C_i = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$, y los vectores son linealmente independientes. □

Del Lema 1.4 se desprende que si una suma de vectores ortogonales entre sí es el vector nulo, entonces cada sumando es $\mathbf{0}$.

Se define la **dimensión** de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ como el máximo número de vectores linealmente independientes que es posible seleccionar en $\mathbf{E}$. Por ejemplo, la dimensión de $\mathbb{C}^n$ es n.

La existencia del sistema trigonométrico, ec. (1.24), muestra que los espacios de funciones $\mathcal{C}_2(a,b)$ no tienen dimensión finita.

Lema 1.5. *Si los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ son ortogonales a $y \in \mathbf{E}$, entonces toda combinación lineal de ellos es también ortogonal a y,*

$$\left(y, \sum_{i=1}^{k} C_i\, x_i \right) = \sum_{i=1}^{k} C_i\, (y, x_i) = 0\,. \tag{1.26}$$

□

El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ constituye un subespacio lineal $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$. Se dice que el vector y es ortogonal a dicho subespacio, lo que se denota por $y \perp \mathbf{F}$.

En general, se dice que x es ortogonal a un subconjunto $\mathbf{G} \in \mathbf{E}$ si x es ortogonal a todo vector de dicho subconjunto,

$$x \perp \mathbf{G} \;\Leftrightarrow\; x \perp y,\ \forall\, y \in \mathbf{G}\,. \tag{1.27}$$

Definición 1.6. Del Lema 1.5 resulta que el conjunto de todos los vectores ortogonales a un subconjunto $\mathbf{G} \subset \mathbf{E}$ forman un subespacio $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$. Si $\mathbf{G}$ es él mismo un subespacio de $\mathbf{E}$, se dice que $\mathbf{F}$ es su **complemento ortogonal**.

Los espacios euclídeos comparten ciertas **propiedades métricas** conocidas de la geometría en el plano y el espacio, como lo muestran los siguientes teoremas.

Teorema 1.7. *(de Pitágoras) Si $x, y \in \mathbf{E}$ son ortogonales entre sí, $x \perp y$, entonces*

$$\| \, x + y \, \|^2 = \ (x + y, x + y) \ = \| \, x \, \|^2 + \| \, y \, \|^2 \tag{1.28}$$

(en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos). □

Su generalización: Si los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ son ortogonales entre sí, $x_i \perp x_j$ para $i \neq j$, entonces

$$\| \, x_1 + \cdots + x_k \, \|^2 = \| \, x_1 \, \|^2 + \cdots + \| \, x_k \, \|^2 \ . \tag{1.29}$$

Teorema 1.8. *(desigualdades triangulares) Dados $x, y \in \mathbf{E}$, se tiene que*

$$\Big| \, \| \, x \, \| - \| \, y \, \| \, \Big| \ \leq \| \, x + y \, \| \leq \| \, x \, \| + \| \, y \, \| \tag{1.30}$$

(la longitud de un lado de un triángulo no supera a la suma de las longitudes de los otros dos lados, ni es menor que su diferencia en valor absoluto).

En efecto, consideremos el producto escalar

$$\| \, x + y \, \|^2 = \ (x + y, x + y) \ = \| \, x \, \|^2 + 2\, \Re(x, y) + \| \, y \, \|^2 \ . \tag{1.31}$$

La desigualdad de Cauchy - Schwarz permite escribir

$$\begin{array}{c} |\,\Re(x,y)| \;\leq\; |(x,y)| \;\leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel \Rightarrow \\ \Big(\parallel x \parallel - \parallel y \parallel \Big)^2 \;\leq \parallel x+y \parallel^2 \leq \;\Big(\parallel x \parallel + \parallel y \parallel \Big)^2 , \end{array} \tag{1.32}$$

de donde resulta (1.30). □

Por otra parte, es sabido que en un espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ de dimensión finita n siempre es posible seleccionar un **sistema completo** de n vectores **ortonormales**,

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \;\mid\; (e_i, e_j) = \delta_{ij} , \tag{1.33}$$

respecto del cual todo vector $x \in \mathbf{E}_n$ puede ser representado como una combinación lineal de la forma

$$x = \xi_1\, e_1 + \cdots + \xi_n\, e_n , \tag{1.34}$$

donde los ξ_i son llamados **coeficientes de Fourier** de x relativos a la base considerada. Ellos están dados por

$$\xi_i = (e_i, x),\;\; i = 1, \ldots, n. \tag{1.35}$$

Similarmente, dado $y \in \mathbf{E}_n$, $y = \eta_1\, e_1 + \cdots + \eta_n\, e_n$, tenemos para el producto escalar

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^*\, \eta_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^*\, \eta_i , \tag{1.36}$$

y para la norma

$$\parallel x \parallel = \;\sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}\,. \tag{1.37}$$

Nótese que en estos resultados nada nos permite distinguir entre el espacio $\mathbf{E}_n$ considerado y el espacio $\mathbb{C}^n$, en el cual hubiéramos seleccionado los vectores $\bar{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ e $\bar{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$. En efecto,

$$(\bar{x}, \bar{y})_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^*\, \eta_i \,, \qquad \parallel \bar{x} \parallel_{\mathbb{C}^n} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}\,. \tag{1.38}$$

Definición 1.9. Dos espacios euclídeos, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$, se dicen **isomorfos** si es posible establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca que preserve las operaciones lineales y los productos escalares:

$$\forall\, x, y \in \mathbf{E}\ \exists\, x', y' \in \mathbf{E}' \text{ tal que si } x \leftrightarrow x',\ y \leftrightarrow y' \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\, x + \beta\, y \leftrightarrow \alpha\, x' + \beta\, y'\,,\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ (\text{o } \mathbb{R})\,, \\ \\ (x, y)_{\mathbf{E}} = (x', y')_{\mathbf{E}'}\,. \end{cases} \tag{1.39}$$

Evidentemente, el isomorfismo de espacios euclídeos establece una relación de equivalencia.

Ejemplos:

• Dos espacios euclídeos reales, de dimensión finita n, cualesquiera son isomorfos entre sí (y, por lo tanto, isomorfos a $\mathbb{R}^n$). Para mostrarlo basta con establecer una correspondencia uno a uno entre los n vectores de dos de sus respectivas bases ortonormales.

• Similarmente, todo espacio euclídeo complejo de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{C}^n$.

$\diamond$

2. Formas lineales sobre espacios euclídeos

Una función escalar (a valores numéricos) definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $f : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), es llamada **forma** o **funcional lineal** si satisface

$$f(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, f(x) + \beta\, f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbf{E},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ (\text{o } \mathbb{R})\,. \tag{2.1}$$

Evidentemente, para una forma lineal tenemos que $f(\mathbf{0}) = 0$, y

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, x_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, f(x_k)\,. \tag{2.2}$$

Ejemplos:

• En un espacio n-dimensional $\mathbf{E}_n$, generado por la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, y para $x = \xi_1\, x_1 + \cdots + \xi_n\, e_n$, tenemos

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^*\, \xi_i\,,\ \text{con } c_i = f(e_i)^*\,. \tag{2.3}$$

Por lo tanto, una funcional lineal en un espacio de dimensión finita queda determinada por los valores que ella toma sobre los vectores de un sistema completo.

Además, del isomorfismo entre $\mathbf{E}_n$ y el espacio de las n-uplas de números complejos, resulta que f está representada en este último espacio por el producto escalar por un vector fijo, $\bar{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

• El producto escalar por un vector fijo de un espacio euclídeo arbitrario define una funcional lineal sobre ese espacio. En efecto, si $z \in \mathbf{E}$,

$$f(x) := (z, x), \ \forall\, x \in \mathbf{E} \tag{2.4}$$

define una forma lineal como consecuencia de la linealidad del producto escalar.

• En particular, si $z(t)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$f(x) := \int_a^b z(t)^*\, x(t)\, dt \tag{2.5}$$

define una funcional lineal sobre $\mathcal{C}_2(a, b)$.

• Pero no toda funcional lineal en un espacio de dimensión infinita puede ser representada en la forma de un producto escalar por un vector fijo del espacio. En efecto, consideremos nuevamente el espacio $\mathcal{C}_2(a, b)$, y sea $t_0 \in [a, b]$. El valor que $x(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)$ toma en el punto t_0 define una forma lineal,

$$f(x) := x(t_0)\,. \tag{2.6}$$

Téngase en cuenta que no existe ninguna función continua $\delta(t, t_0)$ tal que

$$\int_a^b \delta(t, t_0)\, x(t)\, dt = x(t_0),\ \forall\, x(t) \in \mathcal{C}_2(a, b)\,. \tag{2.7}$$

$\diamond$

Definición 2.1. Una funcional $f(x)$ se dice **acotada** si existe es una constante $0 \leq K < \infty$ tal que

$$|f(x)| \leq K \parallel x \parallel,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{2.8}$$

3. Operadores lineales sobre espacios euclídeos

Un **operador** sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ es una función a valores vectoriales definida sobre $\mathbf{E}$, $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$.

Un operador A se dice **lineal** si

$$A\,(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, A\, x + \beta\, A\, y,\ \forall\, x, y \in \mathbf{E},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ (o } \mathbb{R})\,. \tag{3.1}$$

Para un operador lineal se cumple que $A\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$, y

$$A \sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, x_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k\, A\, x_k\,. \tag{3.2}$$

Ejemplos:

• El **operador nulo**, $\mathbf{O}\, x = \mathbf{0}$, $\forall\, x \in \mathbf{E}$, es un operador lineal.

• El **operador identidad**, $\mathbf{I}\, x = x$, $\forall\, x \in \mathbf{E}$, es un operador lineal.

• Consideremos un subespacio de dimensión finita n de un espacio euclídeo arbitrario, $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$, y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{E}_n$. Se define el **operador de proyección** sobre el subespacio $\mathbf{E}_n$ por la relación

$$P\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i\, (e_i, x)\,. \tag{3.3}$$

Se trata de un operador lineal **idempotente**: $P(P\, x) = P\, x\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$. En efecto, como $P\, e_i = e_i$, tenemos

$$P(P\, x) = P \sum_{i=1}^{n} e_i\, (e_i, x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i, x)\, P\, e_i = P\, x,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{3.4}$$

El proyector sobre el complemento ortogonal de $\mathbf{E}_n$ está dado por $\bar{P} = \mathbf{I} - P$. En efecto, $\forall\, x \in \mathbf{E}$ y $\forall\, i = 1, \ldots, n$,

$$\big(e_i, (\mathbf{I} - P)x\big) = (e_i, x) - \sum_{j=1}^{n} (e_i, e_j)\ (e_j, x) = 0\,. \tag{3.5}$$

En consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.1. *dado un subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo, todo vector puede ser representado como la suma de dos vectores ortogonales entre sí,*

$$x = u + v,\ \textit{donde}\ u = P\, x \in \mathbf{E}_n,\ \textit{y}\ v = (\mathbf{I} - P)x \perp \mathbf{E}_n\,. \tag{3.6}$$

• En un espacio de dimensión finita $\mathbf{E}_n$ generado por el sistema ortonormal y completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$, un operador lineal tal que

$$A\, e_k = \lambda_k\, e_k,\ k = 1, \ldots, n\,, \tag{3.7}$$

con λ_k números dados, se dice **diagonal**. Esos números, llamados **autovalores** de A, definen completamente su acción sobre un vector arbitrario:

$$A\, x = A(\xi_1\, e_1 + \cdots + \xi_n\, e_n) = \lambda_1\, \xi_1\, e_1 + \cdots + \lambda_n\, \xi_n\, e_n\,. \tag{3.8}$$

• La multiplicación de elementos de $\mathcal{C}_2(a,b)$ por una función continua fija $\varphi(t)$ define un operador lineal,

$$\forall\, x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b), \quad A\,x(t) := \varphi(t)\,x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,. \tag{3.9}$$

• El **operador integral de Fredholm**, $A : \mathcal{C}_2(a,b) \to \mathcal{C}_2(a,b)$, está definido por

$$y(t) = A\,x(t) := \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds, \ \forall\, x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,, \tag{3.10}$$

donde el **núcleo** del operador, $K(t,s)$, es una función continua de sus dos variables.

• Los operadores de los dos ejemplos anteriores están definidos sobre todo el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$. Pero eventualmente es necesario considerar operadores definidos únicamente sobre ciertos subespacios de $\mathcal{C}_2(a,b)$. Un ejemplo es el operador diferencial

$$D\,x(t) := x'(t)\,, \tag{3.11}$$

definido sólo sobre el conjunto de aquellas funciones de $\mathcal{C}_2(a,b)$ que tienen una derivada primera continua, $x'(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$. $\diamond$

Definición 3.2. El **núcleo** (kernel) o **subespacio nulo** de un operador lineal A, $\mathrm{Ker}\,(A)$, es el conjunto de vectores $x \in \mathbf{E}$ que son aplicados en el vector nulo por la acción de A,

$$A\,x = \mathbf{0}\,, \quad \forall\, x \in \mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathbf{E} \tag{3.12}$$

(mostrar que se trata de un subespacio).

Definición 3.3. El **rango** o **imagen** de un operador lineal A, $\mathrm{Rank}\,(A)$, es el conjunto de vectores $y \in \mathbf{E}$ que son la imagen por A de algún vector de $x \in \mathbf{E}$,

$$\forall\, y \in \mathrm{Rank}\,(A) \subset \mathbf{E}\,,\ \exists\, x \in \mathbf{E} \mid y = A\,x\,. \tag{3.13}$$

Un operador lineal definido sobre un espacio euclídeo de dimensión finita queda determinado completamente por los valores que toma sobre una base ortonormal de ese espacio. En efecto, consideremos un espacio de dimensión n, $\mathbf{E}_n$, generado por un sistema ortonormal completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$. El operador A aplica los vectores de la base en una combinación lineal de esos mismos vectores,

$$A\,e_i = \sum_{j=1}^{n} e_j\,\mathcal{A}_{j\,i}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{3.14}$$

mientras que para un vector arbitrario $x = \xi_1 \, e_1 + \cdots + \xi_n \, e_n$ tenemos

$$A \, x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, A \, e_i = \sum_{j=1}^{n} e_j \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{j\,i} \, \xi_i \, . \tag{3.15}$$

El vector imagen $y = A \, x = \eta_1 \, e_1 + \cdots + \eta_n \, e_n$ tiene por coeficientes de Fourier a $\eta_j = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}_{j\,i} \, \xi_i$, o bien, en notación matricial,

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1\,1} & \dots & \mathcal{A}_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{n\,1} & \dots & \mathcal{A}_{n\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} . \tag{3.16}$$

En consecuencia, haciendo uso del isomorfismo que existe entre el espacio complejo (real) $\mathbf{E}_n$ y el espacio $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$), vemos que todo operador lineal A puede ser representado por una matriz $\mathcal{A}$ de $n \times n$ (operador lineal sobre el espacio de la n-uplas), cuyos **elementos de matriz** (relativos a la base considerada) están dados por $\mathcal{A}_{i\,j} = (e_i, A \, e_j)$.

Inversamente, dada una base ortonormal en $\mathbf{E}_n$, toda matriz de $n \times n$ define un operador lineal sobre dicho espacio mediante la relación (3.15). En consecuencia, existe una correspondencia biunívoca entre operadores lineales sobre $\mathbf{E}_n$ y matrices de $n \times n$ (operadores lineales sobre el espacio de la n-uplas).

Dos operadores lineales A y B definidos sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ son iguales si $A \, x = B \, x$, $\forall \, x \in \mathbf{E}$.

Al igual que con las matrices, es posible definir operaciones de suma y multiplicación por números de operadores lineales sobre un espacio euclídeo.

En efecto, sean A, B, C operadores lineales sobre $\mathbf{E}$, y $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ números; las siguientes operaciones definen nuevos operadores lineales sobre $\mathbf{E}$:

- la **suma o adición** de dos operadores lineales, $C = A + B$, es un operador lineal definido por

$$C \, x := A \, x + B \, x \, , \quad \forall \, x \in \mathbf{E} \, ; \tag{3.17}$$

- la **multiplicación o producto** de un operador lineal A por un número λ es un operador lineal definido por

$$(\lambda \, A) x := \lambda (A \, x) \, , \quad \forall \, x \in \mathbf{E} \, ; \tag{3.18}$$

(mostrar en ambos casos que el operador resultante es lineal).

Si $\mathbf{O}$ es el operador nulo, y $-A = (-1)A$, como consecuencia de las operaciones lineales definidas sobre vectores se verifica de inmediato que

- $A + B = B + A$,
- $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- $A + \mathbf{O} = A$,
- $A + (-A) = \mathbf{O}$,
- $1\,A = A$,
- $\lambda_1(\lambda_2\,A) = (\lambda_1\,\lambda_2)A$,
- $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1\,A + \lambda_2\,A$,
- $\lambda(A + B) = \lambda\,A + \lambda\,B$.

Esto muestra que el conjunto de todos los operadores lineales definidos sobre un espacio euclídeo **E** forman ellos mismos un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo que **E**.

También es posible introducir un **producto** o **composición** de operadores lineales, que corresponde al producto usual de matrices. Si A, B son operadores lineales sobre **E**, la composición $C = A\,B$ es el operador lineal definido por

$$C\,x = (A\,B)x := A(B\,x)\,, \quad \forall\,x \in \mathbf{E}\,. \tag{3.19}$$

En efecto, el producto $A\,B$ así definido es lineal:

$$(A\,B)(\alpha\,x + \beta\,y) = A\,(\alpha\,B\,x + \beta\,B\,y) = \alpha(A\,B)\,x + \beta(A\,B)\,y\,. \tag{3.20}$$

Con esta definición también se verifica que

- $A(B\,C) = (A\,B)C$,
- $A(B + C) = A\,B + A\,C$,
- $(A + B)C = A\,C + B\,C$,
- $\lambda(A\,B) = (\lambda\,A)B = A(\lambda\,B)$,

pero en general

- $A\,B \neq B\,A$.

Esto es, la composición de operadores es asociativa, distributiva y no conmutativa (al igual que el producto de matrices cuadradas).

La asociatividad del producto permite definir potencias positivas de un operador lineal,

$$A^1 := A\,, \quad A^2 := A\,A\,, \ldots\,, \quad A^{n+1} := A\,A^n\,, \quad \text{etc.} \tag{3.21}$$

También se define $A^0 := \mathbf{I}$. De esto resulta que $A^n\,A^m = A^{n+m}$, $\forall\,n, m \in \mathbb{N}$.

Definición 3.4. Un operador B que satisface $B\,A = \mathbf{I}$ se dice **inverso a izquierda** de A. Similarmente, si C satisface $A\,C = \mathbf{I}$ se dice **inverso a derecha** de A.

Estos inversos en general no existen (similarmente a lo que ocurre en el caso de las matrices cuadradas). Una condición necesaria para la existencia del inverso a izquierda es que si $A\,x_0 = \mathbf{0} \Rightarrow x_0 = \mathbf{0}$. En efecto, $B(A\,x_0) = B\,\mathbf{0} = \mathbf{0} = (B\,A)x_0 = \mathbf{I}\,x_0 = x_0$.

En el caso de espacios de dimensión finita, el problema de hallar el operador inverso a izquierda de A se reduce al de invertir la matriz $\mathcal{A}$ asociada al operador, relativa a una base ortonormal del espacio euclídeo. Eso requiere que el determinante $\det \mathcal{A} \neq 0$, en cuyo caso el inverso a derecha coincide con el inverso a izquierda, y ambos se denotan por A^{-1}, operador correspondiente a la matriz inversa $\mathcal{A}^{-1}$.

En el caso de espacios euclídeos de dimensión infinita, el problema del inverso es más delicado. En particular, la existencia de un inverso a izquierda no implica la existencia de un inverso a derecha. De la misma manera, un inverso a izquierda no necesariamente tiene a su vez un inverso a izquierda. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

• Consideremos el espacio lineal formado por el conjunto de los polinomios en t a coeficientes reales, en el intervalo $[-a, a]$,

$$\mathcal{P}_2(-a,a) = \{P(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots + a_n\,t^n\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ a_k \in \mathbb{R}\}\,. \tag{3.22}$$

Como subespacio del espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}_2(-a,a)$, se trata de un espacio euclídeo, que tiene dimensión infinita como consecuencia de que las potencias de t, $\{t^n\,, n = 0, 1, 2, \dots\}$ forman un conjunto linealmente independiente.

En este espacio, el operador integral $A : \mathcal{P}_2(-a,a) \to \mathcal{P}_2(-a,a)$ definido por

$$A\,P(t) := \int_0^t P(s)\,ds = a_0\,t + a_1\,\frac{t^2}{2} + \cdots + a_n\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,, \tag{3.23}$$

tiene por inversa a izquierda al operador diferencial $D : \mathcal{P}_2(-a,a) \to \mathcal{P}_2(-a,a)$ definido por

$$D\,P(t) := P'(t)\,. \tag{3.24}$$

En efecto,

$$D\,A\,P(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t P(s)\,ds = P(t)\,. \tag{3.25}$$

De hecho, D tiene infinitas inversas a derecha,

$$D\int_{t_0}^{t} P(s)\,ds = P(t)\,. \tag{3.26}$$

Pero D no tiene una inversa a izquierda, puesto que

$$D\,P(t) = 0 + a_1 + 2a_2\,t + \cdots + na_n\,t^{n-1}\,, \quad \forall\, a_0 \tag{3.27}$$

(dicho de otro modo, $D(a_0\,t^0) = 0$, $\forall\, a_0 \neq 0$). $\diamond$

4. Sistemas de vectores ortogonales

Teorema 4.1. *Sea $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ una secuencia (finita o infinita) de vectores de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, y sea $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k)$ la variedad lineal generada por los k primeros vectores de la secuencia. Entonces, siempre existe un sistema de vectores $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ tales que, $\forall\, k$,*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k)\,, \\ \\ y_{k+1} \perp \mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k)\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Este resultado puede demostrarse por inducción completa. En efecto, supongamos que han sido construidos los primeros vectores $y_1, y_2, \ldots, y_k$ con esas propiedades. En particular, para $k = 1$ basta con tomar $y_1 = x_1$ (si $x_1 \neq \mathbf{0}$).

Para un dado k, la variedad lineal $\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k)$ es un subespacio de dimensión finita de $\mathbf{E}$, de modo que el vector x_{k+1} puede escribirse como la suma $x_{k+1} = u_{k+1} + v_{k+1}$, donde $u_{k+1} \in \mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k)$ y $v_{k+1} \perp \mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k)$ (ver Lema 3.1). En consecuencia, tomando $y_{k+1} = v_{k+1}$ se satisface la segunda condición.

Por otra parte, por hipótesis $\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k) = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k)$, mientras que $x_{k+1} = y_{k+1} + u_{k+1}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \subset \mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1})$.

Similarmente, dado que $u_{k+1} \in \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k)$ y $y_{k+1} = x_{k+1} - u_{k+1}$, entonces $\mathcal{L}(y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}) \subset \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$.

Finalmente, si $y_k = \mathbf{0}$ para algún k, eso significa que x_k no es linealmente independiente de los vectores $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$, y puede ser descartado de la secuencia original. Además, los vectores $y_k \neq \mathbf{0}$ pueden ser normalizados de modo de obtener una secuencia ortonormal. $\square$

Ejemplo:

• Consideremos la secuencia de funciones linealmente independientes $\{x_0(t) = 1, x_1(t) = t, \ldots, x_k(t) = t^k, \ldots\} \in \mathcal{C}_2(-1, 1)$. En este caso, $\mathcal{L}(x_0, \ldots, x_k)$ es el subespacio de polinomios $P(t)$ de grado $\leq k$, y las funciones ortogonales $y_k(t) = P_k(t)$ que se obtienen son los **polinomios de Legendre**,

$$
\begin{aligned}
&P_0(t) = y_0(t) = x_0(t) = 1\,,\\
&P_1(t) = y_1(t) = x_1(t) - \frac{(y_0, x_1)}{(y_0, y_0)}\, y_0(t) = t\,,\\
&P_2(t) = y_2(t) = x_2(t) - \frac{(y_0, x_2)}{(y_0, y_0)}\, y_0(t) - \frac{(y_1, x_2)}{(y_1, y_1)}\, y_1(t) = t^2 - \frac{1}{3}\,,\\
&\vdots\\
&P_k(t) = y_k(t) = x_k(t) - \frac{(y_0, x_k)}{(y_0, y_0)}\, y_0(t) - \cdots - \frac{(y_{k-1}, x_k)}{(y_{k-1}, y_{k-1})}\, y_{k-1}(t)\,.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

5. Operadores acotados

Dado un operador lineal sobre un espacio euclídeo, $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, se define su **norma**, $\| A \|$, como la mínima cota superior o **supremo** de la funcional $\| A\, x \|$ tomada sobre el conjunto de vectores de longitud 1 (**vectores unitarios**) de ese espacio,

$$
\| A \| := \sup_{\{x \in \mathbf{E} \,\mid\, \|x\|=1\}} \| A\, x \| \;. \tag{5.1}
$$

Si $\| A \| < \infty$, el operador A se dice **acotado**.

Definición 5.1. Todo vector unitario $x_0 \in \mathbf{E}$ para el cual esa cota es alcanzada se dice **vector máximo** de A.

Ejemplos:

• El operador identidad, $\mathbf{I}$, tiene norma $\| \mathbf{I} \| = 1$,

$$
\| \mathbf{I} \| = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| \mathbf{I}\, x \| = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| x \| = 1\,, \tag{5.2}
$$

y todo vector unitario es un vector máximo de $\mathbf{I}$.

• Consideremos un operador diagonal en un espacio de dimensión finita n, $A\, e_i = \lambda_i\, e_i$, y sea λ_{max} el autovalor de máximo módulo, $|\lambda_i| \leq |\lambda_{max}|$, para $i = 1, \ldots, n$, correspondiente al vector unitario e_{max} de la base ortonormal considerada. Entonces,

$$\begin{array}{c} \| A \|^2 = \sup_{\{\| x \| = 1\}} \| A\, x \|^2 = \\ = \sup_{\{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2 = 1\}} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\, |\xi_i|^2 \leq |\lambda_{max}|^2 \,. \end{array} \tag{5.3}$$

Por otra parte, $\| A\, e_{max} \| = |\lambda_{max}|$. Por lo tanto, $\| A \| = |\lambda_{max}|$ y e_{max} es un vector máximo de A.

• El operador nulo $\mathbf{O}$ tiene norma nula,

$$\| \mathbf{O} \| = \sup_{\{\| x \| = 1\}} \| \mathbf{0} \| = 0 \,. \tag{5.4}$$

Inversamente, si A tiene norma nula y $\| x \| = 1$,

$$\| A \| = 0 \Rightarrow 0 \leq \| A\, x \| \leq 0 \;\Rightarrow\; A\, x = \mathbf{0} \,,\ \forall\, x \in \mathbf{E} \,. \tag{5.5}$$

Por lo tanto, $\| A \| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = \mathbf{O}$. ◇

Lema 5.2. *En un espacio euclídeo de dimensión finita, todo operador lineal resulta acotado y tiene un vector máximo.*

En efecto, consideremos el caso de un espacio real de dimensión finita n, $\mathbf{E}_n$, donde un vector genérico tiene el desarrollo $x = \xi_1\, e_1 + \cdots + \xi_n\, e_n$, con $\xi_i \in \mathbb{R}$, respecto de cierta base ortonormal. La funcional

$$F(x) := \| A\, x \|^2 \geq 0 \tag{5.6}$$

se reduce a (ver ec. (3.15))

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} (A_{k\,l}\, \xi_l)^2 = f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R} \,, \tag{5.7}$$

donde $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ es una función cuadrática de n variables reales[1]. Esta es una función continua que debe ser analizada en la esfera de radio 1 de $\mathbf{E}_n$, donde $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$, lo que corresponde a una región acotada y cerrada de $\mathbb{R}^n$.

Ahora bien, toda función continua en una región acotada y cerrada de $\mathbb{R}^n$ está acotada, y como todo conjunto acotado de números reales tiene un supremo, entonces existe $\| A \| \geq 0$ tal que $F(x) \leq \| A \|^2$.

Por otra parte, toda función continua $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ en una región acotada y cerrada alcanza un valor máximo (que naturalmente coincide con su supremo).

[1] El caso de un espacio complejo de dimensión n es enteramente similar, resultando $f(\xi)$ una función real, cuadrática en $2n$ variables reales.

Supongamos que ello ocurre en un punto de coordenadas $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$. Ese punto de $\mathbb{R}^n$ define un vector unitario $x_0 = \xi_1^0\, e_1 + \cdots + \xi_n^0\, e_n \in \mathbf{E}_n$ para el cual es

$$\| A\, x_0 \|^2 = f(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) = \| A \|^2 \tag{5.8}$$

y, en consecuencia, es un máximo de A. □

A diferencia de lo que ocurre en dimensión finita, en el caso de espacios de dimensión infinita los operadores pueden ser **no acotados** (de norma no finita) o, siéndolo, pueden no tener un vector máximo.

Ejemplo:

• Consideremos el operador diferencial de la ec. (3.11) y una función de la forma $e^{\lambda\, t} \in \mathcal{C}_2(a,b)$, entonces

$$\| D\, e^{\lambda t} \| = \| \left(e^{\lambda\, t}\right)' \| = \| \lambda\, e^{\lambda t} \| = |\lambda|\; \| e^{\lambda\, t} \| , \tag{5.9}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $\| D\, x(t) \|$ no está acotado sobre la esfera de radio 1 del subespacio de funciones diferenciables de $\mathcal{C}_2(a,b)$.

◇

Sea A un operador lineal acotado sobre $\mathbf{E}$, y $x \in \mathbf{E}$ un vector no nulo. Entonces $y = x / \| x \|$ es un vector unitario, de modo que

$$\left\| A \frac{x}{\| x \|} \right\| = \frac{1}{\| x \|} \| A\, x \| \leq \| A \| \Rightarrow \| A\, x \| \leq \| A \| \, \| x \| \ . \tag{5.10}$$

Por otra parte, si $x = \mathbf{0}$, $\| A\, x \| = 0 = \| A \| \, \| x \|$. En consecuencia, tenemos la siguiente

Propiedad 5.3. Si A es un operador lineal acotado sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$,

$$\| A\, x \| \leq \| A \| \, \| x \| , \ \forall\, x \in \mathbf{E} . \tag{5.11}$$

Propiedad 5.4. La norma de un operador acotado A puede definirse equivalentemente como

$$M := \sup_{\{x,y \ \text{unitarios}\}} |(y, A\, x)| \ . \tag{5.12}$$

En efecto, para todo par de vectores unitarios $x, y \in \mathbf{E}$ tenemos

$$|(y, A\, x)| \ \leq \| y \| \, \| A\, x \| \leq \| A \| \, \| x \| = \| A \| , \tag{5.13}$$

donde hemos empleado la propiedad (5.11). Entonces, $M \leq \parallel A \parallel$. Por otra parte, $\forall\, x$ unitario tal que $A\,x \neq \mathbf{0}$, y con $y = \parallel A\,x \parallel^{-1} A\,x$ (también unitario y paralelo a x), resulta

$$|(y, A\,x)| = \parallel y \parallel \parallel A\,x \parallel = \parallel A\,x \parallel \leq M\,, \tag{5.14}$$

de modo que $\sup_{\{\parallel x \parallel = 1\}} \parallel A\,x \parallel = \parallel A \parallel \leq M$. Por lo tanto, $M = \parallel A \parallel$.

Sean A, B operadores lineales acotados sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$. Su suma es también un operador acotado,

$$\parallel A + B \parallel \leq \parallel A \parallel + \parallel B \parallel\,, \tag{5.15}$$

como consecuencia de la desigualdad triangular para la norma de los vectores en $\mathbf{E}$,

$$\parallel (A + B)\,x \parallel \leq \parallel A\,x \parallel + \parallel B\,x \parallel\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{5.16}$$

Esto significa que el conjunto de los operadores lineales acotados sobre $\mathbf{E}$ constituye un **subespacio** del espacio vectorial de los operadores lineales.

Además, la norma de operadores acotados satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{c} \parallel A \parallel \geq 0\,,\ \text{y}\ \parallel A \parallel = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{O}\,, \\ \\ \parallel \lambda\, A \parallel = |\lambda| \parallel A \parallel\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,. \end{array} \tag{5.17}$$

Las ecs. (5.15) y (5.17) muestran que los operadores lineales acotados sobre un espacio euclídeo forman un **espacio normado** o **espacio de Banach**[2].

Por otra parte,

$$\parallel A\,B \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel B \parallel\,, \tag{5.19}$$

dado que

$$\parallel (A\,B)\,x \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel B\,x \parallel \leq \parallel A \parallel \parallel B \parallel \parallel x \parallel\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{5.20}$$

---

[2]Un espacio de Banach $\mathbf{F}$ es un espacio lineal que tiene definida una **norma** que, $\forall\, \psi, \phi \in \mathbf{F}$, satisface las siguientes propiedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \parallel \psi \parallel \geq 0,\ \text{y}\ \parallel \psi \parallel = 0 \Leftrightarrow \psi = \mathbf{0}\ (\text{elemento neutro de } \mathbf{F})\,, \\ \\ \parallel \lambda\, \psi \parallel = |\lambda| \parallel \psi \parallel\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,, \\ \\ \parallel \psi + \phi \parallel \leq \parallel \psi \parallel + \parallel \phi \parallel\ . \end{array} \right. \tag{5.18}$$

Un espacio euclídeo es automáticamente un espacio de Banach, dado que el producto escalar permite definir una norma con esas propiedades.

6. El operador adjunto

Dado un operador lineal acotado A, definido sobre todo un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$, se define su **operador adjunto**, $A^\dagger$, como aquel operador que satisface

$$(y, A^\dagger x) = (A\, y, x) = (x, A\, y)^* \ , \ \forall\, x, y \in \mathbf{E} \, . \tag{6.1}$$

En el caso de un espacio euclídeo de dimensión finita, generado por la base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, la matriz asociada al operador adjunto, $\mathcal{A}'$, tiene por elementos de matriz a

$$(\mathcal{A}')_{ij} = \left(e_i, A^\dagger e_j\right) = (A\, e_i, e_j) = (e_j, A\, e_i)^* = (\mathcal{A})^*_{j\,i} = \left(\mathcal{A}^\dagger\right)_{ij} \, . \tag{6.2}$$

Es decir, la matriz asociada al operador adjunto $A^\dagger$ es la **matriz adjunta** (traspuesta y conjugada) de aquella asociada al operador A: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^\dagger = (\mathcal{A}^t)^*$.

Si A es un operador acotado, la norma del operador adjunto coincide con la norma de A. En efecto,

$$\| A^\dagger \| = \sup_{\{x,y \ \text{unitarios}\}} \left|\left(x, A^\dagger y\right)\right| = \sup_{\{x,y \ \text{unitarios}\}} |(y, A\, x)^*| = \| A \| \, . \tag{6.3}$$

Si x_0 (unitario) es un vector máximo de $A \neq \mathbf{O}$ (es decir, $\| A\, x_0 \| = \| A \| > 0$), entonces $y_0 = A\, x_0 / \| A \|$ (también unitario) es un vector máximo de $A^\dagger$. En efecto,

$$\begin{array}{c} \| A \|^2 = \| A\, x_0 \|^2 = \left(x_0, A^\dagger A\, x_0\right) \leq \| x_0 \| \, \| A^\dagger A\, x_0 \| \leq \\[2ex] \leq \| A^\dagger \| \, \| A\, x_0 \| = \| A^\dagger \| \, \| A \| = \| A \|^2 \Rightarrow \\[2ex] \Rightarrow \| A^\dagger y_0 \| = \| A^\dagger \| \, . \end{array} \tag{6.4}$$

Definición 6.1. Un operador acotado A definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice **simétrico** si

$$(A\, x, y) = (x, A\, y) \, , \ \forall\, x, y \in \mathbf{E} \, . \tag{6.5}$$

Dado que

$$(A\, x, y) = (y, A\, x)^* = (A^\dagger y, x)^* = (x, A^\dagger y) \, , \tag{6.6}$$

un operador simétrico acotado coincide con su adjunto. En efecto, de (6.5) y (6.6) resulta que

$$\left(x, \left(A^\dagger - A\right) y\right) = 0\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,, \tag{6.7}$$

y en particular, para $x = \left(A^\dagger - A\right) y$. En consecuencia,

$$\|\ \left(A^\dagger - A\right) y\ \| = 0\,,\ \forall\, y \in \mathbf{E}\,, \tag{6.8}$$

de modo que, por el tercer axioma del producto escalar (ec. (1.3)), es $A^\dagger\, y = A\, y\,, \forall\, y \in \mathbf{E}$. Es decir, $A^\dagger = A$.

Definición 6.2. Un operador que coincide con su adjunto se dice **autoadjunto**.[3]

Los elementos de matriz de un operador simétrico A en un espacio euclídeo de dimensión finita, generado por la base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$, satisfacen

$$(A\, e_i, e_j) = (e_j, A\, e_i)^* = \mathcal{A}^*_{j\,i} = (e_i, A\, e_j) = \mathcal{A}_{ij}\,. \tag{6.9}$$

En consecuencia, la matriz asociada a A es **autoadjunta** (coincide con su traspuesta conjugada), $\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}$.

7. Subespacios invariantes. Autovectores y autovalores

Un subespacio de un espacio euclídeo, $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, se dice **invariante** frente a la acción del operador $A : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ si

$$\forall\, x \in \mathbf{E}'\,,\ A\, x \in \mathbf{E}'\,. \tag{7.1}$$

Ejemplos:

• Los **subespacios triviales** $\mathbf{E}$ y $\{\mathbf{0}\}$ son invariantes frente a la acción de todo operador lineal sobre $\mathbf{E}$.

• Todo subespacio de $\mathbf{E}$ es invariante frente a la acción de $\mathbf{O}$ y de $\mathbf{I}$.

• El operador de proyección P sobre un subespacio de dimensión finita $\mathbf{E}_n \subset \mathbf{E}$ (definido en la ec. (3.3)) deja invariante al subespacio $\mathbf{E}_n$ y a su complemento ortogonal $\mathbf{E}_n^\perp$. En efecto,

$$P\, u = u \in \mathbf{E}_n\,,\ \forall\, u \in \mathbf{E}_n\,, \quad P\, v = \mathbf{0} \in \mathbf{E}_n^\perp\,,\ \forall\, v \perp \mathbf{E}_n\,. \tag{7.2}$$

• El operador diagonal de la ec. (3.7) deja invariante el subespacio generado por cualquier subconjunto de vectores de la base.

[3] La diferencia entre los términos simétrico y autoadjunto se pondrá en evidencia más adelante, al considerar operadores no acotados.

• El operador de multiplicación de la ec. (3.9), definido sobre $\mathcal{C}_2(a,b)$ como $A\,x(t) = \varphi(t)\,x(t)$, con $\varphi(t)$ continua, deja invariante el subespacio de las funciones continuas en $[a,b]$ que se anulan idénticamente en el intervalo $\Delta \subset [a,b]$.

• El conjunto de las combinaciones lineales de las funciones $\cos t$ y $\sin t$, $\mathcal{L}\{\cos t, \sin t\} \subset \mathcal{C}_2(-\pi,\pi)$, es un subespacio invariante frente a la acción del operador diferencial $D\,x(t) = x'(t)$. $\diamond$

Definición 7.1. Los subespacios unidimensionales invariantes respecto de un operador lineal A juegan un papel especial. Todo vector no nulo de esas **direcciones invariantes** es un **autovector** de A.

Dado un autovector $x \in \mathbf{E}$, $A\,x$ es necesariamente colineal con x,

$$A\,x = \lambda\,x\,, \text{ para un } \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{7.3}$$

Todo otro vector y de esa dirección invariante es también colineal con x, y puede escribirse como $y = c\,x$, con $c \in \mathbb{C}$. Entonces, $A\,y = A(c\,x) = c\,A\,x = \lambda\,y$, de modo que el número λ, llamado **autovalor** de A correspondiente al autovector x, es independiente del vector no nulo seleccionado, siendo una característica de ese subespacio unidimensional invariante.

Ejemplos:

• Todo vector no nulo $x \in \mathbf{E}$ es un autovector de los operadores $\mathbf{O}$ e $\mathbf{I}$,

$$\mathbf{O}\,x = 0\,x\,, \quad \mathbf{I}\,x = 1\,x\,. \tag{7.4}$$

• Para el operador de proyección tenemos

$$P\,u = 1\,u\,,\ \forall\,u \in \mathbf{E}_n\,, \quad P\,v = 0\,v\,,\ \forall\,v \perp \mathbf{E}_n\,. \tag{7.5}$$

• El operador de multiplicación por una función $\varphi(t)$ real monótona no tiene autovectores.

En efecto, consideremos la **ecuación de autovalores**

$$A\,x(t) = \varphi(t)\,x(t) = \lambda\,x(t)\,. \tag{7.6}$$

Si $x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$ es no nula en un punto $t = t_0$, entonces es no nula en todo un entorno de dicho punto $\Delta \subset (a,b)$. En consecuencia, $\forall\,t \in \Delta$ debe ser $\varphi(t) = \lambda$, ecuación que no tiene solución para λ si $\varphi(t)$ es monótona creciente o decreciente.

Por lo tanto, no existe ninguna función continua $x(t)$, no idénticamente nula, que satisfaga la ec. (7.6).

• Para el operador diferencial $D\,x(t) = x'(t)$, definido sobre el subespacio de las funciones diferenciables en (a, b), la ecuación de autovalores tiene solución $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$:

$$x'(t) = \lambda\,x(t) \;\Rightarrow\; x(t) \sim e^{\lambda\,t}\,. \tag{7.7}$$

Si $-\infty < a < b < \infty$, tenemos que $\parallel e^{\lambda\,t} \parallel < \infty$, y ese es un vector del espacio $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$.

En consecuencia, este operador tiene un conjunto infinito de autovectores correspondientes a autovalores diferentes. ◇

8. Propiedades de los autovectores

Teorema 8.1. *Los autovectores $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ de un operador lineal A, correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$, son linealmente independientes.*

La prueba se hace inductivamente, por reducción al absurdo. Supongamos que los $m-1$ primeros autovectores son linealmente independientes, pero que podemos formar una combinación lineal nula con los m primeros autovectores,

$$c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_{m-1}\,x_{m-1} + c_m\,x_m = \mathbf{0}\,, \tag{8.1}$$

con no todos los coeficientes c_k nulos. Aplicando el operador $(A - \lambda_m\,\mathbf{I})$ a ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$$(\lambda_1 - \lambda_m)\,c_1\,x_1 + (\lambda_2 - \lambda_m)\,c_2\,x_2 + \cdots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)\,c_{m-1}\,x_{m-1} + 0\,x_m = \mathbf{0}\,, \tag{8.2}$$

lo que requiere que $c_k = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Pero entonces, de (8.1) resulta que $c_m\,x_m = \mathbf{0}$, en contradicción con la hipótesis. □

De aquí resulta, en particular, que un operador lineal definido sobre un espacio de dimensión finita n no puede tener más de n autovectores correspondientes a autovalores distintos.

Teorema 8.2. *Los autovectores de un operador lineal A correspondientes a un mismo autovalor λ conforman un subespacio lineal $\mathbf{E}_\lambda \subset \mathbf{E}$.*

En efecto, si

$$A\,x_1 = \lambda\,x_1\,,\; A\,x_2 = \lambda\,x_2 \;\Rightarrow\; A(c_1\,x_1 + c_2\,x_2) = \lambda(c_1\,x_1 + c_2\,x_2)\,. \tag{8.3}$$

□

$\mathbf{E}_\lambda$ es llamado **subespacio característico** correspondiente al autovalor λ.

En el caso de operadores simétricos, también valen los siguientes resultados.

Teorema 8.3. *Los autovalores de un operador lineal simétrico A son reales.*

En efecto, supongamos que $A\,x = \lambda\,x$; entonces

$$\lambda \parallel x \parallel^2 = (x, A\,x) = (A\,x, x) = \lambda^* \parallel x \parallel^2 \;\Rightarrow\; \lambda^* = \lambda\,. \tag{8.4}$$

□

Teorema 8.4. *Los autovectores de un operador lineal simétrico A correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales entre sí.*

Supongamos que $A\,x = \lambda\,x$ y $A\,y = \lambda\,y$, con $\lambda \neq \mu$. Entonces,

$$(\lambda - \mu)(y, x) = (y, A\,x) - (A\,y, x) = 0 \;\Rightarrow\; (y, x) = 0\,. \tag{8.5}$$

Por lo tanto, $x \perp y$ si $\lambda \neq \mu$. □

Teorema 8.5. *Sea $\mathbf{E}'$ un subespacio invariante frente a la acción de un operador lineal simétrico A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$. Entonces, el complemento ortogonal de $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$, es también un subespacio invariante frente a A.*

En efecto, por hipótesis tenemos que $A\,x' \in \mathbf{E}'$, $\forall\, x' \in \mathbf{E}'$. Entonces, $\forall\, x' \in \mathbf{E}'$ y $\forall\, x'' \in \mathbf{E}''$,

$$(x'', A\,x') = 0 \;\Rightarrow\; (A\,x'', x') = 0\,, \tag{8.6}$$

dado que A es simétrico. Por lo tanto, $A\,x'' \perp \mathbf{E}'$, $\forall\, x'' \in \mathbf{E}''$. □

Los siguientes resultados establecen condiciones suficientes para la existencia de autovectores de operadores simétricos acotados definidos sobre espacios euclídeos de cualquier dimensión.

Lema 8.6. *Sea A un operador simétrico y e un vector unitario. Entonces,*

$$\parallel A\,e \parallel^2 \leq \parallel A^2\,e \parallel\,, \tag{8.7}$$

donde vale la igualdad sólo si e es un autovector de A^2 con autovalor $\lambda = \parallel A\,e \parallel^2$.

En efecto, de la desigualdad de Cauchy - Schwarz obtenemos

$$\parallel A\,e \parallel^2 = (A\,e, A\,e) = (e, A^2\,e) \leq \parallel e \parallel \parallel A^2\,e \parallel = \parallel A^2\,e \parallel\,, \tag{8.8}$$

donde la desigualdad se reduce a una igualdad únicamente cuando ambos vectores en el producto escalar son colineales, es decir, si

$$A^2\,e = \lambda\,e\,. \tag{8.9}$$

En ese caso, $(e, A^2\, e) = \lambda = \| \, A\, e \, \|^2$. □

Lema 8.7. *Si e_0 es un vector (unitario) máximo de un operador simétrico acotado A, entonces e_0 es un autovector de A^2 correspondiente al autovalor $\lambda = \| \, A \, \|^2$.*

Si e_0 es un vector máximo de A, entonces $\| \, A\, e_0 \, \| = \| \, A \, \|$.

Del Lema anterior, y del hecho de que A es acotado, podemos escribir que

$$\| \, A \, \|^2 = \| \, A\, e_0 \, \|^2 \leq \| \, A^2\, e_0 \, \| \leq \| \, A \, \| \, \| \, A\, e_0 \, \| = \| \, A \, \|^2 \,, \tag{8.10}$$

de modo que las desigualdades en (8.10) se reducen a igualdades.

Por el Lema 8.6, sabemos entonces que e_0 es un autovector de A^2 con autovalor $\lambda = \| \, A\, e_0 \, \|^2$,

$$A^2\, e_0 = \lambda\, e_0 \,, \quad \lambda = \| \, A\, e_0 \, \|^2 = \| \, A \, \|^2 \ . \tag{8.11}$$

□

Lema 8.8. *Si el operador simétrico acotado A tiene un vector máximo e_0, entonces A también tiene un autovector con autovalor $\mu = \| \, A \, \|$ o $\mu = - \| \, A \, \|$.*

Del Lema anterior sabemos que

$$A^2\, e_0 = \| \, A \, \|^2 \, e_0 \;\Rightarrow\; \Big(A - \| \, A \, \| \, \mathbf{I} \Big) \Big(A + \| \, A \, \| \, \mathbf{I} \Big) e_0 = \mathbf{0} \,. \tag{8.12}$$

Sea $x_0 = \Big(A + \| \, A \, \| \, \mathbf{I} \Big) e_0$. Tenemos dos posibilidades,

$$x_0 = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; A\, e_0 = - \| \, A \, \| \, e_0 \,, \tag{8.13}$$

o bien

$$x_0 \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; A\, x_0 = \| \, A \, \| \, x_0 \,. \tag{8.14}$$

En cualquier caso, existe un vector $e \neq \mathbf{0}$ tal que $A\, e = \mu\, e$, con $|\mu| = \| \, A \, \|$. □

De hecho, ya hemos visto que en un espacio euclídeo de dimensión finita todo operador lineal es acotado y tiene un vector máximo (ver Lema 5.2). En ese caso puede establecerse el siguiente teorema.

Teorema 8.9. *Todo operador simétrico A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}_n$ de dimensión finita n, tiene n autovectores ortogonales entre sí.*

En efecto, por el Lema 5.2 sabemos que existe en $\mathbf{E}_n$ un vector unitario que es un máximo de A. Y, siendo A simétrico, por el Lema 8.8 sabemos que entonces tiene un autovector e_1 correspondiente a un autovalor λ_1, $A\, e_1 = \lambda_1\, e_1$, tal que $|\lambda_1| = M_1 = \| \, A \, \|$.

Ahora bien, el subespacio generado por e_1, $\mathcal{L}\{e_1\}$, es invariante frente a la acción de A. Por lo tanto (ver Teorema 8.5), también lo es su complemento ortogonal, $\mathbf{E}_{n-1} = (\mathcal{L}\{e_1\})^{\perp}$,

$$A : \mathbf{E}_{n-1} \to \mathbf{E}_{n-1} \,. \tag{8.15}$$

Esto permite considerar la acción del operador A restringida al subespacio $\mathbf{E}_{n-1}$, de dimensión $n-1$, donde también define un operador simétrico y acotado. Su "norma" en este subespacio,

$$M_2 := \sup_{\{x\in\mathbf{E}_{n-1},\,\text{unitario}\}} \parallel A\,x \parallel \leq \sup_{\{x\in\mathbf{E}_{n},\,\text{unitario}\}} \parallel A\,x \parallel = M_1 \,, \tag{8.16}$$

no supera a la norma de A en el espacio completo.

El mismo argumento que antes permite concluir que existe en $\mathbf{E}_{n-1}$ un segundo autovector de A, e_2 (ortogonal a e_1 por construcción), $A\,e_2 = \lambda_2\,e_2$, correspondiente a un autovalor cuyo valor absoluto no supera a M_1, $|\lambda_2| = M_2 \leq |\lambda_1| = M_1$.

Si ahora consideramos el subespacio lineal generado por esos dos autovectores, $\mathcal{L}\{e_1, e_2\}$, vemos que es invariante, al igual que su complemento ortogonal $\mathbf{E}_{n-2} = (\mathcal{L}\{e_1, e_2\})^{\perp}$, de dimensión $n-2$. Podemos repetir la construcción anterior para obtener un tercer autovector de A, ortogonal a los dos anteriores, correspondiente a un autovalor cuyo valor absoluto no supera a M_2.

Este proceso puede repetirse hasta obtener n (máximo número de vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión n) autovectores de A ortogonales entre sí, ordenados de modo que el valor absoluto de sus autovalores forme una secuencia no creciente:

$$\begin{array}{c} A\,e_k = \lambda_k\,e_k \,, \ k = 1, 2, \ldots, n \,, \\ \text{con } e_i \perp e_j \,, \text{ para } i \neq j \,, \text{ y } \parallel A \parallel = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \,. \end{array} \tag{8.17}$$

□

Corolario 8.10. *Todo operador simétrico A definido sobre un espacio euclídeo de dimensión finita n es* **diagonal***, es decir, existe una base ortonormal del espacio formada por autovectores de A.*

Nótese que la matriz asociada a A referida a dicha base es diagonal, $\mathcal{A}_{ij} = (e_i, A\,e_j) = \lambda_i\,\delta_{ij}$.

El polinomio característico de $\mathcal{A}$, $P(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda)$, sólo puede tener raíces reales. Toda raíz de multiplicidad $1 < r \leq n$ corresponde a r autovectores **degenerados** (linealmente independientes y correspondientes al mismo autovalor) del operador A.

A diferencia de lo que ocurre en espacios de dimensión finita, un operador simétrico en un espacio de dimensión infinita puede o no tener autovectores, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

• Ya hemos visto que el operador A de multiplicación por una función real, continua y monótona $\varphi(t)$ no tiene autovectores (ver ec. (7.6)). No obstante, se trata de un operador acotado y simétrico en $\mathcal{C}_2(a,b)$. En efecto,

$$\| A\,x \|^2 = \int_a^b \varphi^2(t)\,|x(t)|^2\,dt \leq M^2 \int_a^b |x(t)|^2\,dt\,, \tag{8.18}$$

si $|\varphi(t)| \leq M$ para $t \in [a,b]$. Por lo tanto, $\| A \| \leq M$. Por otra parte, $\forall\, x, y \in \mathcal{C}_2(a,b)$ tenemos

$$\begin{aligned} (y, A\,x) &= \textstyle\int_a^b y(t)^* \left(\varphi(t)\,x(t)\right) dt = \\ &= \textstyle\int_a^b \left(\varphi(t)\,y(t)\right)^* x(t)\,dt = (A\,y, x)\,. \end{aligned} \tag{8.19}$$

En consecuencia, este operador no tiene un vector máximo.

El Lema 8.8 establece como condición suficiente para la existencia de autovectores de un operador simétrico que éste sea acotado y tenga un vector máximo. Si bien esta última condición se satisface automáticamente en el caso de dimensión finita, este ejemplo muestra que ella no puede relajarse en el caso de operadores en espacios de dimensión infinita.

• El operador integral de Fredholm, definido en la ec. (3.10), es simétrico si su núcleo $K(t,s)$ (continuo en ambas variables) es una función **Hermítica**, $K(s,t) = K(t,s)^*$. En efecto,

$$\begin{aligned} (y, A\,x) &= \textstyle\int_a^b y(t)^* \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\,dt = \\ &= \textstyle\int_a^b \left(\int_a^b K(s,t)\,y(t)\,dt\right)^* x(s)\,ds = (A\,y, x)\,. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Veremos más adelante que este operador es acotado, tiene un vector máximo y un conjunto infinito de autovectores linealmente independientes.

• El operador de Sturm - Liouville es un operador diferencial de segundo orden definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{C}_2(a,b)$, que contiene funciones con derivadas segundas continuas, de modo que

$$z(t) = L\,x(t) := \left(p(t)\,x'(t)\right)' + q(t)\,x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,, \tag{8.21}$$

$\forall\, x(t) \in \mathcal{D}(L)$, donde $p(t)$, $p'(t)$ y $q(t)$ son funciones reales y continuas.

Está claro que L es un operador lineal. Si L es además simétrico en su dominio de definición $\mathcal{D}(L)$, la diferencia

$$
\begin{aligned}
&(y, L\,x) - (L\,y, x) = \\
&= \int_a^b \left\{ y(t)^* \left[\Big(p(t)\,x'(t)\Big)' + q(t)\,x(t) \right] - \right. \\
&\left. - \left[\Big(p(t)\,y'(t)\Big)' + q(t)\,y(t) \right]^* x(t) \right\} dt = \\
&= \int_a^b \left[p(t) \Big(y(t)^*\,x'(t) - y'(t)^*\,x(t) \Big) \right]' dt = \\
&= p(b) \Big[y(b)^*\,x'(b) - y'(b)^*\,x(b) \Big] - p(a) \Big[y(a)^*\,x'(a) - y'(a)^*\,x(a) \Big]
\end{aligned} \tag{8.22}
$$

ha de ser nula $\forall\, x, y \in \mathcal{D}(L)$.

Para una función $p(t)$ arbitraria (aparte de ser continua en el intervalo cerrado $[a, b]$) debe garantizarse que la contribución de cada límite de integración sea nula imponiendo **condiciones de contorno locales** (es decir, condiciones en cada extremo de ese intervalo) a las funciones en $\mathcal{D}(L)$.

Consideremos, por ejemplo, la contribución del límite inferior. Una posibilidad es requerir simplemente que $x(a) = 0$ para toda $x(t) \in \mathcal{D}(L)$. Pero supongamos que ese no sea el caso, y tomemos dos funciones en $\mathcal{D}(L)$ que no se anulen en a; entonces podemos escribir

$$
\frac{x'(a)}{x(a)} = \left(\frac{y'(a)}{y(a)} \right)^* . \tag{8.23}
$$

En particular, si tomamos $y = x$ vemos que ese cociente debe ser real e independiente de la función considerada,

$$
x'(a) = c\,x(a)\,, \ c \in \mathbb{R}\,, \ \forall\, x \in \mathcal{D}(L) \mid x(a) \neq 0\,. \tag{8.24}
$$

Finalmente, si $x(t)$ satisface esa condición, entonces toda otra función $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ debe satisfacer que

$$
\begin{aligned}
&y(a)^*\,x'(a) - y'(a)^*\,x(a) = \Big(y(a)\,c - y'(a) \Big)^* x(a) = 0 \ \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ y'(a) = c\,y(a)\,.
\end{aligned} \tag{8.25}
$$

Por lo tanto, el caso más general de condición de contorno local en $t = a$ corresponde a requerir de las funciones en $\mathcal{D}(L)$ que

$$\alpha\, x'(a) + \beta\, x(a) = 0\,, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \alpha^2 + \beta^2 \neq 0\,. \tag{8.26}$$

En particular, $\alpha = 0 \Rightarrow x(a) = 0$.

Similarmente, la condición de contorno local más general en $t = b$ se expresa como

$$\gamma\, x'(b) + \delta\, x(b) = 0\,, \text{ con } \gamma, \delta \in \mathbb{R} \mid \gamma^2 + \delta^2 \neq 0\,. \tag{8.27}$$

Con las funciones en su dominio de definición sujetas a estas condiciones, el operador L resulta simétrico. Como las condiciones de contorno son homogéneas, el conjunto $\mathcal{D}(L)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{C}_2(a, b)$.

Más adelante veremos que este operador tiene un conjunto infinito de autovectores linealmente independientes, no obstante ser no acotado. Este ejemplo muestra que las condiciones del Lema 8.8 para la existencia de autovectores de operadores simétricos son suficientes pero no necesarias.

• Un caso particular de operador de Sturm - Liouville con esas propiedades se obtiene cuando la función $p(t)$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[a, b]$, $p(b) = p(a)$. En ese caso L también resulta simétrico si se imponen condiciones de contorno **periódicas** o **antiperiódicas** a las funciones en su dominio de definición,

$$x(b) = \pm x(a)\,,\ x'(b) = \pm x'(a)\,, \tag{8.28}$$

como puede comprobarse fácilmente de (8.22).

• Finalmente, de la ec. (8.22) también se deduce que si $p(t)$ se anula en un extremo del intervalo $[a, b]$, no es necesario imponer a las funciones condiciones de contorno en ese punto para que L resulte simétrico. ◇

9. Distancia y límite en espacios euclídeos

Definición 9.1. En un espacio euclídeo **E** se define la **distancia** entre dos vectores $x, y \in \mathbf{E}$ como la norma de su diferencia,

$$\rho(x, y) := \parallel x - y \parallel\ . \tag{9.1}$$

De las propiedades de la norma en **E** resulta que[4], $\forall\, x, y, z \in \mathbf{E}$,

[4] Un **espacio métrico** consiste en un conjunto de puntos $x, y, z, \ldots$ entre los cuales hay definida una **distancia** $\rho(x, y)$ que satisface los siguientes axiomas:

- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (simetría),
- $\rho(y,x) \geq 0$ y $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positividad),
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (desigualdad triangular).

Definición 9.2. Diremos que una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$ **converge** al vector $x \in \mathbf{E}$ si

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0\,, \tag{9.2}$$

lo que también se indica por $x_k \to x$. Esto significa que, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N(\varepsilon)$ entonces $\rho(x_k, x) = \parallel x_k - x \parallel < \varepsilon$.

En ese caso, el vector x es llamado **límite** de la secuencia.

Teorema 9.3. *Si existe el límite de una secuencia, entonces ese límite es único.*

En efecto, supongamos que existen dos vectores x e y que son el límite de la secuencia, $x_k \to x$ y $x_k \to y$. Entonces, $\forall\, \varepsilon > 0$ tenemos que $\rho(x_k, x) < \varepsilon/2$ y $\rho(x_k, y) < \varepsilon/2$ si k es suficientemente grande. En consecuencia, de la desigualdad triangular resulta que

$$0 \leq \rho(x,y) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y) < \varepsilon\,. \tag{9.3}$$

Es decir, $\rho(x,y)$ es menor que cualquier número positivo. Por lo tanto $\rho(x,y) = \parallel x - y \parallel = 0 \ \Rightarrow\ x = y$. □

Ejemplos:

• Consideremos una secuencia convergente en un espacio euclídeo de dimensión finita n, generado por la base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Entonces, los vectores de la secuencia convergente pueden escribirse como $\{x_k = \xi_k^{(1)}\, e_1 + \cdots + \xi_k^{(n)}\, e_n\,,\ k = 1, 2, \ldots\}$, y tienen como límite al vector $x = \xi^{(1)}\, e_1 + \cdots + \xi^{(n)}\, e_n$ si

$$\begin{aligned} \rho(x_k, x)^2 &= \left|\left| \left(\xi_k^{(1)} - \xi^{(1)}\right) e_1 + \cdots + \left(\xi_k^{(n)} - \xi^{(n)}\right) e_n \right|\right|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left|\, \xi_k^{(i)} - \xi^{(i)} \right|^2 \to 0 \text{ cuando } k \to \infty\,. \end{aligned} \tag{9.4}$$

- $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,
- $\rho(y,x) > 0$ para todo $x \neq y$, y $\rho(x,x) = 0$ para todo x,
- $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

De las propiedades de la norma resulta que todo espacio de Banach (y, por consiguiente, todo espacio euclídeo) es un espacio métrico.

Siendo una suma de términos no negativos, esto exige que cada término tienda a cero, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k^{(i)} = \xi^{(i)}\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{9.5}$$

Por lo tanto, la convergencia de una secuencia de vectores en un espacio euclídeo de dimensión finita equivale a la convergencia de cada una de las secuencias numéricas formadas por los coeficientes de Fourier de los vectores referidos a un sistema ortonormal y completo en ese espacio.

• En el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$, la convergencia de la secuencia $x_k(t) \to x(t)$ significa que

$$\rho(x_k, x)^2 = \| x_k - x \|^2 = \int_a^b |x_k(t) - x(t)|^2 \, dt \to 0 \tag{9.6}$$

cuando $k \to \infty$. En consecuencia, se trata de una **convergencia en media**. ◇

Recordemos que una secuencia de funciones continuas $\{x_k(t),\ k = 1, 2 \ldots\}$ converge **uniformemente** a la función (continua) $x(t)$ en el intervalo $[a, b]$ si

$$\lim_{k\to\infty} \left\{ \sup_{\{a\leq t\leq b\}} |x_k(t) - x(t)| \right\} = 0\,. \tag{9.7}$$

Lema 9.4. *Toda secuencia uniformemente convergente en un intervalo de longitud finita, $b - a < \infty$, es también convergente en media.*

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $|x_k(t) - x(t)|^2 < \varepsilon \ \forall\, t$, si k es suficientemente grande, de modo que

$$\int_a^b |x_k(t) - x(t)|^2 \, dt < \varepsilon(b - a)\,. \tag{9.8}$$

En esas condiciones, la distancia $\rho(x_k, x)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo tomar k suficientemente grande[5]. □

[5] Nótese que este argumento sólo vale si la longitud del intervalo considerado es finita. En efecto, la convergencia uniforme en toda la recta no implica convergencia en media, como lo muestra el siguiente ejemplo: consideremos las funciones $x_k(t)$, pares y continuas, tales que

$$x_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{1 - \frac{t}{k}}\,, \ \ 0 \leq t \leq k\,, \\ \\ 0\,, \ \ t > k\,. \end{cases}$$

Esa secuencia converge uniformemente en toda la recta a la función idénticamente nula,

$$|x_k(t) - \mathbf{0}(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0\,, \ \text{cuando } k \to \infty\,,$$

pero no converge en media a esa función,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_k(t) - \mathbf{0}(t)|^2 \, dt = \frac{2}{k} \int_0^k \left(1 - \frac{t}{k}\right) dt = 1\,, \ \ \forall\, k\,.$$

Pero la recíproca no vale: la convergencia en media no implica convergencia uniforme. En realidad, ni siquiera implica convergencia puntual en ningún punto del intervalo $[a, b]$.

Por ejemplo, consideremos una secuencia de funciones reales y continuas $x_k(t)$, que tomen valores entre 0 y 1 y sean nulas fuera de un subintervalo $\triangle_k \subset [a, b]$ de longitud menor que $1/k$, en un punto del cual alcancen el valor 1. En esas condiciones, el cuadrado de la distancia entre $x_k(t)$ y el vector nulo,

$$\int_a^b \big(x_k(t) - \mathbf{0}(t)\big)^2 dt = \int_{\triangle_k} x_k^2(t)\, dt \leq 1 \times \int_{\triangle_k} dt < \frac{1}{k}\,, \tag{9.9}$$

tiende a 0 cuando $k \to \infty$. Por consiguiente, $x_k(t) \to \mathbf{0}(t)$ en el sentido de la convergencia en $\mathcal{C}_2(a, b)$.

No obstante,

$$\sup_{\{a\leq t\leq b\}} |x_k(t) - \mathbf{0}(t)| = 1\,,\ \forall\, k\,, \tag{9.10}$$

de modo que la secuencia no converge uniformemente a la función idénticamente nula. De hecho, puede demostrarse que no converge uniformemente a ninguna función continua.

Es más, los subintervalos $\triangle_k$ pueden ser elegidos de manera tal que la secuencia $\{x_k(t)\}$ no sea puntualmente convergente para ningún valor de t (por ejemplo, haciendo que ellos barran repetidas veces la distancia que media entre ambos extremos de $[a, b]$, de modo que para cada valor de t la secuencia numérica $\{x_k(t)\}$ sea oscilante).

10. Continuidad en espacios euclídeos

Definición 10.1. Una funcional f definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $f : \mathbf{E} \to \mathbb{C}$, se dice **continua** en un punto $x \in \mathbf{E}$ si, para toda secuencia convergente $x_k \to x$, se tiene que la secuencia numérica $f(x_k) \to f(x)$.

Equivalentemente, f es continua en x si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si $\rho(y, x) < \delta(\varepsilon)$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Lema 10.2. *Una funcional lineal continua en $x = \mathbf{0}$ es continua en todo $x \in \mathbf{E}$.*

En efecto, $x_k \to x \Rightarrow (x_k - x) \to \mathbf{0}$, de modo que[6]

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_k - x)| = 0\,. \tag{10.1}$$

□

Lema 10.3. *Una funcional lineal continua es acotada.*

Si $f(x)$ es continua, tenemos que

$$|f(x) - f(\mathbf{0})| = |f(x)| < \varepsilon\,,\ \forall\, x \mid \ \| x \| < \delta(\varepsilon)\,. \tag{10.2}$$

Sea $x \neq \mathbf{0}$, y $0 < \delta_1 < \delta(\varepsilon)$, entonces

$$\left| f\left(\delta_1 \frac{x}{\| x \|}\right)\right| = \frac{\delta_1}{\| x \|}\, |f\,(x)| < \varepsilon \ \Rightarrow\ |f\,(x)| < \frac{\varepsilon}{\delta_1}\ \| x \|\ . \tag{10.3}$$

Por lo tanto, tomando $K = \varepsilon/\delta_1$ tenemos

$$|f\,(x)| \leq K \, \| x \|\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{10.4}$$

□

Lema 10.4. *Una funcional lineal acotada es continua.*

En efecto, supongamos que $|f(x)| \leq K \, \| x \|$, para todo $x \in \mathbf{E}$, y consideremos una secuencia convergente $x_k \to x$. Entonces,

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| \leq K \, \| x_k - x \| \to 0 \tag{10.5}$$

cuando $k \to \infty$. □

Teorema 10.5. *Como consecuencia de los tres Lemas anteriores resulta que, para una funcional lineal $f(x)$ definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *$f(x)$ es continua en $x = \mathbf{0}$,*
- *$f(x)$ es continua $\forall\, x \in \mathbf{E}$,*
- *$f(x)$ es acotada en $\mathbf{E}$.*

[6]Si, en cambio, se sabe que $f(x)$ es continua en un punto $y \neq \mathbf{0}$, teniendo en cuenta que $(x_k - x + y) \to y$, la linealidad de la funcional nos permite escribir que

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x + y) - f(y)| \to 0$$

cuando $k \to \infty$.

Ejemplos:

• Ya sabemos que el producto escalar por un vector fijo del espacio, $z \in \mathbf{E}$, define una funcional lineal, $f(x) := (z, x)\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$. De la desigualdad de Cauchy - Schwarz resulta que

$$|f(x)| = |(z,x)| \leq \| z \| \| x \| \,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,. \tag{10.6}$$

Por lo tanto, esa funcional es continua en $\mathbf{E}$.

• Ya hemos dicho que toda funcional lineal en un espacio de dimensión finita corresponde al producto escalar por un vector fijo de ese espacio. Por el resultado anterior, vemos que toda funcional lineal en un espacio de dimensión finita es continua.

• Pero también sabemos que en $\mathcal{C}_2(a,b)$ existen funcionales lineales que no pueden ser representadas mediante el producto escalar por un vector fijo del espacio, como por ejemplo $f[x(t)] = x(t_0)$, con $t_0 \in (a,b)$ (ver ec. (2.6)). Esta funcional no es continua, dado que la convergencia en media no implica convergencia puntual en ningún punto. Por lo tanto, tampoco es acotada. $\diamond$

Lema 10.6. *En un espacio euclídeo* $\mathbf{E}$*, el producto escalar es una funcional continua de sus dos argumentos. Esto significa que si las secuencias de vectores* $x_k \to x$ *e* $y_k \to y$*, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x,y)\ . \tag{10.7}$$

Para demostrarlo consideremos la diferencia

$$\begin{array}{c} \Big|(x,y) - (x_k,y_k)\Big| = \Big|(x,y) - \big(x-(x-x_k), y-(y-y_k)\big)\Big| = \\[2ex] = \Big|(x,y-y_k) + (x-x_k,y) - (x-x_k,y-y_k)\Big| \leq \\[2ex] \leq \Big|(x,y-y_k)\Big| + \Big|(x-x_k,y)\Big| + \Big|(x-x_k,y-y_k)\Big| \leq \\[2ex] \leq \| x \| \| y-y_k \| + \| x-x_k \| \| y \| + \| x-x_k \| \| y-y_k \| \to 0 \end{array} \tag{10.8}$$

cuando $k \to \infty$. $\square$

Propiedad 10.7. Como consecuencia del resultado anterior, la norma de un espacio euclídeo es una funcional continua: si $x_k \to x$ entonces $\| x_k \| \to \| x \|$.

Definición 10.8. Un operador A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, se dice **continuo** en un punto $x \in \mathbf{E}$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si $\rho(y, x) < \delta(\varepsilon)$, entonces $\| A\, y - A\, x \| < \varepsilon$.

Lema 10.9. *Todo operador lineal acotado A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, es continuo.*

En efecto, si $x_k \to x$ entonces

$$\| A\, x_k - A\, x \| = \| A\, (x_k - x) \| \leq \| A \| \| x_k - x \| \to 0\,, \tag{10.9}$$

cuando $k \to \infty$. □

11. Conjuntos densos en espacios euclídeos

Definición 11.1. Un elemento de un espacio euclídeo, $x \in \mathbf{E}$, se dice **punto límite** del conjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ si existe una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{F}$ que converge al elemento x.

Dicho de otro modo, x es un punto límite de $\mathbf{F}$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe $y \in \mathbf{F}$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definición 11.2. Un conjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ se dice **cerrado** si contiene a todos sus puntos límite.

Lema 11.3. *El complemento ortogonal de un subespacio de un espacio euclídeo es siempre un subespacio cerrado.*

Sea $\mathbf{E}' \subset \mathbf{E}$, un subespacio de un espacio euclídeo, y sea $\mathbf{E}''$ su complemento ortogonal. Si $x \in \mathbf{E}$ es un punto límite de $\mathbf{E}''$, entonces existe una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbf{E}''$ que converge a x, $x_k \to x$.

Ahora bien, para todo $y \in \mathbf{E}'$ tenemos que $(y, x_k) = 0\,,\ \forall\, k$. Y por la continuidad del producto escalar,

$$(y, x) = \lim_{k \to \infty} (y, x_k) = 0\,,\ \Rightarrow\ x \perp \mathbf{E}'\,. \tag{11.1}$$

Por lo tanto, $x \in \mathbf{E}''$. □

Definición 11.4. Dado un conjunto arbitrario de vectores de un espacio euclídeo, $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$, se llama **clausura** de $\mathbf{A}$, y se denota por $\bar{\mathbf{A}}$, a la unión de $\mathbf{A}$ con el conjunto de todos sus puntos límite.

Lema 11.5. *La clausura de un conjunto* $\mathbf{A}$ *es un conjunto cerrado.*

Sea a un punto límite de $\bar{\mathbf{A}}$; mostraremos que $a \in \bar{\mathbf{A}}$.

En efecto, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $\overline{x} \in \bar{\mathbf{A}}$ tal que $\rho(a, \overline{x}) < \varepsilon/2$. Pero siendo $\overline{x}$ un vector de la clausura de $\mathbf{A}$, tenemos que $\overline{x} \in \mathbf{A}$ o bien $\overline{x} \notin \mathbf{A}$ pero sí es un punto límite de $\mathbf{A}$. En cualquier caso, existe $x \in \mathbf{A}$ tal que $\rho(\overline{x}, x) < \varepsilon/2$.

Finalmente, por la desigualdad triangular tenemos

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, \overline{x}) + \rho(\overline{x}, x) < \varepsilon\,. \tag{11.2}$$

En consecuencia, a es un punto límite del conjunto $\mathbf{A}$ y, por lo tanto, $a \in \bar{\mathbf{A}}$. □

Todo conjunto cerrado $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ que contenga al conjunto $\mathbf{A}$ debe también contener a su clausura,

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{F} \;\Rightarrow\; \bar{\mathbf{A}} \subset \mathbf{F}\,. \tag{11.3}$$

En ese sentido, la clausura $\bar{\mathbf{A}}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a $\mathbf{A}$.

Ejemplo:

• La clausura del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ sobre la recta es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. De hecho, los números irracionales pueden ser introducidos como los límites de secuencias convergentes de racionales que no convergen a un racional, como por ejemplo

$$3\,, \frac{31}{10}\,, \frac{314}{100}\,, \frac{3141}{1000}\,, \frac{31415}{10000}\,, \cdots \to \pi \notin \mathbb{Q}\,.$$

◇

Lema 11.6. *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio euclídeo es un conjunto cerrado.*

En efecto, del Lema 3.1 sabemos que si $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ es un subespacio de dimensión finita, todo vector $x \in \mathbf{E}$ puede escribirse como la suma de dos vectores ortogonales entre sí, $x = u + v$, donde $u \in \mathbf{F}$ y $v \perp \mathbf{F}$.

Entonces, para $y \in \mathbf{F}$ tenemos

$$\rho(x, y)^2 = \parallel (u + v) - y \parallel^2 = \parallel u - y \parallel^2 + \parallel v \parallel^2 \geq \parallel v \parallel^2\;. \tag{11.4}$$

Por lo tanto, $\forall\, y \in \mathbf{F}$ es $\rho(x, y) > 0$ si $x \notin \mathbf{F}$ (es decir, si $v \neq \mathbf{0}$). En consecuencia, ningún vector que no pertenece a $\mathbf{F}$ es un punto límite de ese subespacio. □

Definición 11.7. Un conjunto $\mathbf{B} \subset \mathbf{E}$ se dice **denso** en el conjunto $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ si $\mathbf{A}$ está contenido en la clausura de $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} \text{ denso en } \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} \subset \bar{\mathbf{B}} \,. \tag{11.5}$$

Esto significa que todo elemento de $\mathbf{A}$ es un punto límite de $\mathbf{B}$, de modo que puede representarse como el límite de una secuencia convergente de vectores contenidos en $\mathbf{B}$,

$$\forall\, a \in \mathbf{A}\ \exists \{b_1, b_2, \dots\} \subset \mathbf{B} \,\Big|\, a = \lim_{k\to\infty} b_k \,. \tag{11.6}$$

Ejemplos:

• El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es denso en el conjunto de los reales, $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

• El subespacio de los polinomios a coeficientes reales,

$$\mathcal{P}_2(a,b) = \{P(t) = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + \cdots + a_n\, t^n \,,\ n \in \mathbb{N} \,,\ a_k \in \mathbb{R}\} \,. \tag{11.7}$$

es denso en el espacio de las funciones reales y continuas en $[a,b]$, $\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$.

En efecto, el teorema de Weierstrass muestra que toda función real $f(t)$, continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, es el límite de una secuencia uniformemente convergente de polinomios con coeficientes reales, $\{P_1(t), P_2(t) \dots, P_k(t), \dots\}$ (ver, por ejemplo, R. Courant y D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1).

Esto implica (ver Lema 9.4) que toda función real y continua es el límite en media de una secuencia de polinomios a coeficientes reales, es decir, es un punto límite de $\mathcal{P}_2(a,b)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b) \subset \overline{\mathcal{P}_2(a,b)} \,. \tag{11.8}$$

◇

Lema 11.8. *Si el conjunto* $\mathbf{B} \subset \mathbf{E}$ *es denso en* $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$*, y a su vez* $\mathbf{A}$ *es denso en* $\mathbf{E}$*, entonces* $\mathbf{B}$ *es denso en* $\mathbf{E}$*.*

En efecto, si $\mathbf{B}$ es denso en $\mathbf{A}$, entonces

$$\mathbf{A} \subset \bar{\mathbf{B}} \;\Rightarrow\; \bar{\mathbf{A}} \subset \bar{\mathbf{B}} \,. \tag{11.9}$$

Por otra parte, si $\mathbf{A}$ es denso en $\mathbf{E}$, entonces

$$\mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{A}} \;\Rightarrow\; \mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{B}} \,. \tag{11.10}$$

Por lo tanto, $\mathbf{B}$ es denso en $\mathbf{E}$. □

Ejemplo:

• El conjunto de polinomios con coeficientes racionales,

$$\mathcal{Q}_2(a,b) = \{Q(t) = q_0 + q_1\, t + q_2\, t^2 + \cdots + q_n\, t^n \,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ q_k \in \mathbb{Q}\}\,, \tag{11.11}$$

es denso en el espacio de los polinomios con coeficientes reales $\mathcal{P}_2(a,b)$, que a su vez es denso en $\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$. Por el lema anterior, $\mathcal{Q}_2(a,b)$ es denso en $\mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$.

Para mostrar que $\mathcal{Q}_2(a,b)$ es denso en $\mathcal{P}_2(a,b)$, consideremos un polinomio $P(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n \in \mathcal{P}_2(a,b)$, y elijamos n números racionales $q_0, q_1, \ldots, q_n$ tales que $|a_k - q_k| < \varepsilon/(2^{k+1} \parallel t^k \parallel)$, con $\varepsilon > 0$ (lo que siempre es posible, dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$).

Entonces, llamando $Q(t) = q_0 + q_1\, t + \cdots + q_n\, t^n$ y empleando la desigualdad triangular para la norma, tenemos

$$\begin{array}{c} \parallel P(t) - Q(t) \parallel = \\[2ex] = \parallel (a_0 - q_0)\, t^0 + (a_1 - q_1)\, t + \cdots + (a_n - q_n)\, t^n \parallel \leq \\[2ex] \leq\ |a_0 - q_0| \parallel t^0 \parallel + |a_1 - q_1| \parallel t \parallel + \cdots + |a_n - q_n| \parallel t^n \parallel < \\[2ex] <\ \dfrac{\varepsilon}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon\,. \end{array} \tag{11.12}$$

El conjunto $\mathcal{Q}_2(a,b)$ tiene además la particularidad de ser **numerable**[7] (es decir, puede ser puesto en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales). ◇

Definición 11.9. Un espacio euclídeo que contiene un conjunto denso y numerable se dice **separable**.

Ejemplo:

• El espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$ es separable. En efecto, sea $x(t) = x_R(t) + i\, x_I(t)$, con $x_R(t), x_I(t) \in \mathcal{C}_2^{\Re}(a,b)$. Entonces podemos elegir dos polinomios con coeficientes racionales $Q_R(t)$ y $Q_I(t)$ tales que $\parallel x_{R,I}(t) - Q_{R,I}(t) \parallel < \varepsilon/2$.

[7]Para demostrar esta propiedad debemos previamente mostrar que el conjunto de los números racionales es numerable, así como ciertas propiedades de la unión de conjuntos numerables. Para ello, ver Apéndice 28.

En consecuencia, por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}&\| \, x(t) - (Q_R(t) + i\, Q_I(t)) \, \| \leq \\ &\leq \| \, x_R(t) - Q_R(t) \, \| + \| \, x_I(t) - Q_I(t) \, \| < \varepsilon \,.\end{aligned} \tag{11.13}$$

Finalmente, notemos que el conjunto de los polinomios de la forma $Q_R(t) + i\, Q_I(t)$ es numerable, dado que sus elementos están en correspondencia uno a uno con los pares ordenados de elementos de un conjunto numerable, de la forma $\langle Q_R(t), Q_I(t)\rangle$ con $Q_{R,I}(t) \in \mathcal{Q}_2(a,b)$, que también forman un conjunto numerable (ver Lema 28.4). $\diamond$

12. Secuencias de Cauchy en espacios euclídeos

Una secuencia de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ en un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice **fundamental** o **de Cauchy** si $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_k, x_l) < \varepsilon \,,\ \forall\, k, l > N(\varepsilon)\,, \tag{12.1}$$

es decir, si

$$\lim_{k,l\to\infty} \rho(x_k, x_l) = 0\,. \tag{12.2}$$

Lema 12.1. *Toda secuencia convergente es fundamental.*

En efecto, supongamos que $x_k \to x$. Entonces, de la desigualdad triangular para la distancia tenemos que

$$\rho(x_k, x_l) \leq \rho(x_k, x) + \rho(x, x_l) \to 0 \tag{12.3}$$

cuando $k, l \to \infty$. $\square$

En la recta, el criterio de Cauchy establece que toda secuencia fundamental es convergente. Pero en un espacio euclídeo general puede haber secuencias de Cauchy que no tengan límite en ese espacio, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

• Consideremos una secuencia en $\mathcal{C}_2(a,b)$ formada por funciones reales $x_k(t)$ que tomen valores entre 0 y 1, y tales que, para todo $\delta > 0$, converjan uniformemente a 0 en el intervalo $[a, c-\delta]$ y a 1 en el intervalo $[c+\delta, b]$, con $a < c < b$.

Consideremos la distancia entre dos elementos cualesquiera de esa secuencia,

$$\rho(x_k,x_l)^2 = \int_a^b |x_k(t)-x_l(t)|^2\,dt =$$

$$= \int_a^{c-\delta} |x_k(t)-x_l(t)|^2\,dt + \int_{c+\delta}^{b} |x_k(t)-x_l(t)|^2\,dt + \tag{12.4}$$

$$+ \int_{c-\delta}^{c+\delta} |x_k(t)-x_l(t)|^2\,dt\,.$$

Como la secuencia es uniformemente convergente en $[a,c-\delta]$, dado $\varepsilon_1>0$, podemos tomar k y l suficientemente grandes como para que $|x_{k,l}(t)-0|<\varepsilon_1$, para todo t en ese intervalo. Entonces,

$$\int_a^{c-\delta} |x_k(t)-x_l(t)|^2\,dt \leq \int_a^{c-\delta} \Big(|x_k(t)|+|x_l(t)| \Big)^2 dt < \tag{12.5}$$

$$< 4\,\varepsilon_1^2\,(c-\delta-a) < 4\,\varepsilon_1^2\,(c-a)\,.$$

Similarmente, si $|x_{k,l}(t)-1|<\varepsilon_2$ para $t\in[c+\delta,b]$, podemos escribir

$$\int_{c+\delta}^{b} |x_k(t)-x_l(t)|^2\,dt < 4\,\varepsilon_2^2\,(b-c-\delta) < 4\,\varepsilon_2^2\,(b-c)\,. \tag{12.6}$$

Finalmente, para la última integral tenemos

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |x_k(t)-x_l(t)|^2\,dt \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} 2^2\,dt = 8\,\delta\,. \tag{12.7}$$

Por lo tanto, si llamamos

$$\varepsilon^2 = 4\,\varepsilon_1^2\,(c-a) + 4\,\varepsilon_2^2\,(b-c) + 8\,\delta\,, \tag{12.8}$$

que puede hacerse tan pequeño como se quiera, tenemos

$$\rho(x_k,x_l) < \varepsilon\,, \tag{12.9}$$

para k,l suficientemente grandes, de modo que se trata de una secuencia fundamental.

No obstante, no existe ninguna función continua en $[a,b]$ que sea el límite en media de esta secuencia de Cauchy. En efecto, si $x(t)$ fuese el límite en media de la secuencia, tendríamos

$$\int_a^b |x_k(t)-x(t)|^2\,dt \geq \int_a^{c-\delta} |x_k(t)-x(t)|^2\,dt \to 0 \tag{12.10}$$

cuando $k\to\infty$. Como las $x_k(t)$ convergen uniformemente a 0 en ese intervalo, y la convergencia uniforme implica convergencia en media, la unicidad del límite en media requiere que $x(t) \equiv 0$, $t \in [a, c-\delta]$, para todo $\delta > 0$. Idéntico razonamiento permite concluir que $x(t) \equiv 1$, $t \in [c+\delta, b]$, para todo $\delta > 0$.

En consecuencia, independientemente del valor que tome en $t = c$, el límite en media de esa secuencia es una función discontinua en ese punto,

$$x(t) = \begin{cases} 0\,, & t \in [a,c)\,, \\ 1\,, & t \in (c,b]\,. \end{cases} \tag{12.11}$$

Esta función no es un elemento del espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$ en el que estamos trabajando. $\diamond$

Lema 12.2. *Toda secuencia fundamental es acotada.*

Sea $\{x_k\,, k = 1, 2, \dots\}$ una secuencia de Cauchy, y sea $z \in \mathbf{E}$ un vector arbitrario del espacio euclídeo.

Para un dado $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que si $k > N$ entonces $\rho(x_N, x_k) < \varepsilon$. Si además llamamos $M = \text{máximo}\,\{\rho(z, x_k)\,,\ k = 1, 2, \dots, N\}$ tenemos

$$\rho(z, x_k) \leq \rho(z, x_N) + \rho(x_N, x_k) < M + \varepsilon\,,\ \forall\, k > N\,, \tag{12.12}$$

por lo que la secuencia es acotada. $\square$

13. Espacios completos

Un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice completo si toda secuencia fundamental en $\mathbf{E}$ es convergente.

Ejemplo:

• Todo espacio euclídeo de dimensión finita es completo. En efecto, consideremos una secuencia de Cauchy arbitraria en un espacio de dimensión n, generado por la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$x_k = \xi_k^{(1)}\, e_1 + \cdots + \xi_k^{(n)}\, e_n\,,\ k \in \mathbb{N}\,. \tag{13.1}$$

Entonces,

$$\begin{array}{c} \rho(x_k, x_l)^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left| \xi_k^{(j)} - \xi_l^{(j)} \right|^2 \geq \\ \geq \Re\left\{ \xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)} \right\}^2 + \Im\left\{ \xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)} \right\}^2\,,\ i = 1, 2, \dots, n\,. \end{array} \tag{13.2}$$

Por lo tanto, la secuencia de números complejos $\{\xi_k^{(i)}\,, k\in\mathbb{N}\}$ es fundamental y, por el criterio de Cauchy, tiene un límite: $\exists\,\xi^{(i)}\in\mathbb{C}$ tal que

$$\xi^{(i)}=\lim_{k\to\infty}\xi_k^{(i)}\,,\ i=1,2,\ldots,n\,. \tag{13.3}$$

Esos n números definen un vector

$$x=\xi^{(1)}\,e_1+\cdots+\xi^{(n)}\,e_n\in\mathbf{E}\,, \tag{13.4}$$

que es el límite de la secuencia. En efecto,

$$\rho(x_k,x)^2=\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_k^{(j)}-\xi^{(j)}\right|^2\to 0 \tag{13.5}$$

cuando $k\to\infty$ (dado que es una suma finita de términos que se anulan en ese límite).

Por lo tanto, toda secuencia fundamental en un espacio euclídeo de dimensión finita tiene límite, de modo que ese espacio es completo.

• Por otra parte, hemos visto en la Sección 12 que el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$ no es completo. Esto plantea la pregunta acerca de la existencia de espacios completos de dimensión infinita, que el ejemplo tratado en la siguiente Sección responde afirmativamente. ◇

14. El espacio $\mathcal{L}_2$

El espacio $\mathcal{L}_2$ se define como el conjunto de las secuencias de números reales tales que la suma de sus cuadrados es una serie convergente,

$$\mathcal{L}_2:=\left\{x=\{\xi^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{N}\}\ \Big|\ \sum_{i=1}^{\infty}\left(\xi^{(i)}\right)^2<\infty\right\}\,. \tag{14.1}$$

Este conjunto resulta un espacio lineal respecto de las operaciones de suma y producto definidas de modo que, para $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$x=\{\xi^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{N}\},\quad y=\{\eta^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{N}\}\,, \tag{14.2}$$

con

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\xi^{(i)}\right)^2<\infty\,,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\eta^{(i)}\right)^2<\infty\,, \tag{14.3}$$

entonces

$$\begin{aligned}\alpha\,x&:=\{\alpha\,\xi^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{N}\}\,,\\ x+y&:=\{\xi^{(i)}+\eta^{(i)}\,,\ i\in\mathbb{N}\}\,.\end{aligned} \tag{14.4}$$

Es evidente que elementos de la forma $x_m = \{\xi^{(i)} = \delta^i_m\,,\ i \in \mathbb{N}\}$, con $m \in \mathbb{N}$, son linealmente independientes. En consecuencia, el espacio $\mathcal{L}_2$ no tiene dimensión finita.

Este espacio resulta euclídeo respecto del producto escalar

$$(14.5) \qquad (x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \xi^{(i)}\, \eta^{(i)}\,.$$

Para verificar que estas definiciones tienen sentido, consideremos primero la serie que define el producto escalar. La diferencia en valor absoluto de dos de sus sumas parciales,

$$(14.6) \quad \left|S_{N+M} - S_N\right| = \left|\sum_{i=N+1}^{N+M} \xi^{(i)}\, \eta^{(i)}\right| \leq \left\{\sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\xi^{(i)}\right)^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\eta^{(i)}\right)^2\right\}^{1/2},$$

como consecuencia de la desigualdad de Cauchy - Schwarz en $\mathbb{R}^M$. Ahora bien, dentro de cada una de las llaves del miembro de la derecha de (14.6) aparece la diferencia de dos sumas parciales de una serie convergente (ver ec. (14.3)). Esas sumas parciales forman una secuencia fundamental, de modo que el miembro de la derecha tiende a 0 cuando $N \to \infty$, para todo M.

En esas condiciones, la sucesión de sumas parciales de la serie en (14.5) satisface que

$$(14.7) \qquad \lim_{N\to\infty} \Big(S_{N+M} - S_N\Big) = 0\,, \quad \forall\, M \in \mathbb{N}\,,$$

y, por el criterio de Cauchy, tiene límite.

Por lo tanto, el producto escalar en (14.5) está definido para todo par de elementos de $\mathcal{L}_2$.

Este producto es simétrico y positivo definido. Además,

$$(14.8) \qquad (x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0} = \{\xi^{(i)} = 0\,,\ i \in \mathbb{N}\}\,,$$

por ser una serie de términos no negativos.

Consideremos ahora la suma de elementos de $\mathcal{L}_2$ en (14.4). Tenemos que, para todo M,

$$(14.9) \quad \sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\xi^{(i)} + \eta^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\xi^{(i)}\right)^2 + 2 \sum_{i=N+1}^{N+M} \xi^{(i)}\, \eta^{(i)} + \sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\eta^{(i)}\right)^2\,,$$

donde el miembro de la derecha tiende a 0 cuando $N \to \infty$, dado que cada término es la diferencia de dos sumas parciales de una serie convergente (ec. (14.3) y (14.5)).

En consecuencia, por el criterio de Cauchy, existe el límite de la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)} + \eta^{(i)}\right)^2 < \infty\,. \tag{14.10}$$

Por lo tanto, con la definición de (14.4), $x + y \in \mathcal{L}_2\,,\ \forall\, x, y \in \mathcal{L}_2$. Además, es inmediato mostrar que también $\alpha\, x \in \mathcal{L}_2$.

En conclusión, $\mathcal{L}_2$ es un espacio euclídeo. En lo que sigue mostraremos que es un espacio completo.

Consideremos una secuencia fundamental arbitraria en $\mathcal{L}_2$, $\{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$, donde

$$x_k = \left\{\xi_k^{(i)}\,,\ i \in \mathbb{N}\right\}\,. \tag{14.11}$$

Entonces,

$$\rho(x_k, x_l)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 \to 0\,,\ k, l \to \infty\,. \tag{14.12}$$

Dado que se trata de una serie de términos no negativos, debe ser

$$\lim_{k,l\to\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right) = 0\,,\ \forall\, i \in \mathbb{N}\,. \tag{14.13}$$

En consecuencia, para todo $i = 1, 2, \dots$, obtenemos la secuencia fundamental $\{\xi_k^{(i)}\,,\ k \in \mathbb{N}\}$ que, por el criterio de Cauchy, tiene límite: $\exists\, \xi^{(i)} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\xi^{(i)} = \lim_{k\to\infty} \xi_k^{(i)}\,. \tag{14.14}$$

Con esos límites puede formarse la secuencia $x = \{\xi^{(i)}\,,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Para mostrar que x así definido es un elemento de $\mathcal{L}_2$, recordemos que toda secuencia de Cauchy es acotada. Por lo tanto, $\forall\, k$ tenemos

$$\rho(x_k, \mathbf{0})^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)}\right)^2 \leq K < \infty\,, \tag{14.15}$$

donde K no depende de k.

Entonces, $\forall\, N \in \mathbb{N}$ fijo resulta que

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)}\right)^2 \leq K\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{14.16}$$

Tomando el límite de esa suma finita para $k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\xi^{(i)}\right)^2 \leq K\,,\ \forall\, N \in \mathbb{N}\,. \tag{14.17}$$

Entonces, en el límite $N \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 \leq K < \infty \Rightarrow x \in \mathcal{L}_2 \,. \tag{14.18}$$

Ahora mostraremos que este vector $x \in \mathcal{L}_2$ es el límite de la secuencia fundamental en (14.11). Para ello, tengamos en cuenta que, dado $\varepsilon > 0$,

$$\rho(x_k, x_l)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \,, \tag{14.19}$$

para k, l suficientemente grandes. Tratándose de una serie de términos no negativos, ella es mayor o igual que cualquiera de sus sumas parciales. Podemos entonces escribir que

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \,, \ \forall\, N \in \mathbb{N} \,. \tag{14.20}$$

Si ahora, con N fijo, tomamos el límite de esta suma finita para $l \to \infty$ resulta

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi_l^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi^{(i)}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \,, \ \forall\, N \in \mathbb{N} \,, \tag{14.21}$$

para todo k suficientemente grande.

Finalmente, tomando el límite $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\xi_k^{(i)} - \xi^{(i)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi_k^{(i)} - \xi^{(i)}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \,, \tag{14.22}$$

para todo k suficientemente grande.

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0 \,, \tag{14.23}$$

y la secuencia de Cauchy considerada converge a un elemento de $\mathcal{L}_2$.

En conclusión, toda secuencia fundamental en $\mathcal{L}_2$ es convergente, de modo que se trata de un espacio euclídeo completo.

Veremos ahora que el espacio $\mathcal{L}_2$ es separable. Para ello tengamos en cuenta que, si $x = \{\xi^{(i)} \,,\ i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{L}_2$, dado $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 < \infty \ \Rightarrow \ \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{14.24}$$

para N suficientemente grande.

Por otra parte, sea

$$q = \{q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(N)}, 0, 0, \ldots\} \in \mathcal{L}_2 \,, \tag{14.25}$$

donde los racionales $q^{(i)} \in \mathbb{Q}$ son elegidos de manera que

$$\left(\xi^{(i)} - q^{(i)}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2^{1+i}}\,. \tag{14.26}$$

En esas condiciones,

$$\begin{array}{c} \rho(x,q)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\xi^{(i)} - q^{(i)}\right)^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\xi^{(i)}\right)^2 < \\ < \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{1+i}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon\,. \end{array} \tag{14.27}$$

Por lo tanto, el conjunto de elementos de la forma (14.25) es denso en $\mathcal{L}_2$. Además, ese conjunto es numerable, dado que puede establecerse una relación biunívoca entre sus elementos y los polinomios con coeficientes racionales,

$$q \leftrightarrow Q(t) = q^{(1)}\, t^0 + q^{(2)}\, t^1 + \cdots + q^{(N)}\, t^{N-1}\,, \tag{14.28}$$

los que forman un conjunto numerable.

En conclusión, $\mathcal{L}_2$ contiene un conjunto denso numerable, es decir, es separable.

Definición 14.1. Un espacio euclídeo de dimensión infinita, completo y separable es llamado **espacio de Hilbert**.

Ejemplo:

- El espacio $\mathcal{L}_2$ es un espacio de Hilbert. $\diamond$

15. Completamiento de espacios euclídeos

Definición 15.1. Dos secuencias de Cauchy, $\{x_k\,, k = 1, 2, \dots\}$, $\{y_k\,, k = 1, 2, \dots\} \subset$ **E**, se dicen **coterminales** si

$$\lim_{k\to\infty} \| \, x_k - y_k \, \| = 0\,. \tag{15.1}$$

Si la secuencia fundamental $\{x_k\,, k = 1, 2, \dots\}$ es coterminal con la secuencia $\{y_k\,, k = 1, 2, \dots\}$, y ésta es coterminal con $\{z_k\,, k = 1, 2, \dots\}$, entonces la primera es coterminal con la segunda. En efecto,

$$\rho(x_k, z_k) \leq \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, z_k)\,. \tag{15.2}$$

Evidentemente, esto corresponde a una relación de equivalencia, en la que dos secuencias están en la misma clase de equivalencia si y sólo si son coterminales.

El conjunto $\bar{\mathbf{E}}$ de las clases de equivalencia de secuencias coterminales en el espacio euclídeo $\mathbf{E}$, $X = \{\{x_k\,,\ k = 1, 2, \ldots\} \subset \mathbf{E} \mid \text{coterminales}\}$, se estructura como un espacio lineal respecto de las operaciones lineales definidas a continuación:

- Dados $X, Y \in \bar{\mathbf{E}}$, tomamos dos secuencias representativas, $\{x_k\} \in X$, $\{y_k\} \in Y$, y con ellas formamos la secuencia $\{z_k = x_k + y_k\}$. Esta secuencia es también fundamental,

$$\| z_k - z_l \| \leq \| x_k - x_l \| + \| y_k - y_l \| \to 0\,,\ k, l \to \infty\,, \tag{15.3}$$

  y en consecuencia pertenece a cierta clase $Z \in \bar{\mathbf{E}}$.

  En esas condiciones, se define

$$X + Y := Z\,. \tag{15.4}$$

  Esta definición es unívoca, ya que si $\{x'_k\} \in X$, $\{y'_k\} \in Y$, la secuencia $\{z'_k = x'_k + y'_k\} \in Z$. En efecto,

$$\| z_k - z'_k \| \leq \| x_k - x'_k \| + \| y_k - y'_k \| \to 0\,,\ k, l \to \infty\,. \tag{15.5}$$

- Similarmente, $\lambda\, X \in \bar{\mathbf{E}}$ es aquella clase a la que pertenece la secuencia fundamental $\{\lambda\, x_k\}$, donde $\{x_k\} \in X$. Resulta inmediato verificar que esta definición también es unívoca.

Queda como ejercicio verificar que en $\bar{\mathbf{E}}$ se satisfacen los axiomas de espacio vectorial.

En particular, el elemento neutro respecto de la suma es la clase de secuencias convergentes a $\mathbf{0}$, $\bar{O}$. En efecto, si $\{x_k\} \in X$ y $\{y_k\} \in \bar{O}$, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \| (x_k + y_k) - x_k \| = \lim_{k\to\infty} \| y_k \| = 0 \ \Rightarrow\ \{x_k + y_k\} \in X\,. \tag{15.6}$$

El espacio lineal $\bar{\mathbf{E}}$ puede estructurarse como un espacio euclídeo si se introduce un producto escalar entre clases $X, Y \in \bar{\mathbf{E}}$. Para ello consideremos secuencias fundamentales representativas de cada una de esas clases, $\{x_k\} \in X$, $\{y_k\} \in Y$, y tomemos el producto escalar (en $\mathbf{E}$) de sus elementos genéricos, $\{(x_k, y_k)\ k = 1, 2, \ldots\}$. Estos números definen una secuencia de Cauchy que, en consecuencia, tiene un límite:

$$\begin{array}{l} \Big| (x_k, y_k) - (x_l, y_l) \Big| = \Big| (x_k, y_k - y_l) + (x_k - x_l, y_l) \Big| \leq \\[2ex] \leq \Big| (x_k, y_k - y_l) \Big| + \Big| (x_k - x_l, y_l) \Big| \leq \\[2ex] \leq \| x_k \| \, \| y_k - y_l \| + \| x_k - x_l \| \, \| y_l \| \to 0\,,\ k, l \to \infty\,, \end{array} \tag{15.7}$$

dado que toda secuencia fundamental es acotada.

El límite de esta secuencia numérica sólo depende de las clases seleccionadas en $\bar{\mathbf{E}}$, y no de las secuencias representativas consideradas. En efecto, sean dos secuencias coterminales con las anteriores, $\{x'_k\} \in X$ y $\{y'_k\} \in Y$; entonces

$$
\begin{aligned}
\Big| (x_k, y_k) - (x'_k, y'_k) \Big| &= \Big| (x_k, y_k - y'_k) + (x_k - x'_k, y'_k) \Big| \leq \\
&\leq \Big| (x_k, y_k - y'_k) \Big| + \Big| (x_k - x'_k, y'_k) \Big| \leq \qquad (15.8) \\
&\leq \| x_k \| \, \| y_k - y'_k \| + \| x_k - x'_k \| \, \| y'_k \| \rightarrow 0\,, \ k, l \rightarrow \infty\,.
\end{aligned}
$$

En esas condiciones, se define

$$(15.9) \qquad \big(X, Y\big) := \lim_{k\to\infty} (x_k, y_k)$$

Es evidente que esta definición satisfacen los dos primeros axiomas del producto escalar en un espacio euclídeo. En cuanto al tercero, para $\{x_k\} \in X$ tenemos

$$(15.10) \qquad (x_k, x_k) \geq 0 \ \Rightarrow \ \big(X, X\big) \geq 0\,,$$

y si

$$(15.11) \qquad \big(X, X\big) = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} \| x_k \|^2 = 0 \ \Rightarrow \ x_k \rightarrow \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \{x_k\} \in \bar{O}\,,$$

es decir, $X = \bar{O}$.

El espacio Euclídeo $\bar{\mathbf{E}}$ así conformado tiene las siguientes propiedades:

- $\bar{\mathbf{E}}$ contiene un subespacio $\mathbf{E}_1$ isomorfo a $\mathbf{E}$.

  En efecto, cada vector de $\mathbf{E}$ puede asociarse de manera unívoca con la clase de secuencias coterminales que lo tienen por límite,

$$(15.12) \qquad x \leftrightarrow X_x = \big\{\{x_k\} \mid x_k \rightarrow x\big\}\,, \ y \leftrightarrow X_y = \big\{\{y_k\} \mid y_k \rightarrow y\big\}\,.$$

  Entonces

$$(15.13) \qquad \alpha\, x + \beta\, y \leftrightarrow \alpha\, X_x + \beta\, X_y\,,$$

  y el producto escalar

$$(15.14) \qquad \big(X_x, X_y\big) = \lim_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x, y)\,.$$

- El subespacio $\mathbf{E}_1$ es denso en $\bar{\mathbf{E}}$.

  Consideremos una secuencia fundamental $\{x_k\} \in X \in \bar{\mathbf{E}}$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N$ entonces $\rho(x_k, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}$.

  Sea $X_{x_N} \in \mathbf{E}_1$ la clase de las secuencias que convergen a x_N. En particular, X_{x_N} contiene la secuencia $\{x_N, x_N, \dots\}$. Entonces

$$\| X - X_{x_N} \| = \lim_{k\to\infty} \| x_k - x_N \| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \,. \tag{15.15}$$

  Por lo tanto, todo elemento de $\bar{\mathbf{E}}$ es un punto límite de $\mathbf{E}_1$.

- El espacio $\bar{\mathbf{E}}$ es completo.

  Consideremos una secuencia fundamental $\big\{X_k\big\} \subset \bar{\mathbf{E}}$,

$$\| X_k - X_l \| < \frac{\varepsilon}{2} \,, \ \forall\, k, l > n_0(\varepsilon) \,, \ \forall\, \varepsilon > 0 \,. \tag{15.16}$$

  Si $\{x_{k,r}\} \in X_k$ y $\{x_{l,r}\} \in X_l$, con $k, l > n_0(\varepsilon)$,

$$\lim_{r\to\infty} \| x_{k,r} - x_{l,r} \| < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow \| x_{k,r} - x_{l,r} \| < \frac{\varepsilon}{2} \,, \ \forall\, r > r_0(\varepsilon) \,. \tag{15.17}$$

  Sea $y_k = x_{k,k}$, y llamemos $N(\varepsilon) = \text{máximo}\,\{n_0(\varepsilon), r_0(\varepsilon)\}$. Entonces, si $k, l > N(\varepsilon)$,

$$\| y_k - y_l \| = \| x_{k,k} - x_{l,l} \| < \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{15.18}$$

  Por lo tanto, la secuencia $\{y_k\}$ es fundamental, y pertenece a cierta clase $Y \in \bar{\mathbf{E}}$.

  Ahora bien, si $k > N(\varepsilon)$,

$$\| X_k - Y \| = \lim_{l\to\infty} \| x_{k,l} - y_l \| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \,, \ \forall\, \varepsilon > 0 \,. \tag{15.19}$$

  En consecuencia, $Y = \lim_{k\to\infty} X_k$, lo que muestra que toda secuencia de Cauchy en $\bar{\mathbf{E}}$ tiene un límite en ese espacio.

Podemos resumir estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 15.2. *Dado un espacio euclídeo de dimensión infinita* $\mathbf{E}$ *(en general, no completo), existe un espacio euclídeo completo* $\bar{\mathbf{E}}$*, llamado* **completamiento** *de* $\mathbf{E}$*, que contiene un subespacio denso isomorfo a* $\mathbf{E}$*.*

Finalmente señalemos que, dados dos espacios euclídeos isomorfos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}'$, sus completamientos $\bar{\mathbf{E}}$ y $\bar{\mathbf{E}}'$ también son isomorfos entre sí.

16. La integral de Lebesgue

Hemos visto que el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$ no es completo, en el sentido de que no toda secuencia fundamental en $\mathcal{C}_2(a,b)$ converge en media a una función continua. No obstante, en virtud del Teorema 15.2, sabemos que es posible construir (de manera abstracta) un completamiento para ese espacio, $\overline{\mathcal{C}_2(a,b)}$, que contiene un subespacio denso isomorfo a $\mathcal{C}_2(a,b)$.

Veremos que es posible dar a $\overline{\mathcal{C}_2(a,b)}$ un significado concreto, interpretándolo como el conjunto de cierta clase de funciones.

En particular, la integral de Riemann (definida para funciones continuas) ha sido una herramienta esencial para definir el producto escalar en $\mathcal{C}_2(a,b)$. La necesidad de incorporar al espacio funciones más generales hace necesario generalizar también ese producto escalar, expresándolo en términos de la **integral de Lebesgue**.

El desarrollo de la teoría de la integral de Lebesgue excede las posibilidades de este curso (ver, por ejemplo, la bibliografía indicada), por lo que nos contentaremos con dar aquí sólo una presentación intuitiva de ese concepto.

Definición 16.1. Diremos que un conjunto de puntos $\triangle \subset [a,b]$ tiene **medida** menor que un número $\varepsilon > 0$ si $\triangle$ puede ser contenido en un conjunto (finito o infinito numerable) de intervalos cuya longitud total sea menor que ε.

Ejemplo:

• El conjunto de los números racionales tiene medida menor que cualquier número positivo ε.

En efecto, siendo un conjunto numerable, $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$, el k-ésimo racional puede ser contenido en un intervalo de longitud $< \varepsilon/2^k$, de manera tal que la longitud total de esos intervalos será menor que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon\,. \tag{16.1}$$

◇

Definición 16.2. Un conjunto de medida menor que cualquier número positivo se dice **de medida nula**.

Definición 16.3. Una función $f(t)$, definida en un intervalo $[a,b]$, se dice **medible** si, $\forall\,\varepsilon > 0$, ella puede ser redefinida en un conjunto de medida menor que ε del intervalo $[a,b]$ de manera tal que la función resultante sea continua.

Ejemplos:

• Una función con un número finito de discontinuidades aisladas es medible. Basta con redefinir adecuadamente a la función en un entorno suficientemente pequeño de cada punto de discontinuidad para obtener una función continua.

• Una función con una singularidad aislada, como

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\alpha}\,, \ \text{para } 0 < t \leq 1\,, \\ 0\,, \ \text{para } t = 0\,, \end{cases} \tag{16.2}$$

con $\alpha > 0$, es medible. Ella puede ser redefinida en el intervalo $(0, \varepsilon)$, por ejemplo, como una función lineal que se anule en el origen y tome el valor $\varepsilon^{-\alpha}$ en $t = \varepsilon$. De esa manera se obtiene una función continua en el intervalo $[0, 1]$ para todo $\varepsilon > 0$.

• La función de Dirichlet, definida en el intervalo $[0, 1]$ como

$$\chi(t) = \begin{cases} 1\,, \ \forall\, t \in \mathbb{Q}\,, \\ 0\,, \ \forall\, t \notin \mathbb{Q}\,, \end{cases} \tag{16.3}$$

es una función medible. En efecto, el conjunto de los números racionales puede ser contenido en un subconjunto de $[0, 1]$ de medida menor que cualquier $\varepsilon > 0$. Redefiniendo allí adentro a la función, por ejemplo, como tomando valores nulos se obtiene una función continua, idénticamente nula. ◇

16.1. Integral de Lebesgue. Consideremos una función medible en el intervalo $[a, b]$, $f(t)$, que toma valores no negativos. Entonces, dada una secuencia de números positivos $\varepsilon_k \to 0$, para cada k podemos construir una función continua $f_k(t)$, que también tome valores no negativos, y que sólo difiera de la anterior en un conjunto de medida menor que ε_k.

Si esas funciones $f_k(t)$ pueden ser construidas de manera tal que sus integrales (en el sentido de Riemann) tengan una cota superior común, entonces la función $f(t)$ se dice **sumable** o **integrable en el sentido de Lebesgue**.

En ese caso, se puede demostrar que las funciones $f_k(t)$ pueden ser elegidas de modo que sus integrales formen una secuencia convergente cuyo límite, no obstante, puede depender de la esa elección.

En efecto, si la función $f(t)$ ha sido modificada en un intervalo $\triangle$, de longitud δ, a los efectos de obtener una función continua $f_k(t)$, nada impide sumarle a $f_k(t)$ una función continua no negativa, que se anule fuera de $\triangle$ y cuya gráfica sea, por ejemplo, un triángulo de base δ y altura $2c/\delta$, con $c > 0$. Esa modificación incrementa en c el valor de su integral,

$$\int_a^b f_k(t)\, dt \ \to \ c + \int_a^b f_k(t)\, dt\,. \tag{16.4}$$

Entonces, el límite de la secuencia de integrales puede ser incrementado arbitrariamente. Pero la condición $f_k(t) \geq 0$ impide que pueda ser disminuido arbitrariamente.

En esas condiciones, se define la integral de Lebesgue de $f(t)$ (y se la denota por el mismo símbolo que la integral de Riemann) como la mayor cota inferior o **ínfimo** del conjunto de valores posibles para el limite de la secuencia de integrales de las funciones $f_k(t)$,

$$\int_a^b f(t)\, dt := \operatorname{Inf}\left\{ \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(t)\, dt \right\} , \tag{16.5}$$

donde deben tenerse en cuenta todas las posibles elecciones de las funciones $f_k(t)$.

Con esa definición, se puede demostrar que si una función que toma valores no negativos $f(t)$ tiene una integral de Riemann (porque es continua), o una integral de Riemann impropia (como es el caso de una función con una discontinuidad, o con una singularidad integrable $f(t) = t^{-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$), entonces también es sumable, y su integral de Lebesgue coincide con su integral en el sentido de Riemann.

Similarmente, una función no negativa que tiene una singularidad no integrable, $f(t) = t^{-\alpha}$, con $\alpha > 1$, tampoco es integrable en el sentido de Lebesgue dado que, en ese caso, las integrales de las funciones $f_k(t)$ no están acotadas.

No obstante, existen funciones que no tienen una integral de Riemann (ni propia ni impropia) pero que sí son integrables en el sentido de Lebesgue.

Un ejemplo es la función de Dirichlet, ec. (16.3). Esta función no es integrable en el sentido de Riemann, porque el límite de las integrales de funciones escalonadas que aproximan a $\chi(t)$ por arriba no coincide con el límite de las que la aproximan por abajo.

Pero esta función medible puede ser modificada en conjuntos de medida arbitrariamente pequeña, de modo de obtener una secuencia de funciones continuas $\chi_k(t)$ cuyas integrales estén acotadas. La elección de estas funciones que conduce a los mínimos valores posibles para sus integrales corresponde a tomar $\chi_k(t) \equiv 0$ para todo k. Entonces,

$$\int_0^1 \chi(t)\, dt = \operatorname{Inf}\left\{ \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \chi_k(t)\, dt \right\} = 0\,. \tag{16.6}$$

Propiedad 16.4. Si $f(t) \geq 0$ es una función integrable de Lebesgue, y $0 \leq g(t) \leq f(t)$, entonces $g(t)$ también es sumable y su integral satisface

$$0 \leq \int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt\,. \tag{16.7}$$

Definición 16.5. Una función medible $f(t)$, que toma valores tanto positivos como negativos, se dice sumable si su valor absoluto $|f(t)|$ es sumable.

En ese caso, por la propiedad anterior, las funciones

$$\begin{aligned} f_+(t) &= \max\{0, f(t)\} \leq |f(t)|\,, \\ f_-(t) &= \max\{0, -f(t)\} \leq |f(t)|\,, \end{aligned} \tag{16.8}$$

que toman valores no negativos, son integrables de Lebesgue. Dado que $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$, se define la integral de Lebesgue de esa función como

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b f_+(t)\, dt - \int_a^b f_-(t)\, dt\,. \tag{16.9}$$

Si la función $f(t)$ toma valores complejos, y su módulo $|f(t)|$ es sumable, entonces se define

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b \Re\{f(t)\}\; dt + i \int_a^b \Im\{f(t)\}\; dt\,. \tag{16.10}$$

Se puede demostrar que la integral de Lebesgue así definida tiene las mismas propiedades de linealidad que la integral de Riemann,

$$\int_a^b \{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\}\; dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt\,. \tag{16.11}$$

17. El espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$

Se llama $\mathbf{L}_2(a,b)$ al espacio de las funciones $f(t)$ medibles en el intervalo $[a,b]$, cuyos módulos al cuadrado son sumables,

$$\int_a^b |f(t)|^2\; dt < \infty\,. \tag{17.1}$$

Este conjunto se estructura como un espacio lineal respecto de las operaciones usuales de suma de funciones,

$$(f+g)\,(t) := f(t) + g(t)\,, \tag{17.2}$$

y producto de funciones por números,

$$(\alpha f)(t) := \alpha f(t)\,. \tag{17.3}$$

Quisiéramos hacer de él un espacio euclídeo introduciendo un producto escalar similar al del espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$, pero empleando la integral de Lebesgue,

$$\big(f(t), g(t)\big) := \int_a^b f(t)^*\, g(t)\, dt\,. \tag{17.4}$$

Primero verifiquemos que esa integral existe para todo par de funciones $f(t), g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$. Para ello tengamos en cuenta que

$$0 \leq \Big(|f(t)| - |g(t)|\Big)^2 \;\Rightarrow\; \Big|f(t)\, g(t)\Big| \leq \frac{1}{2}\Big(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\Big)\,, \tag{17.5}$$

de donde resulta que $\big(f(t)^*\, g(t)\big)$ es sumable (ver Propiedad 16.4).

Si ahora consideramos la suma de dos funciones $f(t), g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$,

$$\begin{array}{c} \Big|f(t) + g(t)\Big|^2 = \Big|f(t)^2 + 2f(t)\, g(t) + g(t)^2\Big| \leq \\[2mm] \leq \Big|f(t)\Big|^2 + 2\Big|f(t)\, g(t)\Big| + \Big|g(t)\Big|^2\,, \end{array} \tag{17.6}$$

de donde resulta que $(f+g)(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, que es lo que debe ocurrir en un espacio lineal.

En particular, el elemento neutro respecto de la suma es la función idénticamente nula $\mathbf{0}(t)$.

Por otra parte, de la definición de producto escalar, ec. (17.4), y de las propiedades de linealidad de la integral de Lebesgue, ec. (16.11), resulta inmediato probar que se satisfacen los dos primeros axiomas del espacio euclídeo.

En cuanto al tercero,

$$\Big|f(t)\Big|^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; \Big(f(t), f(t)\Big) = \int_a^b \big|f(t)\big|^2\, dt \geq 0\,. \tag{17.7}$$

Pero si $\Big(f(t), f(t)\Big) = 0$, no podemos concluir de ello que $f(t) = \mathbf{0}(t)$, puesto que hemos visto que existen funciones a valores no negativos que (como la función de Dirichlet) tienen una integral de Lebesgue nula a pesar de no ser idénticamente nulas. Esto crea una dificultad con la segunda parte de este axioma.

Sin embargo, se puede demostrar que una función a valores no negativos, $u(t) \geq 0\ \forall\, t$, tiene una integral de Lebesgue nula sí y sólo si ella difiere de 0 en, a lo sumo, un conjunto de medida nula,

$$\int_a^b u(t)\, dt = 0 \;\Leftrightarrow\; u(t) = 0\,, \ \text{a.e.} \tag{17.8}$$

(donde la abreviatura a.e. significa **en casi todo punto** - almost everywhere).

En particular, esto implica que la "distancia" (derivada del "producto escalar" definido en la ec. (17.4)) entre dos funciones $f(t), g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ es cero si esas funciones difieren sólo en un conjunto de medida nula,

$$f(t) = g(t)\,,\ \text{a.e.}\ \Rightarrow \int_a^b \left| f(t) - g(t) \right|^2 dt = 0\,. \tag{17.9}$$

A pesar de no ser idénticas, tales funciones deberían ser consideradas como el mismo vector del espacio euclídeo.

Esto sugiere identificar a todas las funciones de (módulo) cuadrado integrable que difieran unas de otras en, a lo sumo, un conjunto de medida nula con un mismo elemento del espacio. En particular, toda función nula en casi todo punto sería entonces equivalente al vector nulo $\mathbf{0}(t)$, con lo que también se satisfaría el tercer axioma del producto escalar.

Para ser más precisos: interpretamos a los elementos del espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$ no como funciones individuales, sino como **clases de equivalencia de funciones de cuadrado sumable**, donde dos funciones están en la misma clase si coinciden en casi todo punto (es decir, si sólo difieren en un conjunto de medida nula).

Las operaciones lineales entre clases se definen a partir de las operaciones sobre funciones representativas de cada clase, siendo la clase resultante independiente de esta elección. En efecto, cambiar de funciones representativas produce un resultado que coincide con el anterior en casi todo punto, y entonces pertenece a la misma clase de equivalencia.

Finalmente, el producto escalar entre elementos de $\mathbf{L}_2(a,b)$ se define como en la ec. (17.4), a partir de dos funciones representativas de las clases. Esto también resulta independiente de esa elección, dado que cambiar de función en una clase corresponde a cambiar el integrando en, a lo sumo, un conjunto de medida nula, lo que no altera el valor de la integral.

Con esta interpretación, $\mathbf{L}_2(a,b)$ resulta un espacio euclídeo.

Por otra parte, se puede demostrar que las funciones continuas, que participan en la definición de la integral de Lebesgue

$$\int_a^b \left| f(t) \right|^2 dt = \text{Inf} \left\{ \lim_{k\to\infty} \int_a^b \left| f_k(t) \right|^2 dt \right\}\,,\ f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,, \tag{17.10}$$

pertenecen a clases de equivalencia que forman un subespacio denso en $\mathbf{L}_2(a,b)$. Evidentemente, este subespacio es isomorfo a $\mathcal{C}_2(a,b)$.

Dado que $\mathcal{C}_2(a,b)$ es un espacio euclídeo de dimensión infinita y separable (contiene un conjunto denso numerable), también lo es $\mathbf{L}_2(a,b)$.

Finalmente, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 17.1. *(de Riesz y Fischer) $\mathbf{L}_2(a,b)$ es un espacio euclídeo completo.*

Por lo tanto, $\mathbf{L}_2(a,b)$ es un espacio de Hilbert (espacio euclídeo de dimensión infinita, completo y separable), isomorfo al completamiento de $\mathcal{C}_2(a,b)$.

Esta construcción puede ser generalizada al caso de varias variables.

Consideremos, por ejemplo, funciones de dos variables, $f(t,s)$, definidas en la región $[a,b]\times[c,d]$. Un conjunto de puntos de ese rectángulo tiene medida menor que $\varepsilon > 0$ si puede ser contenido en un conjunto finito o infinito numerable de rectángulos de área total menor que ε.

La definición de funciones medibles y sumables es enteramente similar a la del caso de una variable, así como la definición de integral de Lebesgue, que se denota por el mismo símbolo que la integral de Riemann, $\int_a^b \int_c^d f(t,s)\, dt\, ds$.

El conjunto de las clases de equivalencia de funciones de (módulo) cuadrado sumable en la región $[a,b]\times[c,d]$ conforma un espacio de Hilbert llamado $\mathbf{L}_2\left((a,b)\times(c,d)\right)$.

El siguiente resultado permite calcular integrales de Lebesgue dobles como integrales iteradas, como en el caso de integrales de Riemann dobles.

Teorema 17.2. *(de Fubini) Sea $f(t,s)$ una función sumable en el rectángulo $a \leq t \leq b$, $c \leq s \leq d$.*

Entonces, para t fijo, $f(t,s)$ es una función sumable de la variable s en el intervalo $[c,d]$, excepto posiblemente para un conjunto de medida nula de valores de t. Su integral de Lebesgue

$$F(t) = \int_c^d f(t,s)\, ds \tag{17.11}$$

(que existe en casi todo punto) es una función sumable de la variable t, cuya integral coincide con el valor de la integral doble,

$$\int_a^b F(t)\, dt = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(t,s)\, ds \right\} dt = \int_a^b \int_c^d f(t,s)\, dt\, ds\,. \tag{17.12}$$

Similarmente, la integral $\int_a^b f(t,s)\, dt$ existe para casi todos los valores de s, y define una función sumable tal que

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(t,s)\, dt \right\} ds = \int_a^b \int_c^d f(t,s)\, dt\, ds\,. \tag{17.13}$$

18. Complementos ortogonales

El Lema 3.1 muestra la existencia del complemento ortogonal de cualquier subespacio de dimensión finita. En lo que sigue mostraremos que en un espacio euclídeo completo es posible realizar una descomposición similar respecto de un subespacio arbitrario.

Lema 18.1. *Si $x \in \mathbf{E}$ es un vector ortogonal a un subespacio $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$, entonces x es también ortogonal a su clausura, $x \perp \bar{\mathbf{F}}$.*

En efecto, si $y \in \bar{\mathbf{F}}$, entonces $y = \lim_{k\to\infty} y_k$, con $y_k \in \mathbf{F}\,,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. En esas condiciones, por la continuidad del producto escalar,

$$(x, y) = \lim_{k\to\infty} (x, y_k) = 0\,, \tag{18.1}$$

dado que $x \perp y_k\,,\ \forall\, k$. Por lo tanto, $x \perp y\,,\ \forall\, y \in \bar{\mathbf{F}}$, es decir, $x \perp \bar{\mathbf{F}}$. □

Esto implica, en particular, que no existe ningún vector no nulo que sea ortogonal a un subespacio $\mathbf{F}$ denso en $\mathbf{E}$. Eso es así porque, si $x \perp \mathbf{F} \Rightarrow x \perp \mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{F}}$. Entonces, $x \perp x \Rightarrow x = \mathbf{0}$.

En esas condiciones, será suficiente considerar subespacios cerrados (recordemos que, en particular, todo subespacio de dimensión finita es cerrado). También necesitaremos la siguiente propiedad.

Lema 18.2. *(del paralelogramo) Dados dos vectores $x, y \in \mathbf{E}$, vale la relación*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2 \tag{18.2}$$

(es decir, la suma de los cuadrados las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados).

En efecto,

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= 2(x, x) + 2(y, y) = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2\ . \end{aligned} \tag{18.3}$$

□

Lema 18.3. *Consideremos un subespacio cerrado $\mathbf{F}$ de un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$. Todo vector $x \in \mathbf{E}$ puede ser expresado como la suma de dos vectores, $x = u + v$, donde $u \in \mathbf{F}$ y $v \perp \mathbf{F}$. Además, esos dos vectores están unívocamente definidos.*

Sea

$$d = \mathrm{Inf}_{\{y \in \mathbf{F}\}} \{\rho(x,y)\} \geq 0\,. \tag{18.4}$$

Si $d = 0$, entonces x es un punto límite de $\mathbf{F} \Rightarrow x \in \mathbf{F}$, por ser $\mathbf{F}$ cerrado.

Supongamos que $x \notin \mathbf{F} \Rightarrow d > 0$. Eso quiere decir que existen en $\mathbf{F}$ vectores cuya distancia a x es mayor que d, pero tan próxima como se quiera a ese valor. En esas condiciones, podemos construir una secuencia $\{y_k\,,\ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{F}$, tal que

$$\parallel x - y_k \parallel \rightarrow d \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty\,. \tag{18.5}$$

Aplicando el Lema 18.2 podemos escribir

$$2 \parallel x - y_k \parallel^2 + 2 \parallel x - y_l \parallel^2 = \parallel 2x - (y_k + y_l) \parallel^2 + \parallel y_k - y_l \parallel^2\,, \tag{18.6}$$

de donde resulta que, $\forall\, k, l \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \parallel y_k - y_l \parallel^2 \leq 2 \left\{ \parallel x - y_k \parallel^2 + \parallel x - y_l \parallel^2 \right\} - 4\, d^2\,, \tag{18.7}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\left\| x - \frac{y_k + y_l}{2} \right\|^2 \geq d^2\,, \tag{18.8}$$

dado que $(y_k + y_l)/2 \in \mathbf{F}$.

Ahora bien, por construcción, el miembro de la derecha de la ec. (18.7) tiende a 0 cuando $k, l \rightarrow \infty$, de donde se concluye que la secuencia $\{y_k\,,\ k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental. Y como $\mathbf{E}$ es un espacio completo y $\mathbf{F}$ es cerrado, existe en ese subespacio el límite de la secuencia

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k \in \mathbf{F}\,. \tag{18.9}$$

Sea $v = x - u$. Su norma es

$$\parallel v \parallel = \parallel x - u \parallel = \lim_{k \rightarrow \infty} \parallel x - y_k \parallel = d > 0\,. \tag{18.10}$$

Tomemos ahora un vector arbitrario $z \in \mathbf{F}$, y consideremos la combinación $u + \lambda\, z \in \mathbf{F}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, el cuadrado de su distancia respecto del vector $x = u + v$ es

$$\begin{aligned} &\parallel x - (u + \lambda\, z) \parallel^2 = \parallel v - \lambda\, z \parallel^2 = \\ &= \parallel v \parallel^2 - 2\, \Re \{\lambda\, (v, z)\} + |\lambda|^2 \ \parallel z \parallel^2 \geq d^2\,, \end{aligned} \tag{18.11}$$

de donde resulta que

$$2\, \Re \{\lambda\, (v, z)\} \leq |\lambda|^2 \ \parallel z \parallel^2\,, \quad \forall\, z \in \mathbf{F}\,, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{18.12}$$

Primero tomemos $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\left.\begin{cases} 2\,\Re\{(v,z)\} \leq \lambda \parallel z \parallel^2\,, & \forall\,\lambda > 0\,, \\ \\ 2\,\Re\{(v,z)\} \geq \lambda \parallel z \parallel^2\,, & \forall\,\lambda < 0\,, \end{cases}\right\} \Rightarrow \Re\{(v,z)\} = 0\,. \tag{18.13}$$

Si ahora tomamos $\lambda = i\,\mu$, con $\mu \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\left.\begin{cases} 2\,\Im\{(v,z)\} \geq -\mu \parallel z \parallel^2\,, & \forall\,\mu > 0\,, \\ \\ 2\,\Im\{(v,z)\} \leq -\mu \parallel z \parallel^2\,, & \forall\,\mu < 0\,, \end{cases}\right\} \Rightarrow \Im\{(v,z)\} = 0\,. \tag{18.14}$$

Por lo tanto,

$$(v,z) = 0\,,\ \forall\,z \in \mathbf{F} \ \Rightarrow\ v \perp \mathbf{F}\,. \tag{18.15}$$

Finalmente, supongamos que x admite otra descomposición de la forma $x = u' + v'$, con $u' \in \mathbf{F}$ y $v' \perp \mathbf{F}$. Entonces,

$$0 = \parallel (u+v) - (u'+v') \parallel^2 = \parallel u - u' \parallel^2 + \parallel v - v' \parallel^2\,, \tag{18.16}$$

de donde resulta que $u' = u$ y $v' = v$, de modo que la descomposición es única. □

Recordemos que el conjunto de los vectores ortogonales a un subespacio dado $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ forman el **complemento ortogonal** de $\mathbf{F}$, que es un subespacio cerrado.

Podemos resumir estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 18.4. *Para todo subespacio cerrado* $\mathbf{F}$ *de un espacio euclídeo completo* $\mathbf{E}$*, existe su complemento ortogonal* $\mathbf{F}^\perp$*, que es también un subespacio cerrado. Además, todo vector* $x \in \mathbf{E}$ *admite una descomposición única de la forma* $x = u+v$*, con* $u \in \mathbf{F}$ *y* $v \in \mathbf{F}^\perp$*.*

19. Desarrollos ortogonales

Definición 19.1. Se dice que un conjunto ortonormal de vectores de un espacio euclídeo, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$, es un **sistema completo** si no existen en $\mathbf{E}$ vectores no nulos que sean ortogonales a todos los vectores del sistema.

Esto es, el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ es un sistema completo en un espacio $\mathbf{E}$ si las ecuaciones

$$(e_k, x) = 0\,,\ \forall\,k \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ x = \mathbf{0}\,. \tag{19.1}$$

Por el momento no sabemos si tales sistemas existen, ni como construirlos en ese caso, pero sí podemos estudiar las consecuencias de su posible existencia.

Supongamos que tenemos un conjunto numerable de vectores ortonormales,

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}\,, \text{ con } (e_k, e_l) = \delta_{k\,l}\,, \tag{19.2}$$

y que un vector $x \in \mathbf{E}$ tiene un desarrollo de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,. \tag{19.3}$$

En (19.3), la serie converge en el sentido de la distancia en $\mathbf{E}$, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \| \, x - S_N \, \| = 0\,, \tag{19.4}$$

donde

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k \tag{19.5}$$

es la N-ésima suma parcial de la serie.

Para N dado, consideremos el producto escalar

$$(e_k, S_N) = \sum_{l=1}^{N} a_l\, (e_k, e_l) = \begin{cases} a_k\,, & k \leq N\,, \\ \\ 0\,, & k > N\,. \end{cases} \tag{19.6}$$

Entonces,

$$(e_k, x) = \lim_{N\to\infty} (e_k, S_N) = a_k\,. \tag{19.7}$$

Por lo tanto, los coeficientes a_k de un desarrollo convergente como el de la ec. (19.3) están unívocamente determinados como los **coeficientes de Fourier** del vector x respecto del sistema ortonormal considerado.

Dado un sistema ortonormal de vectores como el de la ec. (19.2), siempre es posible calcular los coeficientes de Fourier de un vector $x \in \mathbf{E}$ respecto de dicho sistema, y con ellos formar las sumas parciales de su **serie de Fourier generalizada**,

$$S_N := \sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k\,, \text{ con } a_k := (e_k, x)\,. \tag{19.8}$$

Consideremos la diferencia

$$R_N := x - S_N\,. \tag{19.9}$$

Este vector es ortogonal a los N primeros vectores del sistema, $R_N \perp e_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, N$. En efecto,

$$(e_k, R_N) = (e_k, x) - (e_k, S_N) = a_k - \sum_{l=1}^{N} a_l\, \delta_{k,l} = 0\,,\ \text{si } k \leq N\,. \tag{19.10}$$

En consecuencia, $x = S_N + R_N$ es la suma de dos vectores ortogonales entre sí. Por el teorema de Pitágoras tenemos

$$\| \, x \, \|^2 = \| \, S_N \, \|^2 + \| \, R_N \, \|^2 \geq \| \, S_N \, \|^2 = \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\,, \tag{19.11}$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \leq \| \, x \, \|^2\,,\ \forall\, N \in \mathbb{N}\,. \tag{19.12}$$

De aquí resulta la siguiente propiedad:

Propiedad 19.2. Los coeficientes de Fourier de un vector $x \in \mathbf{E}$ relativos a un conjunto numerable de vectores ortonormales entre sí, $a_k = (e_k, x), \forall\, k \in \mathbb{N}$, satisfacen la **desigualdad de Bessel**,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \| \, x \, \|^2 \quad . \tag{19.13}$$

Teorema 19.3. *Sea* $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ *un sistema ortonormal completo en un espacio euclídeo completo* $\mathbf{E}$*. Todo vector* $x \in \mathbf{E}$ *tiene una serie de Fourier generalizada que converge a* x *en la métrica de ese espacio,*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,, \quad \textit{con } a_k = (e_k, x)\,. \tag{19.14}$$

Consideremos la distancia entre dos sumas parciales de la serie de Fourier generalizada para x,

$$\| \, S_{N+M} - S_N \, \|^2 = \left\| \sum_{k=N+1}^{N+M} a_k\, e_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{N+M} |a_k|^2\,. \tag{19.15}$$

Como consecuencia de la desigualdad de Bessel, la suma en el miembro de la derecha es la diferencia de dos sumas parciales de una serie convergente. Por lo tanto, la sucesión de sumas parciales $\{S_k\}$ es fundamental.

Ahora bien, en un espacio euclídeo completo, toda secuencia de Cauchy tiene un límite. Es decir, existe un vector $S \in \mathbf{E}$ que es el límite de la serie,

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,. \tag{19.16}$$

Los coeficientes de Fourier de S respecto del sistema ortonormal considerado (unívocamente determinados) están dados por $(e_k, S) = a_k$. En consecuencia,

$$(e_k, x - S) = (e_k, x) - (e_k, S) = a_k - a_k = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,. \tag{19.17}$$

Finalmente, si el sistema $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ es completo, la ec. (19.17) implica que

$$x - S = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x = S\,. \tag{19.18}$$

En consecuencia, el vector x es el límite de su serie de Fourier generalizada,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, x)\, e_k\,. \tag{19.19}$$

□

En las condiciones del Teorema 19.3, dos vectores cualesquiera $x, y \in \mathbf{E}$ pueden ser representados como los límites de sus respectivas series de Fourier,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, e_k\,. \tag{19.20}$$

Por la continuidad del producto escalar, podemos escribir

$$(x, y) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k, \sum_{l=1}^{N} b_l\, e_l \right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k^*\, b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*\, b_k\,. \tag{19.21}$$

En particular, tomando $y = x$ obtenemos la **igualdad de Parseval**,

$$\| \, x \, \|^2 = (x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\,. \tag{19.22}$$

Esto muestra que, en un espacio euclídeo completo, la desigualdad de Bessel se reduce a una igualdad cuando el sistema ortonormal es completo. Esta es una suerte de generalización del Teorema de Pitágoras al caso de dimensión infinita.

Para que valgan estas propiedades que acabamos de demostrar debemos contar con un sistema ortonormal completo de vectores.

Ya conocemos un método general para ortogonalizar (y normalizar) una dada secuencia de vectores, $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, pero el sistema ortonormal resultante no será, en general, un sistema completo.

Teorema 19.4. *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema* $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$, *obtenido por ortonormalización de la secuencia* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$, *sea completo en un espacio euclídeo completo* $\mathbf{E}$ *es que la variedad lineal generada por los vectores* x_k, $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$, *sea un subespacio denso en* $\mathbf{E}$.

Primero supongamos que el sistema $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ sea completo. Entonces, como $\mathbf{E}$ es completo, todo vector $x \in \mathbf{E}$ es el límite de su serie de Fourier generalizada

$$x = \lim_{N\to\infty} S_N\,, \quad S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, e_k\,. \tag{19.23}$$

Teniendo en cuenta que cada uno de los vectores e_k es, por construcción, una combinación lineal de un número finito de vectores x_k (ver Teorema 4.1), concluimos que existen combinaciones lineales de (un número finito de) estos vectores que están tan cerca como se quiera del vector x.

Por lo tanto, si el sistema $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ es completo en un espacio $\mathbf{E}$ completo, entonces $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbf{E}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ sea denso en $\mathbf{E}$. Podemos invertir la relación entre los e_k y los x_k, de modo de expresar cada vector x_k como una combinación lineal de (un número finito de) vectores e_k. Entonces, un vector x ortogonal a todos los e_k,

$$(e_k, x) = 0\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,, \tag{19.24}$$

es ortogonal a toda combinación lineal de los x_k, es decir,

$$x \perp \mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}\,. \tag{19.25}$$

Y como no existen vectores no nulos ortogonales a un subespacio denso, debe ser $x = \mathbf{0}$.

Por lo tanto, si $\mathcal{L}\{x_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbf{E}$, entonces el sistema ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$ es completo en $\mathbf{E}$. □

Ejemplos:

• La variedad lineal generada por las potencias de t en el intervalo $[-1, 1]$, que es el subespacio de los polinomios $\mathcal{P}_2(-1, 1)$, es denso en el espacio $\mathcal{C}_2(-1, 1)$ que, a su vez, es denso en el espacio completo $\mathbf{L}_2(-1, 1)$. Entonces, por el Teorema 19.4, el conjunto de los polinomios de Legendre (que se obtienen por ortogonalización de las potencias de t - ver ec. (4.2)) es un sistema ortogonal completo en $\mathbf{L}_2(-1, 1)$.

En consecuencia, toda función de cuadrado sumable en $[-1,1]$ puede ser desarrollada en una serie de polinomios de Legendre (debidamente normalizados), y esa serie converge en media a la función.

• El sistema de las funciones trigonométricas, $\{\cos(kt)\,, k = 0,1,2,\dots;\, \sin(lt)\,, l = 1,2,3,\dots\}$, es ortogonal y completo en $\mathbf{L}_2(-\pi,\pi)$.

En efecto, es bien sabido que una función periódica de período 2π, con una derivada primera continua en toda la recta, tiene un desarrollo en **serie de Fourier** que converge uniformemente a la función en toda la recta.

En consecuencia, el espacio lineal generado por las funciones del sistema trigonométrico es denso en un conjunto que llamaremos $\mathbf{F}$, que contiene a todas aquellas funciones definidas en el intervalo $[-\pi,\pi]$ que pueden ser extendidas a toda la recta como funciones 2π-periódicas y con una derivada primera continua:

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\,, k \geq 0\,;\, \sin(lt)\,, l \geq 1\} \text{ denso en } \mathbf{F}\,. \tag{19.26}$$

Este conjunto $\mathbf{F}$ contiene, en particular, funciones con una derivada primera continua en $(-\pi,\pi)$, y que se anulan idénticamente en intervalos de la forma $[-\pi,-\pi+\delta]$ y $[\pi-\delta,\pi]$, con $\delta > 0$.

Veremos que $\mathbf{F}$ es denso en el conjunto de los polinomios $\mathcal{P}_2(-\pi,\pi)$, que a su vez es denso en $\mathbf{L}_2(-\pi,\pi)$.

En efecto, consideremos un polinomio $P(t)$, y una secuencia de funciones reales y diferenciables, $\{h_k(t), k \in \mathbb{N}\}$, tales que tomen valores entre 0 y 1 y satisfagan

$$h_k(t) = \begin{cases} 0\,, & \pi - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \leq |t| \leq \pi\,, \\ \\ 1\,, & |t| \leq \pi - \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\,. \end{cases} \tag{19.27}$$

Evidentemente, el producto $h_k(t)\,P(t) \in \mathbf{F}\,, \forall\, k$. Y si $|P(t)| \leq M$, $\forall\, t \in [a,b]$, su distancia a $P(t)$

$$\begin{aligned} \rho\Big(h_k(t)\,P(t), P(t)\Big)^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(h_k(t)-1\right)^2 \left|P(t)\right|^2 dt \leq \\ &\leq 2^2 M^2\, 2 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 8M^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 0 \end{aligned} \tag{19.28}$$

cuando $k \to \infty$.

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{\cos(kt)\,, k \geq 0\,;\, \sin(lt)\,, l \geq 1\} \text{ denso en } \mathbf{L}_2(-\pi,\pi)\,. \tag{19.29}$$

Como el sistema trigonométrico ya es ortogonal, normalizando esos vectores obtenemos un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{L}_2(-\pi,\pi)$,

$$\left\{\frac{\cos(kt)}{\sqrt{2\pi}}\,, k\geq 0\,;\ \frac{\sin(lt)}{\sqrt{2\pi}}\,, l\geq 1\right\}\,, \tag{19.30}$$

de acuerdo con el Teorema 19.4.

En un espacio complejo también podemos tomar el sistema ortonormal completo

$$\left\{\frac{\exp(ikt)}{\sqrt{2\pi}}\,, k\in\mathbb{Z}\right\}\,. \tag{19.31}$$

• Los sistemas $\{\cos(kt)\,, k=0,1,2,\dots\}$ y $\{\sin(kt)\,, k=1,2,3,\dots\}$ son completos en $\mathbf{L}_2(0,\pi)$.

En efecto, las funciones de cuadrado sumable en $[0,\pi]$ pueden ser extendidas al intervalo $[-\pi,\pi]$ como funciones pares o impares, cuyas series de Fourier se reducen a series de cosenos y senos respectivamente.

La convergencia en media de la sucesión de sumas parciales (también pares o impares, según el caso) a la función en el intervalo completo implica la convergencia en media en $[0,\pi]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)-S_N(t)|^2\;dt = 2\int_0^{\pi}|x(t)-S_N(t)|^2\;dt\to 0 \tag{19.32}$$

cuando $N\to\infty$.

• Por un razonamiento similar, se puede demostrar que el sistema ortogonal $\{\cos(kt)\cos(ls)\,, k,l\geq 0\}$, es completo en $\mathbf{L}_2\big((0,\pi)\times(0,\pi)\big)$.

$\diamond$

Teorema 19.5. *Todo espacio de Hilbert real* $\mathbf{E}$ *es isomorfo al espacio* $\mathcal{L}_2$.

Recordemos que un espacio de Hilbert es un espacio euclídeo infinito-dimensional, completo y separable.

Todo espacio de Hilbert tiene un sistema ortonormal y completo de vectores. En efecto, por ser separable, $\mathbf{E}$ contiene un conjunto denso numerable,

$$\mathbf{F}=\{x_1,x_2,\dots,x_k,\dots\}\ \text{denso en}\ \mathbf{E}\,. \tag{19.33}$$

En consecuencia, la variedad lineal generada por esos vectores es también densa en $\mathbf{E}$ y, por el Teorema 19.4, el sistema ortonormal que se obtiene por ortonormalización de la secuencia $\mathbf{F}$, $\{e_1,e_2,\dots,e_k,\dots\}$, es completo.

Como el espacio es completo, todo vector $x \in \mathbf{E}$ es el límite de su desarrollo de Fourier respecto del sistema completo $\{e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k\,, \quad a_k = (e_k, x) \in \mathbb{R}\,. \tag{19.34}$$

Además, como el sistema es completo la desigualdad de Bessel se reduce a la igualdad de Parseval,

$$\parallel x \parallel^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty\,. \tag{19.35}$$

Estos coeficientes de Fourier permiten definir un elemento del espacio $\mathcal{L}_2$,

$$\bar{x} = \left\{ a_k\,, k \in \mathbb{N}\,,\ \text{con}\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty \right\} \in \mathcal{L}_2\,. \tag{19.36}$$

Inversamente, dados el sistema ortonormal $\{e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ y un elemento $\bar{x} \in \mathcal{L}_2$ como en la ec. (19.36), puede asociarse a éste un vector de $\mathbf{E}$ dado por el límite de la serie de la ec. (19.34).

Dada la unicidad de los coeficientes de Fourier, esta relación establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de $\mathbf{E}$ y los de $\mathcal{L}_2$. Se verifica de inmediato que esta correspondencia preserva las operaciones lineales y los productos escalares.

Por ejemplo, si $x, y \in \mathbf{E}$ se corresponden con $\bar{x} = \{a_k\}, \bar{y} = \{b_k\} \in \mathcal{L}_2$ respectivamente, tenemos que

$$(x, y)_{\mathbf{E}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, b_k = (\bar{x}, \bar{y})_{\mathcal{L}_2}\,. \tag{19.37}$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}$ es isomorfo a $\mathcal{L}_2$. □

Similarmente, todo espacio de Hilbert complejo es isomorfo a la **extensión compleja**[8] del espacio $\mathcal{L}_2$.

[8] Este es un espacio euclídeo complejo cuyos elementos se obtienen como sumas formales de la forma $\bar{x} + i\,\bar{y}$, con $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{L}_2$, y donde el producto escalar se define por

$$(\bar{x} + i\,\bar{y}, \bar{x}' + i\,\bar{y}') := (\bar{x}, \bar{x}') + (\bar{y}, \bar{y}') + i\,(\bar{x}, \bar{y}') - i\,(\bar{y}, \bar{x}')\ . \tag{19.38}$$

20. Funcionales lineales acotadas en espacios completos

Teorema 20.1. *Toda funcional lineal acotada $f(x)$ en un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$ puede ser representada como el producto escalar por un vector fijo del espacio, $f(x) \equiv (z, x)\,,\ z \in \mathbf{E}$.*

Consideremos una funcional lineal acotada, $|f(x)| \leq K \parallel x \parallel$, $\forall\, x \in \mathbf{E}$. Si f es la funcional nula, ella corresponde al producto escalar por el vector nulo, $f(x) = 0 = (\mathbf{0}, x)\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$.

Supongamos que f no sea la funcional nula, y llamemos $\mathbf{F}$ al **kernel** o subespacio nulo de la funcional,

$$f(x) = 0\,,\ \forall\, x \in \mathbf{F}\,. \tag{20.1}$$

Este es un subespacio cerrado, puesto que si la secuencia fundamental $\{x_k\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{F}$ tiene por límite al vector x, entonces

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = 0\,, \tag{20.2}$$

dado que toda funcional lineal acotada es continua (ver Teorema 10.5).

Por el Teorema 18.4, sabemos que en un espacio euclídeo completo existe el complemento ortogonal de este kernel, $\mathbf{F}^\perp$, que también es un subespacio cerrado. Veremos que $\mathbf{F}^\perp$ es un subespacio unidimensional.

En efecto, sean dos vectores no nulos arbitrarios $z_1, z_2 \in \mathbf{F}^\perp$, de modo que $f(z_{1,2}) \neq 0$, y sea $y = f(z_1)\, z_2 - f(z_2)\, z_1 \in \mathbf{F}^\perp$. Entonces,

$$f(y) = f(z_1)\, f(z_2) - f(z_2)\, f(z_1) = 0 \ \Rightarrow\ y \in \mathbf{F}\,. \tag{20.3}$$

Por lo tanto, $y \perp y \ \Rightarrow\ y = \mathbf{0}$, y los vectores z_1 y z_2 son colineales.

Finalmente, sea $e \in \mathbf{F}^\perp$ un vector unitario que genere ese subespacio. Sabemos que todo vector $x \in \mathbf{E}$ tiene una descomposición única de la forma $x = u + v$, donde $v \in \mathbf{F}$ y

$$u = \lambda\, e \in \mathbf{F}^\perp\,,\ \text{con } \lambda = (e, u) = (e, u + v) = (e, x)\,. \tag{20.4}$$

En esas condiciones

$$f(x) = \lambda\, f(e) + f(v) = f(e)\,(e, x) = (z, x)\,,\ \text{con } z = f(e)^*\, e\,. \tag{20.5}$$

Este vector z es único, puesto que si también tenemos que $f(x) = (z', x)\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}$, entonces

$$(z - z', x) = 0\,, \forall\, x \ \Rightarrow \parallel z - z' \parallel^2 = 0 \ \Rightarrow\ z' = z\,. \tag{20.6}$$

□

21. El operador integral de Fredholm

Ya hemos señalado que todo operador lineal acotado es continuo. Un ejemplo importante de operador acotado en $\mathbf{L}_2(a,b)$ es el operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, definido por

$$A\,x(t) := \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\,, \tag{21.1}$$

donde el **núcleo** del operador integral, $K(t,s)$, es una función de dos variables de (módulo) cuadrado sumable en la región $a \leq t, s \leq b$,

$$K^2 = \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \; dt\,ds < \infty\,. \tag{21.2}$$

Esto equivale a decir que

$$K(t,s) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)\,, \tag{21.3}$$

y que su norma en ese espacio es

$$\parallel K(t,s) \parallel = K\,. \tag{21.4}$$

En esas condiciones, el Teorema de Fubini garantiza que la integral

$$k(t)^2 = \int_a^b |K(t,s)|^2 \; ds \tag{21.5}$$

existe para casi todos los valores de $t \in [a,b]$, y define una función sumable cuya integral es

$$\int_a^b k(t)^2\,dt = K^2\,. \tag{21.6}$$

Entonces, para casi todos los valores de t, $K(t,s)$ puede ser considerada como una función de cuadrado sumable de la variable $s \in [a,b]$, de norma $k(t) = +\sqrt{k(t)^2}$, y la acción del operador A sobre cualquier función $x(s) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ puede ser representada como

$$y(t) = A\,x(t) = \big(K(t,s)^*, x(s)\big)\,, \quad a.\,e. \tag{21.7}$$

De la desigualdad de Cauchy - Schwarz resulta que

$$|y(t)|^2 = \left|\big(K(t,s)^*, x(s)\big)\right|^2 \leq k(t)^2 \; \parallel x \parallel^2\,, \tag{21.8}$$

y de la ec. (21.6) concluimos que $y(t) = A\,x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$. En efecto,

$$\parallel A\,x \parallel^2 = \parallel y \parallel^2 = \int_a^b |y(t)|^2\,dt \leq K^2 \; \parallel x \parallel^2 \;. \tag{21.9}$$

Por lo tanto, un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado integrable como el de la ec. (21.1), es un operador acotado, definido sobre todo $\mathbf{L}_2(a,b)$, cuya norma no supera a la norma de su núcleo como función de cuadrado sumable de sus dos variables,

$$\| A \| \leq K = \| K(t,s) \| \ . \tag{21.10}$$

22. Operadores completamente continuos

Definición 22.1. Un conjunto de elementos $\mathbf{F}$ de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$ se dice **compacto**[9] si todo subconjunto infinito $\mathbf{F}' \subset \mathbf{F}$ contiene al menos una secuencia de Cauchy (construida con elementos distintos).

Ejemplos:

• Todo conjunto finito puede ser considerado compacto.

• Todo conjunto infinito acotado en la recta $\mathbb{R}$ es compacto, en virtud del Teorema de Bolzano - Weierstrass.

Por el contrario, todo conjunto $\mathbf{F}$ no acotado en $\mathbb{R}$ es no compacto. En efecto, en ese caso se puede seleccionar el subconjunto infinito $\{x_k \in \mathbf{F}\,,\ k \in \mathbb{N}\,,$ tales que $\|x_k\| > k\}$, que no contiene ninguna secuencia fundamental.

• Similarmente, resulta inmediato mostrar que todo conjunto infinito de elementos de un espacio de dimensión finita es compacto sí y sólo si es acotado. Ese es al caso, por ejemplo, de la esfera de radio 1 en el espacio.

• Si bien **compacidad** y **acotamiento** son características equivalentes en todo espacio de dimensión finita, en espacios euclídeos de dimensión infinita existen conjuntos acotados que no son compactos.

Ese es el caso, por ejemplo, de la esfera de radio 1 en un espacio de Hilbert. En efecto, por ser separable, este espacio contiene un conjunto ortogonal completo de vectores unitarios, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$, que no contiene ninguna secuencia de Cauchy dado que

$$\rho(e_k, e_l)^2 = \| e_k - e_l \|^2 = 2\,,\ \forall\, k, l \in \mathbb{N}\,. \tag{22.1}$$

$\diamond$

Lema 22.2. *Todo conjunto compacto en un espacio euclídeo* $\mathbf{E}$ *es acotado.*

Supongamos que el conjunto $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ no sea acotado. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ es posible encontrar un vector $x_k \in \mathbf{F}$ tal que $\| x \| \geq k$.

[9] También suele emplearse la denominación de **localmente compacto**, reservando el término **compacto** para aquellos conjuntos cuyos subconjunto infinitos contienen al menos una secuencia convergente.

En esas condiciones, el conjunto $\mathbf{F}' = \{x_k\,, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{F}$ no contiene ninguna secuencia fundamental formada con puntos distintos, dado que toda secuencia de Cauchy es acotada.

Por lo tanto, si $\mathbf{F}$ es no acotado entonces es no compacto, lo que implica que si $\mathbf{F}$ es compacto entonces es acotado. □

Definición 22.3. Un operador lineal A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, se dice **completamente continuo** o **compacto** si aplica la esfera de radio 1 del espacio en un conjunto compacto.

Ejemplos:

• Todo operador lineal A en un espacio euclídeo de dimensión finita es compacto. En efecto, en ese caso A es acotado y satisface que

$$\| A\,x \| \leq \| A \| \, \| x \| \; . \tag{22.2}$$

Por lo tanto, A aplica la esfera de radio 1 en un conjunto acotado que, en un espacio de dimensión finita, es también compacto.

• En un espacio de Hilbert, el operador identidad $\mathbf{I}$ (que es acotado) no es compacto, puesto que aplica en sí misma a la esfera de radio 1 del espacio, que no es una región compacta.

• Si A es un operador acotado que aplica un espacio de dimensión infinita $\mathbf{E}$ en un subespacio de dimensión finita $\mathbf{E}'$, entonces A es un operador compacto.

En efecto, tal operador aplica la esfera de radio 1 del espacio $\mathbf{E}$ en una región acotada de $\mathbf{E}'$, que es también compacta. ◇

Lema 22.4. *Sea $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ una secuencia de operadores lineales definidos sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, y supongamos que esa secuencia converge al operador $\mathbf{A}$ (en el sentido de la distancia en el espacio de Banach de los operadores lineales acotados sobre $\mathbf{E}$),*

$$\lim_{k\to\infty} \| A_k - A \| = 0 \,. \tag{22.3}$$

En esas condiciones, si para todo k el operador A_k es compacto, entonces A es también compacto.

Debemos mostrar que, dado un conjunto infinito de vectores unitarios $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$, siempre es posible hallar una secuencia fundamental contenida en el conjunto de sus imágenes, $A\,(\mathbf{F}) = \{A\,x_k, k \in \mathbb{N}\}$.

Consideremos primero el conjunto $A_1\,(\mathbf{F}) = \{A_1\,x_k, k \in \mathbb{N}\}$. Este es un conjunto compacto, puesto que A_1 es completamente continuo.

Por lo tanto, es posible hallar contenida en $A_1\,(\mathbf{F})$ una secuencia de Cauchy (formada por vectores diferentes), que corresponde a las imágenes de un subconjunto (también infinito) de la secuencia original, $\mathbf{F}_1 = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \ldots, x_k^{(1)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}$.

Tenemos entonces que la secuencia $A_1\,(\mathbf{F}_1) = \{A_1\,x_k^{(1)}, k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental.

Consideremos ahora el conjunto $A_2\,(\mathbf{F}_1) = \{A_2\,x_k^{(1)}, k \in \mathbb{N}\}$, también compacto dado que A_2 es completamente continuo. Entonces, siempre es posible hallar contenida en $A_2\,(\mathbf{F}_1)$ una secuencia de Cauchy, que corresponde a las imágenes de un subconjunto infinito de la secuencia original, $\mathbf{F}_2 = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \ldots, x_k^{(2)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}$.

Por construcción, tenemos que tanto la secuencia $A_2\,(\mathbf{F}_2) = \{A_2\,x_k^{(2)}, k \in \mathbb{N}\}$, cuanto $A_1\,(\mathbf{F}_2) = \{A_1\,x_k^{(2)}, k \in \mathbb{N}\}$ son fundamentales (ya que $\mathbf{F}_2 \subset \mathbf{F}_1$).

Por idénticas consideraciones, vemos que siempre es posible seleccionar un subconjunto infinito $\mathbf{F}_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}_{n-1} \subset \cdots \subset \mathbf{F}_1 \subset \mathbf{F}$, tal que $A_m\,(\mathbf{F}_n) = \{A_m\,x_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$, con $m = 1, 2, \ldots, n$, sea una secuencia fundamental.

Formemos ahora el conjunto

$$\mathbf{G} = \{y_1 = x_1^{(1)}, y_2 = x_2^{(2)} \ldots, y_k = x_k^{(k)}, \ldots\} \subset \mathbf{F}\,. \tag{22.4}$$

Teniendo en cuenta que $\{y_k\,, k \geq n\} \subset \mathbf{F}_n$, vemos que las secuencias $A_n\,(\mathbf{G}) = \{A_n\,y_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ son fundamentales para todo n.

Mostraremos que la secuencia $A\,(\mathbf{G}) = \{A\,y_k, k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental. Para ello, dado $\varepsilon > 0$, tomemos n suficientemente grande como para que la norma

$$\parallel A - A_n \parallel < \frac{\varepsilon}{4}\,, \tag{22.5}$$

y sea m tal que

$$\parallel A_n\,y_k - A_n\,y_l \parallel < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ \forall\, k, l > m\,. \tag{22.6}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\| A\, y_k - A\, y_l \| = \| A\,(y_k - y_l) \| = \\
&= \| (A - A_n)\,(y_k - y_l) + A_n\,(y_k - y_l) \| \leq \\
&\leq \| (A - A_n)\,(y_k - y_l) \| + \| A_n\,(y_k - y_l) \| \leq \\
&\leq \| A - A_n \| \, \| y_k - y_l \| + \| A_n\, y_k - A_n\, y_l \| < \\
&< \frac{\varepsilon}{4} \times 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{22.7}$$

En resumen, dado un conjunto numerable arbitrario de vectores unitarios, siempre es posible extraer de él un subconjunto infinito que es aplicado por el operador A en una secuencia de Cauchy.

Por lo tanto, A es un operador completamente continuo. □

Teorema 22.5. *Todo operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable es compacto.*

Consideremos primero el caso de un operador A_n de **núcleo degenerado**,

$$K_n(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, \psi_k(s)^*\,, \quad \text{con } \varphi_k(t), \psi_k(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,. \tag{22.8}$$

Nótese que siempre es posible suponer que las funciones $\varphi_k(t)\,, k = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes. En caso contrario, algunas de ellas pueden ser eliminadas en favor de un subconjunto linealmente independiente, obteniéndose una suma con un menor número de términos. Por la misma razón, puede suponerse que las funciones $\psi_k(t)\,, k = 1, \ldots, n$ son linealmente independientes.

Como sabemos, la norma de este núcleo es una cota superior para la norma del operador integral,

$$\begin{aligned}
K_n^2 = \| K_n(t,s) \|^2 &= \int_a^b \int_a^b \sum_{k,l=1}^{n} \varphi_k(t)^*\, \psi_k(s)\, \varphi_l(t)\, \psi_l(s)^*\, dt\, ds = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \big(\varphi_k(t), \varphi_l(t)\big)\, \big(\psi_l(s), \psi_k(s)\big) \geq \| A_n \|^2\ .
\end{aligned} \tag{22.9}$$

La acción del operador A_n sobre una función $x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ se reduce a

$$A_n\, x(t) = \sum_{k=1}^{n} (\psi_k, x)\ \varphi_k(t)\,, \tag{22.10}$$

de modo que A_n aplica todo el espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$ en el subespacio de dimensión finita generado por las funciones $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$.

En esas condiciones, todo operador integral de Fredholm de núcleo degenerado es un operador completamente continuo.

Consideremos ahora un operador integral A de núcleo de cuadrado sumable arbitrario, $K(t,s)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$. Este núcleo puede ser desarrollado en una serie de Fourier generalizada (convergente en media) de la forma

$$K(t,s)=\sum_{k,l=0}^{\infty} C_{k,l}\,\cos\left(k\pi\,\frac{t-a}{b-a}\right)\,\cos\left(l\pi\,\frac{s-a}{b-a}\right). \tag{22.11}$$

Las sumas parciales de esta serie,

$$K_n(t,s)=\sum_{k,l=0}^{n} C_{k,l}\,\cos\left(k\pi\,\frac{t-a}{b-a}\right)\,\cos\left(l\pi\,\frac{s-a}{b-a}\right)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big), \tag{22.12}$$

permiten definir una sucesión de operadores integrales de Fredholm de núcleo degenerado, A_n, todos ellos compactos.

La diferencia $\big(A-A_n\big)$ es también un operador integral,

$$\big(A-A_n\big)\,x(t)=A\,x(t)-A_n\,x(t)=\int_a^b\big(K(t,s)-K_n(t,s)\big)\,x(s)\,ds\,, \tag{22.13}$$

cuyo núcleo es la diferencia $\big(K(t,s)-K_n(t,s)\big)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$.

Ahora bien, como la norma del operador $\big(A-A_n\big)$ está acotada por la norma de su núcleo,

$$\|\, A-A_n\,\|\leq\|\, K(t,s)-K_n(t,s)\,\|\to 0 \quad \text{cuando } n\to\infty\,. \tag{22.14}$$

Por lo tanto, la secuencia de operadores compactos A_n converge al operador A en el sentido de la distancia en el espacio normado de los operadores lineales acotados sobre $\mathbf{L}_2(a,b)$. En virtud del Teorema 22.4, el operador integral A de núcleo $K(t,s)$ es también completamente continuo. $\square$

Este resultado vale, en particular, cuando el núcleo $K(t,s)$ es continuo en la región compacta $a\leq t,s\leq b$. En este caso, el operador integral de Fredholm aplica $\mathbf{L}_2(a,b)\to\mathcal{C}_2(a,b)$. En efecto, si

$$y(t)=\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds \tag{22.15}$$

tenemos que

$$\left| y(t+\delta) - y(t) \right|^2 = \left| \Big(K(t+\delta, s)^* - K(t,s)^*, x(s) \Big) \right|^2 \leq$$

$$\leq \| x \|^2 \int_a^b \left| K(t+\delta, s) - K(t,s) \right|^2 ds \leq \tag{22.16}$$

$$\leq \| x \|^2 \, (b-a) \max_{a\leq s\leq b} \left\{ \left| K(t+\delta, s) - K(t,s) \right|^2 \right\} \to 0$$

cuando $\delta \to 0$.

23. AUTOVECTORES Y AUTOVALORES DE OPERADORES COMPLETAMENTE CONTINUOS

Lema 23.1. *Todo operador lineal completamente continuo es acotado y, por lo tanto, continuo.*

En efecto, si A es compacto, la esfera de radio 1 del espacio $\mathbf{E}$ es aplicada por A en un conjunto compacto, que necesariamente es acotado:

$$\| A \| = \sup_{\{\|x\|=1\}} \| A\, x \| < \infty \, . \tag{23.1}$$

□

Lema 23.2. *Todo operador lineal simétrico y completamente continuo A, definido sobre un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$, tiene un vector máximo.*

Supongamos que $A \neq \mathbf{O}$ (en cuyo caso este enunciado vale trivialmente).

Como $\| A \| = \sup \| A\, x \|$ para x tomando valores en la esfera de radio 1 de $\mathbf{E}$, entonces es posible seleccionar una secuencia de vectores unitarios $\mathbf{F} = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ tales que las normas de los vectores $y_k = A\, x_k$ satisfagan que

$$\lim_{k\to\infty} \| y_k \| = \| A \| > 0 \, . \tag{23.2}$$

Como A es completamente continuo, $A\,(\mathbf{F})$ es un conjunto compacto. Entonces, siempre podemos suponer que la secuencia $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ es fundamental (basta con descartar aquellos vectores de la secuencia $\mathbf{F}$ cuyas imágenes no correspondan a elementos de la secuencia de Cauchy que debe contener $A\,(\mathbf{F})$).

Ahora bien, si el espacio $\mathbf{E}$ es completo, existe un vector $y \in \mathbf{E}$ que es el límite de esa secuencia de Cauchy,

$$y = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} A\, x_k \, . \tag{23.3}$$

Además, por la continuidad de la norma tenemos

$$\| y \| = \lim_{k\to\infty} \| y_k \| = \| A \| \ . \tag{23.4}$$

Mostraremos ahora que si A es simétrico, entonces el vector unitario $z = y/\| A \|$ es un vector máximo de A.

En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} \| y_k \|^2 = \| A\, x_k \|^2 = \left(x_k, A^\dagger y_k\right) = \\ = (x_k, A\, y_k) \leq \| x_k \| \, \| A\, y_k \| \leq \| A \| \, \| y_k \| \,, \end{aligned} \tag{23.5}$$

de modo que, en el límite $k \to \infty$, resulta

$$\| A \|^2 \leq \lim_{k\to\infty} \| A\, y_k \| = \| A\, y \| \leq \| A \|^2 \ . \tag{23.6}$$

Por lo tanto, $\| A\, z \| = \| A \|$, con $\| z \| = 1$. □

Como consecuencia de los Lemas 23.1 y 23.2, y aplicando los resultados generales obtenidos en el Lema 8.8[10], se demuestra de inmediato el siguiente Lema.

Lema 23.3. *Todo operador simétrico completamente continuo A, definido sobre un espacio euclídeo completo* **E**, *tiene un autovector de autovalor $\lambda = \| A \|$ o $\lambda = - \| A \|$.*

Recurriendo al procedimiento empleado en la demostración del Teorema 8.9 (válido para el caso de dimensión finita), y teniendo en cuenta que el complemento ortogonal es siempre cerrado, y que todo subespacio cerrado de un espacio euclídeo completo es también un espacio completo, podemos construir un conjunto ortonormal de autovectores de A, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots \mid A\, e_k = \lambda_k\, e_k \,; (e_k, e_l) = \delta_{kl}\}$.

Por construcción, estos autovectores son obtenidos en orden no creciente de los valores absolutos de sus autovalores, $\| A \| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \geq \ldots$.

Pero, a diferencia de lo que ocurre en dimensión finita, en un espacio de dimensión infinita este procedimiento puede continuarse indefinidamente.

El siguiente Lema impone restricciones sobre la distribución que pueden adoptar sobre la recta los autovalores de un operador simétrico compacto.

[10]Lema 8.8: Si el operador simétrico acotado A tiene un vector máximo, entonces A también tiene un autovector con autovalor $\| A \|$ o $- \| A \|$.

Lema 23.4. *Sea A un operador simétrico completamente continuo en un espacio euclídeo completo. Entonces A tiene un conjunto finito de autovectores ortonormales entre sí correspondientes a autovalores que, en valor absoluto, superan a un número $\delta > 0$.*

Supongamos que, por el contrario, contamos con un conjunto infinito de tales autovectores,

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\} \;\Big|\; (e_k, e_l) = \delta_{kl}\,;\, A\,e_k = \lambda_k\,e_k \text{ con } |\lambda_k| > \delta > 0\,, \tag{23.7}$$

y consideremos el conjunto de sus imágenes por A, $\{\lambda_k\,e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$.

Este no es un conjunto compacto puesto que, siendo infinito, no contiene ninguna secuencia de Cauchy. En efecto, la distancia entre dos cualesquiera de sus elementos satisface

$$\|\, A\,e_k - A\,e_l \,\|^2 = \|\, \lambda_k\,e_k - \lambda_l\,e_l \,\|^2 = |\lambda_k|^2 + |\lambda_l|^2 > 2\,\delta^2\,,\ \forall\, k \neq l\,. \tag{23.8}$$

En esas condiciones, resulta imposible seleccionar una subsecuencia fundamental, lo que está en contradicción con la hipótesis de compacidad del operador A.

Por lo tanto, el conjunto de autovectores ortonormales de la ec. (23.7) ha de contener un número finito de elementos. □

Propiedad 23.5. El Lema 23.4 implica que si un operador simétrico completamente continuo tiene un número infinito de autovalores no nulos, ellos forman una secuencia que converge al origen. Además, la degeneración de cualquier autovalor no nulo es finita (es decir, los subespacios característicos correspondientes a autovalores $\lambda \neq 0$ son de dimensión finita).

A partir de estos resultados podemos concluir que si un operador simétrico completamente continuo A tiene un conjunto infinito de autovalores no nulos, éstos pueden ser dispuestos en orden decreciente de sus valores absolutos, de modo que formen una secuencia convergente a 0. Los correspondientes autovectores son, por construcción, ortogonales entre sí, aún cuando correspondan al mismo autovalor.

En esas condiciones, obtenemos un conjunto numerable de autovectores ortonormales, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$, cuyos autovalores, que satisfacen

$$\|\, A \,\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k| \geq \ldots\,, \tag{23.9}$$

forman una secuencia que converge al origen, $\lambda_k \to 0$.

Mostraremos ahora que todo vector z ortogonal a los autovectores e_k así construidos satisface $A\,z = \mathbf{0}$.

Lema 23.6. *Si $z \in \mathbf{E}$ es ortogonal a todos los autovectores e_k correspondientes a autovalores no nulos de un operador simétrico completamente continuo A, definido sobre un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$, entonces z es un autovector de A correspondiente al autovalor 0.*

Consideremos la variedad lineal generada por (todos) los autovectores de A correspondientes a autovalores no nulos: $\mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_k \ldots\}$, donde

$$A\, e_k = \lambda_k\, e_k\,, \quad \lambda_k \neq 0\,. \tag{23.10}$$

Llamemos $\mathbf{F}$ a su clausura, $\mathbf{F} = \overline{\mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_k \ldots\}}$, y $\mathbf{F}^\perp$ a su complemento ortogonal.

Dado que A es simétrico y $\mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_k \ldots\}$ es invariante, $\mathbf{F}^\perp$ es un subespacio cerrado invariante frente a la acción de A. En esas condiciones, podemos considerar la restricción del operador A al subespacio $\mathbf{F}^\perp$, que es él mismo un espacio euclídeo completo.

Sea

$$M := \sup_{\left\{x\in\mathbf{F}^\perp \,\middle|\, \|x\|=1\right\}} \| \, A\, x \, \|\,, \tag{23.11}$$

la "norma" de la restricción de A al subespacio $\mathbf{F}^\perp$. Si $M > 0$, por el Lemma 23.3, sabemos que A tendría un autovector de autovalor $\lambda = \pm M \neq 0$. Pero, por hipótesis, eso no ocurre, ya que todos los autovectores correspondientes a autovalores no nulos están contenidos en $\mathbf{F}$.

Por lo tanto, $M = 0 \Rightarrow A\, z = \mathbf{0}\,,\ \forall\, z \in \mathbf{F}^\perp$. $\square$

Ahora bien, por el Teorema 18.4, sabemos que todo vector $x \in \mathbf{E}$ tiene una descomposición única como la suma $x = u + v$, con $u \in \mathbf{F}$ y $v \in \mathbf{F}^\perp$.

Por otra parte, en las condiciones del Lema 23.6, el conjunto de autovectores de A correspondientes a autovalores no nulos, $\{e_1, \ldots, e_k \ldots\}$, constituye (por construcción) un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{F}$ que, por ser un subespacio cerrado de un espacio completo, es él mismo un espacio euclídeo completo.

En consecuencia, todo vector $u \in \mathbf{F}$ es el límite de su desarrollo de Fourier respecto de dicho sistema ortonormal,

$$u = \sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 0\}} a_k\, e_k\,, \quad \text{con } a_k = (e_k, u) = (e_k, x). \tag{23.12}$$

Estos resultados prueban el siguiente teorema:

Teorema 23.7. *Sea A un operador simétrico completamente continuo definido sobre un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$. Entonces, todo vector $x \in \mathbf{E}$ puede ser* *representado como la suma de dos vectores ortogonales entre sí, $x = u + v$, donde u es el límite de una suma que se extiende sobre el conjunto de autovectores ortonormales de A correspondientes a autovalores no nulos,*

$$u = \sum_{\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 0\}} a_k \, e_k \quad \text{con } a_k = (e_k, x)\,, \tag{23.13}$$

y donde v es un autovector de A correspondiente al autovalor nulo,

$$A\, v = \mathbf{0} = 0\, v\,. \tag{23.14}$$

Si $\mathbf{E}$ es un espacio de Hilbert, es separable. Entonces $\mathbf{E}$ contiene un conjunto denso numerable, $\mathbf{G} = \{x_k\,, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{E}$, cuyos elementos también tienen una descomposición única como sumas de la forma $x_k = u_k + v_k$, con $u_k \in \mathbf{F}$ y $v_k \in \mathbf{F}^{\perp}$.

Dado un vector arbitrario $x \in \mathbf{E}$ y un número $\varepsilon > 0$, siempre es posible encontrar un vector $x_k \in \mathbf{G}$ tal que

$$\varepsilon^2 > \| \, x - x_k \, \|^2 = \| \, u - u_k \, \|^2 + \| \, v - v_k \, \|^2 \geq \| \, v - v_k \, \|^2\,, \tag{23.15}$$

de donde resulta que el conjunto numerable $\{v_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbf{F}^{\perp}$. Entonces, $\mathbf{F}^{\perp}$ es un espacio completo y separable.

En virtud del Teorema 19.4, por ortogonalización de la secuencia $\{v_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ se obtiene un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{F}^{\perp}$, cuyos elementos son autovectores de A correspondientes todos ellos al autovalor nulo,

$$\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k, \dots\} \,\big|\, (\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l) = \delta_{kl}\,; A\, \mathcal{E}_k = 0\, \mathcal{E}_k = \mathbf{0}\,. \tag{23.16}$$

Por lo tanto, todo vector $v \in \mathbf{F}^{\perp}$ es el límite de un desarrollo de Fourier de la forma

$$v = \sum_{\{\mathcal{E}_k \,|\, \lambda_k = 0\}} b_k \, \mathcal{E}_k\,, \quad \text{donde } b_k = (\mathcal{E}_k, v) = (\mathcal{E}_k, x). \tag{23.17}$$

Estos resultados, junto con el Teorema 23.7, prueban el siguiente Teorema de Hilbert:

Teorema 23.8. *Todo operador simétrico y completamente continuo definido sobre un espacio de Hilbert tiene un sistema ortonormal completo de autovectores.*

24. Autovectores de un operador de Fredholm

Consideremos un operador integral de Fredholm A de núcleo hermítico y de cuadrado sumable,

$$K(s,t) = K(t,s)^*\,, \quad K = \parallel K(t,s) \parallel < \infty\,. \tag{24.1}$$

Un operador con esas características está definido sobre todo el espacio de Hilbert $\mathbf{L}_2(a,b)$ (ver Sección 21), es simétrico (ver ec. (8.20)) y completamente continuo (ver Teorema 22.5). Entonces, tiene un sistema ortonormal y completo de autovectores, y todo vector $x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ es el límite de su desarrollo de Fourier respecto de ese sistema.

Los autovectores de A satisfacen

$$A\,e_k(t) = \int_a^b K(t,s)\,e_k(s)\,ds = \lambda_k\,e_k(t)\,. \tag{24.2}$$

En consecuencia, podemos escribir que

$$\lambda_k\,e_k(t)^* = \big(e_k(s), K(t,s)^*\big)\,, \tag{24.3}$$

de modo que $\lambda_k\,e_k(t)^*$ puede ser considerado como el coeficiente de Fourier de (la función de cuadrado sumable de la variable s) $K(t,s)^*$ correspondiente al vector $e_k(s)$.

Entonces, la desigualdad de Bessel implica que, $\forall\,N$,

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\,\left|e_k(t)\right|^2 \leq \int_a^b \left|K(t,s)\right|^2\,ds = k(t)^2\,, \tag{24.4}$$

según la notación adoptada en la Sección 21. Integrando ambos miembros en t entre a y b obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\,\parallel e_k(t)\parallel^2 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 \leq \int_a^b k(t)^2\,dt = K^2\,, \quad \forall\,N \in \mathbb{N}\,. \tag{24.5}$$

Por lo tanto, la serie formada con los cuadrados de los autovalores de un operador integral de Fredholm de núcleo hermítico y de cuadrado sumable es convergente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \leq K^2 < \infty \tag{24.6}$$

(resultado que no es válido en general para otros operadores simétricos y compactos).

Una función en la imagen del operador es de la forma

$$y(t) = A\,x(t) = A\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k(t)\right\}\,, \tag{24.7}$$

donde $a_k = (e_k, x)$. Dado que la serie en el segundo miembro converge al vector x, por la continuidad de A podemos escribir

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, A\, e_k(t) = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 0\}} \lambda_k\, a_k\, e_k(t)\,. \tag{24.8}$$

Por lo tanto, una función $y(t) \in \mathrm{Rank}(A)$ es el límite en media de un desarrollo en serie de autovectores de A correspondientes a autovalores no nulos.

Teorema 24.1. *Si el núcleo $K(t,s)$, hermítico y de cuadrado sumable, satisface la* **condición de Hilbert - Schmidt***,*

$$k(t)^2 = \int_a^b |K(t,s)|^2\, ds \leq M^2\,, \tag{24.9}$$

donde M es una constante independiente de t, entonces toda función $y(t)$ en el rango del operador integral A que define ese núcleo tiene un desarrollo en serie de autofunciones de A que no sólo converge en media a $y(t)$, sino también absoluta y uniformemente.

Consideremos una suma parcial de la serie para $y(t)$ en el miembro de la derecha de la ec. (24.8),

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k\, \lambda_k\, e_k(t)\right| \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k|\, |\lambda_k\, e_k(t)|\,. \tag{24.10}$$

Teniendo en cuenta que, por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \leq \parallel x \parallel^2\,, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,, \tag{24.11}$$

y que, por hipótesis, de la ec. (24.4) tenemos

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2\, |e_k(t)|^2 \leq k(t)^2 \leq M^2\,, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, t \in [a,b]\,, \tag{24.12}$$

aplicando la desigualdad de Bessel en $\mathbb{R}^N$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k|\, |\lambda_k\, e_k(t)| \leq \parallel x \parallel M\,, \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, t \in [a,b]\,. \tag{24.13}$$

Por lo tanto, si se satisface la condición de Hilbert - Schmidt, la serie en (24.8) converge absoluta y uniformemente a la función $y(t)$ en el intervalo $[a,b]$. $\square$

La condición de Hilbert - Schmidt se satisface, en particular, cuando el núcleo de cuadrado sumable $K(t,s)$ es continuo. En ese caso $\mathrm{Rank}(A) \subset \mathcal{C}_2(a,b)$ (ver ecuaciones (22.15-22.16)), lo que implica que las autofunciones del operador integral correspondientes a autovalores no nulos son también continuas.

25. Ecuaciones integrales inhomogéneas

Consideremos la **ecuación integral**

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,, \tag{25.1}$$

donde $f(t)$ y $K(t,s)$ son funciones conocidas, y la función incógnita $\varphi(t)$ aparece bajo el signo integral.

Si $f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ y $K(t,s) = K(s,t)^* \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$, la anterior ecuación integral puede ser interpretada como

$$\varphi(t) = f(t) + A\,\varphi(t)\,, \tag{25.2}$$

donde A es el operador integral de Fredholm cuyo núcleo (hermítico y de cuadrado sumable) es $K(t,s)$.

Como el operador A así definido es simétrico y compacto, tiene un sistema ortonormal completo de autovectores, $A\,e_k(t) = \lambda_k\,e_k(t)\,, k \in \mathbb{N}$.

Si existe una solución $\varphi(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ para la ec. (25.2), ella puede ser representada como el límite de su desarrollo de Fourier respecto de ese sistema completo. Por lo tanto, tiene sentido tratar de determinar sus coeficientes de Fourier.

Tomando el producto escalar de ambos miembros de la ec. (25.2) con el autovector $e_k(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned}(e_k,\varphi) &= (e_k,f) + (e_k,A\,\varphi) = \\ &= (e_k,f) + (A\,e_k,\varphi) = (e_k,f) + \lambda_k\,(e_k,\varphi)\,,\end{aligned} \tag{25.3}$$

dado que A es simétrico. Resulta entonces que

$$(1-\lambda_k)\,(e_k,\varphi) = (e_k,f)\,. \tag{25.4}$$

Esta ecuación sólo permite determinar unívocamente los coeficientes de Fourier de $\varphi(t)$ correspondientes a los (numerables) autovectores de autovalor distinto de la unidad:

$$a_k = (e_k, \varphi) = \frac{(e_k, f)}{(1-\lambda_k)} \tag{25.5}$$
$$= (e_k, f) + \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\,(e_k, f)\,, \quad \lambda_k \neq 1\,.$$

Comprobemos que estos coeficientes de Fourier definen efectivamente un vector de $\mathbf{L}_2(a,b)$. Si llamamos

$$M = \max_{\{\lambda_k \neq 1\}} \left\{ \frac{1}{|\lambda_k - 1|} \right\} \tag{25.6}$$

(recordemos que los autovalores de un operador simétrico completamente continuo forman una secuencia que converge al origen - ver Propiedad 23.4), podemos escribir

$$\sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k \neq 1\}} |a_k|^2 = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k \neq 1\}} \frac{|(e_k, f)|^2}{(1-\lambda_k)^2} \leq \tag{25.7}$$
$$\leq M^2 \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k \neq 1\}} |(e_k, f)|^2 \leq M^2 \parallel f \parallel^2 ,$$

en virtud de la desigualdad de Bessel. Por lo tanto (ver Teorema 19.5), la serie

$$\phi(t) = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k \neq 1\}} a_k\, e_k(t) \tag{25.8}$$

converge a un vector del espacio $\mathbf{L}_2(a,b)$.

Si $\lambda = 1$ no es un autovalor de A, el conjunto $\{e_k \,|\, \lambda_k \neq 1\}$ es un sistema ortonormal completo en $\mathbf{L}_2(a,b)$, y la ec. (25.2) tiene una única solución dada por[11]

$$\phi(t) = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k \neq 1\}} \left\{ (e_k, f) + \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\,(e_k, f) \right\} e_k(t) = \tag{25.9}$$
$$= f(t) + \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k \neq 0,1\}} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\,(e_k, f)\; e_k(t)\,.$$

[11]Nótese que con esta expresión sólo es necesario conocer las autofunciones de A correspondientes a autovalores no nulos.

En efecto, teniendo en cuenta la continuidad de los operadores acotados, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}-A)\,\phi(t) &= (\mathbf{I}-A)\sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 1\}} \frac{(e_k,f)}{(1-\lambda_k)}\; e_k(t) = \\
&= \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 1\}} \frac{(e_k,f)}{(1-\lambda_k)}\;(\mathbf{I}-A)\,e_k(t) = \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 1\}} (e_k,f)\,e_k(t) = f(t)\,.
\end{aligned}
\tag{25.10}
$$

Por otra parte, si $\lambda = 1$ es autovalor de A, entonces el subespacio característico correspondiente, $\mathbf{E}_{(1)}$, tiene dimensión finita (dado que A es completamente continuo - ver Propiedad 23.4).

Sea $\{\mathcal{E}_1(t),\ldots,\mathcal{E}_n(t)\}$ una base ortonormal de $\mathbf{E}_{(1)}$. La ecuación (25.4) implica que

$$
(1-1)\,(\mathcal{E}_k,\varphi) = 0 = (\mathcal{E}_k,f)\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,. \tag{25.11}
$$

Esto es una contradicción a menos que $f(t)\perp\mathcal{E}_k(t)\,, k=1,2,\ldots,n$. En este caso, el vector $\phi(t)$ (ec. (25.9)) es una solución particular de la ecuación (25.2). Pero esa solución no es única[12], dado que los n coeficientes de Fourier $(\mathcal{E}_k,\varphi)$ quedan indeterminados.

La solución general de (25.2) se escribe como la suma de $\phi(t)$ y la solución general de la ecuación homogénea:

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \phi(t)+\phi_1(t) = \\
&= f(t) + \sum_{\{e_k\,|\,\lambda_k\neq 0,1\}} \frac{\lambda_k}{(1-\lambda_k)}\; e_k(t) + \phi_1(t)\,,
\end{aligned}
\tag{25.12}
$$

donde $\phi_1(t) = c_1\,\mathcal{E}_1(t)+\cdots+c_n\,\mathcal{E}_n(t)$ es un autovector arbitrario de A correspondiente al autovalor 1. Esto significa que la solución está determinada a menos de la elección de n constantes arbitrarias.

Finalmente, si $f(t)$ no es ortogonal al subespacio característico correspondiente al autovalor 1 la ecuación integral (25.2) no tiene solución[13].

---

[12]En efecto, si $\lambda=1$ es autovalor de A, la ecuación homogénea $(\mathbf{I}-A)\phi_1=\mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales. Entonces, si existe una solución para la ecuación inhomogénea $(\mathbf{I}-A)\phi=f$, ella no es única puesto que $(\mathbf{I}-A)(\phi+\phi_1)=f$.

[13]En efecto, si $(\mathbf{I}-A)\varphi=f$, y $(\mathbf{I}-A)\phi_1=\mathbf{0}$, entonces

$$
\big(\phi_1,(\mathbf{I}-A)\varphi\big) = \big((\mathbf{I}-A)\phi_1,\varphi\big) = \big(\mathbf{0},\varphi\big) = 0 = \big(\phi_1,f\big)\,. \tag{25.13}
$$

Nótese que $\big(\varphi(t) - f(t)\big) = A\,\varphi(t) \in \text{Rank}(A)$, de modo que si el núcleo $K(t,s)$ satisface la condición de Hilbert - Schmidt, entonces la serie en el miembro de la derecha de la ec. (25.9) no sólo converge en media, sino también absoluta y uniformemente.

En particular, si el núcleo $K(t,s)$ es continuo, entonces la diferencia $\big(\varphi(t)-f(t)\big)$ es una función continua.

25.1. Cálculo de autofunciones y autovalores de un operador integral.

Hemos visto que la expresión de la solución de la ecuación integral (25.2) requiere del conocimiento de las autofunciones del operador integral correspondientes a autovalores no nulos (ver ec. (25.12)).

En lo que sigue veremos cómo calcular esas autofunciones en el caso de un operador de Fredholm de núcleo degenerado (no necesariamente simétrico).

Consideremos un operador integral A definido por el núcleo

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\,\psi_k(s)^*\,, \quad \varphi_k(t), \psi_k(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,, \tag{25.14}$$

donde los conjuntos $\{\varphi_k\,, k = 1, \ldots, n\}$ y $\{\psi_k\,, k = 1, \ldots, n\}$ son linealmente independientes.

Como el operador A aplica todo $\mathbf{L}_2(a,b)$ en el subespacio de dimensión finita generado por las funciones $\{\varphi_k\,, k = 1, \ldots, n\}$, todo autovector correspondiente a un autovalor no nulo deber estar contenido en ese subespacio.

Proponemos entonces para un autovector $e(t)$ tal que

$$A\,e(t) = \lambda\,e(t)\,, \quad \text{con } \lambda \neq 0\,, \tag{25.15}$$

una combinación lineal de la forma

$$e(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi_k(t) \tag{25.16}$$

que, reemplazada en la ecuación de autovalores, conduce a

$$\begin{array}{c} \big(A - \lambda\,\mathbf{I}\big)\,e(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\,\big(\psi_k, e\big) - \lambda\,e(t) = \\ = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \left\{ \sum_{l=1}^{n} \big[\big(\psi_k, \varphi_l\big) - \lambda\,\delta_{kl}\big]\; c_l \right\} = 0\,. \end{array} \tag{25.17}$$

Dado que las funciones $\varphi_k(t)$ son linealmente independientes, la ec. (25.17) se reduce a un sistema de ecuaciones algebraicas,

$$(\mathbf{M} - \lambda\,\mathbf{1})\,\bar{c} = \bar{0}\,, \quad \text{con } \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \tag{25.18}$$

donde $\mathbf{M}_{kl} = (\psi_k, \varphi_l)$ y $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de $n \times n$.

Este sistema de ecuaciones tiene soluciones no triviales para aquellos valores de λ que sean ceros del determinante $\det(\mathbf{M} - \lambda\,\mathbf{1})$, que es un polinomio de grado n en λ. Dichas soluciones determinan las autofunciones del operador A a través de la ec. (25.16).

Si el núcleo $K(t,s)$ es no degenerado, siempre puede ser aproximado (en la métrica de $\mathbf{L}_2\big((a,b) \times (a,b)\big)$) por una suma parcial de su desarrollo de Fourier respecto de algún sistema ortonormal y completo, $K_n(t,s)$, que sí es un núcleo degenerado. Los autovalores y autovectores de este último pueden ser determinados por el método antes descrito.

Bajo ciertas condiciones de regularidad del núcleo $K(t,s)$ (que no discutiremos en este curso - ver, por ejemplo, *Methods of Mathematical Physics* - Vol. I, R. Courant y D. Hilbert), estas aproximaciones convergen a los autovalores y autofunciones del núcleo original.

25.2. El método de Rayleigh y Ritz. Consideremos una funcional $F[\varphi]$, definida sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, que toma valores reales.

Los **extremos** de la funcional son aquellos vectores $\varphi \in \mathbf{E}$ para los cuales la diferencia $(F[\varphi + \varepsilon h] - F[\varphi])$ toma el mismo signo cualquiera que sea el vector unitario $h \in \mathbf{E}$, siempre que $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sea suficientemente pequeño.

La **primera variación** de la funcional $F[\varphi]$ se denota por $\delta F[\varphi, \varepsilon h]$ y se define como la parte lineal en ε de la diferencia

$$F[\varphi + \varepsilon h] - F[\varphi] = \delta F[\varphi, \varepsilon h] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \quad \text{con } h \in \mathbf{E}\,. \tag{25.19}$$

Los extremos de $F[\varphi]$ corresponden a aquellos vectores $\varphi \in \mathbf{E}$ que, para todo h, anulan a su primera variación.

En efecto, como $\delta F[\varphi, \varepsilon h]$ es lineal en ε, si $\delta F[\varphi, \varepsilon h] \neq 0$ para algún h unitario, entonces hay vectores próximos de φ, de la forma $(\varphi + \varepsilon h)$ con $|\varepsilon| \ll 1$, para los cuales $F[\varphi + \varepsilon h]$ es mayor o menor que $F[\varphi]$, según sea el signo de ε. En consecuencia, la existencia de un extremo de $F[\varphi]$ requiere que $\delta F[\varphi, \varepsilon h] = 0$.

Consideremos ahora un operador simétrico (no necesariamente acotado) A, definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en un espacio euclídeo completo $\mathbf{E}$, y definamos la funcional (real)

$$F[\varphi] := \frac{(\varphi, A\,\varphi)}{(\varphi, \varphi)}\,, \quad \varphi \in \mathbf{E}\,. \tag{25.20}$$

Para $\varphi, h \in \mathcal{D}(A)$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta(\varphi, A\,\varphi) &= (\varepsilon h, A\,\varphi) + (\varphi, A\,\varepsilon h) = \\ &= \varepsilon\,\{(h, A\,\varphi) + (A\,\varphi, h)\} = 2\,\varepsilon\,\Re(h, A\,\varphi)\,, \end{aligned} \tag{25.21}$$

$$\delta(\varphi,\varphi)^{-1} = \frac{-1}{(\varphi,\varphi)^2}\,\{(\varepsilon h, \varphi) + (\varphi, \varepsilon h)\} = \frac{-2\,\varepsilon}{(\varphi,\varphi)^2}\,\Re\big(h, \varphi\big)\,,$$

de modo que

$$\delta F[\varphi, \varepsilon h] = \frac{2\,\varepsilon}{(\varphi,\varphi)}\,\Re\big(h, A\,\varphi - F[\varphi]\,\varphi\big)\,. \tag{25.22}$$

Los extremos de la funcional corresponden a los vectores que satisfacen

$$\delta F[\varphi, \varepsilon h] = 0\,,\ \forall\, h \ \Rightarrow\ A\,\varphi - F[\varphi]\,\varphi = \mathbf{0}\,, \tag{25.23}$$

dado que el dominio de definición de A es un subespacio denso (y no existen vectores no nulos ortogonales a subespacios densos). Es decir, los extremos corresponden a los autovectores de A,

$$A\,\varphi = \lambda\,\varphi\,, \quad \text{con } \lambda = F[\varphi]\,. \tag{25.24}$$

Si A es acotado, entonces

$$\Big|F[\varphi]\Big| = \left|\frac{(\varphi, A\,\varphi)}{(\varphi,\varphi)}\right| \leq \frac{\parallel A\,\varphi \parallel}{\parallel \varphi \parallel} \leq \parallel A \parallel\ . \tag{25.25}$$

Y si además A es compacto, sabemos que existe un autovector e_1 de autovalor λ_1 tal que $|\lambda_1| = \parallel A \parallel$.

Por ejemplo, podemos intentar aproximar el autovalor de A de mayor valor absoluto, cuyo autovector es el límite de una secuencia de la forma

$$e_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi_n\,, \quad \varphi_n = \xi_1\,x_1 + \xi_2\,x_2 + \cdots + \xi_n\,x_n\,, \tag{25.26}$$

donde φ_n es una suma parcial del desarrollo de Fourier de e_1 referido a un sistema $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, ortonormal y completo en el espacio $\mathbf{E}$.

La funcional $F[\varphi]$ evaluada en φ_n se reduce a una función de n variables,

$$F[\varphi_n] = f(\xi_1, \ldots\, \xi_n)\,, \quad \text{tal que } |f(\xi)| = |F[\varphi_n]| \leq \parallel A \parallel\ . \tag{25.27}$$

Entonces, cuando nos restringimos a ese subespacio n-dimensional, vemos que la mejor aproximación al extremo de la funcional está determinada por un problema de extremos de una función ordinaria,

$$\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_k} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{25.28}$$

cuya solución permite determinar un vector

$$\bar{\varphi}_n = \bar{\xi}_1\, x_1 + \bar{\xi}_2\, x_2 + \cdots + \bar{\xi}_n\, x_n \tag{25.29}$$

(que no necesariamente coincide con φ_n).

De ese modo, el autovalor de máximo valor absoluto puede obtenerse como

$$\lambda_1 = \lim_{n\to\infty} F[\bar{\varphi}_n]\,. \tag{25.30}$$

No obstante, el problema de la convergencia de la secuencia $\{\bar{\varphi}_n\}$ al autovector correspondiente e_1 es mucho más delicado, pues depende de la apropiada elección del sistema completo en $\mathbf{E}$ en relación al operador A considerado, y debe ser analizado en cada caso particular (ver, por ejemplo, *Methods of Mathematical Physics* - Vol. I, R. Courant y D. Hilbert).

26. Operadores no acotados con inversas completamente continuas

Consideremos un operador lineal **no acotado** L, definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L)$ de un espacio euclídeo $\mathbf{E}$.

Un operador lineal acotado A, definido sobre todo E, se dice **inverso** de L si se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\forall\, x \in \mathbf{E}$ se cumple que $A\,x \in \mathcal{D}(L)$ y $LA\,x = x$,
- $\forall\, y \in \mathcal{D}(L)$ es $AL\,y = y$,

Es decir, A es el inverso de L si es su inverso tanto a izquierda como a derecha.

Ejemplo:

• Consideremos el operador diferencial

$$D\,y(t) := y'(t)\,, \tag{26.1}$$

definido sobre el conjunto $\mathcal{D}(D)$ formado por las funciones **absolutamente continuas**[14] en $[a, b]$, tales que $y(a) = 0$ y su derivada primera $y'(t) \in \mathbf{L}_2(a, b)$.

Ya sabemos que las funciones diferenciables en (a, b) que se anulan indénticamente en entornos de los extremos de ese intervalo forman un conjunto denso en

[14]Una función $\varphi(t)$ se dice **absolutamente continua**, $\varphi(t) \in \mathcal{AC}(a, b)$, si es una función continua en (a, b) cuya derivada (en el sentido de límite de cociente incremental) existe en casi

$\mathcal{C}_2(a,b)$. Como esas funciones son absolutamente continuas, resulta que $\mathcal{D}(D)$ es un subespacio denso de $\mathcal{C}_2(a,b)$.

Veremos que el operador integral A definido como

$$A\,x(t) := \int_a^t x(s)\,ds = \int_a^b \Theta(t-s)\,x(s)\,ds\,, \tag{26.6}$$

donde

$$\Theta(t-s) := \begin{cases} 1\,, & t \geq s\,, \\ 0\,, & t < s\,, \end{cases} \tag{26.7}$$

es el inverso de D. Tratándose de un operador de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable (siempre que $(b-a) < \infty$), A es completamente continuo y está definido sobre todo $\mathbf{L}_2(a,b)$.

Tengamos en cuenta que si $x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, entonces $x(t)$ es sumable en $[a,b]$ (y, por lo tanto, localmente sumable). En efecto, dado que $\mathbf{1}(t) \equiv 1 \in \mathbf{L}_2(a,b)$ (para $(b-a) < \infty$), tenemos que

$$\big(\mathbf{1}(t), |x(t)|\big) = \int_a^b 1 \times |x(t)|\,dt \leq \parallel \mathbf{1} \parallel \parallel x \parallel = \sqrt{b-a}\ \parallel x \parallel\ . \tag{26.8}$$

Por lo tanto,

$$\int_{a_1}^{b_1} |x(t)|\,dt \leq\ \sqrt{b-a}\ \parallel x \parallel\,, \quad \forall\, a_1, b_1 \in [a,b]\,. \tag{26.9}$$

---

todo punto de ese intervalo y es una función **localmente sumable**:

$$\varphi'(t) \in \mathbf{L}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{loc.})}(a,b) \Rightarrow \int_{a_1}^{b_1} |\varphi'(t)|\,dt < \infty\,, \quad \forall\, a_1, b_1 \;\big|\; a < a_1 < b_1 < b\,. \tag{26.2}$$

Las funciones absolutamente continuas forman un subespacio denso en el espacio $\mathcal{C}_2(a,b)$, dado que $\mathcal{P}_2(a,b) \subset \mathcal{AC}(a,b)$.

Se puede demostrar que estas funciones pueden ser reconstruidas a partir de su derivada mediante la regla de Barrow:

$$\varphi(t) \in \mathcal{AC}(a,b) \Rightarrow \varphi'(t) \in \mathbf{L}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{loc.})}(a,b),\ \text{y}\ \varphi(t) = \int_{a_1}^t \varphi'(s)\,ds + \varphi(a_1)\,. \tag{26.3}$$

Para las funciones absolutamente continuas también vale la regla de integración por partes. En efecto, si $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in AC(a,b)$, entonces $\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) \in AC(a,b)$, la derivada del producto es

$$(\varphi_1(t)\,\varphi_2(t))' = \varphi_1'(t)\,\varphi_2(t) + \varphi_1(t)\,\varphi_2'(t) \in \mathbf{L}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{loc.})}(a,b)\,, \tag{26.4}$$

y

$$\int_{a_1}^t \varphi_1(s)\,\varphi_2'(s)\,ds = \varphi_1(t)\,\varphi_2(t) - \varphi_1(a_1)\,\varphi_2(a_1) - \int_{a_1}^t \varphi_1'(s)\,\varphi_2(s)\,ds\,. \tag{26.5}$$

En esas condiciones, $x(t)$ tiene una **primitiva** $y(t) \in AC(a,b)$,

$$y(t) = \int_a^t x(s)\,ds + y(a)\,, \tag{26.10}$$

cuya derivada es $y'(t) = x(t)$ en casi todo punto. Si elegimos que $y(a) = 0$, entonces $y(t) \in \mathcal{D}(D)$.

Por lo tanto, $D : \mathcal{D}(D) \to \mathbf{L}_2(a,b)$, mientras que $A : \mathbf{L}_2(a,b) \to \mathcal{D}(D)$. Además, se satisface en casi todo punto que

$$\begin{aligned} &\bullet\ AD\,y(t) = \textstyle\int_a^t y'(s)\,ds = y(t) - y(a) = y(t)\,, \quad \forall\, y(t) \in \mathcal{D}(D)\,, \\ &\bullet\ DA\,x(t) = \left(\textstyle\int_a^t x(s)\,ds\right)' = x(t)\,, \quad \forall\, x(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)\,. \end{aligned} \tag{26.11}$$

Es decir, A es el inverso de D. ◇

Lema 26.1. *Supongamos que un operador lineal completamente continuo A, definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$, es el inverso de un operador lineal no acotado L, definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L) \subset \mathbf{E}$. Entonces*

- *los autovalores de A son todos no nulos,*
- *los autovalores de L son todos no nulos,*
- *todo autovector de A correspondiente al autovalor λ es también un autovector de L correspondiente al autovalor $\mu = 1/\lambda$.*

Supongamos que $A\,x = \mathbf{0}$, entonces $x = (LA)\,x = L(A\,x) = L\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Pero $x = \mathbf{0}$ no es un autovector de A.

Similarmente se prueba que si $L\,y = \mathbf{0} \Rightarrow y = \mathbf{0}$.

Supongamos ahora que $A\,x = \lambda\,x$, con $\lambda \neq 0$. Entonces, $x = (LA)\,x = L(A\,x) = L(\lambda\,x) = \lambda\,L\,x \Rightarrow L\,x = \mu\,x$, con $\mu = 1/\lambda$. □

Teorema 26.2. *Sea L un operador lineal no acotado, definido sobre un subespacio $\mathcal{D}(L)$ de un espacio de Hilbert $\mathbf{E}$. Si L tiene por inversa a un operador lineal simétrico y completamente continuo A, entonces L también tiene un sistema ortonormal y completo de autovectores correspondientes a autovalores no nulos. En particular, L está densamente definido.*

En efecto, si A es simétrico y compacto en un espacio de Hilbert, por el Teorema 23.8 sabemos que tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores. Según el Lema 26.1, esos autovectores corresponden a autovalores no nulos, y son simultáneamente autovectores de L: para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$A\,e_k = \lambda_k\,e_k\,,\ \lambda_k \neq 0\ \Rightarrow\ L\,e_k = \mu_k\,e_k\,,\ \text{con } \mu_k = \frac{1}{\lambda_k}\,. \tag{26.12}$$

En particular, $e_k = \mu_k\,A\,e_k \in \mathcal{D}(L)$.

Por lo tanto, $\mathcal{D}(L)$ contiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores de L correspondientes a autovalores no nulos. Por el Teorema 19.4, resulta que $\mathcal{D}(L)$ es un subespacio denso en $\mathbf{E}$.

27. El operador de Sturm - Liouville

Un operador de Sturm - Liouville definido sobre un espacio de funciones con una derivada segunda continua, $y''(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$, donde $-\infty < a < b < \infty$, opera de la forma

$$L\,y(t) = \Big(p(t)\,y'(t)\Big)' + q(t)\,y(t) = x(t)\,, \tag{27.1}$$

con $x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$ si las funciones reales $p(t), p'(t)$ y $q(t)$ son continuas en $[a,b]$.

Si $p(a) \neq 0 \neq p(b)$, este operador resulta simétrico si las funciones pertenecientes a su domino de definición, $\mathcal{D}(L)$, satisfacen además condiciones de contorno locales homogéneas de la forma

$$\alpha\,y(a) + \beta\,y'(a) = 0\,, \quad \gamma\,y(b) + \delta\,y'(b) = 0\,, \tag{27.2}$$

con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \neq \gamma^2 + \delta^2$.

Un operador de esas características se dice **no singular** si la ecuación $L\,y(t) = \mathbf{0}(t)$ no tiene en $\mathcal{D}(L)$ soluciones no triviales.

Supongamos que L sea no singular, y que la ecuación

$$L\,y(t) = x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b) \tag{27.3}$$

tenga una solución $y(t) \in \mathcal{D}(L)$. Entonces esa solución es única, puesto si tenemos que también es $L\,z(t) = x(t)$, con $z(t) \in \mathcal{D}(L)$, entonces

$$L\Big(y(t) - z(t)\Big) = x(t) - x(t) = \mathbf{0}(t) \Rightarrow z(t) \equiv y(t)\,. \tag{27.4}$$

Mostraremos que para todo operador de Sturm - Liouville no singular $L : \mathcal{D}(L) \to \mathcal{C}_2(a,b)$ existe un operador integral de Fredholm $A : \mathcal{C}_2(a,b) \to \mathcal{D}(L)$, cuyo núcleo $K(t,s)$ es una función real simétrica y continua, que tiene la propiedad de que para toda función continua $x(t)$, la función

$$y(t) = A\,x(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds \tag{27.5}$$

tiene una derivada segunda continua y satisface las condiciones de contorno (27.2), además de ser (la única) solución de la ecuación $L\,y(t) = x(t)$. En esas condiciones, A es inverso de L a derecha:

$$L\,y(t) = LA\,x(t) = x(t)\,, \quad \forall\, x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)\,. \tag{27.6}$$

Inversamente, si $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ entonces $L\,y(t) = x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$. Como la solución de esta ecuación es única, $y(t)$ puede ser representada como en (27.5), de modo que A también resulta ser inverso de L a izquierda:

$$A\,x(t) = AL\,y(t) = y(t)\,, \quad \forall\, y(t) \in \mathcal{D}(L)\,. \tag{27.7}$$

Para determinar el operador inverso de L, dada cualquier función continua $x(t)$, debemos hallar la solución de la **ecuación diferencial inhomogénea**

$$\hat{L}\,y(t) = p(t)\,y''(t) + p'(t)\,y'(t) + q(t)\,y(t) = x(t) \tag{27.8}$$

que satisfaga las condiciones de contorno locales especificadas en (27.2). En la ecuación (27.8), $\hat{L}$ es entendido sólo como un operador diferencial (sin un dominio restringido más allá de la existencia de la derivada segunda de las funciones sobre las que opera).

Para fijar ideas, en lo que sigue adoptaremos las **condiciones de contorno de Dirichlet**[15] en ambos extremos,

$$y(a) = 0\,, \quad y(b) = 0\,. \tag{27.10}$$

Toda ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes continuos, como $\hat{L}\,u(t) \equiv 0$, tiene dos soluciones linealmente independientes, $u_1(t)$ y $u_2(t)$ (funciones dos veces diferenciables). Estas pueden ser elegidas de manera que satisfagan la condición de contorno (27.10) en uno de los extremos del intervalo $[a,b]$ (y sólo en uno, dado que estamos suponiendo que L es no singular),

$$\hat{L}\,u_{1,2}(t) = 0\,,\ \forall\, t \in (a,b)\,, \quad u_1(a) = 0\,, \quad u_2(b) = 0\,. \tag{27.11}$$

Para construir la solución de (27.8) podemos seguir el **método de los coeficientes indeterminados**, y proponer

$$y(t) = C_1(t)\,u_1(t) + C_2(t)\,u_2(t)\,, \tag{27.12}$$

[15] La construcción del inverso para las **condiciones de Neumann**,

$$y'(a) = 0\,, \quad y'(b) = 0\,, \tag{27.9}$$

o para las más generales **condiciones de Robin**, ec. (27.2), es enteramente similar.

donde las funciones $C_{1,2}(t)$ son dos veces diferenciables. Esta expresión debe ser reemplazada en (27.8), lo que da lugar a una primera ecuación que involucra a estas dos funciones.

Para la derivada de $y(t)$ tenemos

$$y'(t) = C_1(t)\, u_1'(t) + C_2(t)\, u_2'(t) + C_1'(t)\, u_1(t) + C_2'(t)\, u_2(t)\,. \tag{27.13}$$

Como necesitamos una segunda ecuación para determinar las dos funciones $C_1(t)$ y $C_2(t)$ (y a los efectos de simplificar los cálculos evitando la aparición de las derivadas segundas de estas funciones), podemos imponer que

$$C_1'(t)\, u_1(t) + C_2'(t)\, u_2(t) = 0\,, \tag{27.14}$$

de donde resulta que

$$y''(t) = C_1(t)\, u_1''(t) + C_2(t)\, u_2''(t) + C_1'(t)\, u_1'(t) + C_2'(t)\, u_2'(t)\,. \tag{27.15}$$

Reemplazando (27.12-27.15) en (27.8) obtenemos

$$\begin{aligned} &\hat{L}\, y(t) = C_1(t)\, \hat{L}\, u_1(t) + C_2(t)\, \hat{L}\, u_2(t) + \\ &+ p(t)\Big(C_1'(t)\, u_1'(t) + C_2'(t)\, u_2'(t)\Big) = x(t)\,. \end{aligned} \tag{27.16}$$

Entonces, de (27.11), (27.14) y (27.16) obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas para las derivadas de las funciones que tratamos de determinar,

$$\begin{pmatrix} p(t)\, u_1'(t) & p(t)\, u_2'(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{27.17}$$

El discriminante del sistema,

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} p(t)\, u_1'(t) & p(t)\, u_2'(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix} = \\ &= p(t)\big\{u_1'(t)\, u_2(t) - u_1(t)\, u_2'(t)\big\} = p(t)\, W[u_1, u_2](t) = C_0 \end{aligned} \tag{27.18}$$

(donde $W[u_1, u_2]$ es el Wronskiano de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea), es una constante no nula, como puede verificarse fácilmente tomando su derivada y empleando la ecuación (27.11), y teniendo en cuenta que

$$C_0 = p(a)\, u_1'(a)\, u_2(a) = -p(b)\, u_1(b)\, u_2'(b)\,. \tag{27.19}$$

En esas condiciones,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p(t)\,u_1'(t) & p(t)\,u_2'(t) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{C_0} \begin{pmatrix} u_2(t) & -p(t)\,u_2'(t) \\ -u_1(t) & p(t)\,u_1'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{27.20}$$

de donde resulta que

$$C_1'(t) = \frac{u_2(t)\,x(t)}{C_0}, \quad C_2'(t) = -\frac{u_1(t)\,x(t)}{C_0}. \tag{27.21}$$

Ahora debemos elegir primitivas de estas funciones que garanticen que $y(t)$ satisfaga las condiciones de contorno requeridas, ec. (27.10). Esto se logra con

$$C_1(t) = -\int_t^b \frac{u_2(s)\,x(s)}{C_0}\,ds, \quad C_2(t) = -\int_a^t \frac{u_1(s)\,x(s)}{C_0}\,ds. \tag{27.22}$$

Por lo tanto, dada $x(t) \in \mathcal{C}_2(a,b)$, la función dos veces diferenciable que es solución de la ec. (27.8) y que satisface las condiciones de contorno (27.10) está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{C_0}\left\{ \int_t^b u_1(t)\,u_2(s)\,x(s)\,ds + \int_a^t u_1(s)\,u_2(t)\,x(s)\,ds \right\} = \\ &= \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = A\,x(t) \in \mathcal{D}(L), \end{aligned} \tag{27.23}$$

donde el núcleo del operador integral A,

$$K(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(t)\,u_2(s)}{C_0}, & t \leq s, \\[2ex] -\dfrac{u_1(s)\,u_2(t)}{C_0}, & t > s, \end{cases} \tag{27.24}$$

es una función continua de sus dos variables, incluso en $t = s$.

Dado que $K(t,s)$, con $a \leq t, s \leq b$, es real, simétrico y está acotado, A es un operador integral de Fredholm simétrico y completamente continuo, que entonces tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores. Como el operador así construido es el inverso de L, por el Teorema 26.2 concluimos que L tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores que corresponden a autovalores no nulos.

Señalemos que, para $t \neq s$, el núcleo es una función dos veces diferenciable de la variable t (puesto que $u_1(t)$ y $u_2(t)$ lo son), satisface la ecuación diferencial

$$\hat{L}\, K(t,s) = 0\,, \quad \text{para } t \neq s\,, \tag{27.25}$$

(puesto que $\hat{L}\, u_{1,2}(t) = 0$) y también las condiciones de contorno del problema,

$$K(a,s) = -\frac{u_1(a)\, u_2(s)}{C_0} = 0\,, \quad K(b,s) = -\frac{u_1(s)\, u_2(b)}{C_0} = 0\,. \tag{27.26}$$

Por otra parte, su derivada primera presenta una discontinuidad en $t = s$,

$$\begin{array}{c} \partial_t K(t,s)\Big|_{\{t=s^+\}} - \partial_t K(t,s)\Big|_{\{t=s^-\}} = \\ = -\dfrac{\big(u_1(s)\, u_2'(s) - u_1'(s)\, u_2(s)\big)}{C_0} = \dfrac{W[u_1,u_2](s)}{C_0} = \dfrac{1}{p(s)}\,. \end{array} \tag{27.27}$$

Entonces, si adoptamos la regla usual de derivación de funciones diferenciables a trozos que tienen discontinuidades de altura finita[16], que prescribe sumar a la derivada de la función una **Delta de Dirac** concentrada en cada punto de discontinuidad y multiplicada por la altura de esa discontinuidad, obtenemos

$$\begin{array}{c} \hat{L}K(t,s) = p(t)\, \left(\dfrac{\delta(t-s)}{p(s)} + \partial_t^2 K(t,s)\right) + \\ +p'(t)\, \partial_t K(t,s) + q(t)\, K(t,s) = \delta(t-s)\,. \end{array} \tag{27.28}$$

Esto muestra que el núcleo $K(t,s)$ del operador integral inverso de L, ec. (27.24), es la **función de Green** del problema de condiciones de contorno considerado.

Desde luego que toda función $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ es el límite (en media) de su desarrollo de Fourier respecto del sistema ortonormal completo de autofunciones de L,

$$y(t) = A\, x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, (e_k, x)\, e_k(t)\,, \tag{27.29}$$

donde $x(t) = L\, y(t)$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{D}(L) \subset \mathrm{Rank}\,(A)$, y que el núcleo continuo $K(t,s)$ satisface la condición de Hilbert - Schmidt, ec. (24.9), vemos que la serie en (27.29) también converge absoluta y uniformemente, de acuerdo con el Teorema 24.1.

Estos resultados permiten establecer el siguiente teorema.

[16]regla que justificaremos más adelante, cuando tratemos la teoría de distribuciones.

Teorema 27.1. *Todo operador de Sturm - Liouville no singular tiene un conjunto ortonormal completo de autofunciones* $e_k(t) \in \mathcal{D}(L)\,, k \in \mathbb{N}$*. Además, toda función dos veces diferenciable que satisfaga las condiciones de contorno que especifican el dominio del operador,* $y(t) \in \mathcal{D}(L)$*, tiene un desarrollo de Fourier respecto de los autovectores* $e_k(t)$ *que converge absoluta y uniformemente.*

Ejemplo:

• Consideremos el operador $L\,x(t) = x''(t)$, definido sobre el subespacio de $\mathcal{C}_2(0,\pi)$ formado por las funciones dos veces diferenciables que satisfacen las condiciones de contorno $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$.

Se trata de un operador de Sturm - Liouville no singular. En efecto, $x''(t) \equiv 0 \Rightarrow x(t) = a + b\,t$, pero $x(0) = a = 0$ y $x(\pi) = b\,\pi = 0$ requieren que $x(t) \equiv 0$.

Por lo tanto, L así definido tiene una inversa simétrica y completamente continua, y sus autofunciones, $e_k(t) = \sin(kt)\,, k \in \mathbb{N}$, forman un sistema ortonormal y completo en $\mathbf{L}_2(0,\pi)$ (cosa que ya sabíamos).

Además, toda función dos veces diferenciable que se anula en $t = 0, \pi$ tiene un desarrollo en serie de senos que no sólo converge en media, sino también absoluta y uniformemente. ◇

Consideremos ahora el caso de un operador de Sturm - Liouville **singular**, es decir, un operador simétrico L, como el definido por las ecuaciones (27.1) y (27.2), que tiene un autovalor nulo.

Teniendo en cuenta que autovectores de un operador simétrico correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí, y que en un espacio de Hilbert, como es $\mathbf{L}_2(a,b)$, no puede haber más que una cantidad infinita numerable de vectores ortogonales entre sí, vemos que no todo número real puede ser un autovalor de L.

Supongamos que $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ no es autovalor de L, y definamos sobre el mismo dominio un nuevo operador: $L_1 := L - \lambda_0\,\mathbf{I}$, con $\mathcal{D}(L_1) = \mathcal{D}(L)$. L_1 es también un operador de Sturm - Liouville simétrico, que difiere del anterior sólo en que $q(t) \to (q(t) - \lambda_0)$. Pero, a diferencia de L, L_1 es no singular.

En esas condiciones, valen para L_1 las propiedades antes descritas. En particular, L_1 tiene un conjunto ortonormal y completo de autofunciones correspondientes a autovalores no nulos,

$$L_1\,e_k(t) = \mu_k\,e_k(t) \Rightarrow L\,e_k(t) = (\mu_k + \lambda_0)\,e_k(t)\,. \tag{27.30}$$

Pero entonces L también tiene un sistema ortonormal completo de autofunciones $e_k(t)$ correspondientes a autovalores $\lambda_k = \mu_k + \lambda_0$, uno de los cuales es nulo. Y toda función $y(t) \in \mathcal{D}(L)$ tiene un desarrollo en serie de autofunciones de L que converge absoluta y uniformemente.

Ejemplo:

• Los polinomios de Legendre son los autovectores del operador de Sturm - Liouville definido sobre el subespacio de las funciones dos veces diferenciables en $(-1, 1)$, sobre las que actúa como

$$L\,y(t) = \frac{d}{dt}\Big([t^2-1]\,\frac{dy}{dt}\Big)\,. \tag{27.31}$$

En este caso tenemos que $q(t) \equiv 0$, mientras que $p(t) = t^2 - 1$ se anula en los extremos del intervalo. En esas condiciones, el operador es simétrico sin necesidad de imponer condiciones de contorno adicionales.

Los polinomios de Legendre están dados por la expresión

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k\,k!}\,\frac{d^k}{dt^k}\Big([t^2-1]^k\Big) \tag{27.32}$$

y satisfacen

$$L\,P_k(t) = k(k+1)\,P_k(t)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{27.33}$$

lo que muestra que L es singular.

Supongamos que $L\,y(t) = \mu\,y(t)$, con $\mu \neq k(k+1)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces $y(t) \perp P_k(t)$, $\forall\,k$, porque L es simétrico. Pero esto implica que $y(t) = \mathbf{0}(t)$, dado que los polinomios de Legendre forman un sistema ortogonal y completo.

Por lo tanto, μ no es autovalor de L y $L_1 = L - \mu\,\mathbf{I}$ es no singular, de modo que satisface las condiciones del Teorema 27.1[17].

En conclusión, toda función dos veces diferenciable en el intervalo $(-1,1)$ tiene un desarrollo en serie de polinomios de Legendre que converge absoluta y uniformemente. $\diamond$

28. Apéndice: Conjuntos numerables

En este Apéndice mostraremos que el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales y de grado arbitrario es numerable.

Lema 28.1. *La unión de un conjunto finito o infinito numerable de conjuntos numerables es también un conjunto numerable.*

[17] En esas condiciones, L_1 tiene una inversa simétrica y completamente continua, que puede construirse de manera similar a la del caso en que $p(t)$ no se anula en los extremos del intervalo considerado. Por ejemplo, tomando $\mu = 1 \neq k(k+1)\,, \forall\, k = 0,1,2,\ldots$, las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea

$$\hat{L}_1\, y(t) = \frac{d}{dt}\left([t^2-1]\,\frac{dy}{dt}\right) - y(t) = 0 \tag{27.34}$$

pueden ser elegidas como las funciones de Legendre

$$u_1(t) = P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(-t)\,, \quad u_2(t) = P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(t)\,. \tag{27.35}$$

El comportamiento de las funciones de Legendre $P_x(t)$ cerca de los extremos del intervalo $[-1,1]$ está dado por

$$P_x(t) = \begin{cases} 1 + O(1-t)\,, & t \approx 1\,, \\ \\ -\log(1+t) + O(1+t)^0\,, & t \approx -1\,, \end{cases} \tag{27.36}$$

de modo que $u_1(t)$ es regular en $t=-1$ (mientras que $u_2(t)$ lo es en $t=1$), presentado en el extremo opuesto una singularidad integrable.

En esas condiciones, el núcleo del operador inverso de L_1 está dado como en la ec. (27.24), con $u_1(t)$ y $u_2(t)$ dadas en la ec. (27.35) y la constante $C_0 = 0{,}59335$. La solución (continua y dos veces diferenciable) de la ecuación inhomogénea

$$\hat{L}_1\, y(t) = x(t) \in \mathcal{C}_2(-1,1)\,, \tag{27.37}$$

está dada por (ver ec. (27.23))

$$y(t) = -\frac{1}{C_0}\left\{P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(-t)\int_t^1 P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(s)\,x(s)\,ds + P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(t)\int_{-1}^t P_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}(-s)\,x(s)\,ds\right\}\,. \tag{27.38}$$

Mostraremos esta propiedad para el caso de la unión de un conjunto numerable de numerables. Para ello consideremos los conjuntos

$$\begin{array}{l} \mathbf{S}_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1l}, \ldots\}\ , \\ \mathbf{S}_2 = \{a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2l}, \ldots\}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{S}_k = \{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kl}, \ldots\}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{28.1}$$

Podemos ordenar todos esos elementos en una única secuencia adoptando alguna regla que nos permita asignar un número natural a cualquier elemento de uno cualquiera de esos conjuntos. Por ejemplo, podemos formar la secuencia

$$\begin{array}{c} a_{11}, \{a_{12}, a_{22}, a_{21}\}, \{a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{32}, a_{31}\}, \\ \{a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}, a_{43}, a_{42}, a_{41}\}, \ldots, \{a_{1k}, \ldots, a_{kk}, \ldots, a_{k1}\}, \ldots \end{array} \tag{28.2}$$

conviniendo en que elementos repetidos obtienen su posición en su primera aparición, y son omitidos en las siguientes.

Lema 28.2. *El conjunto de los números enteros es numerable.*

En efecto, $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Lema 28.3. *El conjunto de los números racionales (números de la forma p/q, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$), es numerable.*

En efecto, el conjunto de los racionales sobre la recta, $\mathbb{Q}$, es la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables de fracciones de la forma

$$\mathbf{S}_q = \left\{ \frac{p}{q}\, , p \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{con } q = 1, 2, 3, \ldots \tag{28.3}$$

Lema 28.4. *El conjunto de pares ordenados formados con los elementos de dos conjuntos numerables es también numerable.*

Dados dos conjuntos numerables,

$$\begin{array}{l} \mathbf{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}\ , \\ \mathbf{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}\ , \end{array} \tag{28.4}$$

el conjunto de pares ordenados $\{\langle a_k, b_l\rangle\ ,\ \forall\, k, l\}$, es la unión de un conjunto numerable de conjuntos numerables de la forma

$$S_k = \{\langle a_k, b_l\rangle\ ,\ l = 1, 2, \ldots\}\ ,\ \text{con } k = 1, 2, \ldots \tag{28.5}$$

que, por el Lema 28.1, es numerable.

Ahora bien, el conjunto de los polinomios de todo grado con coeficientes racionales es la unión para todo n de los conjuntos de polinomios a coeficientes racionales de grado menor o igual a n. Entonces, de acuerdo al Lema 28.1, basta con mostrar que esos conjuntos son numerables.

Los polinomios a coeficientes racionales de grado cero son simplemente los números racionales, que forman un conjunto numerable.

Los polinomios de grado 1 de la forma $q_0 + q_1\, t$, con $q_0, q_1 \in \mathbb{Q}$, están en correspondencia uno a uno con los pares ordenados de la forma $\langle q_0, q_1 \rangle$ que, de acuerdo al Lema 28.4, forman un conjunto numerable.

Procedemos por inducción. Podemos mostrar que si el conjunto de los polinomios de grado $\leq n$ con coeficientes racionales, $\{Q_k(t)\,,\ k \in \mathbb{N}\}$, es numerable, el conjunto de los polinomios a coeficientes racionales de grado $\leq n+1$ también lo es. En efecto, los polinomios de la forma $Q_k(t) + q_l\, t^{n+1}$, con $q_l \in \mathbb{Q}$, están en correspondencia biunívoca con los pares ordenados de la forma $\langle Q_k(t), q_l \rangle$, los que forman un conjunto numerable de acuerdo con el Lema 28.4.

Bibliografía:

- *The Theory of Linear Spaces*, G. Ye. Shilov.
- *Mathematical Analysis*, G. Ye. Shilov.
- *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin
- *Methods of Mathematical Physics*, R. Courant y D. Hilbert.
- *Methods of Modern Mathematical Physics*, M. Reed y B. Simon.

NOTAS SOBRE ECUACIONES INTEGRALES

29. Autovalores de operadores compactos

Sea A un operador completamente continuo definido sobre un espacio euclídeo $\mathbf{E}$. En particular, A es acotado, de modo que

$$\| A\, x \| \leq \| A \| \, \| x \| \,, \quad \forall\, x \in \mathbf{E} \,. \tag{29.1}$$

Como no estamos suponiendo que este operador sea simétrico, sus autovalores (si existen) serán, en general, números complejos. Y los autovectores correspondientes a autovalores distintos no serán, en general, ortogonales entre sí.

Supongamos que $\mathbf{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset \mathbf{E}$ sea un conjunto de autovectores linealmente independientes de A correspondientes a autovalores que en módulo superan a un número positivo δ,

$$A\, x_k = \lambda_k\, x_k \,, \quad \text{con } \; \| A \| \geq |\lambda_k| > \delta > 0 \,, \; \forall\, k \,. \tag{29.2}$$

Mediante el proceso usual de ortonormalización de una secuencia podemos generar el conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$, donde

$$e_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj}\, x_j \,, \quad \text{con } e_k \perp x_l \,, \text{ para } l < k \,. \tag{29.3}$$

En esas condiciones, $A\, e_k$ puede escribirse como la suma de dos vectores ortogonales entre sí,

$$A\, e_k = \sum_{j=1}^{k} a_{kj}\, \lambda_j\, x_j = \lambda_k\, e_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, (\lambda_j - \lambda_k)\, x_j \,, \tag{29.4}$$

lo mismo que la diferencia

$$A\, e_k - A\, e_l = \lambda_k\, e_k + \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, (\lambda_j - \lambda_k)\, x_j - \sum_{j=1}^{l} a_{lj}\, \lambda_j\, x_j \right\} \tag{29.5}$$

si $l < k$. Entonces,

$$\begin{gathered} \| A\, e_k - A\, e_l \|^2 = \\ = \| \lambda_k\, e_k \|^2 + \left\| \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}\, (\lambda_j - \lambda_k)\, x_j - \sum_{j=1}^{l} a_{lj}\, \lambda_j\, x_j \right\|^2 \geq \\ \geq \| \lambda_k\, e_k \|^2 = |\, \lambda_k \,|^2 > \delta^2 > 0 \,. \end{gathered} \tag{29.6}$$

Por lo tanto, el conjunto $\{A\,e_1, A\,e_2, \ldots, A\,e_k, \ldots\}$ no contiene ninguna secuencia de Cauchy. Entonces, como A es compacto, $\mathbf{F}$ debe ser un conjunto con un número finito de elementos.

En consecuencia, los autovalores no nulos de un operador completamente continuo forman en el plano complejo, a lo sumo, una secuencia numerable que converge al origen. Además, la multiplicidad de cualquier autovalor no nulo es finita.

30. Ecuaciones integrales de núcleo no simétrico

Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(t) - \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds = f(t)\,, \tag{30.1}$$

donde $K(t,s) \in \mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$ y $f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ son funciones conocidas y $\varphi(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ es la incógnita.

El núcleo de cuadrado sumable $K(t,s)$ define un operador integral de Fredholm completamente continuo,

$$A\,\varphi(t) = \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,, \tag{30.2}$$

que, en general, será no simétrico.

Como consecuencia del Teorema de Fubini (que autoriza a cambiar el orden de integración cuando una integral doble existe), el operador adjunto $A^\dagger$ resulta definido como

$$A^\dagger\psi(t) = \int_a^b K(s,t)^*\,\psi(s)\,ds\,. \tag{30.3}$$

La ecuación integral (30.1) puede ser escrita como

$$\varphi(t) - A\,\varphi(t) = f(t)\,, \tag{30.4}$$

mientras que el problema equivalente para el operador adjunto sería

$$\psi(t) - A^\dagger\,\psi(t) = g(t)\,, \tag{30.5}$$

con $g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$.

La existencia de soluciones no triviales para la problema adjunto homogéneo (es decir, la existencia de autovectores de $A^\dagger$ correspondientes al autovalor 1),

$$\psi_1(t) - A^\dagger\,\psi_1(t) = \mathbf{0}(t)\,, \tag{30.6}$$

condiciona la existencia de soluciones para la ec. (30.4). En efecto, el producto escalar de $\psi_1(t)$ por ambos miembros de (30.4) da lugar a la ecuación

$$(\psi_1, f) = \Big(\psi_1, (\mathbf{I} - A)\varphi\Big) = \Big((\mathbf{I} - A^\dagger)\psi_1, \varphi\Big) = (\mathbf{0}, \varphi) = 0\,, \tag{30.7}$$

que es una contradicción a menos que la inhomogeneidad $f(t)$ sea ortogonal al subespacio característico de $A^\dagger$ correspondiente al autovalor 1 (subespacio de dimensión finita, dado que $A^\dagger$ es compacto). Si ese no es el caso, no existen soluciones para la ecuación (30.4).

Por otra parte, la existencia de soluciones no triviales para la ecuación homogénea

$$\varphi_1(t) - A\,\varphi_1(t) = \mathbf{0}(t) \tag{30.8}$$

(es decir, la existencia de autovectores del operador A correspondientes al autovalor 1, los que también forman un subespacio de dimensión finita dado que A es compacto) implica que, de existir una solución para la ec. (30.4), ella no sea única. En efecto, en ese caso también tenemos que

$$\big(\mathbf{I} - A\big)\big[\varphi(t) + \varphi_1(t)\big] = f(t)\,. \tag{30.9}$$

Puede demostrarse el siguiente teorema:

Teorema 30.1. *Consideremos la ecuación homogénea (30.8). Dos casos son posibles:*

I) *esa ecuación tiene solución única,* $\varphi_1(t) = \mathbf{0}(t)$*,*
II) *o bien tiene una solución no trivial* $\varphi_1(t) \neq \mathbf{0}(t)$*.*

En el caso I) la ecuación inhomogénea (30.4) tiene solución única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$*, lo mismo que la ec. (30.5)* $\forall\, g(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$*.*

En el caso II), las ecuaciones homogéneas (30.8) y (30.6) tienen el mismo número finito n *de soluciones linealmente independientes. La ecuación imhomogénea (30.4) tiene solución si y sólo si* $f(t)$ *es ortogonal a las* n *soluciones linealmente independientes de (30.6), y en ese caso no es única, sino que está definida a menos de una solución arbitraria de (30.8). (Evidentemente, algo similar vale para la ec. (30.5).)*

Para el caso de núcleos degenerados la demostración es inmediata, puesto que los operadores A y $A^\dagger$ aplican todo $\mathbf{L}_2(a,b)$ en subespacios de dimensión finita, y el problema se reduce a mostrar la existencia de soluciones para un sistema de ecuaciones algebraicas.

Núcleos de cuadrado sumable arbitrarios pueden ser aproximados en la métrica de $\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$ por las sumas parciales de sus series de Fourier respecto de algún sistema ortonormal y completo de funciones. La continuidad completa de estos operadores permite establecer el resultado también en este caso (ver, por ejemplo, *The Theory of Linear Spaces*, G. Ye. Shilov).

De este teorema se deduce el siguiente corolario:

Corolario 30.2. *(de la alternativa de Fredholm) Si A es un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, entonces se tiene una de las siguientes dos posibilidades excluyentes:*

I) *la ecuación $\varphi(t) - A\,\varphi(t) = f(t)$ tiene una solución $\forall\, f(t)\in \mathbf{L}_2(a,b)$ (en cuyo caso la solución es única),*

II) *o bien la ecuación homogénea $\varphi_1(t) - A\,\varphi_1(t) = \mathbf{0}(t)$ tiene una solución no trivial.*

31. Ecuaciones integrales dependientes de un parámetro complejo

Consideremos una familia de ecuaciones integrales que incluyan un parámetro complejo μ multiplicando al núcleo de cuadrado sumable $K(t,s)$,

$$\varphi(t) - \mu\int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds = \big(\mathbf{I} - \mu\,A\big)\varphi(t) = f(t)\,. \tag{31.1}$$

Por el corolario de la alternativa de Fredholm sabemos que, para cada $\mu\in\mathbb{C}$, puede darse sólo una de las siguientes dos posibilidades:

I) la ecuación (31.1) tiene una solución $\forall\, f(t)\in\mathbf{L}_2(a,b)$ (en cuyo caso es única),

II) o bien la ecuación homogénea

$$\big(\mathbf{I} - \mu\,A\big)\varphi_1(t) = \mathbf{0}(t) \tag{31.2}$$

tiene una solución no trivial, que corresponde a un autovector del operador A con autovalor $1/\mu$,

$$A\,\varphi_1(t) = \frac{1}{\mu}\,\varphi_1(t)\,. \tag{31.3}$$

En el primer caso, μ es un **valor regular** de la ecuación (31.1), mientras que en el segundo caso se dice que μ es un **valor singular** de esa ecuación.

Ya sabemos que los autovalores no nulos de un operador completamente continuo forman, a lo sumo, una secuencia numerable que converge al origen del plano complejo, y que está contenida en un círculo de radio $\| A \|$. Si A es un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, tenemos además que $\| A \| \leq \| K(t,s) \| = K$.

En consecuencia, los valores singulares de la ecuación (31.1) forman, a lo sumo, una secuencia numerable que diverge al infinito y está contenida en el exterior de un círculo de radio (θ/K), con $0 < \theta < 1$. En particular, existe un entorno de $\mu = 0$ libre de valores singulares.

Ejemplo:

• Consideremos el núcleo

$$K(t,s) = \begin{cases} \sin(t)\,\cos(s)\,, & t \leq s\,, \\ \cos(t)\,\sin(s)\,, & t \geq s\,, \end{cases} \tag{31.4}$$

con $0 \leq t, s \leq \pi$, cuya norma es $K = \| K(t,s) \| = \pi/2$, y la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds = f(t)\,. \tag{31.5}$$

Para determinar sus valores singulares tengamos en cuenta que este núcleo es simétrico y continuo, satisface la ecuación diferencial

$$-\partial_t^2 K(t,s) = K(t,s)\,, \quad \text{para } t \neq s\,, \tag{31.6}$$

también las condiciones de contorno $K(0,s) = 0$, $\partial_t K(\pi,s) = 0$, y su derivada primera respecto de t tiene una discontinuidad en $t = s$ de altura

$$\partial_t K(t,s)\big|_{t=s^+} - \partial_t K(t,s)\big|_{t=s^-} = -\sin^2(s) - \cos^2(s) = -1\,. \tag{31.7}$$

Además, el Wroskiano $W[\sin(t), \cos(t)] = 1$.

En esas condiciones, $K(t,s)$ puede ser considerado como la función de Green del operador de Sturm - Liouville definido como

$$L\,\psi(t) = -\psi''(t) - \psi(t) \tag{31.8}$$

sobre el subespacio de las funciones dos veces diferenciables que satisfacen las condiciones de contorno $\psi(0) = 0$ y $\psi'(\pi) = 0$.

Entonces, el operador integral A de núcleo $K(t,s)$ tiene las mismas autofunciones que el operador L, y los autovalores de éste coinciden con los valores singulares de la ecuación integral (31.5):

$$\begin{array}{c} L\,\psi_k(t) = -\psi_k''(t) - \psi_k(t) = \mu_k\,\psi_k(t)\,, \quad \psi_k(0) = 0\,, \psi_k'(\pi) = 0 \Rightarrow \\ \psi_k(t) = \sin\Big(\big(k + \tfrac{1}{2}\big)\, t \Big)\,, \quad \text{con } \mu_k = \big(k + \tfrac{1}{2}\big)^2 - 1\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{array} \tag{31.9}$$

Nótese que, $\forall\, k$, $\mid \mu_k \mid \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{K} = \frac{2}{\pi}$, de modo que L es no singular, y existe un círculo de radio $< \frac{3}{4}$ en el plano complejo de la variable μ que no contiene valores singulares.

Como A es simétrico y completamente continuo, tiene un conjunto ortonormal y completo de autovectores, $A\, e_k(t) = \lambda_k\, e_k(t)$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, donde

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\big((k + 1/2)\, t \big) , \quad \text{con } \lambda_k = \frac{1}{\mu_k} = \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} . \tag{31.10}$$

Entonces,

$$\begin{gathered} \big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)\varphi(t) = f(t) \;\; \Rightarrow \\ (1 - \mu\, \lambda_k)\, (e_k, \varphi) = (e_k, f) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sin\big((k + 1/2)\, t \big)\, f(t)\, dt\, . \end{gathered} \tag{31.11}$$

Por lo tanto, para todo valor regular $\mu \neq \mu_k$, $\forall\, k$, la solución de (31.5) existe y es única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(0, \pi)$, y está dada por

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k\; (e_k, f)}{(1 - \mu\, \lambda_k)}\; \sin\big((k + 1/2)\, t \big) , \tag{31.12}$$

donde la serie en el segundo miembro converge absoluta y uniformemente (dado que el núcleo $K(t, s)$ satisface la condición de Hilbert - Schmidt y la diferencia $(\varphi(t) - f(t)) \in \mathrm{Rank}(A)$). En particular, $(\varphi(t) - f(t))$ es continua.

Si, por el contrario, μ coincide con un valor singular μ_{k_0}, entonces la solución no existe a menos que $f(t) \perp e_{k_0}(t)$, en cuyo caso no es única. En efecto, si $(e_{k_0}, f) = 0$ entonces

$$\begin{gathered} \varphi(t) = f(t) + \\ \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{k \neq k_0} \frac{\lambda_k\; (e_k, f)}{(1 - \mu\, \lambda_k)}\; \sin\big((k + 1/2)\, t \big) + \frac{c}{\sqrt{\pi}}\; \sin\big((k_0 + 1/2)\, t \big) , \end{gathered} \tag{31.13}$$

con $c \in \mathbb{C}$ arbitrario. ◇

32. Operador resolvente

Sea $\mu \in \mathbb{C}$ un valor regular de la ecuación

$$\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)\, \varphi = f\, , \tag{32.1}$$

donde A es un operador completamente continuo definido sobre un espacio de Hilbert $\mathbf{E}$. Entonces (32.1) tiene una solución única $\forall\, f \in \mathbf{E}$, de modo que existe una correspondencia biunívoca entre la solución φ y la inhomogeneidad f.

En esas condiciones existe el inverso de $\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)$, y podemos expresar la solución de (32.1) como

$$\varphi = R_\mu\, f\,, \quad \text{donde } R_\mu = \big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)^{-1} : \mathbf{E} \to \mathbf{E}\,, \tag{32.2}$$

llamado **operador resolvente** de A, está definido sobre todo el espacio de Hilbert y su rango es $\text{Rank}\,(A) = \mathbf{E}$.

El operador R_μ es evidentemente lineal, dado que la ecuación (32.1) es lineal. En efecto, si $\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)\, \varphi_{1,2} = f_{1,2}$ entonces la solución de

$$\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)\, \varphi = \alpha\, f_1 + \beta\, f_2 \tag{32.3}$$

está dada por

$$R_\mu\, (\alpha\, f_1 + \beta\, f_2) = \varphi = \alpha\, \varphi_1 + \beta\, \varphi_2 = \alpha\, R_\mu\, f_1 + \beta\, R_\mu\, f_2\,. \tag{32.4}$$

Mostraremos que el operador R_μ es también acotado.

Para ello supongamos que R_μ, que sólo existe para valores regulares de μ, sea no acotado. En ese caso es posible seleccionar una secuencia de vectores unitarios $\{f_k \in \mathbf{E}\,, k \in \mathbb{N}\}$ tales que las correspondientes soluciones de (32.1), $\varphi_k = R_\mu\, f_k$, tengan normas $\parallel \varphi_k \parallel \to \infty$ cuando $k \to \infty$.

Dada la linealidad de la ec. (32.1), para los vectores unitarios $e_k = \varphi_k / \parallel \varphi_k \parallel$ tenemos

$$e_k = g_k + \mu\, A\, e_k\,, \tag{32.5}$$

donde, por construcción, $g_k = f_k / \parallel \varphi_k \parallel \to \mathbf{0}$ cuando $k \to \infty$.

Como A es completamente continuo, el conjunto $\{A\, e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ contiene una secuencia fundamental. Descartando los vectores e_k cuyas imágenes no pertenezcan a esa secuencia, podemos suponer que $\{A\, e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es una secuencia convergente en el espacio de Hilbert $\mathbf{E}$.

En esas condiciones, la secuencia $\{e_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es convergente en $\mathbf{E}$: existe un vector no nulo $e \in \mathbf{E}$ tal que

$$e = \lim_{k\to\infty} e_k\,, \quad \text{con } \parallel e \parallel = \lim_{k\to\infty} \parallel e_k \parallel = 1\,. \tag{32.6}$$

Como A es continuo,

$$e = \lim_{k\to\infty} \{g_k + \mu\, A\, e_k\} = \mathbf{0} + \mu\, A\, e \neq \mathbf{0}\,. \tag{32.7}$$

Pero esto indicaría que μ es un valor singular, en contradicción con la hipótesis de la existencia de R_μ. Por lo tanto, R_μ es necesariamente un operador acotado.

33. Construcción de R_μ en un entorno del origen

Dado que existe un entorno del origen en el plano complejo de la variable μ que no contiene valores singulares, el operador resolvente existe para valores de $\mid \mu \mid$ suficientemente pequeños. En lo que sigue daremos una expresión explícita para R_μ en esa región.

Consideremos el operador (no lineal) definido sobre $\mathbf{E}$ por la relación

$$B\,\varphi = \mu\, A\,\varphi + f\,, \tag{33.1}$$

y evaluemos la distancia entre las imágenes de dos vectores arbitrarios $\varphi, \psi \in \mathbf{E}$,

$$\parallel B\,\varphi - B\,\psi \parallel = \parallel \mu\, A\,(\varphi - \psi) \parallel \leq \mid \mu \mid \parallel A \parallel \parallel \varphi - \psi \parallel\ . \tag{33.2}$$

Tomando $\mu \in \mathbb{C}$ tal que

$$\mid \mu \mid \parallel A \parallel \leq \theta < 1 \tag{33.3}$$

obtenemos que

$$\parallel B\,\varphi - B\,\psi \parallel \leq \theta\ \parallel \varphi - \psi \parallel < \parallel \varphi - \psi \parallel\ . \tag{33.4}$$

Un operador B con estas propiedades se dice **contractivo**.

Mostraremos que todo operador contractivo tiene un único **punto fijo**, es decir, un único vector $\varphi \in \mathbf{E}$ que satisface que

$$B\,\varphi = \varphi\,. \tag{33.5}$$

En nuestro caso, este vector corresponderá a la única solución de la ec. (32.1) para una inhomogeneidad f,

$$\varphi = B\,\varphi = \mu\, A\,\varphi + f\,. \tag{33.6}$$

Partiendo de un vector arbitrario $\varphi_0 \in \mathbf{E}$, formemos la secuencia

$$\varphi_0\,, \varphi_1 = B\,\varphi_0\,, \varphi_2 = B\,\varphi_1 = B^2\,\varphi_0\,, \ldots, \varphi_k = B\,\varphi_{k-1} = B^k\,\varphi_0\,, \ldots \tag{33.7}$$

Veremos que ésta es una secuencia de Cauchy.

Para ello, primero tomemos la distancia entre dos elementos consecutivos,

$$\begin{aligned} &\parallel \varphi_{k+1} - \varphi_k \parallel = \parallel B\,\varphi_k - B\,\varphi_{k-1} \parallel \leq \theta \parallel \varphi_k - \varphi_{k-1} \parallel \leq \\ &\leq \theta^2 \parallel \varphi_{k-1} - \varphi_{k-2} \parallel \leq \cdots \leq \theta^k \parallel \varphi_1 - \varphi_0 \parallel\,, \end{aligned} \tag{33.8}$$

de donde se deduce que

$$
\begin{aligned}
& \| \varphi_{k+l} - \varphi_k \| \leq \\
& \leq \| \varphi_{k+l} - \varphi_{k+l-1} \| + \| \varphi_{k+l-1} - \varphi_{k+l-2} \| + \cdots + \| \varphi_{k+1} - \varphi_k \| \leq \\
& \leq \left(\theta^{k+l-1} + \theta^{k+l-2} + \cdots + \theta^k \right) \| \varphi_1 - \varphi_0 \| = \\
& = \theta^k \left(\sum_{j=0}^{l-1} \theta^j \right) \| \varphi_1 - \varphi_0 \| < \frac{\theta^k}{1-\theta} \| \varphi_1 - \varphi_0 \| .
\end{aligned} \tag{33.9}
$$

Por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} \| \varphi_{k+l} - \varphi_k \| = 0 \,, \quad \forall\, l \,. \tag{33.10}$$

Como $\mathbf{E}$ es un espacio completo, existe el límite de esta secuencia,

$$\varphi = \lim_{k\to\infty} \varphi_k \,. \tag{33.11}$$

Y como B es contractivo, este vector es un punto fijo de B. En efecto,

$$\| B\,\varphi - \varphi_{k+1} \| = \| B\,\varphi - B\,\varphi_k \| \leq \theta \, \| \varphi - \varphi_k \| \to 0 \tag{33.12}$$

cuando $k \to \infty$, de modo que, por la unicidad del límite en $\mathbf{E}$, tenemos

$$B\,\varphi = \lim_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi \,. \tag{33.13}$$

Para ver que este punto fijo es único, supongamos que existe otro vector $\psi \in \mathbf{E}$ que satisface $B\,\psi = \psi$. Entonces, si $\| \varphi - \psi \| \neq 0$,

$$\| \varphi - \psi \| = \| B\,\varphi - B\,\psi \| \leq \theta \, \| \varphi - \psi \| \Rightarrow \theta \geq 1 \,, \tag{33.14}$$

en contradicción con la elección de μ, ec. (33.3). Por lo tanto, $\psi = \varphi$.

Finalmente, señalemos que esta construcción nos permite *aproximar* la solución de la ec. (32.1) en el sentido de la distancia en el espacio $\mathbf{E}$. En efecto, tomando el límite para $l \to \infty$ en la ecuación (33.9) obtenemos para la distancia entre la solución y el k-ésimo elemento de la secuencia (33.7)

$$\| \varphi - \varphi_k \| \leq \frac{\theta^k}{1-\theta} \, \| B\,\varphi_0 - \varphi_0 \| \,. \tag{33.15}$$

La solución de la ecuación (32.1) corresponde al único punto fijo del operador contractivo B, que se obtiene como el límite de la secuencia (33.7) cualquiera que sea el vector inicial φ_0 que se emplee para generarla.

Si se elige $\varphi_0 = \mathbf{0}$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = f\,,\\
&\varphi_2 = \mu\,A\,f + f\,,\\
&\vdots\\
&\varphi_k = \textstyle\sum_{l=0}^{k-1} \mu^l\,A^l\,f\,,\\
&\vdots,
\end{aligned}
\tag{33.16}
$$

de modo que la solución de (32.1) para $f \in \mathbf{E}$ arbitraria corresponde al límite de la serie

$$
\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,A^k\,f = \lim_{k\to\infty} \left\{ \left(\sum_{l=0}^{k} \mu^l\,A^l \right) f \right\}\,,
\tag{33.17}
$$

cuya convergencia está garantizada para

$$
|\,\mu\,| \leq \frac{\theta}{\|\,A\,\|}\,, \quad \text{con } 0 < \theta < 1\,.
\tag{33.18}
$$

De esta expresión surge que, en un entorno del origen del plano complejo μ, el operador resolvente es el límite de una serie de operadores,

$$
R_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k\,A^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} \mu^l\,A^l\,,
\tag{33.19}
$$

serie que converge en el sentido de la norma y que coincide con el desarrollo formal de $\left(\mathbf{I} - \mu\,A\right)^{-1}$ en serie de potencias de μ.

Para verificar la convergencia de esta serie debemos considerar la distancia que media entre R_μ y una suma parcial en el espacio normado de los operadores acotados. Para ello, tengamos en cuenta que para todo vector unitario $f \in \mathbf{E}$ es

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(R_\mu - \textstyle\sum_{l=0}^{k} \mu^l\,A^l\right) f\right\| = \|\,\varphi - \varphi_{k+1}\,\| \leq\\
&\leq \frac{\theta^{k+1}}{1-\theta}\;\|\,f\,\| = \frac{\theta^{k+1}}{1-\theta}\,,
\end{aligned}
\tag{33.20}
$$

donde φ es la solución de (32.1) correspondiente a una inhomogeneidad f, φ_{k+1} es la $(k+1)$-ésima aproximación a esa solución, y donde hemos empleado la cota establecida en la ec. (33.15). Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\left\|R_\mu - \textstyle\sum_{l=0}^{k} \mu^l\,A^l\right\| =\\
&= \sup_{\left\{f\in\mathbf{E}\ \middle|\ \|f\|=1\right\}} \left\|\left(R_\mu - \textstyle\sum_{l=0}^{k} \mu^l\,A^l\right) f\right\| \leq \frac{\theta^{k+1}}{1-\theta} \to 0
\end{aligned}
\tag{33.21}
$$

cuando $k \to \infty$, dado que $\theta < 1$.

Podemos verificar que la serie en (33.19) converge efectivamente al inverso de $\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)$ teniendo en cuenta que

$$\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big) \left(\sum_{l=0}^{k-1} \mu^l\, A^l \right) = \left(\sum_{l=0}^{k-1} \mu^l\, A^l \right) \big(\mathbf{I} - \mu\, A\big) = \tag{33.22}$$

$$= \mathbf{I} - \mu^k\, A^k \;\; \to \;\; \mathbf{I}$$

cuando $k \to \infty$, dado que $\mu^k\, A^k \to \mathbf{O}$. En efecto,

$$\| \, \mu^k\, A^k \, \| \leq | \, \mu \, |^k \, \| \, A \, \| \, \| \, A^{k-1} \, \| \leq \cdots \leq | \, \mu \, |^k \, \| \, A \, \|^k \leq \theta^k \to 0 \tag{33.23}$$

cuando $k \to \infty$, pues $0 < \theta < 1$.

34. Extensión analítica de R_μ

El operador resolvente existe en casi todo punto del plano complejo de la variable μ. Es únicamente para los valores singulares de μ, que forman (a lo sumo) una secuencia numerable que diverge al infinito, que R_μ no está definido.

En la Sección anterior hemos mostrado que la condición $| \, \mu \, | \, \| \, A \, \| \leq \theta < 1$ es suficiente para que R_μ pueda representarse como el límite (en el sentido de la distancia en el espacio de Banach de los operadores acotados) de una serie de potencias en la variable μ. En esas condiciones, se puede decir que R_μ es una **función analítica** de la variable μ (a valores operadores) en un entorno del origen.

Mostraremos que R_μ es una función analítica de μ en un entorno de todo valor regular.

Sea μ_0 un valor regular de un operador completamente continuo A. Entonces, $R_{\mu_0} = \big(\mathbf{I} - \mu_0\, A\big)^{-1}$ existe y es un operador acotado. Además, como los valores singulares de A son puntos aislados, existe todo un entorno de μ_0 libre de ellos.

Podemos entonces considerar el operador resolvente en un punto μ próximo de μ_0,

$$R_\mu = \big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)^{-1} = \big(\mathbf{I} - \mu_0\, A - (\mu - \mu_0)\, A\big)^{-1} = \tag{34.1}$$

$$= R_{\mu_0} \big(\mathbf{I} - (\mu - \mu_0)\, A R_{\mu_0}\big)^{-1} = R_{\mu_0} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \mu_0)^k \, \big(A R_{\mu_0}\big)^k ,$$

donde la serie en el miembro de la derecha converge en el sentido de la norma de los operadores para

$$| \, \mu - \mu_0 \, | \, \| \, A R_{\mu_0} \, \| \leq \theta < 1 \, . \tag{34.2}$$

Téngase en cuenta que AR_{μ_0} es completamente continuo, dado que R_{μ_0} es acotado y A es compacto. En consecuencia, valen para esta serie todas las consideraciones hechas en la Sección anterior acerca de la convergencia del desarrollo del operador resolvente en un entorno del origen.

Por lo tanto, R_μ existe como una función analítica de la variable μ (que toma valores que son operadores sobre $\mathbf{E}$) en toda una región abierta del plano complejo, la que sólo excluye a los valores singulares de A (puntos aislados que corresponden a las inversas de los autovalores de A).

En particular, si R_μ es conocido en cierta región abierta del plano complejo, este operador puede ser prolongado analíticamente desde allí, evitando los puntos singulares.

También puede probarse fácilmente que el operador resolvente tomado para distintos valores regulares conmuta.

En efecto, para λ, μ valores regulares de A compacto podemos escribir que

$$\begin{aligned} \mu\, R_\mu - \lambda\, R_\lambda &= \mu\, R_\mu\big(\mathbf{I} - \lambda\, A\big)R_\lambda - R_\mu\big(\mathbf{I} - \mu\, A\big)\lambda\, R_\lambda = \\ &= (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda\,. \end{aligned} \tag{34.3}$$

Entonces, si $\lambda \neq \mu$,

$$R_\mu R_\lambda = \frac{\mu\, R_\mu - \lambda\, R_\lambda}{\mu - \lambda} = R_\lambda R_\mu\,. \tag{34.4}$$

35. Resolvente de operadores integrales

Consideremos un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable,

$$A\,\varphi(t) = \int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,, \tag{35.1}$$

con

$$K^2 = \|\; K(t,s)\;\|^2 = \int_a^b \int_a^b \left|K(t,s)\right|^2\, dt\,ds < \infty\,. \tag{35.2}$$

Dado que A es completamente continuo, y su norma

$$\|\; A\;\| \leq K\,, \tag{35.3}$$

sabemos que el operador resolvente R_μ es el límite de una serie de potencias en μ de la forma

$$R_\mu = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, A^k\,, \tag{35.4}$$

convergente (en el sentido de la norma de los operadores acotados) en el círculo $|\mu| \leq \theta/K$, con $0 < \theta < 1$.

Mostraremos que en este caso el operador resolvente toma la forma

$$R_\mu = \mathbf{I} + \Gamma_\mu \,, \tag{35.5}$$

donde Γ_μ es un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable, que depende del parámetro μ.

Dado que R_μ en (35.4) está expresado en términos de potencias del operador A, primero debemos estudiar la composición de operadores integrales.

Para ello, consideremos un segundo operador de Fredholm

$$B\,\varphi(t) = \int_a^b L(t,s)\,\varphi(s)\,ds \,, \tag{35.6}$$

con

$$L^2 = \| \, L(t,s) \, \|^2 = \int_a^b \int_a^b |L(t,s)|^2 \; dt\,ds < \infty \,. \tag{35.7}$$

Su composición con A es, por definición,

$$\begin{aligned} AB\,\varphi(t) &= \textstyle\int_a^b K(t,s) \left\{ \int_a^b L(s,r)\,\varphi(r)\,dr \right\} ds = \\ &= \textstyle\int_a^b \left\{ \int_a^b K(t,s)\,L(s,r)\,ds \right\} \varphi(r)\,dr \,, \end{aligned} \tag{35.8}$$

donde el cambio en el orden de las integrales está justificado por el Teorema de Fubini, dado que todas las funciones que allí aparecen son de cuadrado sumable y la integral doble existe.

En consecuencia, AB es también un operador integral cuyo núcleo es

$$M(t,r) = \int_a^b K(t,s)\,L(s,r)\,ds \,. \tag{35.9}$$

Como $K(t,s)$ y $L(s,r)$ son funciones de cuadrado sumable de la variable s (para casi todos los valores de t y de r), el núcleo $M(t,r)$ puede ser interpretado como el producto escalar

$$M(t,r) = \big(K(t,s)^*, L(s,r)\big) \,. \tag{35.10}$$

Por aplicación de la desigualdad de Cauchy - Schwarz, esto permite escribir

$$|M(t,r)|^2 \leq k(t)^2\, l(r)^2 \,, \tag{35.11}$$

donde

$$
(35.12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} k(t)^2 = \int_a^b |K(t,s)|^2 \, ds \;\Rightarrow\; \int_a^b k(t)^2 \, dt = K^2 \,, \\[2ex] l(r)^2 = \int_a^b |L(s,r)|^2 \, ds \;\Rightarrow\; \int_a^b l(r)^2 \, dr = L^2 \,. \end{array} \right.
$$

Por lo tanto, $M(t,r) \in \mathbf{L}_2\big((a,b) \times (a,b)\big)$, y su norma

$$
(35.13) \qquad M^2 = \int_a^b \int_a^b |M(t,r)|^2 \, dt \, dr \leq K^2 \, L^2 \;\Rightarrow\; M \leq K \, L \,.
$$

Este resultado permite concluir que las potencias enteras positivas de un operador integral de Fredholm de núcleo de cuadrado sumable son también operadores integrales de Fredholm,

$$
(35.14) \qquad A^k \, \varphi(t) = \int_a^b K_k(t,s) \, \varphi(s) \, ds \,,
$$

cuyos núcleos, llamados **núcleos iterados**, se obtienen recursivamente de la relación

$$
(35.15) \qquad K_{k+1}(t,s) = \int_a^b K(t,r) \, K_k(r,s) \, dr \,, \quad K_1(t,s) = K(t,s) \,,
$$

son de cuadrado sumable, y su norma satisface

$$
(35.16) \qquad K_k = \parallel K_k(t,s) \parallel \leq \; K \; \parallel K_{k-1}(t,s) \parallel \leq \cdots \leq K^k \,.
$$

En esas condiciones, cada suma parcial de la serie en el miembro de la derecha de la ec. (35.4) corresponde a un operador integral de Fredholm,

$$
(35.17) \qquad S_{\mu,n} \, f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu^k \, A^k \, f(t) = \int_a^b S_n(t,s;\mu) \, f(s) \, ds \,,
$$

cuyo núcleo (de cuadrado sumable) está dado por la suma

$$
(35.18) \qquad S_n(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{n} \mu^k \, K_k(t,s) \in \mathbf{L}_2\big((a,b) \times (a,b)\big) \,.
$$

Ahora bien, la secuencia formada por los núcleos $S_n(t,s;\mu)$ es fundamental en $\mathbf{L}_2\big((a,b) \times (a,b)\big)$. En efecto,

$$
(35.19) \qquad \begin{array}{c} \parallel S_{n+m}(t,s;\mu) - S_n(t,s;\mu) \parallel = \left\| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} \mu^k \, K_k(t,s) \right\| \leq \\[2ex] \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} | \, \mu \, |^k \parallel K_k(t,s) \parallel \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} | \, \mu \, |^k \, K^k \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \theta^k < \frac{\theta^{n+1}}{1-\theta} \to 0 \end{array}
$$

cuando $n \to \infty$, $\forall \, m$.

Por lo tanto, existe el límite de la serie

$$\Gamma(t,s;\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\,K_k(t,s)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)\,, \tag{35.20}$$

que es además una función analítica de la variable μ en un entorno del origen.

Esta función de cuadrado sumable permite definir un nuevo operador integral de Fredholm,

$$\Gamma_\mu\,f(t):=\int_a^b\Gamma(t,s;\mu)\,f(s)\,ds\,, \tag{35.21}$$

que resulta ser el límite de la serie

$$\Gamma_\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\,A^k=\lim_{n\to\infty}S_{\mu,n}\,. \tag{35.22}$$

En efecto, dado que tanto Γ_μ como $S_{\mu,n}$ son operadores integrales de Fredholm, también lo es su diferencia, $\Gamma_\mu-S_{\mu,n}$. Y como la norma de tales operadores está acotada por la norma de sus núcleos, tenemos que

$$\|\,\Gamma_\mu-S_{\mu,n}\,\|\leq\|\,\Gamma(t,s;\mu)-S_n(t,s;\mu)\,\|\,\rightarrow\,0 \tag{35.23}$$

cuando $n\to\infty$. □

En consecuencia, la solución de una ecuación integral de la forma

$$\varphi(t)-\mu\int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds=f(t)\,, \tag{35.24}$$

donde $K(t,s)$ y $f(t)$ son funciones de cuadrado sumable dadas, y $\mu\in\mathbb{C}$ satisface $|\,\mu\,|\;K\leq\theta<1$, puede escribirse como

$$\varphi(t)=R_\mu\,f(t)=f(t)+\int_a^b\Gamma(t,s;\mu)\,f(s)\,ds\,, \tag{35.25}$$

donde $\Gamma(t,s;\mu)\in\mathbf{L}_2\big((a,b)\times(a,b)\big)$ es una función analítica de μ que corresponde al límite de la serie de núcleos iterados, ec. (35.20).

Si la serie de núcleos iterados puede ser sumada a una función $\Gamma(t,s;\mu)$, holomorfa en un círculo $|\,\mu\,|\;K\leq\theta<1$, ésta ha de admitir una prolongación analítica (que es única) a todo el plano complejo de la variable μ, la que sólo presentará singularidades aisladas en los valores singulares del núcleo $K(t,s)$.

Ejemplo:

• Consideremos el núcleo $K(t,s)=e^{t+s}$, con $0\leq t,s\leq 1$. Entonces,

$$K^2=\|\,e^{t+s}\,\|^2=\int_0^1\int_0^1 e^{2(t+s)}\,dt\,ds=\left(\frac{e^2-1}{2}\right)^2\,, \tag{35.26}$$

y los núcleos iterados son

$$K_2(t,s) = \int_0^1 e^{t+r}\, e^{r+s}\, dr = \left(\tfrac{e^2-1}{2}\right) e^{t+s}\,,$$

(35.27)
$$\begin{aligned} K_3(t,s) &= \int_0^1 e^{t+r}\, K_2(r,s)\, dr = \left(\tfrac{e^2-1}{2}\right)^2 e^{t+s}\,,\\ &\vdots\\ K_k(t,s) &= \int_0^1 e^{t+r}\, K_{k-1}(r,s)\, dr = \left(\tfrac{e^2-1}{2}\right)^{k-1} e^{t+s}\,,\\ &\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\mid \mu \mid\ K = \mid \mu \mid \left(\frac{e^2-1}{2}\right) \leq \theta < 1$, tenemos

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, K_k(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \left(\frac{e^2-1}{2}\right)^{k-1} e^{t+s} = \frac{\mu\, e^{t+s}}{1-\mu\left(\frac{e^2-1}{2}\right)}\,. \tag{35.28}$$

La suma de esta serie es una función analítica de μ que admite una extensión meromorfa al plano complejo, la que presenta como única singularidad un polo simple en $\mu = \frac{2}{e^2-1}$. De ese modo, el operador integral de núcleo e^{t+s} tiene un único valor singular en ese punto.

Eso se explica por el hecho de que este operador integral aplica todo $\mathbf{L}_2(0,1)$ en el subespacio unidimensional generado por la función $\psi(t) = e^t$, de modo que todo autovector correspondiente a un autovalor no nulo debe ser proporcional a esa función,

$$A\, e^t = \int_0^1 e^{t+s}\, e^s\, ds = \left(\frac{e^2-1}{2}\right) e^t \Rightarrow \lambda = \left(\frac{e^2-1}{2}\right)\,. \tag{35.29}$$

En esas condiciones, si $\mu \neq \frac{2}{e^2-1}$ la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_0^1 e^{t+s}\, \varphi(s)\, ds = f(t) \tag{35.30}$$

tiene solución única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(0,1)$, la que está dada por

(35.31)
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t) + \frac{\mu}{1-\mu\left(\frac{e^2-1}{2}\right)} \int_0^1 e^{t+s}\, f(s)\, ds = \\ &= f(t) + \frac{\mu\,\lambda}{(1-\mu\,\lambda)} \frac{e^t}{\parallel e^t \parallel^2} \int_0^1 e^s\, f(s)\, ds\,. \end{aligned}$$

Si, por el contrario, $\mu = \frac{2}{e^2-1}$, entonces la ecuación integral sólo tiene solución si $f(t) \perp e^t$, en cuyo caso no es única,

$$\varphi(t) = f(t) + c\, e^t\,, \quad c \in \mathbb{C} \tag{35.32}$$

(donde hemos tenido en cuenta las propiedades de los núcleos simétricos - ver *Notas sobre Espacios Euclídeos, ec. (25.12)*). En efecto,

$$\begin{array}{c} \left\{f(t) + c\, e^t\right\} - \dfrac{2\, e^t}{e^2 - 1} \displaystyle\int_0^1 e^s \left\{f(s) + c\, e^s\right\} ds = \\ \\ = f(t) + c\, e^t - c\, e^t = f(t)\,. \end{array} \tag{35.33}$$

◇

La condición $\mid \mu \mid K \leq \theta < 1$ ha sido obtenida como una condición suficiente para la convergencia de la serie de núcleos iterados, pero hay situaciones en las que su radio de convergencia es mayor. Y allí donde la serie (35.20) converge, ella se suma al núcleo $\Gamma(t,s;\mu)$.

Un ejemplo de esta situación corresponde al caso en que algún núcleo iterado se anule idénticamente, $K_{n+1}(t,s) \equiv 0$, lo que hace que todos los que le siguen también sean nulos, $K_k(t,s) \equiv 0\,, \forall\, k > n$. En esas condiciones, la serie en la ec. (35.20) se reduce a un polinomio de grado n en μ,

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{n} \mu^k\, K_k(t,s)\,, \tag{35.34}$$

que es una **función entera** (analítica en todo el plano complejo). En tal caso, el operador integral de núcleo $K(t,s)$ no tiene valores singulares.

Ejemplo:

• Esa situación ocurre, en particular, para núcleos degenerados de la forma

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\, q_k^*(s)\,, \quad \text{con } p_k(t) \perp q_l(t)\,,\ k,l = 1,\ldots,n\,. \tag{35.35}$$

En este caso, $K_2(t,s) \equiv 0$, de modo que $\Gamma(t,s;\mu) = \mu\, K(t,s)$.

Ese es el caso de

$$K(t,s) = \sin(t-2s) = \sin(t)\cos(2s) - \cos(t)\sin(2s)\,. \tag{35.36}$$

Evidentemente,

$$K_2(t,s) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-2r)\sin(r-2s)\, dr = 0\,, \tag{35.37}$$

de modo que

$$\Gamma(t,s;\mu) = \mu\, \sin(t-2s)\,, \quad \forall\, \mu \in \mathbb{C}\,, \tag{35.38}$$

y la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-2s)\, \varphi(s)\, ds = f(t)\,, \tag{35.39}$$

tiene solución única $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, dada por

$$\varphi(t) = f(t) + \mu \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t-2s)\, f(s)\, ds\,. \tag{35.40}$$

$\diamond$

La serie para $\Gamma(t,s;\mu)$ también converge $\forall\, \mu \in \mathbb{C}$ si las normas de los núcleos iterados están acotadas por constantes de la forma

$$\parallel K_k(t,s) \parallel \leq c\, \frac{M^k}{k!}\,. \tag{35.41}$$

En este caso,

$$\begin{array}{c} \left\| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} \mu^k\, K_k(t,s) \right\| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} \mid \mu \mid^k \parallel K_k(t,s) \parallel \leq \\ \leq c \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\mid \mu \mid^k\, M^k}{k!} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty\,, \forall\, m \in \mathbb{N}\,. \end{array} \tag{35.42}$$

Entonces, la serie de núcleos iterados

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k\, K_k(t,s)\,, \tag{35.43}$$

converge en $\mathbf{L}_2(a,b)$ para todo complejo μ, y un núcleo con esas propiedades no tiene valores singulares.

Esa situación se presenta, en particular, en el caso de **operadores integrales de Volterra** de núcleo acotado,

$$A\,\varphi(t) = \int_a^t K(t,s)\, \varphi(s)\, ds\,, \quad \mid K(t,s) \mid \leq M\,. \tag{35.44}$$

Se trata de un caso particular de operadores de Fredholm para los cuales el núcleo $K(t,s) = 0$ para $s \geq t$.

Consideremos el segundo núcleo iterado,

$$K_2(t,s) = \int_a^b K(t,r)\, K(r,s)\, dr = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t K(t,r)\, K(r,s)\, dr\,, & t > s\,, \\ 0\,, \quad t \leq s\,, & \end{cases} \tag{35.45}$$

que es también un núcleo de Volterra acotado,

$$| K_2(t,s) | \leq \int_s^t | K(t,r)\, K(r,s) |\ dr \leq M^2\,(t-s) \leq M^2\,(b-a)\,. \tag{35.46}$$

Para el tercer núcleo iterado tenemos

$$K_3(t,s) = \int_a^b K(t,r)\, K_2(r,s)\, dr = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_s^t K(t,r)\, K_2(r,s)\, dr\,, \quad t > s\,, \\ \\ 0\,, \quad t \leq s\,, \end{array} \right. \tag{35.47}$$

que es también un núcleo de Volterra acotado por

$$\begin{array}{c} \displaystyle | K_3(t,s) | \leq \int_s^t | K(t,r)\, K_2(r,s) |\ dr \leq \\ \displaystyle \leq \int_s^t M^3\,(r-s)\, dr \leq M^3\, \frac{(t-s)^2}{2!} \leq M^2\, \frac{(b-a)^2}{2!}\,. \end{array} \tag{35.48}$$

En general, tenemos

$$\begin{array}{c} \displaystyle K_k(t,s) = \int_a^b K(t,r)\, K_{k-1}(r,s)\, dr = \\ \\ = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_s^t K(t,r)\, K_{k-1}(r,s)\, dr\,, \quad t > s\,, \\ \\ 0\,, \quad t \leq s\,, \end{array} \right. \end{array} \tag{35.49}$$

que es también un núcleo de Volterra cuyo módulo está acotado por

$$\begin{array}{c} \displaystyle | K_k(t,s) | \leq \int_s^t | K(t,r)\, K_{k-1}(r,s) |\ dr \leq \\ \displaystyle \leq \int_s^t M^k\, \frac{(r-s)^{k-2}}{(k-2)!}\, dr \leq M^k\, \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \leq M^k\, \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}\,. \end{array} \tag{35.50}$$

En esas condiciones,

$$\| K_k(t,s) \| \leq \big[M\,(b-a) \big]\, \frac{M^{k-1}\,(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}\,, \tag{35.51}$$

y la resolvente existe en todo el plano complejo.

El hecho de que los núcleos iterados estén uniformemente acotados (ver ec. (35.50)) hace que la serie para $\Gamma(t,s;\mu)$ sea uniformemente convergente para $a \leq$

$t, s \leq b$ y para μ tomando valores en cualquier región acotada del plano complejo, $\mid \mu \mid \leq \Lambda$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \mu^k \, K_k(t,s) \mid \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mid \mu \mid^k \, M^k \, \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} \leq (\Lambda \, M) \; e^{\Lambda \, M(b-a)} \,. \tag{35.52}$$

Esto implica, en particular, que $\Gamma(t,s;\mu) = 0$ para $t \leq s$, de modo que $\Gamma_\mu = R_\mu - \mathbf{I}$ es también un operador integral de Volterra.

Por lo tanto, la ecuación integral

$$\varphi(t) - \mu \int_a^t K(t,s) \, \varphi(s) \, ds = f(t) \,, \quad \text{con} \ \mid K(t,s) \mid \leq M \,, \tag{35.53}$$

tiene solución única $\forall \, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$ y $\forall \, \mu \in \mathbb{C}$, la que está dada por

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^t \Gamma(t,s;\mu) \, f(s) \, ds \,. \tag{35.54}$$

Ejemplo:

• Consideremos el núcleo de Volterra

$$K(t,s) = \begin{cases} e^{t^2-s^2} \,, & t > s \,, \\ 0 \,, & t \leq s \,, \end{cases} \tag{35.55}$$

donde $a \leq t, s \leq b$. Entonces,

$$K_2(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t e^{t^2-r^2} \, e^{r^2-s^2} \, dr = (t-s) \, e^{t^2-s^2} \,, & t > s \,, \\ \\ 0 \,, \quad t \leq s \,, \end{cases} \tag{35.56}$$

$$K_3(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t e^{t^2-r^2} \, (r-s) \, e^{r^2-s^2} \, dr = \frac{(t-s)^2}{2!} \, e^{t^2-s^2} \,, & t > s \,, \\ \\ 0 \,, \quad t \leq s \,, \end{cases} \tag{35.57}$$

y en general

$$K_k(t,s) = \begin{cases} \displaystyle\int_s^t e^{t^2-r^2} \, \frac{(r-s)^{k-2}}{(k-2)!} \, e^{r^2-s^2} \, dr = \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \, e^{t^2-s^2} \,, \; t > s \,, \\ \\ 0 \,, \quad t \leq s \,. \end{cases} \tag{35.58}$$

En esas condiciones,

$$\Gamma(t,s;\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \, K_k(t,s) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \, \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} \, e^{t^2-s^2} = \mu \, e^{\mu\,(t-s)} \, e^{t^2-s^2} \,, & t > s \,, \\ 0 \,, \quad t \leq s \,, \end{cases} \tag{35.59}$$

donde la serie converge $\forall\, \mu \in \mathbb{C}$. ◇

36. Método de los determinantes de Fredholm

En el caso general, la serie de los núcleos iterados, ec. (35.20), tiene un radio de convergencia finito, fuera del cual sólo es posible obtener el núcleo $\Gamma(t,s;\mu)$ por prolongación analítica de la suma de la serie en un entorno del origen.

En lo que sigue se presenta sin demostración una fórmula debida a Fredholm, que da una expresión para el núcleo $\Gamma(t,s;\mu)$ para todo valor regular $\mu \in \mathbb{C}$. Esta fórmula fue demostrada primero por Fredholm para el caso de núcleos $K(t,s)$ continuos y acotados (ver, por ejemplo, *Methods of Mathematical Physics*, R. Courant y D. Hilbert.), y luego extendida al caso de núcleos de cuadrado sumable arbitrarios (ver, por ejemplo, *Mathematical Analysis*, G. Ye. Shilov, y las referencias allí citadas).

Definamos

$$C_0 := 1 \,, \quad B_0(t,s) := K(t,s) \,, \tag{36.1}$$

e introduzcamos las relaciones de recurrencia

$$\begin{gathered} C_n := \int_a^b B_{n-1}(s,s)\, ds \,, \\ B_n(t,s) := C_n \, K(t,s) - n \int_a^b K(t,r)\, B_{n-1}(r,s)\, dr \,. \end{gathered} \tag{36.2}$$

Es fácil ver que

$$B_n(t,s) =$$

(36.3)
$$= \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,s) & K(t,s_1) & \dots & K(t,s_n) \\ K(s_1,s) & K(s_1,s_1) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K(s_n,s) & K(s_n,s_1) & \dots & K(s_n,s_n) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n \,,$$

lo que le da su nombre al método.

Con estos coeficientes se definen las series de potencias

(36.4)
$$D(t,s;\mu) := K(t,s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(t,s)\, \mu^n$$

y

(36.5)
$$D(\mu) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n\, \mu^n \,,$$

que convergen en todo el plano complejo de la variable μ, sumándose a las funciones enteras $D(t,s;\mu)$, llamada **menor de Fredholm**, y $D(\mu)$, llamada **determinante de Fredholm**.

En esas condiciones, los ceros de $D(\mu)$ coinciden con los valores singulares del núcleo $K(t,s)$, y el núcleo del operador integral $\Gamma_\mu = R_\mu - \mathbf{I}$ está dado por el cociente

(36.6)
$$\Gamma(t,s;\mu) = \frac{D(t,s;\mu)}{D(\mu)} \,.$$

Entonces, para todo valor regular μ (para el cual $D(\mu) \neq 0$) y $\forall\, f(t) \in \mathbf{L}_2(a,b)$, la ecuación integral

(36.7)
$$\varphi(t) - \mu \int_a^b K(t,s)\, \varphi(s)\, ds = f(t)$$

tiene una única solución que puede ser expresada como

(36.8)
$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^b \frac{D(t,s;\mu)}{D(\mu)}\, f(s)\, ds \,.$$

Ejemplo:

• Son raras aquellas situaciones en las que es posible sumar explícitamente las series (36.4) y (36.5). Un ejemplo corresponde al caso en que uno de los núcleos $B_n(t,s)$ se anula idénticamente, lo que hace que esas series se reduzcan a sumas finitas.

Tomemos el núcleo degenerado $K(t,s) = t\,e^s$, con $0 \leq t, s \leq 1$. Tenemos que

$$C_1 = \int_0^1 s\,e^s\,ds = 1\,, \tag{36.9}$$

y

$$B_1(t,s) = t\,e^s - \int_0^1 t\,e^r\,r\,e^s\,dr = t\,e^s - t\,e^s = 0\,, \tag{36.10}$$

de modo que $C_n = 0$ y $B_n(t,s) \equiv 0$ para $n \geq 2$.

Por lo tanto,

$$\begin{cases} D(t,s;\mu) = t\,e^s\,, \\ \\ D(\mu) = 1 - \mu\,, \end{cases} \tag{36.11}$$

lo que implica que el núcleo $K(t,s) = t\,e^s$ tiene un único valor singular en $\mu = 1$[18]. Para el núcleo $\Gamma(t,s;\mu)$ tenemos

$$\Gamma(t,s;\mu) = \frac{t\,e^s}{1-\mu}\,, \quad \text{para } \mu \neq 1\,. \tag{36.12}$$

$\diamond$

Bibliografía:

- *The Theory of Linear Spaces*, G. Ye. Shilov.
- *Mathematical Analysis*, G. Ye. Shilov.
- *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin
- *Ecuaciones Integrales*, M. Krasnov, A. Kiseliov, G. Macarenko.
- *Methods of Mathematical Physics*, R. Courant y D. Hilbert.
- *Methods of Modern Mathematical Physics*, M. Reed y B. Simon.

[18]En efecto, por tratarse de un operador integral de núcleo degenerado que proyecta todo el espacio $\mathbf{L}_2(0,1)$ en un subespacio unidimensional, vemos que todo autovector correspondiente a un autovalor no nulo es proporcional a $e(t) = t$. Y teniendo en cuenta la integral en (36.9), concluimos que el autovalor correspondiente es $\lambda = 1$.

NOTAS SOBRE LA TRANSFORMACIÓN DE FOURIER EN $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$

37. Espacios $\mathbf{L_p}$

El conjunto de funciones

$$\mathbf{L_p}(a,b) := \left\{ \varphi(x) : \int_a^b |\varphi(x)|^p < \infty \right\} , \tag{37.1}$$

para $p \geq 1$, constituye un espacio normado (de Banach) respecto de la norma

$$||\varphi(x)||_p := \left\{ \int_a^b |\varphi(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} , \tag{37.2}$$

que a su vez determina la distancia

$$\rho(\varphi,\psi) := ||\varphi-\psi||_p \,. \tag{37.3}$$

Desde luego que estas definiciones requieren la identificación de aquellas funciones que coinciden en casi todo punto con un mismo vector del espacio.

El teorema de Riesz y Fischer establece que $\mathbf{L_p}(a,b)$ es un espacio completo respecto de esa distancia.

38. Transformación de Fourier en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$

Dada una función $\varphi \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, se define su **transformada de Fourier** como

$$\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\, \varphi(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} , \tag{38.1}$$

que es una función acotada, continua y que tiende a 0 cuando $|\sigma| \to \infty$ (Lema de Riemann - Lebesgue).

En efecto:

- Para todo $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$|\psi(\sigma)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, ||\varphi||_1 , \tag{38.2}$$

  de modo que la integral en (38.1) converge absoluta y uniformemente en σ.

- Si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ (es decir, si $||\varphi_n - \varphi||_1 \to 0$ para $n \to \infty$), entonces sus transformadas de Fourier satisfacen

$$|\psi_n(\sigma) - \psi(\sigma)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, ||\varphi_n - \varphi||_1 \to 0 \tag{38.3}$$

para $n \to \infty$ y $\forall \sigma \in \mathbb{R}$. En consecuencia, la sucesión de transformadas de Fourier converge uniformemente en toda la recta a la transformada de Fourier de la función límite.

- Sea $\chi_{[a,b]}(x) \in \mathbf{L}_1(a,b)$ la **función característica** del intervalo $[a,b]$,

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, \text{ para } -\infty < a \leq x \leq b < \infty, \\ 0, \text{ en todo otro caso.} \end{cases} \tag{38.4}$$

Su transformada de Fourier es

$$\psi(\sigma) = \int_a^b e^{-i\sigma x}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{i}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\sigma b} - e^{-i\sigma a}\right)\,, \tag{38.5}$$

que es continua en toda la recta y tiende a 0 para $|\sigma| \to \infty$. Lo mismo vale para la transformada de Fourier de toda función escalonada en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ (combinación lineal de un número finito de funciones características).

- Puede demostrarse que el conjunto de las funciones escalonadas absolutamente integrables en la recta es denso en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, de modo que toda función $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es el límite de una secuencia de funciones escalonadas. En consecuencia, su transformada de Fourier es el límite de una secuencia uniformemente convergente de funciones continuas que tienden a 0 en el infinito.

  Por lo tanto, la transformada de Fourier de toda función en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es continua y tiende a 0 para $\sigma \to \pm\infty$.

También puede demostrarse que si la transformada de Fourier $\psi(\sigma)$ de una función $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es nula para todo σ, $\psi(\sigma) \equiv 0$, entonces $\varphi(x) = 0$ en casi todo punto.

Esto hace que la transformación de Fourier sea unívoca. En efecto, si $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ tienen la misma transformada de Fourier $\psi(\sigma)$, entonces, por ser $\mathcal{F}$ lineal, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ en casi todo punto.

Así definida, la transformación de Fourier es una aplicación lineal de $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ en el espacio de las funciones continuas que se anulan en el infinito. Pero no toda función con esas características es la transformada de Fourier de una función en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ (es decir, $\mathcal{F}$ no es sobreyectiva en ese espacio).

La **transformación de Fourier inversa** corresponde a

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \varphi(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{i\sigma x}\, \psi(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{38.6}$$

definición que sólo vale bajo ciertas condiciones de regularidad sobre $\varphi(x)$.

Como la integral que define $\psi(\sigma)$ en (38.1) converge absoluta y uniformemente en σ, el teorema de Fubini permite escribir

$$\begin{aligned} \varphi_N(x) := \int_{-N}^{N} e^{i\sigma x}\, \psi(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-N}^{N} e^{i\sigma(x-y)}\, d\sigma \right\} \varphi(y)\, \frac{dy}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Nt)}{t}\, \varphi(x+t)\, dt = \\ &= \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Nt)}{t}\, [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, dt\,, \end{aligned} \tag{38.7}$$

dado que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(Nt)}{t}\, dt = 1\,. \tag{38.8}$$

La última integral en (38.7) puede escribirse como la suma $(A + B)$, donde

$$\begin{aligned} A &= \int_{|t|\leq T} \frac{\sin(N\,t)}{t}\, [\varphi(x+t) - \varphi(x)]\, dt\,, \\ B &= \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, \varphi(x+t)\, dt - \varphi(x) \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, dt\,. \end{aligned} \tag{38.9}$$

Es evidente que, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|B| \leq \left| \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, \varphi(x+t)\, dt \right| + \left| \varphi(x) \int_{|t|\geq T} \frac{\sin(Nt)}{t}\, dt \right| \tag{38.10}$$

resulta tan pequeño como se quiera con sólo tomar T suficientemente grande (dado que ambas integrales son convergentes sobre toda la recta), y eso $\forall\, N > N_0$ arbitrario.

Por su parte, $A \to 0$ cuando $N \to \infty$ si, por ejemplo, la función $\varphi(x)$ satisface la condición de Dini[19]:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|\varphi(x+t) - \varphi(x)|}{|t|}\, dt < \infty\,, \tag{38.13}$$

para un $\delta > 0$. Esta condición es satisfecha, en particular, por las funciones diferenciables (en virtud del teorema del valor medio).

En esas condiciones, $\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = \varphi(x)$ en casi todo punto.

39. Subespacios densos en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$

No toda función de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tiene una transformada de Fourier en el sentido antes descrito, ya que no toda función de ese espacio es absolutamente integrable en la recta. Por ejemplo, si

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \tag{39.1}$$

entonces $\varphi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ pero $\varphi \notin \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$.

Pero sí es cierto que toda función de soporte compacto y cuadrado sumable tiene una transformada de Fourier en el sentido usual.

En efecto, si $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(a,b)$, con $-\infty < a < b < \infty$, y $\varphi(x) = 0\,, \forall\, x \notin [a,b]$, teniendo en cuenta que la función característica $\chi_{[a,b]}(x) \in \mathbf{L_2}(a,b)$, podemos escribir que

$$||\varphi||_1 = (\chi_{[a,b]}(x), |\varphi(x)|) \leq ||\chi_{[a,b]}(x)||_2\, ||\varphi(x)||_2 = \sqrt{b-a}\; ||\varphi(x)||_2\,, \tag{39.2}$$

---

[19]En efecto, si $f(t)$ es sumable en un intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\, \sin(Nt)\, dt \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Para demostrarlo, consideremos primero la función característica de un intervalo $[c,d] \subset [a,b]$, que es una función sumable. Tenemos que

$$\int_a^b \chi_{[c,d]}(t)\, \sin(Nt)\, dt = \frac{\cos(Nd) - \cos(Nc)}{N} \to 0 \quad \text{cuando } N \to \infty\,. \tag{38.11}$$

Lo mismo vale para cualquier función escalonada $h(t) \in \mathbf{L}_1(a,b)$, por ser una combinación lineal de un número finito de funciones características.

Finalmente, si $f(t) \in \mathbf{L}_1(a,b)$, teniendo en cuenta que el conjunto de las escalonadas es denso en $\mathbf{L}_1(a,b)$, sabemos que $\forall\, \varepsilon > 0$ existe una función escalonada $h(t) \in \mathbf{L}_1(a,b)$ tal que $||f(t) - h(t)||_1 < \varepsilon/2$. Entonces,

$$\left| \int_a^b f(t)\, \sin(Nt)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - h(t)|\, dt + \left| \int_a^b h(t)\, \sin(Nt)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{38.12}$$

si N es suficientemente grande.

en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

De hecho, las funciones de soporte compacto y cuadrado sumable forman un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

En efecto, dada $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ definimos

$$\varphi_N(x) := \begin{cases} \varphi(x), \ |x| \leq N\,, \\ \\ 0, \ |x| > N\,. \end{cases} \tag{39.3}$$

Evidentemente, $\varphi_N(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, $||\varphi_N||_2 \leq ||\varphi||_2$, y $||\varphi_N||_2 \to ||\varphi||_2$ cuando $N \to \infty$.

Además, $\varphi_N \to \varphi$ en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, ya que

$$||\varphi_N - \varphi||_2{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi(x)|^2\, dx = ||\varphi||_2{}^2 - ||\varphi_N||_2{}^2 \to 0\,. \tag{39.4}$$

Recordemos que el espacio formado por los polinomios de todo grado es un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(-N, N)$.

Consideremos la función definida por

$$\phi_\epsilon(x) := \begin{cases} e^{\left(\dfrac{-\epsilon}{N^2 - x^2}\right)}, \ |x| < N\,, \\ \\ 0, \ |x| \geq N\,, \end{cases} \tag{39.5}$$

con $\epsilon > 0$. Esta función es de soporte compacto (contenido en $[-N, N]$) y tiene derivadas continuas de todo orden: $\phi_\epsilon(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Además, toma valores entre 0 y 1 ($0 \leq \phi_\epsilon(x) < 1$) y converge uniformemente a 1 cuando $\epsilon \to 0$ en todo intervalo cerrado de la forma $[-N + \delta, N - \delta]$, con $\delta > 0$.

Sea $P(x)$ un polinomio y $M = \max\{|P(x)|\}$ para $-N \leq x \leq N$. Llamemos $P_\epsilon(x) = P(x)\phi_\epsilon(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. La distancia entre esas dos funciones de $\mathbf{L_2}(-N, N)$ es

$$\begin{array}{c} ||P(x) - P_\epsilon(x)||_2{}^2 = \int_{-N}^{N} |P(x) - P_\epsilon(x)|^2\, dx \leq \\ \\ \leq M^2 \left\{ \int_{-N}^{-N+\delta} 1\, dx + \int_{-N+\delta}^{N-\delta} |1 - \phi_\epsilon(x)|^2\, dx + \int_{N-\delta}^{N} 1\, dx \right\}, \end{array} \tag{39.6}$$

que puede hacerse tan pequeña como se quiera con sólo tomar δ y ϵ suficientemente pequeños.

Por lo tanto, es posible encontrar en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ funciones tan próximas como se quiera a una dada función de soporte compacto y cuadrado sumable. Dado que éstas forman un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, resulta que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

40. El espacio de Schwartz

El espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ es el conjunto de las funciones con derivadas de todo orden continuas y de decrecimiento rápido (es decir, que se anulan en el infinito más rápido que cualquier potencia de x^{-1}),

$$\varphi(x) \in \mathcal{S} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})\,, \\ \\ \left|x^k \varphi^{(q)}(x)\right| \leq K_{k,q}[\varphi]\,, \quad \forall\, k, q\,. \end{cases} \tag{40.1}$$

Nótese que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, resulta de (40.1) que $x\,\varphi(x) \in \mathcal{S}$ y $\varphi'(x) \in \mathcal{S}$. Entonces, $\forall k, q$, $x^k \varphi^{(q)}(x) \in \mathcal{S}$.

Evidentemente, $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$ y, en consecuencia, $\mathcal{S}$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

Además, $\mathcal{S} \subset \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, de modo que toda función en $\mathcal{S}$ tiene una transformada de Fourier en el sentido usual,

$$\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\, \varphi(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{40.2}$$

que es continua y tiende a 0 en el infinito.

Por otra parte, las funciones $x^k \varphi(x) \in \mathcal{S}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}\, (-i\,x)^k \varphi(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{40.3}$$

convergen absoluta y uniformemente en toda la recta $\sigma \in \mathbb{R}$, correspondiendo en consecuencia a las derivadas k-ésimas de $\psi(\sigma)$, $\psi^{(k)}(\sigma)$. En efecto, tenemos por ejemplo que

$$\left|x^{k+2} \varphi(x)\right| \leq K_{k+2,0} \Rightarrow \left|x^k \varphi(x)\right| \leq \frac{K_{k+2,0}}{x^2}\,. \tag{40.4}$$

Pero entonces $\psi^{(k)}(\sigma)$ es la transformada de Fourier de una función en $\mathcal{S}$, de donde resulta que es continua y tiende a 0 en el infinito.

En consecuencia, $\psi(\sigma)$ tiene derivadas de todo orden continuas, $\psi(\sigma) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Como las funciones $(-i\,x)^k \varphi(x) \in \mathcal{S}$, podemos integrar por partes para escribir

$$\begin{aligned} (i\,\sigma)^q\, \psi^{(k)}(\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{-d}{dx}\right)^q e^{-i\sigma x}\right] (-i\,x)^k \varphi(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^q (-i\,x)^k \varphi(x)\right] \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,. \end{aligned} \tag{40.5}$$

Y como $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^q (-i\,x)^k \varphi(x)\right] \in \mathcal{S} \subset \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, resulta que su transformada de Fourier está acotada,

$$\left|\sigma^q\, \psi^{(k)}(\sigma)\right| \leq K_{q,k}[\psi]\,, \tag{40.6}$$

lo que es válido $\forall\, q, k \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, las derivadas de todo orden de $\psi(\sigma)$ son de decrecimiento rápido.

En conclusión, la transformación de Fourier es una aplicación de $\mathcal{S}$ en ese mismo espacio, $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.

Como las funciones en $\mathcal{S}$ son diferenciables y de decrecimiento rápido, satisfacen la condición de Dini y para ellas existe el límite doble en la expresión que define la transformada inversa (38.6),

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\, \psi(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{40.7}$$

La ecuación anterior sólo difiere de la definición de la transformación directa en el signo del argumento de la exponencial. En consecuencia, similares conclusiones se obtienen respecto de la transformación inversa, que también está definida sobre todo $\mathcal{S}$.

Finalmente, sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{S} \subset \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Su producto escalar es

$$\begin{aligned} (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)^* \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}\, \psi_2(\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sqrt{2\pi}} \right\}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \varphi_1(x)\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right\}^* \psi_2(\sigma)\, d\sigma = (\psi_1(x), \psi_2(x))\,, \end{aligned} \tag{40.8}$$

donde el cambio en el orden de integración está justificado por el teorema de Fubini, puesto que la integral doble converge absolutamente ya que ambas funciones están en $\mathcal{S} \subset \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$.

En consecuencia, la transformación de Fourier sobre $\mathcal{S}$ preserva los productos escalares. En particular, tomando ambas funciones iguales en la ecuación anterior, se tiene que $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$

$$||\varphi(x)||_2 = ||\psi(x)||_2\,, \tag{40.9}$$

es decir, la transformación de Fourier sobre $\mathcal{S}$ preserva la norma $||.||_2$.

Puesto que $\mathcal{F}$ es un operador acotado sobre $\mathcal{S}$, resulta continuo. En efecto, si $\varphi_N \to \varphi$ en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, con $\varphi_N, \varphi \in \mathcal{S}$, entonces sus transformadas de Fourier satisfacen

$$||\psi_N - \psi||_2 = ||\varphi_N - \varphi||_2 \to 0, \text{ para } N \to \infty\,. \tag{40.10}$$

Supongamos que $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{S}$ tienen la misma transformada de Fourier, $\mathcal{F}[\varphi_1](\sigma) = \mathcal{F}[\varphi_2](\sigma)$. Como la transformación es lineal, en virtud de (40.9) tenemos

$$\mathcal{F}[\varphi_1 - \varphi_2](\sigma) \equiv 0 \;\Rightarrow\; ||\varphi_1 - \varphi_2||_2 = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)\,. \tag{40.11}$$

En consecuencia, $\mathcal{F}$ es una aplicación biunívoca de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$, cuya inversa es la transformación inversa (40.7).

Aunque $\mathcal{F}$ no es completamente continuo[20], tiene un conjunto completo de autofunciones en $\mathcal{S}$. Esto es así porque tiene los mismos autovectores que el operador de Sturm - Liouville no singular definido sobre $\mathcal{S}$ (denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$) como

$$L\varphi(x) := \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right\} \varphi(x)\,. \tag{40.13}$$

Los autovectores de L son las funciones de Hermite,

$$\begin{array}{c} \varphi_n(x) = H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,, \\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}\,, \end{array} \tag{40.14}$$

que forman un sistema ortogonal y completo, y satisfacen la ecuación

$$L\varphi_n(x) = -\varphi_n''(x) + x^2\,\varphi_n(x) = (2n+1)\varphi_n(x)\,, \tag{40.15}$$

donde los autovalores $(2n+1)$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$, son no degenerados.

En efecto, aplicando $\mathcal{F}$ a ambos miembros de la ecuación anterior, y teniendo en cuenta que integrando por partes resulta que $\mathcal{F}[\varphi^{(2)}(x)](\sigma) = -\sigma^2\psi(\sigma)$ y $\mathcal{F}[x^2\varphi(x)](\sigma) = -\psi^{(2)}(\sigma)$, tenemos

$$\sigma^2\,\psi_n(\sigma) - \psi_n''(\sigma) = (2n+1)\psi_n(\sigma)\,. \tag{40.16}$$

[20] En efecto, supongamos que $\{\varphi_k\,, k \in \mathbb{N}\}$ es una secuencia de vectores ortonormales contenida en $\mathcal{S}$. Entonces, de 40.9 resulta que

$$||\psi_n - \psi_m||_2{}^2 = ||\varphi_n - \varphi_m||_2{}^2 = 2\,, \qquad \text{para } n \neq m\,, \tag{40.12}$$

de modo que el conjunto de sus transformadas de Fourier, $\{\psi_k\,, k \in \mathbb{N}\}$, no contiene ninguna secuencia fundamental.

Esto significa que $\mathcal{F}$ deja invariantes los subespacios característicos del operador L. Y como éstos son unidimensionales, resulta que $\varphi_n(x)$ es un autovector de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}[\varphi_n(x)](\sigma) = \mu_n\, \varphi_n(\sigma)$.

Por otra parte, como $\mathcal{F}^2[\varphi(x)] = \varphi(-x)$, se tiene que $\mathcal{F}^4 = I$. En consecuencia, los autovalores de $\mathcal{F}$ son raíces cuartas de la unidad, $\mu_n^4 = 1$.

41. Teorema de Plancherel

Consideremos primero una función $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ de soporte compacto $[a,b]$. Como $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, tiene una transformada de Fourier en el sentido usual, que es una función continua y que tiende a 0 cuando $|\sigma| \to \infty$.

La función $\varphi(x)$ puede ser aproximada (en media) por una secuencia de funciones $\varphi_n(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, con soporte también contenido en el intervalo $[a,b]$:

(41.1) $$\varphi_n \to \varphi \text{ en } \mathbf{L_2}(a,b)\,, \text{ con } \varphi_n(x) = 0 \text{ para } x \notin (a,b)\,.$$

En esas condiciones, $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(a,b)$, puesto que

(41.2) $$||\varphi_n - \varphi||_1 \leq \sqrt{b-a}\; ||\varphi_n - \varphi||_2 \to 0 \text{ para } n \to \infty\,.$$

Por lo tanto, (como esas funciones son nulas fuera del intervalo $[a,b]$) se tiene que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ y, en consecuencia, sus transformadas de Fourier convergen uniformemente en toda la recta a la transformada del límite:

(41.3) $$\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma) = \mathcal{F}[\varphi](\sigma), \text{ uniformemente en } \mathbb{R}\,.$$

Esto garantiza también la convergencia en media de $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ en todo compacto sobre la recta σ.

Por otra parte, como $\varphi_n(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$, entonces $\psi_n(\sigma) \in \mathcal{S}$ y se cumple que $\forall\, n, m$ es

(41.4) $$||\psi_n||_2 = ||\varphi_n||_2, \text{ y } ||\psi_n - \psi_m||_2 = ||\varphi_n - \varphi_m||_2\,.$$

En consecuencia, las transformadas $\{\psi_n\}$ también forman una secuencia fundamental en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Como este espacio es completo, existe una función $\overline{\psi}(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ que es el límite de esa secuencia, $\overline{\psi} = \text{lím}_{n\to\infty} \psi_n$, y que (por la continuidad de la norma) satisface

(41.5) $$||\overline{\psi}||_2 = \lim_{n\to\infty} ||\psi_n||_2 = \lim_{n\to\infty} ||\varphi_n||_2 = ||\varphi||_2\,.$$

Ahora bien, como la convergencia en media en toda la recta implica convergencia en media en todo compacto, y como el límite en media es único, la función $\overline{\psi}(\sigma)$ debe coincidir en todo compacto (salvo medida nula) con la transformada de Fourier de $\varphi(x)$ como función de $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, $\psi(\sigma)$, que es una función continua que tiende a 0 en el infinito. Por otra parte, como $\overline{\psi}(\sigma)$ es de cuadrado sumable, también debe tender a 0 en el infinito, por lo que $\overline{\psi}(\sigma)$ y $\psi(\sigma)$ coinciden en toda la recta.

En resumen, si $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es de soporte compacto, su transformada de Fourier como función de $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ es una función de cuadrado sumable en toda la recta, $\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, cuya norma es $||\psi||_2 = ||\varphi||_2$.

Consideremos ahora el caso de una función arbitraria $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Ella puede ser representada como el límite (en media) de una secuencia convergente de funciones de soporte compacto $\varphi_N(x)$, como las definidas en (39.3).

Por el resultado anterior, sus transformadas de Fourier $\mathcal{F}[\varphi_N] = \psi_N \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, y sus normas son tales que $||\psi_N||_2 = ||\varphi_N||_2$. Por otra parte, ellas forman una secuencia fundamental en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, dado que

$$||\psi_{N+M} - \psi_N||_2 = ||\varphi_{N+M} - \varphi_N||_2 \to 0, \text{ para } N \to \infty, \ \forall\, M\,, \tag{41.6}$$

como consecuencia de la linealidad de $\mathcal{F}$ y de que la diferencia $(\varphi_{N+M} - \varphi_N)$ es de soporte compacto.

En esas condiciones, existe una función $\psi(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ que es el límite de esa secuencia,

$$\psi(\sigma) := \lim_{N\to\infty} \psi_N(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-i\sigma x}\varphi(x)\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,, \tag{41.7}$$

a la que se **define** como la transformada de Fourier de $\varphi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Por la continuidad de la norma, también se cumple que

$$||\psi||_2 = \lim_{N\to\infty} ||\psi_N||_2 = \lim_{N\to\infty} ||\varphi_N||_2 = ||\varphi||_2\,. \tag{41.8}$$

Si además la función $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, ella tiene una transformada de Fourier en el sentido usual, $\tilde{\psi}(\sigma)$, que es continua y tiende a 0 en el infinito. Por construcción (ver ecuación (39.3)), $\varphi_N(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})\ \forall\, N$, su norma $||\varphi_N||_1 \to ||\varphi||_1$, y se tiene que

$$||\varphi_N - \varphi||_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_N(x) - \varphi(x)|\, dx = ||\varphi||_1 - ||\varphi_N||_1 \to 0\,. \tag{41.9}$$

Entonces, $\varphi_N \to \varphi$ en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ y, por lo tanto, sus transformadas convergen uniformemente en toda la recta a la transformada del límite, $\psi_N(\sigma) \to \tilde{\psi}(\sigma)$. Pero ese límite uniforme coincide con el límite en media, $\psi(\sigma)$, en todo compacto sobre

$\mathbb{R}$, resultando éste una función continua. Y como tanto $\psi(\sigma)$ como $\tilde{\psi}(\sigma)$ tienden a cero para $|\sigma| \to \infty$, ambas coinciden como elementos de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

En resumen, si $\varphi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, existe en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ el límite

$$\mathcal{F}[\varphi(x)](\sigma) := \psi(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} e^{-i\sigma x} \varphi(x) \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{41.10}$$

que, por definición, es la transformada de Fourier de $\varphi(x)$. Así definido, $\mathcal{F}$: $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \to \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es un operador acotado que preserva la norma, $||\psi||_2 = ||\varphi||_2$.

Si además $\varphi(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, entonces existe el límite doble en la integral del segundo miembro de (41.10), que naturalmente coincide con la definición de la trasformada de Fourier en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$.

Un razonamiento similar al que conduce a la ecuación (40.11) muestra que esta aplicación es unívoca. En efecto, supongamos que $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ tienen la misma transformada de Fourier, entonces

$$\mathcal{F}[\varphi_1 - \varphi_2](\sigma) = 0 \,, \; a.e. \;\Rightarrow\; ||\varphi_1 - \varphi_2||_2 = 0 \;\Rightarrow\; \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \,, \; a.e. \tag{41.11}$$

Consideremos un par de funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Entonces, $\forall\, \alpha \in C$ se tiene

$$\begin{gathered} ||\varphi_1 + \alpha\, \varphi_2||_2{}^2 = ||\psi_1 + \alpha\, \psi_2||_2{}^2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2) = (\mathcal{F}\, \varphi_1, \mathcal{F}\, \varphi_2) = \left(\varphi_1, \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F}\, \varphi_2\right) \,. \end{gathered} \tag{41.12}$$

En consecuencia, $\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} = I$, donde el operador adjunto $\mathcal{F}^\dagger$ está definido en todo $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ (por ser $\mathcal{F}$ acotado).

Por otra parte, el rango de $\mathcal{F}$ es todo el espacio de Hilbert, Rank$(\mathcal{F}) = \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En efecto, dada una función arbitraria $\psi(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, ella puede ser representada como $\psi(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(\sigma)$, con $\psi_n \in \mathcal{S}$, $\forall\, n$. Teniendo en cuenta que (por (40.9)) la secuencia $\varphi_n = \mathcal{F}^{-1}[\psi_n] \in \mathcal{S}$ es fundamental, vemos que existe $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

Ahora bien, esta función $\varphi(x)$ tiene una transformada de Fourier que satisface

$$||\mathcal{F}[\varphi] - \psi_n||_2 = ||\varphi - \varphi_n||_2 \;\to\; 0 \tag{41.13}$$

cuando $n \to \infty$, de modo que

$$\mathcal{F}[\varphi] = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi \,. \tag{41.14}$$

Por lo tanto, $\psi \in$ Rank$(\mathcal{F})$.

En esas condiciones, para todo par de funciones $\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tenemos

$$(\psi_1, \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger\, \psi_2\big) = \big(\mathcal{F}\,\varphi_1, \mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger\mathcal{F}\,\varphi_2\big) = (\mathcal{F}\,\varphi_1, \mathcal{F}\,\varphi_2) = (\psi_1, \psi_2) \tag{41.15}$$

y, en consecuencia, $\mathcal{F}\mathcal{F}^\dagger = I$.

En conclusión, existe la inversa de $\mathcal{F}$, operador que está definido sobre todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ y coincide con el operador adjunto, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^\dagger$.

42. Sistemas completos en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$

Sea $\varphi_0(x) \in \mathbf{L_2}(a,b)$, con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, tal que $\varphi_0(x) \neq 0$ a.e. y

$$|\varphi_0(x)| \leq K\, e^{-A|x|},\ \forall\, x\,, \tag{42.1}$$

con $A > 0$. Entonces, el sistema de funciones

$$\varphi_n(x) = x^n \varphi_0(x),\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{42.2}$$

es completo en $\mathbf{L_2}(a,b)$.

Para ver que esto es así tengamos en cuenta que, para $\tau \in \mathbb{R}$, de (42.1) resulta

$$|x^n e^{\tau x} \varphi_0(x)| \leq K\, |x|^n\, e^{-(A-|\tau|)|x|}\,, \tag{42.3}$$

de modo que la función

$$x^n e^{\tau x} \varphi_0(x) \in \mathbf{L_2}(a,b),\ \forall\, \tau : |\tau| < A\,. \tag{42.4}$$

Entonces, $\forall\, f \in \mathbf{L_2}(a,b)$, la función

$$h(x) := f(x)^* x^n e^{\tau x} \varphi_0(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})\,,\ \forall\, \tau : |\tau| < A\,, \tag{42.5}$$

donde $f(x)$ y $\varphi_0(x)$ son entendidas como nulas fuera del intervalo $[a,b]$, en caso de que éste no fuese acotado.

La transformada de Fourier de $h(x)$ es una función continua de la variable compleja $s = \sigma + i\tau$ en la franja $|\Im(s)| = |\tau| \leq \tau_0 < A$,

$$g(s) = g(\sigma + i\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\sigma+i\tau)x} f(x)^* \varphi_0(x)\, dx\,, \tag{42.6}$$

lo mismo que sus derivadas de todo orden, las que están dadas por

$$g^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} (-ix)^n f(x)^* \varphi_0(x)\, dx \tag{42.7}$$

dado que, en virtud de (42.3), esas integrales convergen absoluta y uniformemente en dicha región del plano complejo s:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |e^{\tau x}\, x^n\, \varphi_0(x)|\ dx \leq K \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |x^n|\, e^{-(A-\tau_0)|x|}\, dx < \infty\,. \tag{42.8}$$

En consecuencia, $g(s)$ es una función analítica de la variable s en la región $|\Im(s)| \leq \tau_0 < A$, con $\tau_0 > 0$.

Supongamos ahora que $f(x) \perp \varphi_n(x)$, $\forall\, n \geq 0$. Entonces, de (42.6) y (42.7) resulta que $g^{(n)}(0) = 0$, $\forall\, n \geq 0 \Rightarrow$ que la función analítica $g(s) \equiv 0$.

En particular,

$$g(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} f(x)^* \varphi_0(x)\, dx \equiv 0 \Rightarrow f(x)^* \varphi_0(x) = 0, \text{ a.e.} \tag{42.9}$$

Y como, por hipótesis, $\varphi_0(x) \neq 0$, a.e. $\Rightarrow f(x) = 0$, a.e.

Esto muestra que el sistema $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es completo en $\mathbf{L_2}(a, b)$.

Ejemplos:

• Las funciones $\varphi_n(x) = x^n\, e^{-x/2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, forman un sistema completo en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$. Por ortogonalización se obtienen las funciones de Laguerre, $L_n(x)\, e^{-x/2}/n!$, con

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x}\right) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{pmatrix} n \\ n-m \end{pmatrix} \frac{x^m}{m!}\,. \tag{42.10}$$

• Similarmente, las funciones $\varphi_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, forman un sistema completo en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Por ortogonalización se obtienen las funciones de Hermite de la ecuación (40.14). ◇

Bibliografía:

- *Mathematical Analysis*, G. Ye. Shilov.
- *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin
- *Methods of Modern Mathematical Physics*, M. Reed y B. Simon.

NOTAS SOBRE OPERADORES NO ACOTADOS

43. Extensiones de operadores lineales

• Sea A un operador lineal acotado definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $u \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. El vector u siempre puede ser representado como el límite de una secuencia fundamental $\{u_n\}$ contenida en $\mathcal{D}(A)$. Y como A es acotado[21], tenemos

$$\|Au_n - Au_m\| = \|A\,(u_n - u_m)\| \leq \|A\|\ \|u_n - u_m\| \to 0 \tag{43.2}$$

para $n, m \to \infty$. Es decir, $\{Au_n\}$ es también una secuencia fundamental.

Entonces, como $\mathcal{H}$ es completo, existe un vector $v \in \mathcal{H}$ tal que

$$v = \lim_{n\to\infty} Au_n. \tag{43.3}$$

Este límite es independiente de la secuencia convergente a u considerada. En efecto, si $\{u_n\}$ y $\{u'_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ son coterminales, entonces

$$\|Au_n - Au'_n\| = \|A\,(u_n - u'_n)\| \leq \|A\|\ \|u_n - u'_n\| \to 0 \tag{43.4}$$

para $n \to \infty$.

En esas condiciones, se puede **extender** de manera única la definición del operador acotado A a todo $\overline{\mathcal{D}(A)}$, introduciendo un operador $\overline{A}$ de modo que $\forall\, u \in \overline{\mathcal{D}(A)}$

$$\overline{A}u := v = \lim_{n\to\infty} Au_n, \tag{43.5}$$

donde $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ y $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Así definido, este operador es lineal y acotado[22].

[21] La norma de A es, por definición,

$$\|A\| = \mathrm{Sup}_{\{u\in\mathcal{D}(A),\ \|u\|=1\}} \|Au\|\,. \tag{43.1}$$

[22] En efecto, si dos secuencias en $\mathcal{D}(A)$ tienen por límite a $u = \lim u_n$ y $u' = \lim u'_n$ respectivamente, entonces

$$\overline{A}\,(\alpha u + \beta u') = \lim A\,(\alpha u_n + \beta u'_n) = \alpha \lim Au_n + \beta \lim Au'_n = \alpha\overline{A}u + \beta\overline{A}u'. \tag{43.6}$$

En cuanto a su norma, tenemos por un lado que

$$\|\overline{A}\| = \mathrm{Sup}_{\{u\in\overline{\mathcal{D}(A)},\ \|u\|=1\}} \|\overline{A}u\| \geq \mathrm{Sup}_{\{u\in\mathcal{D}(A),\ \|u\|=1\}} \|\overline{A}u\| = \|A\|\,. \tag{43.7}$$

Por otra parte, por la continuidad de la norma, para cualquier secuencia en $\mathcal{D}(A)$ convergente a un vector unitario u tenemos

$$\|Au_n\| \leq \|A\|\ \|u_n\| \Rightarrow \|\overline{A}u\| \leq \|A\|\ \|u\| = \|A\|\,, \tag{43.8}$$

• En particular, un operador lineal acotado A, definido sobre un dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, tiene una única extensión lineal y acotada sobre todo $\mathcal{H}$, denominada su **clausura** y denotada por $\overline{A}$, cuya norma es igual a $\|A\|$.

• Sea A un operador lineal definido en *todo* el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se puede demostrar que A es acotado $\Leftrightarrow \forall \, \{u_n\} \to u$ tal que la secuencia $\{Au_n\} \to v$, es $v = Au$.

• Pero si T es un operador **no acotado** definido en un dominio $\mathcal{D}(T)$, y $\{u_n\}$ es una secuencia fundamental en $\mathcal{D}(T)$, la secuencia $\{Tu_n\}$ no será, en general, convergente en $\mathcal{H}$. Incluso si, para dos secuencias coterminales $\{u_n\}$ y $\{u_n'\} \subset \mathcal{D}(T)$, sucede que $\{Tu_n\}$ y $\{Tu_n'\}$ son fundamentales, en general, ellas no serán coterminales.

• Supongamos que para $u \notin \mathcal{D}(T)$ ocurre que **para toda** secuencia $\{u_n\}$ convergente a u y contenida en el dominio de T, la secuencia $\{Tu_n\}$ tiene un límite fijo:

$$\lim_{n\to\infty} Tu_n = v \in \mathcal{H}, \quad \forall \, \{u_n\} \in \mathcal{D}(T) \mid \lim_{n\to\infty} u_n = u. \tag{43.9}$$

En esas condiciones, se puede **extender** la definición de T incorporando al punto u de modo que

$$Tu := \lim_{n\to\infty} Tu_n = v. \tag{43.10}$$

• Si $\forall$ secuencia fundamental $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ tal que $\{Tu_n\}$ es también de Cauchy se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \in \mathcal{D}(T), \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Tu_n = Tu, \tag{43.11}$$

entonces T se dice **cerrado**.

• Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el producto directo $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert respecto del producto escalar definido a continuación: si los pares ordenados

$$\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle \, , \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}, \tag{43.12}$$

con $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$, el producto escalar está dado por

$$\Big(\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle \, , \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle \Big)_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}} = (\varphi_1, \varphi_2)_{\mathcal{H}} + (\psi_1, \psi_2)_{\mathcal{H}} \, . \tag{43.13}$$

---

lo que implica que $\|\overline{A}\| \leq \|A\|$. En definitiva, $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

• La **gráfica** de un operador lineal T es el conjunto de pares ordenados

$$\Gamma(T) := \{\langle\varphi, T\varphi\rangle\,,\ \varphi \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}. \tag{43.14}$$

Si T es cerrado, entonces $\Gamma(T)$ es un conjunto cerrado[23].

• Sea T_1 un operador lineal definido sobre un dominio $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{H}$. Si $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$ se dice que T_1 es una **extensión** de T en $\mathcal{H}$, lo que se denota por $T \subset T_1$.

Dicho de otro modo,

$$T \subset T_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T_1), \\ \\ T_1\varphi = T\varphi,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \end{cases} \tag{43.16}$$

Ejemplo 43.1. - Sea $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, con $T\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$, y sea $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$, con $T_1\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. En esas condiciones, $T \subset T_1$. $\diamond$

• Un operador T se dice **clausurable** si tiene una extensión cerrada. Si T_1 es una extensión cerrada de T, entonces $\Gamma(T) \subset \Gamma(T_1)$, que es un conjunto cerrado de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. En esas condiciones, la clausura de la gráfica de T también está contenida en la de T_1, $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(T_1)$, y, por lo tanto, corresponde a la gráfica de un operador. Nótese que si $\langle \mathbf{0}, \psi\rangle \in \overline{\Gamma(T)}$, entonces $\psi = \mathbf{0}$, puesto que $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle$ es el único par de esa forma contenido en $\Gamma(T_1)$. Esto significa que en este caso, si $\langle\varphi, \psi\rangle \in \overline{\Gamma(T)}$, entonces ψ está unívocamente determinado.

• Si T es clausurable, se define su **clausura** $\overline{T}$ como el operador cuya gráfica es $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$. Su dominio es

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \left\{\varphi \mid \langle\varphi, \psi\rangle \in \overline{\Gamma(T)},\ \psi \in \mathcal{H}\right\}, \tag{43.17}$$

y su acción corresponde a $\overline{T}\varphi = \psi$, donde ψ es el único vector de $\mathcal{H}$ tal que $\langle\varphi, \psi\rangle \in \overline{\Gamma(T)}$.

Por su definición, $\overline{T}$ es cerrado, constituyendo una extensión cerrada de T. Por otra parte, $\overline{T} \subset T_1$, donde T_1 es cualquier extensión cerrada de T. Por lo tanto, todo operador clausurable tiene una extensión cerrada mínima, que es su clausura $\overline{T}$.

[23]La clausura en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ de la gráfica de T, $\overline{\Gamma(T)}$, no corresponde en general a la gráfica de un operador. Una condición necesaria para que $\overline{\Gamma(T)}$ sea la gráfica de un operador es que si

$$\langle\varphi, \psi_1\rangle\,, \langle\varphi, \psi_2\rangle \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow \psi_1 = \psi_2, \tag{43.15}$$

lo que en general no se cumple.

• Sea T un operador lineal cerrado con dominio $\mathcal{D}(T)$ denso en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un complejo λ pertenece al **conjunto resolvente** de T, $\rho(T)$, si $(T - \lambda I)$ es una biyección de $\mathcal{D}(T)$ sobre (onto) $\mathcal{H}$ con una inversa acotada.

Si $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow$ existe el operador acotado $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$, llamado **resolvente** de T.

• $\rho(T)$ es un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, sobre el cual $R_\lambda(T)$ es una función analítica de λ, cuyos valores son operadores acotados que conmutan entre sí y satisfacen

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T), \ \forall \, \lambda, \mu \in \rho(T) \tag{43.18}$$

(propiedades idénticas a las de la resolvente de operadores acotados).

• Se define el **espectro** de T como

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \notin \rho(T)\} \, . \tag{43.19}$$

• Si λ es un autovalor de T, entonces

$$\exists \, u \in \mathcal{D}(T) \mid Tu = \lambda u \Rightarrow (T - \lambda I) \, u = \mathbf{0} \, , \tag{43.20}$$

con $u \neq \mathbf{0}$. Por lo tanto, $(T - \lambda I)$ no es una biyección $\Rightarrow \lambda \notin \rho(T)$.

El conjunto de los autovalores de T constituye el **espectro puntual** de T, $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

• Si λ no es un autovalor de T, pero $\mathrm{Rank}(T - \lambda I)$ no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \lambda \notin \rho(T)$. En ese caso se dice que λ pertenece al **espectro residual** de T, $\sigma_r(T) \subset \sigma(T)$.

• Finalmente, un complejo λ pertenece al **espectro continuo** de T, $\sigma_c(T) \subset \sigma(T)$, si $(T - \lambda I)$ tiene una inversa no acotada con dominio $\mathrm{Rank}(T - \lambda I)$ denso en $\mathcal{H}$.

44. El operador adjunto

• Sea T un operador lineal definido sobre un dominio $\mathcal{D}(T)$ **denso** en $\mathcal{H}$. Sea $\mathcal{D}(T^\dagger)$ el conjunto de los vectores $\psi \in \mathcal{H}$ para los cuales $(\psi, T\varphi)$ es una **funcional lineal y continua**[24] de $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ (respecto de la distancia en $\mathcal{H}$). Entonces, para

[24] O, equivalentemente, una funcional **lineal y acotada**, es decir, tal que

$$|(\psi, T\varphi)| \leq K \, \|\varphi\| \, , \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(T) \, , \tag{44.1}$$

para cierta constante fija $K \geq 0$.

cada $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ existe un vector $\chi \in \mathcal{H}$ tal que dicha funcional corresponde al producto escalar

$$(\psi, T\varphi) = (\chi, \varphi)\,, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \tag{44.2}$$

Puesto que $\mathcal{D}(T)$ es denso en $\mathcal{H}$, χ está unívocamente determinado por ψ. En efecto, si $(\chi_1 - \chi_2, \varphi) = 0$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$, $\Rightarrow \chi_1 - \chi_2 = \mathbf{0}$.

Entonces, la acción del operador adjunto $T^\dagger$ sobre $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ se define por

$$T^\dagger\psi := \chi. \tag{44.3}$$

• Dado que una funcional lineal es continua si y sólo si ella es acotada, para $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ es necesario que

$$|(\psi, T\varphi)| \leq K\,\|\varphi\|, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T). \tag{44.4}$$

Si T es acotado, en virtud de la desigualdad de Cauchy - Schwarz tenemos

$$|(\psi, T\varphi)| \leq \|\psi\|\,\|T\varphi\| \leq \|\psi\|\,\|T\|\,\|\varphi\|, \quad \forall\, \psi \in \mathcal{H}, \tag{44.5}$$

de modo que el adjunto de un operador acotado está definido en todo el espacio de Hilbert, $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{H}$.

• Por el contrario, el adjunto de un operador no acotado puede no estar densamente definido, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 44.1. - Sea $f(x) \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, una función localmente sumable, y sea $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ (denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$) el dominio de un operador T definido por

$$T\varphi(x) := \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^*\varphi(y)\,dy, \tag{44.6}$$

donde $\varphi_0(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es un vector fijo, y la integral en el segundo miembro converge por ser $\varphi(x)$ acotada y de soporte compacto. Entonces, si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, existe $\chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tal que

$$(\psi, T\varphi) = (\psi, \varphi_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)^*\varphi(y)\,dy = (\chi, \varphi)\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{44.7}$$

Pero eso requiere que $(\psi, \varphi_0)^*\, f(x) = \chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, lo que sólo es posible si $(\psi, \varphi_0) = 0$ y $\chi(x) = \mathbf{0}(x)$.

Por lo tanto, $\mathcal{D}(T^\dagger) = \{\psi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \mid \psi \perp \varphi_0\}$ (que no es un conjunto denso), y $T^\dagger\psi = \mathbf{0}$, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. ◇

• Si $S \subset T \Rightarrow T^\dagger \subset S^\dagger$. En efecto, si $S \subset T \Rightarrow \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$, y $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S)$, $S\varphi = T\varphi$. Sea $\psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$. Entonces $\exists\, \chi \in \mathcal{H}$ tal que

$$(44.8)\qquad \begin{gathered}(\psi, T\varphi) = (\chi, \varphi),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\psi, S\varphi) = (\chi, \varphi),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(S) \Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(S^\dagger).\end{gathered}$$

Por lo tanto, $\mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathcal{D}(S^\dagger)$, y $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ es $T^\dagger\psi = S^\dagger\psi$. Es decir, $T^\dagger \subset S^\dagger$.

• Si $\mathcal{D}(T^\dagger)$ es denso en $\mathcal{H}$, se puede definir su adjunto, $(T^\dagger)^\dagger = T^{\dagger\dagger}$.

• **Teorema I:** Sea T un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces

a) $T^\dagger$ es cerrado;
b) T es clausurable $\Leftrightarrow \mathcal{D}(T^\dagger)$ es denso en $\mathcal{H}$, en cuyo caso $\overline{T} = T^{\dagger\dagger}$;
c) si T es clausurable $\Rightarrow (\overline{T})^\dagger = T^\dagger$.

Para probar el punto a) introduzcamos un operador V definido sobre el espacio producto directo $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ como

$$(44.9)\qquad V\,\langle \phi, \psi \rangle := \langle -\psi, \phi \rangle\ , \forall\, \phi, \psi \in \mathcal{H}\,.$$

Así definido, V es un **operador unitario**[25] que satisface $V^2 = -\mathbf{I}$. En efecto,

$$(44.12)\qquad \|V\,\langle \phi, \psi \rangle\,\|^2 = \|\,\langle -\psi, \phi \rangle\,\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 = \|\,\langle \phi, \psi \rangle\,\|^2\,.$$

Entonces, el par $\langle \phi, \chi \rangle \in (V\,[\Gamma(T)])^\perp$ si y sólo si

$$(44.13)\qquad (\langle \phi, \chi \rangle\,, \langle -T\varphi, \varphi \rangle) = -\,(\phi, T\varphi) + (\chi, \varphi) = 0\,, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)\,.$$

Pero en ese caso

$$(44.14)\qquad \phi \in \mathcal{D}(T^\dagger) \quad \text{y} \quad T^\dagger\phi = \chi\,,$$

de manera que

$$(44.15)\qquad \langle \phi, \chi \rangle = \left\langle \phi, T^\dagger\phi \right\rangle \in \Gamma\left(T^\dagger\right)\,.$$

[25] Se dice que un operador U definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es unitario si

$$(44.10)\qquad (U\varphi, U\psi) = (\varphi, \psi)\ ,\ \forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

En esas condiciones, U es acotado, $U^\dagger = U^{-1}$ y la imagen por U del complemento ortogonal de cierto subespacio $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$, $U\left(\mathcal{G}^\perp\right)$, es el complemento ortogonal de la imagen de $\mathcal{G}$ por U, $(U(\mathcal{G}))^\perp$. En efecto, $\phi \in (U(\mathcal{G}))^\perp$ si y sólo si

$$(44.11)\qquad (\phi, U\psi) = 0\,, \forall\, \psi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \left(U^\dagger\phi, \psi\right) = 0\,, \forall\, \psi \in \mathcal{G} \Leftrightarrow U^\dagger\phi \in \mathcal{G}^\perp \Leftrightarrow \phi \in U\left(\mathcal{G}^\perp\right)\,,$$

de modo que $(U(\mathcal{G}))^\perp = U\left(\mathcal{G}^\perp\right)$.

En consecuencia, $\Gamma\left(T^{\dagger}\right) = \left(V\left[\Gamma(T)\right]\right)^{\perp}$, que siempre es un conjunto cerrado. Por lo tanto, $T^{\dagger}$ es cerrado.

Para probar el punto b) señalemos que, debido a la linealidad de T, $\Gamma(T)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$. Entonces, para la clausura de la gráfica tenemos

(44.16)
$$\overline{\Gamma(T)} = \left(\left[\Gamma(T)\right]^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V^2\left[\Gamma(T)\right]^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V\left[V\Gamma(T)\right]^{\perp}\right)^{\perp} = \left(V\Gamma\left(T^{\dagger}\right)\right)^{\perp}.$$

Por lo tanto, de acuerdo a la prueba de a), si $T^{\dagger}$ está densamente definido (condición necesaria para la existencia de su adjunto) entonces $\overline{\Gamma(T)}$ es la gráfica del operador $T^{\dagger\dagger}$.

Finalmente, si T es clausurable, por a) y b) sabemos que $T^{\dagger}$ es cerrado y densamente definido, mientras que su adjunto, $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$, también está densamente definido. Entonces,

$$T^{\dagger} = \overline{T^{\dagger}} = \left(T^{\dagger}\right)^{\dagger\dagger} = \left(T^{\dagger\dagger}\right)^{\dagger} = \left(\overline{T}\right)^{\dagger}, \tag{44.17}$$

lo que prueba c). □

Ejemplo 44.2. - Consideremos el conjunto de las funciones **absolutamente continuas**[26] en el intervalo $[0,1]$, $AC(0,1)$, tales que su derivada $\varphi'(x)$ sea de cuadrado integrable en ese intervalo. Sea T_1 definido de manera que

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}(T_1) := \left\{\varphi(x)\in AC(0,1)\mid \varphi'(x)\in \mathbf{L_2}(0,1)\right\}, \\ \\ T_1\,\varphi(x) := -i\,\varphi'(x), \end{array}\right. \tag{44.21}$$

[26] Si $\varphi(x)\in AC(a,b)$, entonces $\varphi(x)$ es una función continua en (a,b) cuya derivada (en el sentido de límite de cociente incremental) existe en casi todo punto de ese intervalo, y es una función **localmente sumable**. La función puede ser reconstruida a partir de su derivada mediante la regla de Barrow,

$$\varphi(x)\in AC(a,b) \Rightarrow \varphi'(x)\in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(a,b), \text{ y } \varphi(x) = \int_a^x \varphi'(y)\,dy + \varphi(a). \tag{44.18}$$

Para las funciones absolutamente continuas también vale la regla de integración por partes. En efecto, si $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in AC(a,b)$, entonces $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\in AC(a,b)$, la derivada del producto es

$$(\varphi_1(x)\,\varphi_2(x))' = \varphi_1'(x)\,\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\,\varphi_2'(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(a,b), \tag{44.19}$$

y

$$\int_a^x \varphi_1(y)\,\varphi_2'(y)\,dy = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x) - \varphi_1(a)\,\varphi_2(a) - \int_a^x \varphi_1'(y)\,\varphi_2(y)\,dy. \tag{44.20}$$

y T_2 de modo que

$$(44.22)\qquad \begin{cases} \mathcal{D}(T_2) := \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1),\ \varphi(0) = 0\}\,, \\ \\ T_2\,\varphi(x) := -i\,\varphi'(x), \end{cases}$$

Evidentemente, T_1 es una extensión de T_2, $T_2 \subset T_1$.

Dado que $\mathcal{D}(T_1) \supset \mathcal{D}(T_2) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, que es denso en $\mathbf{L_2}(0,1)$, ambos dominios de definición son densos.

Por otra parte, de la ec. (44.20) resulta evidente que los dominios de los operadores adjuntos $\mathcal{D}(T_{1,2}^\dagger) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, por lo que también ellos son densos. En consecuencia, por el teorema anterior, ambos operadores son clausurables.

Ahora determinaremos el operador adjunto de T_1. Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T_1^\dagger)$ entonces $\exists\, \chi(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)$ tal que

$$(44.23)\qquad (\psi, T_1\varphi) = \int_0^1 \psi(x)^*(-i)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \chi(x)^*\varphi(x)\,dx = (\chi,\varphi)\ ,$$

para toda $\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_1)$. Esto requiere que sea posible **integrar por partes** en la primera de esas integrales, por lo que debemos suponer que $\psi(x) \in AC(0,1)$.

Haciendo uso de la propiedad (44.20), podemos escribir que

$$(44.24)\qquad (-i)\psi(x)^*\varphi(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \big(-i\,\psi'(x)\big)^*\varphi(x)\,dx = \int_0^1 \chi(x)^*\varphi(x)\,dx\,.$$

Teniendo en cuenta que una funcional continua respecto de la convergencia en media no puede depender del valor que su argumento tome en un punto particular del intervalo $[0,1]$, y dado que los valores que las funciones $\varphi(x)$ toman en $x = 0, 1$ son arbitrarios, vemos que debemos imponer además la condición de contorno $\psi(0) = 0 = \psi(1)$.

En esas condiciones, dado que $\mathcal{D}(T_1)$ es denso en $\mathbf{L}_2(0,1)$, la igualdad (44.24) implica que $\chi(x) = -i\,\psi'(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)$.

En definitiva, el operador $T_1^\dagger$ está definido de modo que

$$(44.25)\qquad \begin{cases} \mathcal{D}(T_1^\dagger) := \{\psi(x) \in AC(0,1) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)\,, \psi(0) = 0 = \psi(1)\}\ , \\ \\ T_1^\dagger\,\psi(x) := -i\,\psi'(x)\,. \end{cases}$$

Nótese que, en este caso, T_1 es una extensión de $T_1^\dagger$, $T_1^\dagger \subset T_1$.

Siguiendo el mismo procedimiento resulta inmediato mostrar que $T_1^{\dagger\dagger} = \overline{T_1} = T_1$, que entonces es un operador cerrado.

Similarmente, se obtiene que

$$
(44.26) \qquad \begin{cases} \mathcal{D}(T_2^\dagger) := \{\psi(x) \in AC(0,1) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1),\ \psi(1) = 0\}\ , \\ \\ T_2^\dagger\, \psi(x) := -i\, \psi'(x)\,, \end{cases}
$$

y que $T_2^{\dagger\dagger} = \overline{T_2} = T_2$, que también es cerrado. Además, se ve que $T_1^\dagger \subset T_2^\dagger$. ◇

• En general, la elección de un dominio de definición para un operador diferencial tiene una influencia determinante sobre su espectro, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 44.3. - Consideremos la ecuación

$$
(44.27) \qquad -i\, \varphi'(x) = \lambda\varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in AC(0,1)\,.
$$

Esa igualdad implica que

$$
(44.28) \qquad \begin{array}{c} \varphi'(x) \in AC(0,1) \Rightarrow \varphi^{(2)}(x) \in AC(0,1) \Rightarrow \dots \\ \\ \dots \Rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(0,1)\,. \end{array}
$$

En esas condiciones, la ecuación de autovalores para los operadores $T_{1,2}$ del ejemplo 44.2 se reduce a una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución es

$$
(44.29) \qquad \varphi(x) = e^{i\lambda x}\varphi(0) \in AC(0,1) \subset \mathbf{L_2}(0,1).
$$

Pero mientras que todo número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de T_1, la **condición de contorno** para T_2, $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0$.

Entonces, $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$, mientras que T_2 no tiene autovectores y su espectro puntual es vacío, $\sigma_p(T_2) = \emptyset$. ◇

• Sea T un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma_p(T^\dagger)$.

En efecto, en ese caso Rank$(T - \lambda I)$ no es denso en $\mathcal{H}$, de modo que $\exists\, \psi \neq \mathbf{0} \mid (\psi, (T-\lambda I)\varphi) = 0, \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$[27]. Pero eso significa que $(\psi, T\varphi) = \lambda\,(\psi,\varphi)$ es una funcional lineal y continua de $\varphi \Rightarrow \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$.

En esas condiciones, podemos escribir que $\big((T^\dagger - \lambda^* I)\psi, \varphi\big) = 0,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$ denso en $\mathcal{H}$, de modo que $T^\dagger\psi = \lambda^*\psi$.

[27]Para ver que esto es así, llamemos $F = \overline{\text{Rank}(T-\lambda I)}$. Sabemos que todo vector $\psi \in \mathcal{H}$ puede escribirse como $\psi = u + v$, con $u \in F$ y $v \in F^\perp$. En esas condiciones, si $\{\psi \perp F \Rightarrow \psi = v = \mathbf{0}\}$, entonces $F^\perp = \{\mathbf{0}\}$ y F es denso en $\mathcal{H}$. En consecuencia, si F no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \exists\, \psi \neq \mathbf{0} \mid \psi \perp F$.

• Por otra parte, si $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \lambda^* \in \sigma(T^\dagger)$ (en el espectro puntual o en el residual).

En efecto, si $T\varphi = \lambda\varphi$, con $\varphi \neq \mathbf{0}$, entonces, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ tenemos que $(\psi, (T-\lambda I)\varphi) = \big((T^\dagger - \lambda^* I)\psi, \varphi\big) = 0 \Rightarrow \text{Rank}(T^\dagger - \lambda^* I)$ no es denso en $\mathcal{H} \Rightarrow \lambda^* \notin \rho(T^\dagger) \cup \sigma_c(T^\dagger)$.

En esas condiciones, $\lambda^* \in \sigma_r(T^\dagger)$, a menos que exista en $\mathcal{D}(T)$ un vector $\psi \neq \mathbf{0} \mid (T^\dagger - \lambda^* I)\psi = \mathbf{0}$, en cuyo caso $\lambda^* \in \sigma_p(T^\dagger)$.

Ejemplo 44.4. - Consideremos nuevamente el operador T_1 del ejemplo 44.2. Hemos visto en el ejemplo 44.3 que el espectro puntual de T_1 es todo el plano complejo, $\sigma_p(T_1) = \mathbb{C}$. Entonces el espectro de $T_1^\dagger$ es también todo el plano complejo, $\sigma(T_1^\dagger) = \mathbb{C}$.

Por otra parte, resulta inmediato mostrar que las condiciones de contorno que pesan sobre las funciones en $\mathcal{D}(T_1^\dagger)$, ec. (44.25), hacen que este operador no tenga autovectores, $\sigma_p(T_1^\dagger) = \emptyset$. En consecuencia, el espectro residual de $T_1^\dagger$ es todo el plano complejo, $\sigma_r(T_1^\dagger) = \mathbb{C}$. $\diamond$

45. Operadores simétricos

• Un operador lineal T, densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se dice **simétrico** si[28] $T \subset T^\dagger$. Es decir, si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^\dagger), \\ \\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T),\ T^\dagger\varphi = T\varphi. \end{array} \right. \tag{45.2}$$

En particular, en este caso el operador adjunto $T^\dagger$ también está densamente definido.

• Toda extensión simétrica S de T está contenida en $T^\dagger$. En efecto, si $T \subset S \subset S^\dagger \Rightarrow S \subset S^\dagger \subset T^\dagger$. Por lo tanto, $T \subset S \subset S^\dagger \subset T^\dagger$.

• Un operador se dice **autoadjunto**[29] si $T^\dagger = T$, es decir, si T es simétrico y $\mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{D}(T)$.

---

[28] Equivalentemente, T es simétrico si $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(T)$ es

$$(\varphi_1, T\varphi_2) = (T\varphi_1, \varphi_2)\,. \tag{45.1}$$

[29] Los **observables** de la Mecánica Cuántica están representados por operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert.

• Un operador simétrico (densamente definido) es siempre clausurable. En efecto, $T \subset T^\dagger$, que es cerrado (ver Teorema I). Por lo tanto, T tiene una extensión cerrada.

• Por otra parte, $T \subset T^\dagger \Rightarrow \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^\dagger)$, que entonces es denso en $\mathcal{H}$. Por el **Teorema I**, T es clausurable y su clausura es $\overline{T} = T^{\dagger\dagger}$. En consecuencia,

$$T \subset \overline{T} = T^{\dagger\dagger} \subset T^\dagger . \tag{45.3}$$

• Si T es simétrico y cerrado,

$$T = \overline{T} = T^{\dagger\dagger} \subset T^\dagger . \tag{45.4}$$

• Si T es autoadjunto,

$$T = \overline{T} = T^{\dagger\dagger} = T^\dagger \tag{45.5}$$

y, en consecuencia, T es cerrado.

• Un operador T simétrico y cerrado es autoadjunto si y sólo si su adjunto $T^\dagger$ es simétrico.

En efecto, si T es autoadjunto $\Rightarrow T = T^{\dagger\dagger} = T^\dagger \Rightarrow T^\dagger$ es simétrico: $T^\dagger \subset T^{\dagger\dagger}$. Por otra parte, si $T^\dagger$ es simétrico, $T^\dagger \subset T^{\dagger\dagger} = T \subset T^\dagger \Rightarrow T$ es autoadjunto: $T = T^\dagger$.

• Si T es un operador autoadjunto, entonces

a) el espectro residual de T es vacío, $\sigma_r(T) = \emptyset$,
b) el espectro de T es un subconjunto de los reales, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,
c) autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

Para ver que esto es así, primero consideremos la aplicación

$$[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}] : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathrm{Rank}\,[T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}] \subset \mathcal{H}\,, \tag{45.6}$$

donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\| \, [T - (\lambda + i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,\varphi \, \|^2 = \| \, (T - \lambda\,\mathbf{I})\,\varphi \, \|^2 + \mu^2 \, \| \, \varphi \, \|^2 \geq \mu^2 \, \| \, \varphi \, \|^2 \tag{45.7}$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)$. En consecuencia, $(\lambda + i\,\mu) \notin \sigma_p(T)$ si $\mu \neq 0$.

Además, para $\mu \neq 0$, $[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es una biyección de $\mathcal{D}(T)$ en $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ con inversa acotada. En efecto, si φ_1 y φ_2 tienen la misma imagen, entonces

$$0 = \parallel [T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,(\varphi_1-\varphi_2) \parallel \geq |\,\mu\,| \parallel \varphi_1-\varphi_2 \parallel, \tag{45.8}$$

lo que implica que $\varphi_1=\varphi_2$. Por otra parte, de (45.7) también resulta que

$$\frac{\parallel \varphi \parallel}{\parallel [T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]\,\varphi \parallel} \leq \frac{1}{|\,\mu\,|}, \tag{45.9}$$

desigualdad que muestra que la inversa de $[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es acotada en $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$.

En esas condiciones, si $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ no es denso en $\mathcal{H}$, entonces $(\lambda+i\,\mu)\in\sigma_r(T)\Rightarrow(\lambda-i\,\mu)\in\sigma_p(T^\dagger=T)$, lo que hemos visto que no es posible si $\mu\neq 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{Rank}[T-(\lambda+i\,\mu)\,\mathbf{I}]$ es denso en $\mathcal{H}$ y $(\lambda+i\,\mu)\in\rho_r(T)$ para todo $\mu\neq 0$, lo que prueba que $\sigma(T)\subset\mathbb{R}$.

Finalmente, si un real $\lambda\in\sigma_r(T)\Rightarrow\lambda^*=\lambda\in\sigma_p(T^\dagger=T)$, lo que no es posible porque (por definición) se trata de conjuntos disjuntos. Por lo tanto, $\sigma_r(T)=\emptyset$. $\square$

46. Extensiones autoadjuntas de operadores simétricos

• Un operador simétrico T se dice **esencialmente autoadjunto** si su clausura $\overline{T}$ es un operador autoadjunto.

• Si T es esencialmente autoadjunto, entonces T tiene una única extensión autoadjunta[30].

En efecto, supongamos que S es una extensión autoadjunta de T. Entonces, $S=S^\dagger$ es cerrado. Y como $T\subset S\Rightarrow\overline{T}=T^{\dagger\dagger}\subset S$. En consecuencia, para los adjuntos de esos dos operadores tenemos que $S^\dagger=S\subset\overline{T}^\dagger=\overline{T}$. Por lo tanto, $S=\overline{T}$

• Si T es clausurable, entonces T es esencialmente autoadjunto si y sólo si $T^\dagger$ es autoadjunto.

En efecto, por el **Teorema I**, si T es clausurable $\Rightarrow\overline{T}^\dagger=T^\dagger$. Ahora bien, si T es esencialmente autoadjunto $\Rightarrow T^\dagger=\overline{T}^\dagger=\overline{T}=T^{\dagger\dagger}$, es decir, $T^\dagger$ es autoadjunto.

---

[30]En general se debe tratar con operadores T simétricos no cerrados. Si se puede establecer que T es esencialmente autoadjunto, entonces T está unívocamente asociado a un operador autoadjunto $\overline{T}=T^{\dagger\dagger}$

Inversamente, si $T^\dagger$ es autoadjunto, entonces $T^\dagger = T^{\dagger\dagger} = \overline{T} \Rightarrow \overline{T}$ es autoadjunto. Por lo tanto, T es esencialmente autoadjunto.

• Si T es autoadjunto, $T^\dagger = T$, entonces T es cerrado. Además, $\lambda = \pm i$ no es un autovalor de $T^\dagger$.

En efecto, sea $\varphi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger) = \mathcal{D}(T)$ tal que $T^\dagger \varphi_\pm = \pm i\, \varphi_\pm = T\varphi_\pm$. Entonces,

$$(46.1) \qquad \left(T^\dagger\varphi_\pm, \varphi_\pm\right) = \mp i\|\varphi_\pm\|^2 = (\varphi_\pm, T\varphi_\pm) = \pm i\|\varphi_\pm\|^2 \Rightarrow \|\varphi_\pm\| = 0.$$

Inversamente, si T es simétrico y cerrado, y las ecuaciones $T^\dagger\varphi_\pm = \pm i\, \varphi_\pm$ no tienen soluciones no triviales, entonces T es autoadjunto como consecuencia del siguiente teorema.

• **Teorema II:** Sea T un operador simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) T es autoadjunto,
b) T es cerrado y $\mathrm{Ker}(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$,
c) $\mathrm{Rank}(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$.

Por una parte, es evidente que a) $\Rightarrow$ b).

Para ver que b) $\Rightarrow$ c) supongamos que $\mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I})$ no sea denso en $\mathcal{H}$. Entonces, existen vectores no nulos $\psi_\pm \in \mathcal{H}$ tales que

$$(46.2) \qquad (\psi_\pm, (T \pm i\,\mathbf{I})\varphi) = 0\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T) \text{ denso en } \mathcal{H}\,.$$

Esos productos escalares definen funcionales lineales y continuas (idénticamente nulas) de φ, de modo que $\psi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger)$, y podemos escribir

$$(46.3) \qquad \left(\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right)\psi_\pm, \varphi\right) = 0\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T) \ \Rightarrow\ T^\dagger\,\psi_\pm = \pm i\,\psi_\pm\,.$$

En consecuencia, $\mathrm{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Por lo tanto,

$$(46.4) \qquad \mathrm{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\} \ \Rightarrow\ \mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) \text{ denso en } \mathcal{H}\,.$$

Si, además, T es cerrado se puede demostrar que el rango de T es también cerrado, de modo que $\mathrm{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$ (ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. I, Theorem VIII.3, pag. 256). Por lo tanto, b) $\Rightarrow$ c).

Por otra parte, si $\mathrm{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) \neq \{\mathbf{0}\}$ es porque existen vectores no nulos $\psi_\pm \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ tales que $T^\dagger\,\psi_\pm = \pm i\,\psi_\pm$. Entonces,

$$(46.5) \qquad \left(\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right)\psi_\pm, \varphi\right) = (\psi_\pm, (T \pm i\,\mathbf{I})\,\varphi) = 0\,,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(T)\,,$$

de modo que Rank $(T \pm i\,\mathbf{I})$ no es denso en $\mathcal{H}$.

Por lo tanto,

$$\text{(46.6)} \qquad \text{Rank}\,(T \pm i\,\mathbf{I}) \text{ denso en } \mathcal{H} \;\Rightarrow\; \text{Ker}\,\left(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\}\;.$$

Finalmente, supongamos que Rank $(T \pm i\,\mathbf{I}) = \mathcal{H}$. Entonces, $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(T^\dagger)$ existen vectores $\varphi_\pm \in \mathcal{D}(T)$ tales que

$$\text{(46.7)} \qquad \left(T^\dagger \pm i\,\mathbf{I}\right)\psi = (T \pm i\,\mathbf{I})\,\varphi_\pm \Rightarrow \left(T^\dagger \pm i\,\mathbf{I}\right)(\psi - \varphi_\pm) = \mathbf{0}\,,$$

dado que T es simétrico. Pero, en esas condiciones, la implicación (46.6) requiere que $\psi = \varphi_\pm$, de modo que $\mathcal{D}(T^\dagger) \subset \mathcal{D}(T)$.

En consecuencia, $T^\dagger = T$, y c) $\Rightarrow$ a). □

• **Corolario I:** Sea T un operador simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) T es esencialmente autoadjunto,
b) $\text{Ker}(T^\dagger \mp i\,\mathbf{I}) = \{\mathbf{0}\}$,
c) $\text{Rank}(T \pm i\,\mathbf{I})$ es denso en $\mathcal{H}$.

• El resultado anterior establece el criterio básico para determinar cuándo un operador simétrico tiene una única extensión autoadjunta.

Ejemplo 46.1. - Para describir el impulso en la Mecánica Cuántica se introduce el operador diferencial en la recta $P\varphi(x) = -i\varphi'(x)$, que es simétrico sobre el dominio $\mathcal{D}(P) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(P^\dagger)$, entonces $\exists\, \chi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ tal que

$$\text{(46.8)} \qquad (\psi, P\varphi) = (\psi, -i\,\varphi') = \int_{Sop(\varphi)} \psi(x)^* \left(-i\,\varphi'(x)\right)\, dx = (\chi, \varphi)\,,$$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(P)$. Esto requiere que $\psi(x) \in AC(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, con una derivada primera $\psi'(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, en cuyo caso tenemos $\chi(x) = -i\,\psi'(x)$.

En consecuencia,

$$\text{(46.9)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(P^\dagger) = \{\psi(x) \in AC(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})\}\,, \\ \\ P^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x). \end{array} \right.$$

Como $\mathcal{D}(P^\dagger) \supset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(P^\dagger)$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ y puede definirse $P^{\dagger\dagger} = \overline{P}$. Un razonamiento similar al anterior muestra que $\mathcal{D}(P^{\dagger\dagger}) = \mathcal{D}(P^\dagger)$, con $P^{\dagger\dagger}\psi(x) = -i\,\psi'(x)$. Es decir, $P^{\dagger\dagger} = \overline{P} = P^\dagger$.

En consecuencia,

a) Como $\overline{P}$ es autoadjunto $\Rightarrow P$ es esencialmente autoadjunto.

b) Consideremos la ecuación de autovalores

$$P^{\dagger}\psi_{\pm}(x) = \pm i\,\psi_{\pm}(x) = -i\,\psi'_{\pm}(x). \tag{46.10}$$

Como $\psi_{\pm}(x) \in AC(\mathbb{R})$, resulta que $\psi_{\pm}(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ y entonces debemos resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$\psi'_{\pm}(x) = \mp\psi_{\pm}(x) \Rightarrow \psi_{\pm}(x) = e^{\mp x} \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R}). \tag{46.11}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Ker}\left(P^{\dagger} \mp i\,\mathbf{I}\right) = \{\mathbf{0}\}$.

c) Finalmente, ya sabemos que esta última condición implica que $\mathrm{Rank}(P \pm iI)$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. ◇

• El siguiente ejemplo muestra que un operador simétrico puede admitir muchas extensiones autoadjuntas[31].

Ejemplo 46.2. - Sea T definido sobre $\mathcal{D}(T) = \mathcal{C}_0^{\infty}(0,1)$ como $T\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. Este operador es claramente simétrico pues, integrando por partes, tenemos

$$(T\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, T\varphi_2)\,,\ \forall\,\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^{\infty}(0,1). \tag{46.12}$$

Si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T^{\dagger}) \subset \mathbf{L_2}(0,1)$, entonces $\exists\,\chi \in \mathbf{L_2}(0,1)$ tal que

$$(\psi, T\varphi) = (\psi, -i\,\varphi') = (\chi, \varphi)\,,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(0,1). \tag{46.13}$$

Esto requiere[32] que $\psi(x) \in AC(0,1)$, para que sea posible integrar por partes, de donde resulta que $\chi(x) = -i\,\psi'(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(T^{\dagger}) = \{\psi(x) \in AC(0,1) \subset \mathbf{L_2}(0,1)\ \mid\ \psi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)\}\,, \tag{46.14}$$

y el operador adjunto actúa según

$$T^{\dagger}\psi(x) = -i\,\psi'(x). \tag{46.15}$$

Ahora bien, las ecuaciones de autovalores

$$T^{\dagger}\psi_{\pm}(x) = -i\,\psi'_{\pm}(x) = \pm i\,\psi_{\pm}(x) \in AC(0,1) \tag{46.16}$$

se reducen a ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen soluciones no triviales,

$$\psi_{\pm}(x) = e^{\mp x} \in \mathcal{C}^{\infty}(0,1) \subset AC(0,1). \tag{46.17}$$

[31] Como veremos más adelante, también puede no admitir ninguna extensión autoadjunta.

[32] La condición (46.13) también puede interpretarse como estableciendo que la derivada de ψ como **distribución** es localmente sumable (ver Notas sobre Teoría de Distribuciones), de donde resulta que $\psi(x)$ es absolutamente continua.

En consecuencia, T no es esencialmente autoadjunto.

Como $AC(0,1) \supset \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, $\mathcal{D}(T^\dagger)$ es un conjunto denso en $\mathbf{L_2}(0,1)$ y puede definirse $(T^\dagger)^\dagger$.

Si $\phi(x) \in \mathcal{D}(T^{\dagger\dagger})$, entonces $\exists\, \chi \in \mathbf{L_2}(0,1)$ tal que

$$\left(\phi, T^\dagger\psi\right) = (\phi, -i\,\psi') = (\chi, \psi)\,. \tag{46.18}$$

Para que ese producto escalar sea una funcional lineal y continua de $\psi \in AC(0,1)$, debe ser posible integrar por partes, lo que requiere que $\phi(x)$ tenga una derivada en $\mathbf{L_2}(0,1)$. En consecuencia, $\phi(x) \in AC(0,1)$ con $\phi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1)$, y

$$\int_0^1 \phi(x)^*(-i\,\psi'(x))\,dx = -i\,\phi(x)^*\psi(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 (-i\phi'(x))^*\psi(x)\,dx. \tag{46.19}$$

Pero una funcional continua respecto de la distancia en $\mathbf{L_2}(0,1)$ no puede depender del valor de su argumento $\psi(x)$ en los puntos particulares $x = 0, 1$ (región de medida nula donde un dado vector de $\mathbf{L_2}(0,1)$ puede tomar valores arbitrarios). Por lo tanto, las funciones en $\mathcal{D}(T^{\dagger\dagger})$ deben satisfacer además las condiciones de contorno $\phi(0) = 0 = \phi(1)$.

En definitiva, $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$, la mínima extensión cerrada de T, está definido en un dominio denso por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T^{\dagger\dagger}) = \{\phi(x) \in AC(0,1) \mid \phi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \phi(0) = 0 = \phi(1)\}\,, \\ \\ T^{\dagger\dagger}\phi(x) = -i\,\phi'(x). \end{array} \right. \tag{46.20}$$

Nótese que $T \subset \overline{T} \subset T^\dagger$, con $\overline{T} \neq T^\dagger$ ($T^\dagger$ no es autoadjunto). Dado que $\overline{T}^\dagger = T^\dagger \supset \overline{T}$, la clausura es una extensión simétrica (no autoadjunta) cerrada de T.

Veamos ahora que $\overline{T}$ admite extensiones autoadjuntas. En efecto, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ de módulo 1, consideremos el operador definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(T_\alpha) = \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \varphi(1) = \alpha\,\varphi(0)\}\,, \\ \\ T_\alpha\varphi(x) = -i\,\varphi'(x). \end{array} \right. \tag{46.21}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que antes, si $\psi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha^\dagger)$, entonces $\psi(x)$ debe ser absolutamente continua de modo que el producto escalar

$$(\psi, T_\alpha\varphi) = -i\int_0^1 \psi(x)^*\varphi'(x)\,dx = -i\,\psi(x)^*\varphi(x)\Big|_0^1 + (-i\,\psi', \varphi) \tag{46.22}$$

sea una funcional lineal y continua de $\varphi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha)$. Pero esto requiere además que, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{D}(T_\alpha)$, sea

$$\psi(1)^*\varphi(1) - \psi(0)^*\varphi(0) = (\psi(1)^* - \alpha^*\psi(0)^*)\, \alpha\, \varphi(0) = 0\,. \tag{46.23}$$

Como el valor de $\varphi(0)$ es arbitrario, debe ser $\psi(1) - \alpha\, \psi(0) = 0$. Es decir, $\mathcal{D}(T_\alpha^\dagger) = \mathcal{D}(T_\alpha)$ y $T_\alpha^\dagger \psi(x) = -i\, \psi'(x)$.

En conclusión, $T_\alpha^\dagger = T_\alpha$ para cada complejo α de módulo 1. En esas condiciones, existe toda una familia (dependiente de un parámetro) de extensiones autoadjuntas de T (todas ellas, naturalmente, contenidas en $T^\dagger$.)

Finalmente, señalemos que:

1) $\forall\, \alpha = e^{i\,\gamma}$, con $\gamma \in [0, 2\pi)$, tenemos $\overline{T} \subset T_\alpha = T_\alpha^\dagger \subset T^\dagger$.

2) El operador T no tiene autovectores,

$$-i\, \varphi'(x) = \lambda\, \varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1) \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0\,, \tag{46.24}$$

de modo que $\sigma_p(T) = \emptyset$.

3) El operador $\overline{T}$ tampoco tiene autovectores,

$$-i\, \varphi'(x) = \lambda\, \varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in AC(0,1),\ \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0\,, \tag{46.25}$$

de modo que $\sigma_p(\overline{T}) = \emptyset$.

4) Todo número complejo es autovalor de $T^\dagger$ con degeneración 1,

$$-i\, \varphi'(x) = \lambda\, \varphi(x) \ \Rightarrow\ \varphi(x) = e^{i\lambda x}\varphi(0) \in AC(0,1),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{46.26}$$

Por lo tanto, $\sigma_p(T^\dagger) = \mathbb{C}$ $\big(\Rightarrow \sigma(T^{\dagger\dagger}) = \sigma_r(\overline{T}) = \mathbb{C}\big)$.

5) T_α tiene un conjunto (numerable) ortogonal y completo de autofunciones cuyos autovalores (reales y no degenerados) dependen del parámetro α,

$$\begin{gathered} -i\, \varphi'(x) = \lambda\, \varphi(x), \text{ con } \varphi(x) \in AC(0,1), \text{ y } \varphi(1) = \alpha\, \varphi(0) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \varphi_n(x) = e^{i\lambda_n x}\varphi(0), \text{ con } \lambda_n = 2\pi n - i \log \alpha = 2\pi n + \gamma\,, \end{gathered} \tag{46.27}$$

con $n \in \mathbb{Z}$, y $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m}$.

En este caso, $\sigma_p(T_\alpha) = \{\lambda_n\,, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$, y $\sigma_r(T_\alpha) = \emptyset$. ◇

47. Teoría de von Neumann

• **Teorema III:** Sea T un operador simétrico cerrado, densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces:

1- a) $\dim \mathrm{Ker}(T^\dagger - \lambda\, \mathbf{I})$ es constante en el semiplano abierto superior del plano complejo λ,

b) $\dim \mathrm{Ker}(T^\dagger - \lambda\, \mathbf{I})$ es constante en el semiplano abierto inferior del plano complejo λ,

2- el espectro de T es **uno** de los posibles subconjuntos del plano complejo λ que se enumeran a continuación:

a) el semiplano superior cerrado,

b) el semiplano inferior cerrado,

c) todo el plano complejo,

d) un subconjunto del eje real,

3- T es autoadjunto $\Leftrightarrow$ su espectro es un subconjunto del eje real,

4- T es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Ker}(T^\dagger - \lambda\, \mathbf{I}) = 0, \ \forall\, \lambda \notin \mathbb{R}$.

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.1, pag. 136.

• **Corolario II:** Si un operador simétrico cerrado T tiene al menos un número real en su conjunto resolvente $\Rightarrow$ T es autoadjunto.

En efecto, como $\rho(T)$ es abierto, si contiene un número real $\Rightarrow$ contiene todo un entorno de ese real, el cual contiene tanto puntos del semiplano superior como del inferior. Entonces, por el teorema anterior, T es autoadjunto.

• Se definen los **subespacios de deficiencia** de un operador simétrico como

$$\mathcal{K}_\pm := \mathrm{Ker}\left(T^\dagger \mp i\, \mathbf{I}\right) \subset \mathcal{D}(T^\dagger), \tag{47.1}$$

siendo los **índices de deficiencia** sus respectivas dimensiones,

$$n_\pm(T) := \dim \mathcal{K}_\pm = \dim \mathrm{Ker}\left(T^\dagger \mp i\, \mathbf{I}\right) \tag{47.2}$$

• Los índices de deficiencia pueden tomar cualquier valor natural, e incluso ser ∞, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 47.1. - Supongamos que los operadores T_n, $n = 1, 2, \ldots$ son simétricos sobre los dominios $\mathcal{D}(T_n) \subset \mathcal{H}_n$. Sea $\mathcal{D}(T)$ el conjunto de vectores de $\mathcal{H} :=$

$\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ de la forma $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots)$, donde sólo un número finito de vectores $\varphi_n \in \mathcal{D}(T_n)$ son no nulos.

En esas condiciones, el operador $T := \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n$ es simétrico en $\mathcal{D}(T)$, y sus índices de deficiencia son

$$n_\pm(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n_\pm(T_n). \tag{47.3}$$

◇

• **Teorema IV:** Sea T un operador simétrico y cerrado con índices de deficiencia $n_\pm(T)$. Las extensiones simétricas y cerradas de T están en correspondencia uno a uno con el conjunto de isometrías parciales (en el sentido del producto escalar usual) de $\mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$.

Si U es una tal isometría con dominio $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{K}_+$ (de dimensión $\dim \mathcal{D}(U) \leq n_+(T)$), entonces la correspondiente extensión cerrada y simétrica de T, T_U, tiene por dominio

$$\mathcal{D}(T_U) = \{\chi = \varphi + \psi_+ + U\psi_+ \mid \varphi \in \mathcal{D}(T),\ \psi_+ \in \mathcal{D}(U)\} \subset \mathcal{D}(T^\dagger). \tag{47.4}$$

Siendo T_U la restricción de $T^\dagger$ a ese dominio, su acción está dada por

$$T_U \chi = T^\dagger \chi = T\varphi + i\,\psi_+ - i\,U\psi_+. \tag{47.5}$$

Si $n_\pm(T) < \infty \Rightarrow$ los índices de deficiencia de T_U están dados por

$$n_\pm(T_U) = n_\pm(T) - \dim \mathcal{D}(U). \tag{47.6}$$

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.2, pag. 140.

• **Corolario III:** Sea T un operador simétrico cerrado con índices de deficiencia $n_+(T)$ y $n_-(T)$. Entonces

a) T es autoadjunto $\Leftrightarrow n_+(T) = 0 = n_-(T)$,

b) T admite extensiones autoadjuntas $\Leftrightarrow n_+(T) = n_-(T) > 0$. En ese caso, existe una correspondencia uno a uno entre las extensiones autoadjuntas de T y las aplicaciones unitarias $U : \mathcal{K}_+ \to \mathcal{K}_-$.

c) Si $n_+(T) = 0 \neq n_-(T)$ ó $n_+(T) \neq 0 = n_-(T)$, el operador T no admite extensiones simétricas no triviales. Esos operadores ya son **máximamente simétricos**.

• El siguiente ejemplo muestra que el *impulso radial* no corresponde a un observable de la Mecánica Cuántica.

Ejemplo 47.2. - Consideremos el operador $P_r := -i\,\frac{\partial}{\partial r}$ simétrico sobre el dominio $\mathcal{D}(P_r) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$.

Si $\psi \in \mathcal{D}(P_r^\dagger) \Rightarrow \exists\,\chi \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$(\psi, P_r\varphi) = (\psi, -i\,\varphi') = (\chi, \varphi)\,,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+). \tag{47.7}$$

Entonces $\mathcal{D}(P_r^\dagger) = \{\psi(r) \in AC(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \psi'(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)\}$, y $P_r^\dagger\psi(r) = -i\,\psi'(r)$.

Buscamos ahora soluciones de

$$P_r^\dagger\psi_\pm(r) = -i\,\psi_\pm'(r) = \pm i\,\psi_\pm(r),\ \text{con}\ \psi_\pm(r) \in \mathcal{D}(P_r^\dagger). \tag{47.8}$$

Esa ecuación diferencial tiene soluciones $\psi_\pm(r) = e^{\mp r}\psi_\pm(0) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$. Pero de ellas, sólo $\psi_+(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$. En consecuencia, $n_+(P_r) = 1 \neq n_-(P_r) = 0 \Rightarrow P_r$ no admite extensiones autoadjuntas.

Por lo tanto, P_r no corresponde a un observable[33]. $\diamond$

• El siguiente ejemplo, un caso particular de operador de Sturm - Liouville con coeficientes regulares, muestra que estos operadores admiten extensiones autoadjuntas que están determinadas por condiciones de contorno locales en los extremos del intervalo.

Ejemplo 47.3. - Sea el operador diferencial $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ definido sobre el dominio denso $\mathcal{D}(L) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, en el cual es simétrico.

Su adjunto está definido sobre el dominio denso

$$\mathcal{D}(L^\dagger) = \left\{\psi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \psi'(x) \in AC(\mathbb{R}^+), \psi''(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)\right\}, \tag{47.10}$$

sobre el cual actúa según

$$L^\dagger\psi(x) = -\psi''(x). \tag{47.11}$$

Similarmente, el operador clausura $\overline{L} = L^{\dagger\dagger}$ está definido sobre el dominio

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(L^{\dagger\dagger}) = \{\phi(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \mid \phi'(x) \in AC(\mathbb{R}^+), \\ \phi''(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+), \phi(0) = 0 = \phi'(0)\} \subset \mathcal{D}(L^\dagger)\,,\end{gathered} \tag{47.12}$$

[33] En un espacio de dimensión D debe considerarse el operador

$$P_r := -i\,[\partial_r + (D-1)/2r] = r^{-\frac{D-1}{2}}\,(-i\partial_r)\,r^{\frac{D-1}{2}}\,, \tag{47.9}$$

simétrico respecto de la medida $r^{D-1}dr$, para el cual se obtienen similares resultados.

En efecto, si $\psi_\pm(r) = r^{-\frac{D-1}{2}}\,e^{\mp r}$ tenemos $[\partial_r + (D-1)/2r]\,\psi_\pm(r) = \mp\psi_\pm(r)$, pero sólo $\psi_+(r) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+;\, r^{D-1}\,dr)$.

funciones sobre las cuales también actúa como el operador diferencial

$$L^{\dagger\dagger}\phi(x) = -\phi''(x). \tag{47.13}$$

La ecuación de autovalores

$$L^{\dagger}\psi_{\pm}(x) = -\psi''_{\pm}(x) = \pm i\, \psi_{\pm}(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+) \tag{47.14}$$

implica que $\psi_{\pm}(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^+)$, reduciéndose a una ecuación diferencial ordinaria cuyas soluciones en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}^+)$ son

$$\psi_{\pm}(x) = e^{-\left(\frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}\right)x}\, \psi_{\pm}(0) \;\Rightarrow\; n_+(L) = 1 = n_-(L), \tag{47.15}$$

y los subespacios de deficiencia son unidimensionales.

En consecuencia, existe una familia de extensiones autoadjuntas de L dependiente de un parámetro continuo, correspondientes a las isometrías $U\psi_+(x) = e^{i\gamma}\psi_-(x)$, con $\gamma \in [0, 2\pi)$, donde $\|\psi_+\| = \|\psi_-\|$.

Cada extensión autoadjunta L_γ es la restricción de $L^\dagger$ al domino

$$\begin{array}{c} \mathcal{D}(L_\gamma) = \\ = \left\{\chi(x) = \phi(x) + A\left[\psi_+(x) + e^{i\gamma}\psi_-(x)\right] \;|\; \phi(x) \in \mathcal{D}(L^{\dagger\dagger}),\ A \in \mathbb{C}\right\}, \end{array} \tag{47.16}$$

actuando sobre esas funciones según

$$L_\gamma\chi(x) = L^\dagger\chi(x) = -\phi''(x) + i\,A\left[\psi_+(x) - e^{i\gamma}\psi_-(x)\right]. \tag{47.17}$$

Ese dominio también puede ser caracterizado mediante **condiciones de contorno locales** en $x = 0$. En efecto, para $x \to 0^+$ tenemos

$$\begin{array}{c} \chi(0) = 0 + A\left[1 + e^{i\gamma}\right] = 2A\, e^{i\gamma/2}\cos(\gamma/2)\,, \\ \\ \chi'(0) = 0 + iA\left[-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + e^{i\gamma}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \\ \\ = -\dfrac{A}{\sqrt{2}}\; e^{i\gamma/2}\left\{2\cos(\gamma/2) + 2\sin(\gamma/2)\right\}, \end{array} \tag{47.18}$$

de donde, para $A \neq 0$, resulta la relación

$$\begin{array}{c} \sqrt{2}\,\cos(\gamma/2)\,\chi'(0) = -\left(\cos(\gamma/2) + \sin(\gamma/2)\right)\chi(0) \\ \\ \Rightarrow \alpha(\gamma)\,\chi(0) + \beta(\gamma)\,\chi'(0) = 0\,. \end{array} \tag{47.19}$$

Esta igualdad también se satisface para $A = 0$, puesto que en ese caso $\chi(x) \in \mathcal{D}(L^{\dagger\dagger})$.

En (47.19), las constantes $\alpha(\gamma), \beta(\gamma) \in \mathbb{R}$ y no se anulan simultáneamente, dado que

$$\alpha(\gamma)^2 + \beta(\gamma)^2 = 2 + \cos\gamma + \sin\gamma > 0\,, \ \forall\, \gamma \in [0, 2\pi)\,. \tag{47.20}$$

◇

• **Teorema V:** Sea A un operador cerrado densamente definido sobre el dominio $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$, y sea

$$\mathcal{D}(A^\dagger A) = \left\{\varphi \in \mathcal{D}(A) \mid A\varphi \in \mathcal{D}(A^\dagger)\right\}. \tag{47.21}$$

Entonces, definiendo el operador $A^\dagger A$ sobre $\mathcal{D}(A^\dagger A)$ mediante

$$(A^\dagger A)\varphi := A^\dagger(A\varphi), \tag{47.22}$$

resulta que $A^\dagger A$ es autoadjunto.

Para la demostración, ver M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. II, Theorem X.25, pag. 180.

• Para el caso de operadores no acotados, el resultado anterior es absolutamente no trivial ya que, a priori, no es evidente que pueda haber vectores no nulos en $\mathcal{D}(A^\dagger A)$, ni mucho menos que ese dominio sea denso en $\mathcal{H}$.

Ejemplo 47.4. - Consideremos el operador con dominio

$$\mathcal{D}(A) = \{\varphi(x) \in AC(0,1) \mid \varphi'(x) \in \mathbf{L_2}(0,1), \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}\,, \tag{47.23}$$

y tal que $A\varphi(x) = -i\,\varphi'(x)$. Este operador es cerrado, ya que coincide con la clausura del operador T del ejemplo 46.2.

Su adjunto (ver ejemplo 46.2) tiene por dominio a

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{\psi(x) \in AC(0,1) \mid \psi'(x) \in \mathbf{L}_2(0,1)\}\ , \tag{47.24}$$

donde actúa según $A^\dagger\psi(x) = -i\,\psi'(x)$.

Del **Teorema V** resulta que $A^\dagger A$ corresponde a la extensión autoadjunta de $L := -\frac{d^2}{dx^2}$ con condiciones de contorno locales dadas por $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Similarmente $AA^\dagger$ corresponde a la extensión autoadjunta de L con condiciones de contorno $\psi'(0) = 0 = \psi'(1)$. ◇

Bibliografía:

- M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Volúmenes I y II.

NOTAS SOBRE TEORÍA DE DISTRIBUCIONES

48. El espacio $\mathcal{K}$

Al considerar el espacio de las funciones continuas en $[a, b]$, hemos visto que ciertas funcionales lineales resultan continuas respecto de la convergencia uniforme, pero no respecto de la convergencia en media. Similarmente, al estudiar el completamiento de ese espacio respecto de la distancia derivada de la convergencia en media, hemos visto que ciertas funcionales lineales que es posible definir sobre $\mathcal{C}_2(a, b)$ ya no tienen sentido sobre $\mathbf{L_2}(a, b)$.

De ese modo, al ampliar el conjunto de las funciones consideradas, o al relajar el sentido de convergencia, ocurre una reducción en el conjunto de funcionales lineales y continuas que es posible definir sobre ese espacio.

En particular, toda funcional lineal y continua (acotada) en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ está unívocamente asociada con el producto escalar por un vector fijo de ese mismo espacio.

En esa condiciones, es vez de intentar incrementar aún más el conjunto de funciones relajando las condiciones que sobre ellas pesan, o de relajar el sentido de convergencia en ese espacio (con la consiguiente reducción del conjunto de funcionales), podemos asignar a las funcionales lineales y continuas un sentido de funciones generalizadas e imponer fuertes restricciones sobre el espacio de funciones, buscando incrementar el conjunto de esas funcionales.

Por ejemplo, podemos trabajar sobre el espacio métrico $\mathcal{K}_N$, formado por el conjunto de las funciones de soporte[34] compacto y con derivadas continuas hasta el orden N, $\mathcal{C}_0^N(\mathbb{R})$, estructurado con una distancia que implica la convergencia uniforme de las N primeras derivadas de toda secuencia convergente,

$$\begin{aligned} \rho_N(\varphi, \psi) := \max\nolimits_{x\in\mathbb{R}} \{ &| \varphi(x) - \psi(x) | + | \varphi'(x) - \psi'(x) | + \\ &+ \cdots + | \varphi^{(N)}(x) - \psi^{(N)}(x) | \} \,. \end{aligned} \tag{48.1}$$

Nótese que, como conjuntos, $\mathcal{K}_N \subset \mathcal{K}_M$ si $N > M$, mientras que toda secuencia convergente en $\mathcal{K}_N$ también lo es $\mathcal{K}_M$.

En lo que sigue, estaremos interesados en la intersección de todos esos espacios, $\mathcal{K} = \bigcap_N \mathcal{K}_N$, donde no podremos definir una distancia, pero sí un sentido de convergencia compatible con $\rho_N(\varphi, \psi)$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

[34] El soporte de una función $\varphi(x)$ (definida en casi todo punto), $\mathrm{Sop}(\varphi(x))$, es la clausura del conjunto de puntos donde la función toma valores no nulos.

El conjunto de las funciones que tienen derivadas continuas de todo orden y se anulan idénticamente fuera de un intervalo de longitud finita[35] constituye el espacio lineal $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Como sabemos, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En ese sentido, se puede decir que $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es el completamiento de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ respecto de la distancia derivada de la norma $|| \, ||_2$.

En ese espacio lineal introducimos el siguiente **sentido de convergencia**.

Definición 48.1. Diremos que la sucesión $\{\varphi_n(x)\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ converge a la función $\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ si:

- $\exists$ un intervalo de longitud finita $[a,b]$ fuera del cual las funciones $\varphi(x)$ y $\{\varphi_n(x)\}$ se anulan idénticamente,
- $\forall k \in \mathbb{N}$, la secuencia de derivadas de orden k, $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ converge uniformemente a la correspondiente derivada del límite, $\varphi^{(k)}(x)$.

Así estructurado, ese espacio lineal se denota por $\mathcal{K}$, y es llamado espacio básico o de funciones de base o **de prueba (test-functions)**.

Nótese que tanto la derivación, como la multiplicación por funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y las traslaciones sobre la recta, dejan invariante al espacio $\mathcal{K}$. En efecto, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$\varphi'(x) \in \mathcal{K}\,,$$

$$\alpha(x)\varphi(x) \in \mathcal{K}\,, \forall\, \alpha(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,, \tag{48.3}$$

$$\varphi(x+h) \in \mathcal{K}\,, \forall\, h \in \mathbb{R}\,.$$

Puede mostrarse fácilmente que todas esas operaciones son **continuas** respecto del sentido de convergencia adoptado. Por ejemplo, si $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, entonces $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$ en $\mathcal{K}$, dado que sus soportes están contenidos en un mismo compacto sobre la recta, y sus derivadas de cualquier orden convergen uniformemente a la correspondiente derivada del límite.

[35]El siguiente ejemplo muestra que tales funciones existen:

$$\varphi(x) = e^{\frac{-1}{(x-a)^2}}\, e^{\frac{-1}{(x-b)^2}}\,, \text{ for } a < x < b, \quad \varphi(x) \equiv 0, \text{ para } x \notin (a,b)\,. \tag{48.2}$$

49. Distribuciones sobre $\mathcal{K}$

Se llama **distribución** (o **función generalizada**) definida sobre la recta a toda funcional lineal y continua sobre el espacio $\mathcal{K}$,

$$f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{C}\,. \tag{49.1}$$

Ejemplos: Sea $f(x)$ una función definida sobre la recta, tal que resulte absolutamente integrable en todo intervalo compacto (**localmente sumable**), $f(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(\mathbb{R})$. Se puede definir una distribución (que denotamos por la misma letra) mediante la expresión

$$f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\varphi(x)\,, \tag{49.2}$$

que converge $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$. Toda distribución que puede ser representada de esa manera se dice **regular**.

En efecto, $f[\varphi]$ así definida es evidentemente lineal. Además, si $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$ entonces, en particular, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ uniformemente. En consecuencia,

$$|f[\varphi_n] - f[\varphi]| \leq \int_{a[\varphi]}^{b[\varphi]} |f(x)|\,|\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx \leq \epsilon_n \int_{a[\varphi]}^{b[\varphi]} |f(x)|dx \to 0 \tag{49.3}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $f[\varphi]$ es también continua.

Si $f(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \Rightarrow f(x) \in \mathbf{L_1}(a,b)$, para todo intervalo compacto $[a,b]$. Por lo tanto, $f(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(\mathbb{R})$ y define una distribución regular,

$$f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\varphi(x) = (f,\varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})}\,, \tag{49.4}$$

que puede expresarse en términos del producto escalar en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Es por ello que usualmente se adopta la notación $(f,\varphi) := f[\varphi]$.

Un ejemplo de distribución **singular** (no regular) corresponde a la **delta de Dirac**:

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) := \varphi(x_0)\,. \tag{49.5}$$

En efecto, esta funcional es evidentemente lineal. Para $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, tenemos

$$\varphi_n(x_0) \to \varphi(x_0)\,, \tag{49.6}$$

de modo que también es continua,

$$(\delta(x-x_0), \varphi_n(x)) = \varphi_n(x_0) \longrightarrow \varphi(x_0) = (\delta(x-x_0), \varphi(x))\;. \tag{49.7}$$

Otro ejemplo corresponde al **valor principal** de $1/x$. La función $1/x$ no es integrable en ningún intervalo que contenga al origen, de modo que no define una funcional regular. Pero para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ existe la integral en valor principal

$$\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\right\} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\,. \tag{49.8}$$

En efecto, supongamos que $\varphi(x) = 0$ para $|x| > a > 0$, donde $a = a[\varphi]$; entonces

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{\int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{a}\right\} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x}\, dx = \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \varphi(0) \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{\log(\epsilon/a) + \log(a/\epsilon)\right\}\,,\end{aligned} \tag{49.9}$$

donde el último término se anula.

Esta funcional es claramente lineal. Para ver que también es continua consideremos una secuencia $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$. Por el teorema del valor medio, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, [\varphi_n(x) - \varphi(x)]\right) &= \int_{-a}^{a} \frac{[\varphi_n(x) - \varphi(x)] - [\varphi_n(0) - \varphi(0)]}{x}\, dx = \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{x\,[\varphi_n'(c(x)) - \varphi'(c(x))]}{x}\, dx\,,\end{aligned} \tag{49.10}$$

donde $c(x)$ está entre x y 0. Entonces,

$$\left|\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, [\varphi_n(x) - \varphi(x)]\right)\right| \leq 2\,a\,\varepsilon_n \to 0\,, \tag{49.11}$$

puesto que $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$ uniformemente en $[-a, a]$. De ese modo, VP $\frac{1}{x}$ define una distribución singular.

50. Propiedades locales de las distribuciones

Como aplicaciones de $\mathcal{K}$ en $\mathbb{C}$, las distribuciones no tienen un sentido puntual. Pero sí es posible asignarles propiedades **locales** en el siguiente sentido.

Se dice que una distribución es **nula** en un conjunto abierto de la recta si $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ cuyo soporte está contenido en ese conjunto es $(f, \varphi) = 0$. Por ejemplo, $\delta(x)$ es nula en algún entorno de todo punto $x \neq 0$.

Si f es no nula en todo entorno de un punto x_0, se dice que x_0 es un **punto esencial** de f. Por ejemplo, x_0 es un punto esencial de $\delta(x - x_0)$. Similarmente, $x = 0$ es un punto esencial de la distribución regular correspondiente a la función $f(x) = x^2$ (a pesar de que $f(0) = 0$).

El conjunto de los puntos esenciales de una distribución constituye su **soporte**, $\mathrm{Sop}(f)$. Por ejemplo, el soporte de $\delta(x - x_0)$ está concentrado en un punto, $\mathrm{Sop}(\delta(x-x_0)) = \{x_0\}$. En el caso de una funcional regular f definida por una función localmente sumable $f(x)$ (definida en casi todo punto), $\mathrm{Sop}(f)$ es la clausura del conjunto de puntos donde $f(x) \neq 0$.

Si una función de prueba $\varphi_0(x) \in \mathcal{K}$ se anula idénticamente en un abierto que contiene al soporte de una distribución f, entonces $(f, \varphi_0) = 0$. De ese modo, es posible modificar la función de prueba fuera del soporte de una distribución sin modificar el valor que esta toma, $(f, \varphi + \varphi_0) = (f, \varphi)$.

51. El espacio dual: $\mathcal{K}^*$

Sobre el conjunto de las distribuciones se definen las operaciones de adición y multiplicación por números de manera que

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) := \alpha^* \,(f, \varphi) + \beta^* \,(g, \varphi)\,, \ \forall \varphi(x) \in \mathcal{K}\,, \tag{51.1}$$

con lo que evidentemente se obtienen funcionales lineales y continuas. Para el caso de funcionales regulares, esto se reduce a las operaciones usuales sobre las funciones que las definen,

$$\begin{aligned} &\alpha^* \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \varphi(x)\, dx + \beta^* \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* \varphi(x)\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]^* \varphi(x)\, dx\,. \end{aligned} \tag{51.2}$$

Así estructurado, el conjunto de las distribuciones sobre $\mathcal{K}$ constituye un espacio lineal, llamado **espacio dual** de $\mathcal{K}$ y denotado por $\mathcal{K}^*$.

En el espacio $\mathcal{K}^*$ se introduce el siguiente sentido de convergencia: se dice que una secuencia de distribuciones $\{f_n\}$ **converge débilmente** a $f \in \mathcal{K}^*$ si

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)\,, \ \forall \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \tag{51.3}$$

Si el límite de una secuencia de distribuciones existe, entonces es único. En efecto, si $\{f_n\} \to f$ y $\{f_n\} \to g$ en $\mathcal{K}^*$ entonces, para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ se tiene que $(f, \varphi) = (g, \varphi)$, de donde resulta que (como aplicaciones) las distribuciones f y g son iguales.

Por otra parte, la operación de pasaje al límite es lineal: si $\{f_n\} \to f$ y $\{g_n\} \to g$ en $\mathcal{K}^*$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha f_n + \beta g_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \{\alpha^* \,(f_n, \varphi) + \beta^* \,(g_n, \varphi)\} = (\alpha f + \beta g, \varphi)\ , \tag{51.4}$$

para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} [\alpha f_n + \beta g_n] = \alpha f + \beta g \,. \tag{51.5}$$

En particular, si una distribución es el límite de una serie en $\mathcal{K}^*$,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \Rightarrow (f,\varphi) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} h_k, \varphi \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (h_k,\varphi)\,, \ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \tag{51.6}$$

La convergencia en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ implica convergencia débil en $\mathcal{K}^*$. En efecto, si una secuencia de funciones de cuadrado sumable converge en media, $\{f_n\} \to f$, para la secuencia de funcionales regulares que ellas definen tenemos que

$$(f_n,\varphi) = (f_n,\varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} \to_{n\to\infty} (f,\varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (f,\varphi)\ , \tag{51.7}$$

para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K} \subset \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, en virtud de la continuidad del producto escalar en ese espacio de Hilbert.

En el caso de funcionales regulares, la convergencia débil también estará asegurada toda vez que pueda conmutarse el límite con la integral que define la funcional. Ese es el caso de secuencias de funciones localmente sumables que convergen uniformemente en todo intervalo cerrado. En efecto, si $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en todo conjunto compacto,

$$(f_n - f,\varphi) = \int_{a[\varphi]}^{b[\varphi]} [f_n(x) - f(x)]^*\ \varphi(x)\, dx \to_{n\to\infty} 0\,. \tag{51.8}$$

El pasaje al límite bajo el signo integral es también posible bajo condiciones menos restrictivas, como por ejemplo cuando

- $f_n(x) \to f(x)$ en casi todo punto y $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall\, n$, donde $g(x)$ es localmente sumable,
- $f_n(x) \to f(x)$ monótonamente, siendo $f(x)$ localmente sumable.

Ejemplos: Sea

$$f_\epsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & |x| > \epsilon\,, \\[2ex] 0\,, & |x| \leq \epsilon\,. \end{cases} \tag{51.9}$$

Esta función permite definir una funcional regular que tiene por límite en $\mathcal{K}^*$ a una distribución singular,

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon = \mathrm{VP}\frac{1}{x} \tag{51.10}$$

(en este caso no es posible intercambiar el límite con la integral).

Otro ejemplo de una secuencia de funcionales regulares que converge a una distribución singular es

$$f_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \to_{t\to 0^+} \delta(x)\,. \tag{51.11}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,,\, \varphi(x)\right) &= \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left[\varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)\right] dx = \\ \varphi(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}}^{\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2}\, dz &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}}^{\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} \left[\varphi(z\sqrt{4t}) - \varphi(0)\right] dz \to \varphi(0) \end{aligned} \tag{51.12}$$

para $t \to 0^+$, puesto que $\varphi(z\sqrt{4t}) - \varphi(0) = z\sqrt{4t}\,\varphi'(c(z,t))$, con $c(z,t)$ entre 0 y $z\sqrt{4t}$, en virtud del teorema del valor medio, mientras que $\varphi'(x)$ está uniformemente acotada en toda la recta. $\diamond$

Se puede demostrar de manera general que toda funcional singular es el límite débil de una secuencia de distribuciones regulares, que incluso pueden ser elegidas como definidas por funciones del espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Similarmente, toda distribución de soporte compacto es el límite débil de una secuencia de distribuciones regulares definidas por funciones del espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

También es posible mostrar que $\mathcal{K}^*$ es **completo** en el sentido de que, si existe el límite de las secuencias numéricas $\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi)$, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$, entonces el conjunto de esos límites define una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{K}$,

$$(f, \varphi) := \lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi)\ . \tag{51.13}$$

Tratándose de aplicaciones de $\mathcal{K}$ en el cuerpo de los complejos, no existe una operación de producto o composición de distribuciones que, en el caso de funcionales regulares, corresponda al producto usual (punto a punto) de funciones. Pero sí es posible definir el producto de distribuciones por funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de la siguiente manera.

Definición 51.1. Dada $f \in \mathcal{K}^*$ y $\alpha(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ se define la funcional αf mediante la relación

$$(\alpha f, \varphi) := (f, \alpha^* \varphi)\ , \tag{51.14}$$

lo que tiene sentido puesto que, para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, $\alpha(x)^*\varphi(x) \in \mathcal{K}$. Así definida, αf es una funcional lineal y continua.

La linealidad de αf es evidente. Para verificar la continuidad consideremos una secuencia convergente en $\mathcal{K}$, $\varphi_n \to \varphi$. Las funciones $\alpha(x)^*\varphi_n(x)$ son idénticamente nulas fuera de un mismo intervalo acotado, dentro del cual la secuencia de sus derivadas k-ésimas converge uniformemente, $(\alpha(x)^*\varphi_n(x))^{(k)} \to (\alpha(x)^*\varphi(x))^{(k)}$. Por lo tanto, la secuencia $\alpha(x)^*\varphi_n(x) \to \alpha(x)^*\varphi(x)$ en $\mathcal{K}$. Entonces, como consecuencia de la continuidad de f tenemos

$$(\alpha f, \varphi_n) = (f, \alpha^*\varphi_n) \to (f, \alpha^*\varphi) = (\alpha f, \varphi) \ . \tag{51.15}$$

52. La derivación en $\mathcal{K}^*$

Consideremos primero una funcional regular definida por una función $f(x)$ absolutamente continua en la recta, $(f,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^*\varphi(x)\,dx$. Como su derivada $f'(x)$ existe en casi todo punto y es localmente integrable, podemos definir otra funcional regular como

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^*\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^*\varphi'(x)\,dx = -\,(f, \varphi') \ , \tag{52.1}$$

donde (para integrar por partes) hemos tenido en cuenta que $\varphi \in \mathcal{K}$ es diferenciable y de soporte compacto, y (en el último paso) que la derivación es una aplicación de $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ (ver (48.3)).

Nótese que en el miembro de la derecha en (52.1) ya no aparece la derivada de la función $f(x)$. De hecho, dado que $\varphi'(x) \in \mathcal{K}$, esa expresión tiene sentido para toda funcional $f \in \mathcal{K}^*$. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 52.1. Dada una distribución sobre $\mathcal{K}$, $f \in \mathcal{K}^*$, se define su **derivada** como la funcional cuyos valores están dados por

$$(f', \varphi) := -\,(f, \varphi')\,,\ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \tag{52.2}$$

Así definida, f' es una funcional lineal y continua. En efecto, f' es lineal como consecuencia de que la derivación sobre funciones de $\mathcal{K}$ es lineal. En cuanto a la continuidad, nótese que si $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, de la definición de convergencia en $\mathcal{K}$ (ver Sección 48) resulta que la secuencia de sus derivadas también converge en ese espacio a la derivada del límite, $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$. Entonces, como consecuencia de la continuidad de f tenemos

$$(f', \varphi_n) = -\,(f, \varphi_n') \to -\,(f, \varphi') = (f', \varphi) \ . \tag{52.3}$$

De esa definición surgen las siguientes propiedades:

• La derivación en $\mathcal{K}^*$ es una operación lineal, pues $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$

$$
\begin{aligned}
((f+g)',\varphi) &= -\,(f+g,\varphi') = -\,(f,\varphi') - (g,\varphi') = \\
&= (f',\varphi) + (g',\varphi) = (f'+g',\varphi)\ .
\end{aligned} \tag{52.4}
$$

• Toda función generalizada admite derivadas de todo orden. En efecto, para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi^{(n)}(x) \in \mathcal{K},\ \forall\, n$. Entonces

$$
\left(f^{(n)},\varphi\right) = (-1)^n \left(f,\varphi^{(n)}\right)\ . \tag{52.5}
$$

• La operación de derivación es continua en $\mathcal{K}^*$. Supongamos que la secuencia de funciones generalizadas $\{f_n\}$ converge a f en $\mathcal{K}^*$. Entonces, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ se tiene

$$
(f_n',\varphi) = -\,(f_n,\varphi') \to -\,(f,\varphi') = (f',\varphi)\ . \tag{52.6}
$$

Por lo tanto, $f_n' \to f'$ en $\mathcal{K}^*$.
• Como consecuencia de la continuidad de la derivación, toda serie convergente de funciones generalizadas puede ser derivada término a término cualquier número de veces,

$$
f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \Rightarrow f^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^{(n)}\ . \tag{52.7}
$$

Esto representa una libertad que no se tiene cuando se trata de series de funciones, ya que en ese caso se deben requerir condiciones adicionales, como la convergencia uniforme de la serie de las derivadas, para poder asegurar que ésta converge a la derivada de la suma de la serie.

Ejemplos: La secuencia de distribuciones regulares $\left\{\frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right\}$ tiende a la distribución nula $\mathbf{0} \in \mathcal{K}^*$ cuando $\nu \to \infty$, dado que la secuencia de funciones converge uniformemente a 0 en toda la recta,

$$
\lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\sin(\nu x)}{\nu},\varphi(x)\right) = \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} \lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right) \varphi(x)\, dx = 0\,, \tag{52.8}
$$

$\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$.

Entonces, dado que la derivación es una operación continua en $\mathcal{K}^*$,

$$
\left(\lim_{\nu\to\infty} \frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right)' = \lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right)' = \lim_{\nu\to\infty} \cos(\nu x) = \mathbf{0}\,. \tag{52.9}
$$

Similarmente, $\lim_{\nu\to\infty} \sin(\nu x) = \mathbf{0}$. Y tomando sucesivas derivadas,

$$
\lim_{\nu\to\infty} \left[\nu^n\, \cos(\nu x)\right] = \mathbf{0} = \lim_{\nu\to\infty} \left[\nu^n\, \sin(\nu x)\right]\ . \tag{52.10}
$$

Consideremos la función discontinua

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{52.11}$$

y la distribución regular que ella define,

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx\,. \tag{52.12}$$

Su derivada resulta

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = -\,(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))\,, \tag{52.13}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{K}$. En consecuencia, $\theta'(x) = \delta(x)$.

Similarmente,

$$(\delta'(x), \varphi(x)) = -\,(\delta(x), \varphi'(x)) = -\varphi'(0)\,. \tag{52.14}$$

$\diamond$

Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$, cuya derivada es continua a trozos, con discontinuidades aisladas de altura finita en los puntos $\{a_k\}$. Ella define una distribución regular (que denotamos por f) cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= -\int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} f(x)^* \varphi'(x)\, dx = \\ &= \sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)^* \varphi(x)\, dx - \\ &- \sum_k \left\{ f(a_{k+1} - 0)^* \varphi(a_{k+1}) - f(a_k + 0)^* \varphi(a_k) \right\}, \end{aligned} \tag{52.15}$$

donde la primera suma en el miembro de la derecha es finita en razón de que φ es de soporte compacto, y la segunda es nula porque $f(x)$ es continua. Entonces, la derivada de la distribución f es una funcional regular definida por la función $f'(x)$ (este es un caso particular de distribución regular definida por una función absolutamente continua, que ya hemos considerado al principio de esta Sección - ver ec. (52.1)).

Sea ahora $f(x)$ una función continua y diferenciable a trozos, con discontinuidades aisladas (sin puntos de acumulación) de altura finita en los puntos $\{a_k\}$, donde $f(a_k+0)-f(a_k-0)=h_k$. La derivada de la distribución regular que ella define satisface

$$(f',\varphi)=-\int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} f(x)^*\varphi'(x)\,dx=$$

$$=\sum_k\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)^*\varphi(x)\,dx+\sum_k\left[f(a_k+0)^*-f(a_k-0))^*\right]\varphi(a_k) \tag{52.16}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df}{dx}^*\varphi(x)\,dx+\sum_k h_k^*\,\varphi(a_k)\,,$$

para toda $\varphi\in\mathcal{K}$. En consecuencia, la derivada de f es una funcional singular dada por

$$f'=\frac{df}{dx}+\sum_k h_k\,\delta(x-a_k)\,, \tag{52.17}$$

donde hemos llamado $\frac{df}{dx}$ a la distribución regular definida por la función $f'(x)$ (que, por hipótesis, existe en casi todo punto y es localmente integrable). Téngase en cuenta que la serie en el segundo miembro es convergente en $\mathcal{K}^*$ puesto que, aplicada a una función de soporte compacto, siempre se reduce a una suma finita.

Ejemplo: Consideremos ahora la función definida como

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ 0<x<\pi\,, \tag{52.18}$$

y extendida a toda la recta como función impar de período 2π. Esta es una función discontinua en los puntos $x_k=2\pi k$ con $k\in\mathbb{Z}$, con una discontinuidad de altura $h=\pi$ en todos ellos. Excepto en los puntos de discontinuidad, esta función es diferenciable y su derivada es $f'(x)=-1/2$.

Por el resultado anterior, podemos escribir la derivada de la función generalizada que ella define como

$$f'=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi k)\,, \tag{52.19}$$

donde la serie del segundo miembro es una funcional bien definida ya que su valor en una función $\varphi(x)\in\mathcal{K}$ se reduce a una suma finita.

La función $f(x)$ también puede ser representada mediante su serie de Fourier,

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}\,, \tag{52.20}$$

que converge puntualmente al valor de $f(x)$ para todo $x \neq 2\pi k$ y converge a 0 en los puntos de discontinuidad de $f(x)$. Como la convergencia no es uniforme, esto no es suficiente para concluir que esta serie converge en $\mathcal{K}^*$ a la distribución f.

Para ver que esa serie también converge débilmente[36], recordemos primero que la serie de Fourier de una función continua a trozos en el intervalo $(-\pi, \pi)$ puede ser integrada término a término, resultando en una serie que converge puntualmente en ese intervalo a la integral de la función (que es allí una función continua).

En nuestro caso, la serie

$$F(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \tag{52.21}$$

converge absoluta y uniformemente en toda la recta a una primitiva de $f(x)$, que es continua y 2π-periódica: $F'(x) = f(x)$ excepto en los puntos de discontinuidad de $f(x)$. Por lo tanto, el segundo miembro de la ecuación (52.21), entendida como serie de distribuciones regulares, también converge en el espacio $\mathcal{K}^*$ a la funcional regular F definida por la función (continua en $\mathbb{R}$ y diferenciable a trozos) $F(x)$.

En esas condiciones, la continuidad de la derivación en $\mathcal{K}^*$ nos permite derivar esa serie término a término para obtener

$$F' = f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \,. \tag{52.22}$$

Pero como esta serie converge en $\mathcal{K}^*$, puede ser nuevamente derivada término a término para obtener de (52.19) y (52.22)

$$f' = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) \,. \tag{52.23}$$

De esta igualdad se deduce el siguiente **desarrollo de Fourier** para la δ-periódica:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \,. \tag{52.24}$$

$\diamond$

Un razonamiento similar permite asignar un sentido como distribución a la suma de series de la forma $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}$, donde los coeficientes satisfacen relaciones $|C_k| \leq M k^{n-2}$, con M constante y $n \in \mathbb{N}$.

Entendidas como series de funciones, ellas son claramente divergentes. Pero como series de funcionales regulares resultan convergentes, dado que son la derivada n-ésima como distribución de una serie que converge uniformemente en toda la

[36]La convergencia débil también está garantizada por la convergencia en media de la serie de Fourier en todo compacto.

recta a un límite continuo y 2π-periódico (y que, por lo tanto, también converge débilmente):

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C_k}{(ik)^n}\, e^{ikx} \Rightarrow F^{(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} \,. \tag{52.25}$$

De hecho, se puede demostrar que toda distribución (regular o singular) es la derivada de cierto orden de una distribución regular definida por una función continua.

En particular, consideremos una distribución $f \in \mathcal{K}^*$ de soporte compacto, $\mathrm{Sop}\,(f) \subset [-a, a]$, con $a > 0$. Para un dado $\varepsilon > 0$, tomemos una función real $h_\varepsilon(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ que satisfaga

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1\,, \forall\, |x| \leq a\,, \\ \\ 0\,, \forall\, |x| \geq a + \varepsilon\,. \end{cases} \tag{52.26}$$

En esas condiciones, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$(f, \varphi) = (f, h_\varepsilon\, \varphi) + (f, [1 - h_\varepsilon]\, \varphi) = (f, h_\varepsilon\, \varphi)\ , \tag{52.27}$$

dado que $\mathrm{Sop}(f) \cap \mathrm{Sop}[1 - h_\varepsilon(x)] = \emptyset$.

Ahora bien, como f puede representarse como $f_0^{(n)}$, donde f_0 una distribución regular definida por una función continua $f_0(x)$ y $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \left(f_0^{(n)}, h_\varepsilon\, \varphi\right) = (-1)^n \left(f_0, (h_\varepsilon\, \varphi)^{(n)}\right) \\ &= (-1)^n \textstyle\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(f_0, h_\varepsilon^{(n-k)}\, \varphi^{(k)}\right) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\left(h_\varepsilon^{(n-k)}\, f_0\right)^{(k)}, \varphi\right) . \end{aligned} \tag{52.28}$$

Por lo tanto, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe un conjunto de funciones continuas

$$f_{\varepsilon,k}(x) = (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} h_\varepsilon(x)^{(n-k)}\, f_0(x)\,,\ k = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{52.29}$$

con soporte contenido en el intervalo cerrado $[-(a+\varepsilon), a+\varepsilon]$, tales que la distribución de soporte compacto f puede escribirse como

$$f = \sum_{k=0}^{n} \left(f_{\varepsilon,k}(x)\right)^{(k)} . \tag{52.30}$$

Si $f \in \mathcal{K}^*$ tiene soporte concentrado en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un razonamiento similar permite mostrar que en este caso la funcional es de la forma

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \delta^{(k)}(x - x_0)\,, \tag{52.31}$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Vemos entonces que las rígidas restricciones que hemos impuesto sobre las funciones del espacio $\mathcal{K}$ (que, no obstante, es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$), nos permiten obtener un conjunto muy amplio de funciones generalizadas (toda restricción del espacio conlleva una ampliación del espacio dual) sobre las cuales aplicar con gran libertad las operaciones de paso al límite y diferenciación antes definidas.

53. Ecuaciones diferenciales en $\mathcal{K}^*$

Consideraremos ahora el problema de reconstruir una función generalizada a partir de su derivada.

Primero mostraremos que sólo las distribuciones (regulares definidas por funciones) constantes tienen por derivada a la distribución nula. La igualdad $y' = \mathbf{0}$ implica que, para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, es

$$(y', \varphi) = -\,(y, \varphi') = 0\,. \tag{53.1}$$

Esta ecuación sólo define a la funcional y en el subespacio de $\mathcal{K}$ formado por las funciones $\varphi(x)$ que son la derivada de una función de prueba.

Una condición necesaria y suficiente para que $\varphi_0(x) \in \mathcal{K}$ sea la derivada de una función $\psi(x) \in \mathcal{K}$ es que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = 0$. En efecto, si $\varphi_0(x) = \psi'(x)$,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x)\, dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = 0\,. \tag{53.2}$$

Inversamente, si $\varphi_0(x)$ satisface esa condición, tenemos que la integral $\int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x')\, dx' = 0$ para todo x tal que $|x| > a[\varphi_0] > 0$ (con a finito, ya que $\varphi_0(x)$ es de soporte compacto). Entonces, la primitiva

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x')\, dx' \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})\,. \tag{53.3}$$

Ahora bien, dada una función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, en general $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = (\mathbf{1}, \varphi) = C \neq 0$ (donde $\mathbf{1}$ corresponde a la distribución regular definida por una función idénticamente igual a 1, y $C = C[\varphi]$). Sea $\varphi_1(x) \in \mathcal{K}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx = (\mathbf{1}, \varphi_1) = 1$. Entonces la diferencia $\varphi_0(x) = \varphi(x) - C\varphi_1(x)$ satisface que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = C - C = 0\,, \tag{53.4}$$

de modo que $\varphi_0(x)$ es la derivada de una función de $\mathcal{K}$ como en (53.3), $\varphi_0(x) = \psi'(x)$.

En consecuencia, podemos escribir que

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_0 + C\varphi_1) = 0 + C\,(y, \varphi_1) = \alpha^*\,(\mathbf{1}, \varphi)\ , \tag{53.5}$$

donde la constante $\alpha = (y, \varphi_1)^*$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación $y' = \mathbf{0}$ es una distribución constante, $y = \alpha\,\mathbf{1}$, donde α queda determinado por el valor que la funcional toma sobre una función particular $\varphi_1(x) \in \mathcal{K}$.

De esto resulta que si dos distribuciones tienen la misma derivada, $f' = g'$, entonces sólo difieren en una constante, $f = g + \alpha\,\mathbf{1}$.

Ahora mostraremos que toda $f \in \mathcal{K}^*$ tiene una primitiva, que es solución de $y' = f$. Esta ecuación significa que, para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$,

$$(y', \varphi) = -\,(y, \varphi') = (f, \varphi)\ , \tag{53.6}$$

lo que sólo define a la funcional y sobre el subespacio de las funciones de $\mathcal{K}$ que son la derivada de un elemento de $\mathcal{K}$.

Como mostramos anteriormente, podemos escribir una función arbitraria de $\mathcal{K}$ como $\varphi(x) = \varphi_0(x) + C\varphi_1(x)$, donde $\varphi_0(x) = \psi'(x)$, con $\psi(x)$ definida en (53.3), $C = (\mathbf{1}, \varphi)$, y $\varphi_1(x)$ es una función fija de $\mathcal{K}$ tal que $(\mathbf{1}, \varphi_1) = 1$. Entonces, de (53.6) resulta que

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_0 + C\varphi_1) = -\,(f, \psi) + C\,(y, \varphi_1) = -\,(f, \psi) + \alpha^*\,(\mathbf{1}, \varphi)\ , \tag{53.7}$$

lo que determina la funcional y en todo $\mathcal{K}$, a menos de una (distribución) constante aditiva. Esta constante es fijada por el valor que toma la funcional sobre una función particular, $\alpha = (y, \varphi_1)^*$.

Se puede ver que el último miembro de (53.7) define una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{K}$. Su primer término determina una solución particular de la ecuación inhomogénea $y' = f$ (la correspondiente a $\alpha = 0$), mientras que la constante es la solución general de la ecuación homogénea $y' = 0$.

La linealidad de y en (53.7) es evidente. Para mostrar su continuidad, consideremos una secuencia de funciones $\varphi_{(n)}(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, cuyos soportes estén contenidos en el intervalo $[-a, a]$, y formemos la secuencia $\varphi_{(n),0}(x) = \varphi_{(n)}(x) - C_n\,\varphi_1(x)$, donde $C_n = (\mathbf{1}, \varphi_{(n)})$. Esta secuencia converge a $\varphi_0(x) = \varphi(x) - C\,\varphi_1(x)$ en $\mathcal{K}$, con $C = (\mathbf{1}, \varphi)$.

Entonces,

$$|\psi_n(x) - \psi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi_{(n),0}(y) - \varphi_0(y)\right) dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{-a}^{a} |\varphi_n(y) - \varphi(y)|\ dy + |(\mathbf{1}, \varphi_n - \varphi)| \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(y)|\ dy < \tag{53.8}$$

$$< 2\,a\,\varepsilon_n + \delta_n\,,\ \forall\, x\,,$$

donde el miembro de la derecha puede hacerse tan pequeño como se quiera con sólo tomar n suficientemente grande.

En esas condiciones, la secuencia $\{\psi_n(x)\}$ también converge a $\psi(x)$ en $\mathcal{K}$, y podemos escribir

$$(y, \varphi_n - \varphi) = -\,(f, \psi_n - \psi) + \alpha^*\,(\mathbf{1}, \varphi_n - \varphi) \to 0 \tag{53.9}$$

cuando $n \to \infty$.

En particular, si la inhonogeneidad f es regular, ella está definida por una función $f(x)$ localmente sumable, de la cual $F(x) = \int_0^x f(x')\,dx'$ es una primitiva (absolutamente continua). Entonces, integrando por partes y teniendo en cuenta que $\psi(x)$ es de soporte compacto, tenemos

$$\begin{aligned} -\,(f, \psi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)^* \psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)^* \varphi_0(x)\,dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)^* \left[\varphi(x) - C\varphi_1(x)\right]\,dx = (F - \beta\,1, \varphi)\,, \end{aligned} \tag{53.10}$$

donde $\beta = (F, \varphi_1)^*$. Esto corresponde a una funcional regular definida por una primitiva de $f(x)$.

Más generalmente, la ecuación diferencial

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0\,, \tag{53.11}$$

donde $a_k(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,, k = 0, 1, \ldots, n$, no tiene otras soluciones en $\mathcal{K}^*$ que las correspondientes a las soluciones clásicas de esa ecuación en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, a menos que $a_n(x)$ tenga ceros. En ese caso pueden existir nuevas soluciones cuyas derivadas tienen soporte concentrado en los ceros de $a_n(x)$[37]. También puede ocurrir que las

[37]Puede demostrarse que toda distribución con soporte concentrado en un punto x_0 es una combinación lineal de la funcional $\delta(x - x_0)$ y de un número finito de sus derivadas (ver ec. (52.31)).

soluciones clásicas no permitan definir una distribución. Esto se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos: Consideremos la ecuación $x\,y' = 0$. Sus únicas soluciones en el espacio de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ son las constantes. En el espacio $\mathcal{K}^*$ ella implica

$$(xy', \varphi(x)) = -\left(y, [x\,\varphi(x)]'\right) = 0\,, \tag{53.12}$$

$\forall\,\varphi(x) \in \mathcal{K}$. Esta relación sólo define a la funcional y sobre el subespacio de las funciones de prueba que son la derivada de una función de $\mathcal{K}$ que se anula en $x = 0$.

Siempre podemos seleccionar dos funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{K}$ tales que

$$\begin{gathered}(\mathbf{1}, \varphi_1(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,dx = 1\,,\ (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi_1(x)) = \int_{-\infty}^{0} \varphi_1(x)\,dx = 0\,,\\ (\mathbf{1}, \varphi_2(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x)\,dx = 0\,,\ (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi_2(x)) = \int_{-\infty}^{0} \varphi_2(x)\,dx = 1\,.\end{gathered} \tag{53.13}$$

Dada $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ arbitraria, llamemos

$$C_1 = (\mathbf{1}, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx, \quad C_2 = (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx\,. \tag{53.14}$$

La función $\varphi_0(x) = \varphi(x) - C_1\varphi_1(x) - C_2\varphi_2(x)$ satisface

$$\begin{gathered}(\mathbf{1}, \varphi_0(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx, = C_1 - C_1 - 0 = 0\,,\\ (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi_0(x)) = \int_{-\infty}^{0} \varphi_0(x)\,dx = C_2 - 0 - C_2 = 0\,.\end{gathered} \tag{53.15}$$

En consecuencia, su primitiva $\psi(x)$, definida como en (53.3), es una función de $\mathcal{K}$ que se anula en el origen. Por lo tanto, por (53.12) tenemos que para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ es

$$\begin{gathered}(y, \varphi) = (y, \psi'(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)) =\\ = 0 + C_1\,(y, \varphi_1(x)) + C_2\,(y, \varphi_2(x)) = (\alpha\mathbf{1} + \beta(\mathbf{1} - \theta(x)), \varphi)\ ,\end{gathered} \tag{53.16}$$

donde $\alpha = (y, \varphi_1)^*$ y $\beta = (y, \varphi_2)^*$.

Vemos entonces que hay dos soluciones linealmente independientes para la e-cuación $x\,y' = \mathbf{0}$: $y_1 = \mathbf{1}$ y $y_2 = \theta(x)$. Esto es evidente para la primera, y es fácil de verificar para la segunda,

$$(x\,\theta'(x), \varphi(x)) = (\delta(x), x\,\varphi(x)) = [x\,\varphi(x)]_{x=0} = 0\,. \tag{53.17}$$

Esto también muestra que $x\,\delta(x) = \mathbf{0}$.

Consideremos ahora la ecuación diferencial $x^3y' + 2y = 0$. La solución clásica en el espacio de funciones corresponde a

$$\frac{d}{dx}\,\log y(x) = \frac{d}{dx}\,x^{-2} \Rightarrow y(x) = C\,e^{1/x^2}\,. \tag{53.18}$$

Pero como esta función no es integrable en ningún intervalo que contenga a $x = 0$, ella no permite definir una funcional regular. Más aún, dado que presenta una singularidad esencial en el origen, tampoco admite una **regularización** que permita definir una distribución singular (al estilo de $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$). De ese modo, la única solución en $\mathcal{K}^*$ es la trivial, $y = \mathbf{0}$. ◇

54. La distribución x_+^λ

Consideremos la función

$$x_+^\lambda := \begin{cases} 0, \ \text{para } x \leq 0\,, \\ \\ x^\lambda, \ \text{para } x > 0\,, \end{cases} \tag{54.1}$$

para $-1 < \lambda < 0$. Como es localmente integrable, permite definir una distribución regular como

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx, \quad -1 < \lambda < 0\,. \tag{54.2}$$

Su derivada como función,

$$\frac{d\,x_+^\lambda}{dx} = \begin{cases} 0, \ \text{para } x < 0\,, \\ \\ \lambda\,x^{\lambda-1}, \ \text{para } x > 0\,, \end{cases} \tag{54.3}$$

no es integrable en ningún intervalo que contenga al origen, y no corresponde a una distribución regular.

Pero, naturalmente, su derivada como distribución existe y está dada por

$$\begin{array}{c} \big((x_+^\lambda)', \varphi\big) = -\,\big(x_+^\lambda, \varphi'\big) = -\displaystyle\int_0^1 x^\lambda \varphi'(x)\,dx - \int_1^\infty x^\lambda \varphi'(x)\,dx = \\ \\ = -\,\big(x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0)]\big)\Big|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx \\ \\ -\,\big(x^\lambda \varphi(x)\big)\Big|_1^\infty + \displaystyle\int_1^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx = \\ \\ = \displaystyle\int_0^1 \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_1^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\,, \end{array} \tag{54.4}$$

para todo $-1 < \lambda < 0$. Esta expresión define una funcional singular que, para funciones de prueba que se anulan en $x = 0$, se reduce a tomar la integral

$$\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\,dx\,. \tag{54.5}$$

Para funciones de prueba arbitrarias, $\varphi(0) \neq 0$, y la última línea de la ecuación (54.4) constituye una **regularización** de la integral en (54.5), que en ese caso es divergente.

Teniendo en cuenta (54.3), resulta natural definir la funcional x_+^λ, para $-2 < \lambda < -1$, a partir de la ecuación (54.4) como

$$x_+^\lambda := \left(\frac{x_+^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right)'\,, \tag{54.6}$$

que evidentemente es lineal y continua en $\mathcal{K}$.

En esas condiciones, para $-2 < \lambda < 0$, $\lambda \neq -1$ y $\forall\,\varphi \in \mathcal{K}$, tenemos

$$\left(x_+^\lambda, \varphi\right) = \int_0^1 x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}\,, \tag{54.7}$$

expresión que se reduce a (54.2) para $-1 < \lambda < 0$.

Extendiendo de ese modo la definición de x_+^λ, hemos obtenido una expresión para los valores que esa funcional toma sobre funciones de $\mathcal{K}$ que tiene sentido en una región más amplia del parámetro λ, y que se reduce a la expresión original para $-1 < \lambda < 0$. De hecho, el segundo miembro de (54.7) constituye una **extensión analítica** en λ del segundo miembro de (54.2).

En efecto, para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, $F(\lambda^*) := (x_+^\lambda, \varphi)$ es una función analítica de λ^* en la región $-1 < \Re(\lambda) < 0$ (donde la funcional es regular). Su derivada está dada por $\frac{dF}{d\lambda^*} = \int_0^\infty \ln x\, x^{\lambda^*}\varphi(x)\,dx$, ya que esta integral es absoluta y uniformemente convergente para esos valores de λ. La extensión analítica de $F(\lambda^*)$ permite definir la funcional x_+^λ para todo valor de λ donde aquella existe.

En ese sentido, para $-1 < \lambda < 0$ podemos escribir (x_+^λ, φ) de la forma[38]

$$
\begin{aligned}
\left(x_+^\lambda, \varphi\right) = \int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right] dx + \\
+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+1+k)} \,.
\end{aligned}
\tag{54.10}
$$

Ahora bien, como funciones de λ, la primer integral en el miembro de la derecha de (54.10) converge para $\Re(\lambda) > -n-1$, la segunda converge $\forall\lambda$ complejo, mientras que la última suma presenta polos simples en $\lambda = -1, -2, ..., -n$, cuyos residuos son

$$
\operatorname{Res}\,(x_+^\lambda, \varphi)\big|_{\lambda=-k-1} = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\delta^{(k)}(x), \varphi(x)\right) \,. \tag{54.11}
$$

[38]Este procedimiento es similar al que permite extender analíticamente la definición de la función $\Gamma(\lambda)$: para $\lambda > -1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\lambda+1) := \int_0^\infty x^\lambda e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^\lambda \left[e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right] dx + \int_1^\infty x^\lambda e^{-x}\, dx + \\
+ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(\lambda+1+k)} \,,
\end{aligned}
\tag{54.8}
$$

expresión que se extiende analíticamente a $\Re(\lambda) > -n-1$, y presenta polos simples en $\lambda = -1, -2, ...,$ con residuos dados por

$$
\operatorname{Res}\Gamma(\lambda+1)|_{\lambda=-k-1} = \frac{(-1)^k}{k!} \,. \tag{54.9}
$$

Podemos decir entonces que la distribución x_+^λ se extiende analíticamente[39] a todo el plano complejo del parámetro λ, presentando polos simples en los puntos $\lambda = -1, -2, ..., -n$, con residuos dados por las distribuciones

$$\text{(54.16)} \qquad \operatorname{Res} x_+^\lambda\big|_{\lambda=-k-1} = \frac{(-1)^k}{k!}\,\delta^{(k)}(x)\,.$$

Nótese que $\forall\,\varphi(x) \in \mathcal{K}$ con soporte contenido en la semirrecta $x < 0$, la función (x_+^λ, φ) es idénticamente nula para $\Re(\lambda) \in (-1, 0)$. En consecuencia, su extensión analítica al resto del plano toma también valores nulos para tales funciones de prueba. Es decir, el soporte de la extensión analítica de x_+^λ también está contenido en el semieje positivo $x \geq 0$.

Finalmente, señalemos que $x_+^{\lambda-1}$ y $\Gamma(\lambda)$ presentan polos simples para los mismos valores de λ ($\lambda = -k$, con $k \in \mathbb{N}$). Entonces, la distribución $\Phi_\lambda := x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$, que es regular para $\Re(\lambda) > 0$, existe por extensión analítica en todo el plano complejo del parámetro λ como una distribución con soporte en $\mathbb{R}^+$. En particular, de (54.16) y (54.9) tenemos que

$$\text{(54.17)} \qquad \lim_{\lambda\to -k} \Phi_\lambda = \frac{\operatorname{Res} x_+^{\lambda-1}\big|_{\lambda=-k}}{\operatorname{Res}\Gamma(\lambda)\big|_{\lambda=-k}} = \frac{(-1)^k\delta^{(k)}(x)/k!}{(-1)^k/k!} = \delta^{(k)}(x)\,,$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

---

[39]Este procedimiento de definición de funcionales por extensión analítica en un parámetro es conocido como proceso de **regularización de integrales divergentes**, y suele ser muy usado en Física por conveniencia de cálculo. Por ejemplo, la integral

$$\text{(54.12)} \qquad I = \int_0^\infty x^{-3/2}\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right) dx$$

puede ser entendida como el valor en $\lambda = -3/2$ de la función analítica definida por

$$\text{(54.13)} \qquad I(\lambda) = \int_0^\infty x^\lambda\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right) dx\,,$$

integral que converge para $\Re(\lambda) > -2$. Pero para $\Re(\lambda) > -1$, $I(\lambda)$ puede ser escrita como

$$\text{(54.14)} \qquad I(\lambda) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-ax}\,dx - \int_0^\infty x^\lambda e^{-ax}\,dx = \left(a^{-(\lambda+1)} - b^{-(\lambda+1)}\right)\Gamma(\lambda+1)\,,$$

ya que cada integral es convergente. En virtud de la unicidad de la extensión analítica, esa igualdad vale $\forall\lambda \neq -1, -2, ...$ En particular,

$$\text{(54.15)} \qquad I(-3/2) = \left(a^{1/2} - b^{1/2}\right)\Gamma(-1/2) = -\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) 2\sqrt{\pi}\,.$$

◇

55. Transformación de Fourier en $\mathcal{K}$. El espacio Z.

Recordemos que el conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es un subespacio denso del espacio de Schwartz[40]. Sea $\varphi(x) \in \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$. Entonces, su transformada de Fourier es también una función del espacio de Schwartz, dado que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$.

Pero como esa función es de soporte compacto tenemos

$$\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-i\sigma x} \varphi(x)\, dx \,, \tag{55.1}$$

donde $\varphi(x) = 0 \; \forall \, x \notin (-a[\varphi], a[\varphi])$. En esas condiciones, $\psi(s)$ puede ser definida para valores complejos de su argumento, $s = \sigma + i\tau$. En efecto, la integral

$$\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-i\sigma x} e^{\tau x} \varphi(x)\, dx \tag{55.2}$$

existe para todo $s \in \mathbb{C}$, puesto que

$$|\psi(s)| \leq \frac{e^{|\tau| a} \, ||\varphi(x)||_1}{\sqrt{2\pi}} \,. \tag{55.3}$$

Similarmente, las derivadas de todo orden de $\psi(s)$ también existen en todo el plano complejo. Ellas están dadas por

$$\psi^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-isx} (-ix)^n \varphi(x)\, dx \,, \tag{55.4}$$

dado que esas integrales convergen absoluta y uniformemente en s para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\psi^{(n)}(s)\right| \leq \frac{e^{Ta} \, ||x^n \, \varphi(x)||_1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{para } |\Im(s)| \leq T, \text{ con } T > 0 \,. \tag{55.5}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de una función del espacio $\mathcal{K}$ es una función analítica entera (holomorfa en todo el plano - sin singularidades, excepto en el infinito).

Ya sabemos que dicha transformada de Fourier es también una función de decrecimiento rápido sobre el eje real. Para s complejo tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi^{(q)}](s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-isx} \varphi^{(q)}(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} (is)^q \, e^{-isx} \varphi(x)\, dx = (is)^q \; \psi(s) \,. \end{aligned} \tag{55.6}$$

para todo q, de donde resulta que

$$|s^q \psi(s)| \leq \frac{e^{|\Im(s)| \, a} ||\varphi^{(q)}||_1}{\sqrt{2\pi}} \,. \tag{55.7}$$

---

[40]Ver las *Notas sobre la transformación de Fourier.*

En consecuencia, $\psi(s)$ es una función de decrecimiento rápido sobre toda recta horizontal ($\Im(s) =$ constante).

Inversamente, toda función analítica entera $\psi(s)$ que verifica desigualdades de la forma

$$|s^q \psi(s)| \leq K_q[\psi]\, e^{|\Im(s)|\, a[\psi]}, \ \forall\, q \in \mathbb{N} \tag{55.8}$$

(donde las constantes K_q y a dependen de $\psi(s)$) es la transformada de Fourier de una función $\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ que se anula idénticamente para $|x| \geq a$.

El conjunto de las funciones analíticas enteras que verifican (55.8) constituye un espacio lineal, denotado por $\mathcal{Z}$. De ese modo, la transformación de Fourier establece una correspondencia biunívoca entre los espacios $\mathcal{K}$ y $\mathcal{Z}$,

$$\mathcal{F} : \mathcal{K} \leftrightarrow \mathcal{Z}\,. \tag{55.9}$$

Restringiendo los argumentos de las funciones contenidas en $\mathcal{Z}$ a valores reales, tenemos que $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S}$ es un subespacio denso de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En efecto, sea $\chi(\sigma) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, y supongamos que $\chi(\sigma) \perp \mathcal{Z}$. Entonces,

$$\begin{array}{c} (\chi, \psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = 0, \ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathcal{F}^{-1}[\chi](x), \varphi(x))_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = 0, \ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \end{array} \tag{55.10}$$

Y como $\mathcal{K} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, es $\mathcal{F}^{-1}[\chi] = \mathbf{0} \Rightarrow \chi = \mathbf{0}$. Por lo tanto, todo vector de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ está contenido en $\overline{\mathcal{Z}}$.

La ecuación (55.4) muestra que si $\psi(s) \in \mathcal{Z} \Rightarrow \psi^{(q)}(s) \in \mathcal{Z}$, dado que $[(-ix)^n \varphi(x)] \in \mathcal{K}$. Es decir,

$$\frac{d}{ds} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}\,. \tag{55.11}$$

Evidentemente, el espacio $\mathcal{Z}$ también es invariante frente al producto por funciones analíticas enteras de crecimiento polinomial sobre rectas horizontales (en particular, polinomios): si $P(s)$ es una función entera que, para ciertas constantes $C > 0$ y $m \geq 0$ y $b > 0$, satisface

$$|P(s)| \leq C\ (1 + |s|^m)\, e^{|\Im(s)|b} \Rightarrow P(s)\psi(s) \in \mathcal{Z}, \ \forall\, \psi(s) \in \mathcal{Z}\,. \tag{55.12}$$

También es posible trasladar las funciones de $\mathcal{Z}$ sin sacarlas de ese espacio. En efecto, si $\psi(s) \in \mathcal{Z} \Rightarrow \psi(s+h) \in \mathcal{Z}, \forall\, h \in \mathbb{C}$.

Por lo dicho anteriormente, vemos que la transformación de Fourier establece una correspondencia (lineal) biunívoca entre el espacio $\mathcal{K}$ y el espacio $\mathcal{Z}$, $\mathcal{F} : \mathcal{K} \leftrightarrow$

$\mathcal{Z}$. Esto permite introducir en $\mathcal{Z}$ un **sentido de convergencia** a partir de la convergencia en $\mathcal{K}$.

Definición 55.1. Se dice que $\psi_n(s) \to \psi(s)$ en $\mathcal{Z}$ si $\varphi_n(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi_n](x) \to \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x)$ en $\mathcal{K}$.

Esto implica, en particular, la convergencia uniforme en toda región acotada del plano complejo de la secuencia de las derivadas $\psi_n^{(k)}(s)$ a la correspondiente derivada del límite, $\psi^{(k)}(s)$. En efecto[41], como $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_n\,, \forall\, x$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\psi_n^{(k)}(s) - \psi^{(k)}(s)\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-a}^{a} e^{-isx} (-ix)^k \left[\varphi_n(x) - \varphi(x)\right] \right| \leq \\ &\leq \frac{a^k\, e^{|\Im(s)|\, a}}{\sqrt{2\pi}}\ ||\varphi_n(x) - \varphi(x)||_1 \leq \frac{a^k\, e^{T\, a}}{\sqrt{2\pi}}\ 2\, a\, \varepsilon_n\,, \end{aligned} \tag{55.14}$$

$\forall\, |\Im(s)| \leq T$, lo que puede hacerse tan pequeño como se quiera con sólo tomar n suficientemente grande.

Por otra parte, como $\psi(s) \in \mathcal{Z}$ es una función analítica entera, su series de Taylor converge en todo el plano complejo. Entonces, para la función trasladada podemos escribir

$$\psi(s+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\, \psi^{(k)}(s), \forall\, h \in \mathbb{C}\,. \tag{55.15}$$

Esta serie también converge en el sentido de la convergencia en el espacio $\mathcal{Z}$, pues

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\, \psi^{(k)}(s)\right](x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\ \mathcal{F}^{-1}\left[\psi^{(k)}(s)\right](x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\, (-ix)^k\, \varphi(x) \longrightarrow_{n\to\infty} e^{-ihx}\varphi(x) \end{aligned} \tag{55.16}$$

en el sentido de la convergencia en $\mathcal{K}$.

---

[41]Similarmente,

$$\begin{aligned} \left|(is)^q\left[\psi_n^{(k)}(s) - \psi^{(k)}(s)\right]\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-a}^{a} e^{-isx} \left\{(-ix)^k \left[\varphi_n(x) - \varphi(x)\right]\right\}^{(q)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{|\Im(s)|\, a}\, ||\left\{x^k\left[\varphi_n(x) - \varphi(x)\right]\right\}^{(q)}||_1 \to 0 \end{aligned} \tag{55.13}$$

cuando $n \to \infty$.

56. Distribuciones sobre $\mathcal{Z}$

De forma similar a como se hizo con el espacio $\mathcal{K}$, se introducen las funcionales lineales y continuas sobre el espacio $\mathcal{Z}$. Estas **distribuciones**, que pueden ser **regulares** o **singulares** (con el mismo significado que antes), conforman el espacio dual $\mathcal{Z}^*$ respecto de operaciones lineales definidas de la misma manera que antes.

Además, se define la convergencia débil en $\mathcal{Z}^*$ de modo que

$$g_n \to g \text{ si } (g_n, \psi) \to (g, \psi)\,,\ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,. \tag{56.1}$$

También se define una operación de derivación sobre elementos de $\mathcal{Z}^*$ de modo que, para toda función $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$, la distribución derivada satisface

$$(g', \psi) = -\,(g, \psi')\ . \tag{56.2}$$

Al igual que la derivación en $\mathcal{K}^*$, ésta es una operación continua: si $g_n \to g$ en $\mathcal{Z}^*$, entonces $(g_n', \psi) = -(g_n, \psi') \to -(g, \psi') = (g', \psi)$.

En particular, $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Z}^*$. En efecto, si $g(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, ella permite definir una distribución regular sobre $\mathcal{Z}$ como el producto escalar

$$(g, \psi) := (g, \psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})}\ . \tag{56.3}$$

Esta funcional es evidentemente lineal. Para ver que también es continua, tomemos una secuencia $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ en $\mathcal{Z}$. Esto significa que sus antitransformadas de Fourier $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$ y, por lo tanto, también convergen en media. En esas condiciones, siendo $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[g](x)$ (en el sentido de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$), y teniendo en cuenta las propiedades de $\mathcal{F}$ y la continuidad del producto escalar en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, tenemos

$$\begin{aligned} &(g, \psi_n) = (g, \psi_n)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (f, \varphi_n)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} \to_{n\to\infty} \\ &\to (f, \varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g, \psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g, \psi)\ . \end{aligned} \tag{56.4}$$

57. Transformada de Fourier en $\mathcal{K}^*$

Hemos visto que la transformada de Fourier establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de los espacios $\mathcal{K}$ y $\mathcal{Z}$, que preserva las operaciones lineales y la convergencia de secuencias. Es posible establecer una correspondencia similar entre los respectivos espacios duales, $\mathcal{K}^*$ y $\mathcal{Z}^*$, que generaliza la correspondencia inducida por $\mathcal{F}$ entre sus subespacios $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

En efecto, para toda $f(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, cuya transformada $g(\sigma) = \mathcal{F}[f](\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, y para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, cuya transformada $\psi(\sigma) = \mathcal{F}[\varphi](\sigma) \in \mathcal{Z}$, tenemos

$$(57.1) \qquad (f,\varphi)_{\mathcal{K}} = (f,\varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g,\psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g,\psi)_{\mathcal{Z}} \ ,$$

donde hemos incluido como subíndice el espacio en que actúa cada funcional.

Definición 57.1. Dada $f \in \mathcal{K}^*$ diremos que $g \in \mathcal{Z}^*$ es su **transformada de Fourier** si, para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$, se cumple que

$$(57.2) \qquad (g,\psi)_{\mathcal{Z}} = (f,\varphi)_{\mathcal{K}} \ ,$$

donde $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) \in \mathcal{K}$. Esta relación puede entenderse como una generalización de la igualdad de Parseval.

Cada distribución $f \in \mathcal{K}^*$ define, a través de esa relación, una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{Z}$, que denotamos por $\mathcal{F}[f]$:

$$(57.3) \qquad (\mathcal{F}[f],\psi)_{\mathcal{Z}} := \left(f, \mathcal{F}^{-1}[\psi]\right)_{\mathcal{K}} \ .$$

En efecto, es evidente que $\mathcal{F}[f]$ así definida es lineal. Veamos que también es continua. Consideremos una secuencia convergente $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$; sus transformadas de Fourier $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ en $\mathcal{Z}$. Entonces, de (57.3) resulta que

$$(57.4) \qquad (\mathcal{F}[f],\psi_n)_{\mathcal{Z}} = (f,\varphi_n)_{\mathcal{K}} \to (f,\varphi)_{\mathcal{K}} = (\mathcal{F}[f],\psi)_{\mathcal{Z}} \ ,$$

dada la continuidad de f.

En ese sentido, toda distribución sobre $\mathcal{K}$ tiene una transformada de Fourier, que es un elemento de $\mathcal{Z}^*$,

$$(57.5) \qquad \mathcal{F} : \mathcal{K}^* \to \mathcal{Z}^* \ .$$

Además, si $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^*$ tienen la misma transformada, $\mathcal{F}[f_1] = \mathcal{F}[f_2] \in \mathcal{Z}^* \Rightarrow f_1 = f_2$.

Inversamente, toda distribución sobre $\mathcal{Z}$ define, a través de (57.2), una distribución sobre $\mathcal{K}$ de la que es su transformada de Fourier. En consecuencia, $\mathcal{F}$ es una aplicación biunívoca de $\mathcal{K}^*$ sobre $\mathcal{Z}^*$, $\mathcal{F} : \mathcal{K}^* \leftrightarrow \mathcal{Z}^*$. Su inversa, $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Z}^* \to \mathcal{K}^*$, satisface que

$$(57.6) \qquad \left(\mathcal{F}^{-1}[g],\varphi\right)_{\mathcal{K}} = (g,\mathcal{F}[\varphi])_{\mathcal{Z}} \ , \ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K} \, ,$$

y se tiene que $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right] = f, \ \forall\, f \in \mathcal{K}^*$ y $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[g]\right] = g, \ \forall\, g \in \mathcal{Z}^*$.

La transformación de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{K}^* \to \mathcal{Z}^*$ es una aplicación continua (respecto de la convergencia débil de funcionales). En efecto, si $f_n \to f$ en el espacio $\mathcal{K}^*$ entonces, para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$, se tiene

$$(\mathcal{F}[f_n], \psi)_{\mathcal{Z}} = (f_n, \varphi)_{\mathcal{K}} \to (f, \varphi)_{\mathcal{K}} = (\mathcal{F}[f], \psi)_{\mathcal{Z}} \ , \tag{57.7}$$

donde $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x)$. Por lo tanto, también se tiene que $\mathcal{F}[f_n] \to \mathcal{F}[f]$ en $\mathcal{Z}^*$.

Similarmente, su inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Z}^* \to \mathcal{K}^*$ es también una aplicación continua.

Puede comprobarse fácilmente que son válidas las mismas fórmulas que para las transformadas y antitransformadas de Fourier de derivadas de funciones en $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}[f]' = \mathcal{F}[-ix\, f] \Rightarrow \mathcal{F}[P(x)\, f] = P(i\tfrac{d}{d\sigma})\mathcal{F}[f]\,, \\ &\mathcal{F}[f'] = i\sigma\, \mathcal{F}[f] \Rightarrow P(\sigma)\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[P(-i\tfrac{d}{dx})\, f]\,. \end{aligned} \tag{57.8}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}[f]', \psi(\sigma))_{\mathcal{Z}} = -\,(\mathcal{F}[f], \psi'(\sigma))_{\mathcal{Z}} = -\,(f, -ix\varphi(x))_{\mathcal{K}} = \\ &= (-ixf, \varphi(x))_{\mathcal{K}} = (\mathcal{F}[-ixf], \psi(\sigma))_{\mathcal{Z}} \ , \ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,. \end{aligned} \tag{57.9}$$

Ejemplos: La trasformada de Fourier de la distribución $\delta(x)$ está dada por

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}[\delta(x)], \psi(\sigma))_{\mathcal{Z}} = (\delta(x), \varphi(x))_{\mathcal{K}} = \varphi(0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, d\sigma = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}}, \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} \ , \ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,. \end{aligned} \tag{57.10}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}[\delta(x)] = \mathbf{1}/\sqrt{2\pi}$.

Similarmente, para la transformada de Fourier de una constante tenemos

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}[\mathbf{1}], \psi(\sigma))_{\mathcal{Z}} = (\mathbf{1}, \varphi(x))_{\mathcal{K}} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\, \psi(0) = \\ &= \left(\sqrt{2\pi}\, \delta(\sigma), \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} \end{aligned} \tag{57.11}$$

para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$. Entonces, $\mathcal{F}[\mathbf{1}] = \sqrt{2\pi}\, \delta(\sigma)$.

Consideremos ahora un polinomio $P(x)$ ($\notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$). Tenemos

$$\mathcal{F}[P(x)] = \mathcal{F}[P(x)\, \mathbf{1}] = P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right) \mathcal{F}[\mathbf{1}] = \sqrt{2\pi}\, P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right) \delta(\sigma)\,, \tag{57.12}$$

que es una distribución con soporte concentrado en el origen.

Similarmente,

$$\mathcal{F}\left[P\left(-i\frac{d}{dx}\right)\,\delta(x)\right]=P(\sigma)\mathcal{F}[\delta(x)]=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}}\,P(\sigma)\,. \tag{57.13}$$

La función $e^{bx}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ define una distribución regular y, en ese sentido, tiene una transformada de Fourier. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\big(\mathcal{F}[e^{b\,x}],\psi(\sigma)\big)_{\mathcal{Z}}=\big(e^{b\,x}\,\mathbf{1},\varphi(x)\big)_{\mathcal{K}}=\big(\mathbf{1},e^{b^*x}\,\varphi(x)\big)_{\mathcal{K}}=\\
&\left(\sqrt{2\pi}\,\delta(\sigma),\psi\left(\sigma-(ib)^*\right)\right)_{\mathcal{Z}}=\sqrt{2\pi}\,\psi\left(-(ib)^*\right)=\\
&=\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((-ib)^*\right)^k}{k!}\,\psi^{(k)}(0)=\\
&=\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((-ib)^*\right)^k}{k!}\,\left((-1)^k\delta^{(k)}(\sigma),\psi(\sigma)\right)\,,
\end{aligned} \tag{57.14}$$

para toda función (entera) $\psi(\sigma)\in\mathcal{Z}$. Entonces,

$$\delta(\sigma+ib):=\mathcal{F}[e^{b\,x}](\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ib)^k}{k!}\,\delta^{(k)}(\sigma)\,, \tag{57.15}$$

donde la serie (formalmente una serie de Taylor) converge débilmente a una distribución que toma valores nulos sobre toda función de $\mathcal{Z}$ que se anule en $s=(-ib)^*$. $\diamond$

En el caso general, el hecho de que las funciones del espacio $\mathcal{Z}$ sean analíticas enteras permite definir funcionales trasladadas, $g(\sigma)\to g(\sigma+h)$, mediante la relación

$$\left(g(\sigma+h),\psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}:=\left(g(\sigma),\psi(\sigma-h^*)\right)_{\mathcal{Z}}\,,\ \forall\,\psi(\sigma)\in\mathcal{Z}\,, \tag{57.16}$$

lo que evidentemente corresponde a una funcional lineal y continua.

Teniendo en cuenta que la serie de Taylor para $\psi(\sigma)$ también converge en $\mathcal{Z}$, y que g es continua, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left(g(\sigma+h),\psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-h^*)^k}{k!}\,\left(g(\sigma),\psi^{(k)}(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}=\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\,g^{(k)}(\sigma),\psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}\,,
\end{aligned} \tag{57.17}$$

de donde resulta la convergencia débil de la serie

$$g(\sigma + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\, g^{(k)}(\sigma)\,. \tag{57.18}$$

En ese sentido, las distribuciones sobre $\mathcal{Z}$ son analíticas enteras.

Consideremos ahora una distribución $f \in \mathcal{K}^*$ de soporte compacto contenido en $[-a, a]$. Ya sabemos que, $\forall\, \varepsilon > 0$, tales funcionales pueden ser representadas como sumas de derivadas de distribuciones regulares definidas por funciones continuas $f_{\varepsilon,k}(x)$ con soporte contenido en $[-(a+\varepsilon), a+\varepsilon]$ (ver ec. (52.30)),

$$f = \sum_{k=0}^{n} \left(f_{\varepsilon,k}(x)\right)^{(k)}. \tag{57.19}$$

Su transformada de Fourier está dada por

$$\begin{array}{c} (\mathcal{F}[f], \psi)_{\mathcal{Z}} = (f, \mathcal{F}^{-1}[\psi])_{\mathcal{K}} = \\ \\ = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(f_{\varepsilon,k}(x), (\mathcal{F}^{-1}[\psi](x))^{(k)}\right)_{\mathcal{K}} = \\ \\ = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\mathcal{F}[f_{\varepsilon,k}(x)], (i\,\sigma)^k \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = \\ \\ = \left(\sum_{k=0}^{n} (i\,\sigma)^k g_{\varepsilon,k}(\sigma), \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}\,, \end{array} \tag{57.20}$$

donde

$$g_{\varepsilon,k}(s) := \mathcal{F}[f_{\varepsilon,k}(x)](s) = \int_{-(a+\varepsilon)}^{a+\varepsilon} e^{-i\,s\,x} f_{\varepsilon,k}(x)\, dx\,, \tag{57.21}$$

la transformada de Fourier de una función continua de soporte compacto, es una función analítica entera de su argumento que satisface

$$\left|g_{\varepsilon,k}^{(q)}(s)\right| \leq e^{|\Im(s)|(a+\varepsilon)}\ \frac{(a+\varepsilon)^q}{\sqrt{2\pi}}\ \|\ f_{\varepsilon,k}(x)\ \|_1\ . \tag{57.22}$$

En consecuencia, $\forall\, \varepsilon > 0$, la transformada de Fourier de una distribución de soporte compacto puede ser representada como una distribución regular definida por una función analítica entera de crecimiento polinomial (sobre el eje real),

$$\mathcal{F}[f] = g(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} (i\,\sigma)^k g_{\varepsilon,k}(\sigma)\,. \tag{57.23}$$

Ejemplo: Finalmente obtendremos la transformada de Fourier de la distribución x_+^{λ}. Para ello tendremos en cuenta que $\mathcal{F} : \mathcal{K}^* \to \mathcal{Z}^*$ es una aplicación continua.

Consideremos la función (localmente integrable) $e^{-\tau x}x_+^\lambda$, con $\tau > 0$ y $\lambda > 0$, que converge uniformemente a x_+^λ en todo intervalo cerrado $[a,b]$, para $\tau \to 0^+$. Entonces, también converge débilmente:

$$\lim_{\tau\to 0^+} e^{-\tau x}x_+^\lambda = x_+^\lambda \text{ en } \mathcal{K}^* \Rightarrow \lim_{\tau\to 0^+} \mathcal{F}\left[e^{-\tau x}x_+^\lambda\right] = \mathcal{F}\left[x_+^\lambda\right] \text{ en } \mathcal{Z}^* . \tag{57.24}$$

Ahora bien, para $\tau > 0$ y $\lambda > 0$, $e^{-\tau x}x_+^\lambda \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, por lo que su transformada de Fourier como distribución es una funcional regular determinada por su transformada como función. Teniendo en cuenta que, además, $e^{-\tau x}x_+^\lambda \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, dicha transformada está dada por la integral

$$\mathcal{F}\left[e^{-\tau x}x_+^\lambda\right](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i(\sigma-i\tau)x}x^\lambda\,dx\,. \tag{57.25}$$

Cambiando la variable de integración por $\xi = (\sigma - i\tau)x$, y corriendo el camino de integración de la recta $[0,(\sigma-i\tau)\infty)$ al semieje imaginario negativo, $[0,-i\infty)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-\tau x}x_+^\lambda\right](\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma-i\tau)^{-\lambda-1}\int_0^{-i\infty} e^{-i\xi}\xi^\lambda\,d\xi = \\ &= \frac{e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}(\sigma-i\tau)^{-\lambda-1}\int_0^\infty e^{-\eta}\eta^\lambda\,d\eta = \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)\,e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}(\sigma-i\tau)^{-\lambda-1}\,.\end{aligned} \tag{57.26}$$

En esas condiciones,

$$\mathcal{F}\left[x_+^\lambda\right] = \frac{\Gamma(\lambda+1)\,e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}(\sigma-i0)^{-\lambda-1}\,, \tag{57.27}$$

donde

$$(\sigma-i0)^{-\lambda-1} := \lim_{\tau\to 0^+}(\sigma-i\tau)^{-\lambda-1}\,. \tag{57.28}$$

Por otra parte, para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$ y $\forall\,\lambda > 0$,

$$\left(\mathcal{F}[x_+^\lambda],\psi\right)_{\mathcal{Z}} = \left(x_+^\lambda,\varphi\right)_{\mathcal{K}}\,, \tag{57.29}$$

donde $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x)$. Pero ya hemos visto que el miembro de la derecha se extiende analíticamente (de manera única) a todo el plano complejo de la variable λ, presentando polos simples en $\lambda = -1. -2, \ldots$ Por lo tanto, la funcional $\mathcal{F}\left[x_+^\lambda\right]$ también se extiende analíticamente a todo el plano λ, presentando los mismos polos. De (57.29) resulta que dicha extensión representa la transformada de Fourier de la extensión analítica de x_+^λ para todo $\lambda \neq -1, -2, \ldots$.

En particular, la funcional $\Phi_{\lambda+1} := x_+^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$ existe en todo el plano complejo λ, y tiene por transformada de Fourier a

$$\mathcal{F}\left[\Phi_{\lambda+1}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = \frac{e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}\,(\sigma - i0)^{-\lambda-1}\,. \tag{57.30}$$

◇

58. Distribuciones temperadas

El conjunto de las funcionales lineales y continuas (respecto de la convergencia uniforme de las derivadas de todo orden en toda la recta) definidas sobre el espacio de Schwartz, $\mathcal{S} \supset \mathcal{K}$, constituye el espacio de las **distribuciones temperadas**, $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{K}^*$[42].

El nombre se justifica por el hecho de que este subespacio de $\mathcal{K}^*$ no contiene distribuciones regulares de crecimiento rápido, como $e^{b\,x}$ con $\Re(b) \neq 0$, que sí tienen sentido sobre $\mathcal{K}$.

Las definiciones de las operaciones lineales, de derivación y pasaje al límite en $\mathcal{S}^*$ son enteramente similares a las dadas anteriormente, y no serán repetidas aquí.

También se puede definir el producto de distribuciones temperadas por funciones con derivadas de todo orden de crecimiento polinomial: $h(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$\left|h^{(q)}(x)\right| \leq C_q\,(1+|x|)^{k_q}\,,\ q = 0,1,2,\ldots, \tag{58.1}$$

para ciertas constantes C_q y k_q que dependen de $h(x)$.

Se puede demostrar que toda distribución sobre el espacio $\mathcal{S}$ es la derivada de cierto orden de una distribución regular definida por una función continua de crecimiento polinomial.

Por otra parte, dado que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$, resulta que las transformadas de Fourier de distribuciones sobre $\mathcal{S}$ son también funcionales sobre ese mismo espacio. De hecho, $\mathcal{F}$ es una aplicación biunívoca sobre $\mathcal{S}^*$,

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}^* \leftrightarrow \mathcal{S}^*\,. \tag{58.2}$$

59. Producto directo de distribuciones

Sea $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Puede definirse una funcional lineal y continua (respecto de la convergencia uniforme de las derivadas parciales de todo orden) sobre ese espacio mediante el **producto directo** de dos distribuciones en una variable:

$$\left(f(x)\times g(y), \varphi(x,y)\right) := \left(f(x), \left(g(y), \varphi(x,y)\right)\right)\,. \tag{59.1}$$

[42]Nótese que, como $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}^* \subset \mathcal{Z}^*$

En efecto, para x fijo, $\varphi(x,y) \in \mathcal{K}_y$, de modo que tiene sentido tomar

$$\chi(x) := (g(y), \varphi(x,y)) \ , \tag{59.2}$$

lo que define una función de soporte compacto (dado que $\varphi(x,y)$ es de soporte compacto en $\mathbb{R}^2$, y se anula para $|x| \geq a[\varphi]$, $\forall\, y$).

Por otra parte, dado que $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}^\infty$, por el teorema del valor medio podemos escribir

$$\begin{gathered}
\left| \frac{\partial_y^k \varphi(x+\varepsilon,y) - \partial_y^k \varphi(x,y)}{\varepsilon} - \partial_x \partial_y^k \varphi(x,y) \right| = \\
= \left| \partial_x \partial_y^k \varphi(x+\varepsilon_1,y) - \partial_x \partial_y^k \varphi(x,y) \right| = \left| \varepsilon_1 \, \partial_x^2 \partial_y^k \varphi(x+\varepsilon_2,y) \right| < \\
< |\varepsilon| \, M_k[\varphi] \to_{\varepsilon\to 0} 0, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{N}\,,
\end{gathered} \tag{59.3}$$

donde $|\varepsilon| > |\varepsilon_1| > |\varepsilon_2| > 0$.

Entonces,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(x+\varepsilon,y) - \varphi(x,y)}{\varepsilon} = \partial_x \varphi(x,y)\,, \text{ en } \mathcal{K}_y, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{59.4}$$

(donde $\partial_x \varphi(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$). En consecuencia, como g es una funcional continua, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\chi'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(g(y), \frac{\varphi(x+\varepsilon,y) - \varphi(x,y)}{\varepsilon} \right) = (g(y), \partial_x \varphi(x,y)) \ . \tag{59.5}$$

Con el mismo argumento vemos que, en general,

$$\chi^{(n)}(x) = (g(y), \partial_x^n \varphi(x,y)) \ . \tag{59.6}$$

Por lo tanto, $\chi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, y el producto directo está bien definido:

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), \chi(x)) \ . \tag{59.7}$$

60. Producto de convolución en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$

Sean $f(x), g(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$. La función definida por la **convolución** de $f(x)$ y $g(x)$,

$$h(x) = (f * g)\,(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})\,. \tag{60.1}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}||h||_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\,dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|g(y)|\,dx\,dy = ||f||_1\,||g||_1\,,\end{aligned} \tag{60.2}$$

donde se ha cambiado el orden de integración (lo que está justificado por el teorema de Fubini, ya que la integral doble existe), y se ha cambiado la variable de integración $x \to x + y$.

Así definido, el producto de convolución es asociativo y conmutativo,

$$(f * g) * h = f * (g * h)\,, \quad f * g = g * f\,. \tag{60.3}$$

Por ejemplo,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,g(x-z)\,dz = (g * f)(x), \tag{60.4}$$

donde se ha cambiado la variable de integración por $z = x - y$.

La convolución $(f * g)\,(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ permite definir una distribución regular sobre $\mathcal{K}$,

$$(f * g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy \right\}^* \varphi(x)\,dx\,, \tag{60.5}$$

donde $\varphi(x) \in \mathcal{K}$. Como esta función es acotada, la integral doble existe; entonces se puede cambiar el orden de las integrales y la variable de integración $x \to x + y$, para obtener

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)^*\,g(y)^*\varphi(x)\,dx\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^*\,g(y)^*\varphi(x+y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^*\,(g(y), \varphi(x+y))\,dx\,,\end{aligned} \tag{60.6}$$

ya que la función desplazada $\varphi(x + y) \in \mathcal{K}_y$.

En la Sección anterior hemos visto que la función

$$\chi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \tag{60.7}$$

como consecuencia de la continuidad de g y de que $\varphi(x + y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pero, en general, $\chi(x)$ no es una función de soporte compacto en la recta debido a que $\varphi(x + y)$ no es de soporte compacto en el plano, sino que toma valores constantes sobre las rectas $x + y =$ constante.

No obstante, existen ciertos casos en los que

$$(f * g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \chi(x)\, dx \tag{60.8}$$

puede interpretarse como el valor que la distribución f toma sobre una función del espacio $\mathcal{K}$.

Por ejemplo, supongamos que la función $g(y)$ sea de soporte compacto en la recta y. Como $\varphi(x+y)$ también lo es, y su soporte se desplaza a medida que se varía x, se ve que para $|x|$ suficientemente grande la intersección de ambos soportes es vacía. En esas condiciones, $\chi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ y

$$(f * g, \varphi) = (f, \chi)\ . \tag{60.9}$$

Como el producto de convolución es simétrico, la misma conclusión se obtiene si $f(x)$ es de soporte compacto, intercambiando los roles de $g(x)$ y $f(x)$.

Supongamos ahora que el soporte de $g(y)$ sólo esté acotado de un lado, digamos por abajo. Como el soporte de $\varphi(x+y)$ se desplaza hacia la izquierda cuando x crece, para x suficientemente grande la intersección de ambos soportes es vacía. En consecuencia, existe un $a[\varphi]$ tal que si $x \geq a[\varphi]$, entonces la función $\chi(x) = 0$. Es decir, en este caso $\chi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, y su soporte está acotado por arriba.

Ahora bien, si el soporte de la función $f(x)$ también está acotado por abajo, la intersección de los soportes de $f(x)$ y $\chi(x)$, $\mathrm{Sop}(f(x)) \bigcap \mathrm{Sop}(\chi(x))$, es un compacto. La integral en el segundo miembro de (60.8) sólo es sensible a los valores de $\chi(x)$ en esa intersección, y su valor no cambia si cambiamos la función $\chi(x)$ por otra función de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ que coincida con ella en el soporte de $f(x)$:

$$\chi(x) \to \hat{\chi}(x) \in \mathcal{K},\ \text{tal que } \hat{\chi}(x) = \chi(x),\ \forall\, x \in \mathrm{Sop}(f(x))\,. \tag{60.10}$$

En esas condiciones,

$$(f * g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \chi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \hat{\chi}(x)\, dx = (f, \hat{\chi})\,. \tag{60.11}$$

Similares conclusiones se obtienen para el caso en que los soportes de $f(x)$ y $g(x)$ estén ambos acotados por arriba.

Vemos entonces que, al menos cuando

- una de las funciones $f(x)$ o $g(x)$ tiene soporte compacto,
- ambas funciones tienen soporte acotado del mismo lado,

la distribución regular definida por el producto de convolución $f * g$ puede describirse como

$$(f * g, \varphi) = (f, \hat{\chi}) \quad (\text{ó } (g, \hat{\chi})) \ , \tag{60.12}$$

donde $\hat{\chi}(x) \in \mathcal{K}$ es tal que

$$\hat{\chi}(x) = \chi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \, , \ \forall \, x \in \operatorname{Sop}(f(x)) \, . \tag{60.13}$$

Nótese que en ambos casos la intersección

$$\operatorname{Sop}(f(x) \times g(y)) \cap \operatorname{Sop}(\varphi(x+y)) \tag{60.14}$$

es un compacto en el plano. Con un razonamiento similar al anterior, también podríamos cambiar

$$\begin{aligned} &\varphi(x+y) \to \hat{\varphi}(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2), \text{ tal que} \\ &\hat{\varphi}(x,y) = \varphi(x+y), \ \forall \, \langle x, y \rangle \in \operatorname{Sop}(f(x) \times g(y)) \, , \end{aligned} \tag{60.15}$$

y representar a la distribución $f * g$ como un producto directo de distribuciones,

$$((f * g)(x), \varphi(x)) = (f(x) \times g(y), \hat{\varphi}(x,y)) \ . \tag{60.16}$$

61. Producto de convolución en $\mathcal{K}^*$

Teniendo en cuenta que para mostrar que $\chi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sólo hemos recurrido a la continuidad de la funcional g, vemos que las mismas consideraciones hechas en la Sección anterior valen para todo par de distribuciones $f, g \in \mathcal{K}^*$.

Entonces, cuando la intersección de los soportes

$$\operatorname{Sop}(f(x) \times g(y)) \cap \operatorname{Sop}(\varphi(x+y)) \tag{61.1}$$

es un compacto en el plano, lo que ocurre al menos cuando

- f ó g es de soporte compacto,
- f y g tienen soporte acotado del mismo lado,

podemos definir el **producto de convolución** de esas distribuciones como un producto directo:

Definición 61.1. $\forall \, \varphi(x) \in \mathcal{K}$,

$$((f * g)(x), \varphi(x)) := (f(x) \times g(y), \hat{\varphi}(x,y)) \ , \tag{61.2}$$

donde $\hat{\varphi}(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\hat{\varphi}(x,y) = \varphi(x+y), \ \forall \, \langle x, y \rangle \in \operatorname{Sop}(f(x) \times g(y)) \, . \tag{61.3}$$

En esas condiciones, se puede demostrar que el producto de convolución de distribuciones tiene las mismas propiedades de asociatividad y conmutatividad que la convolución de funciones en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, ecuación (60.3).

Ejemplo: Si f y g son distribuciones regulares definidas por funciones localmente sumables, $f(x)$ y $g(x)$, que tienen su soporte contenido en la semirrecta $x \geq 0$, tenemos

$$(61.4)\qquad \begin{array}{l} (f * g, \varphi) = \Big(f(x), (g(y), \widehat{\varphi(x} + y)) \Big) = \\[2ex] = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)^* \int_0^{\infty} g(y)^* \varphi(x+y)\, dy\, dx = \\[2ex] = \displaystyle\int_0^{a[\varphi]} f(x)^* \int_x^{a[\varphi]} g(y-x)^* \varphi(y)\, dy\, dx = \\[2ex] = \displaystyle\int_0^{a[\varphi]} \left\{ \int_0^{y} f(x)\, g(y-x)\, dx \right\}^* \varphi(y)\, dy = \\[2ex] = \displaystyle\left(\int_0^{y} f(x)\, g(y-x)\, dx, \varphi(y) \right) , \end{array}$$

donde $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ tal que $\varphi(x) = 0,\ \forall\, x > a[\varphi]$. Entonces, la convolución $f * g$ es la distribución regular dada por la función

$$(61.5)\qquad (f * g)(x) = \int_0^{x} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi = \int_0^{x} f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi \,.$$

◇

La funcional $\delta(x-a)$ es de soporte compacto, al igual que sus derivadas de todo orden, de modo que existe su convolución con todo otro elemento de $\mathcal{K}^*$: $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ se tiene

$$(61.6)\qquad \begin{array}{l} (\delta(x-a) * f(x), \varphi(x)) = (f(x) * \delta(x-a), \varphi(x)) = \\[1ex] = (f(x)\, (\delta(y-a), \varphi(x+y))) = (f(x), \varphi(x+a)) \ . \end{array}$$

Recordando que

$$(61.7)\qquad (f(x-a), \varphi(x)) := (f(x), \varphi(x+a))$$

vemos que

$$(61.8)\qquad \delta(x-a) * f(x) = f(x) * \delta(x-a) = f(x-a) \,.$$

En particular, para $a = 0$,

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f(x)\,, \tag{61.9}$$

lo que muestra que $\delta(x)$ es la unidad respecto del producto de convolución.

Si D_x es un operador diferencial a coeficientes constantes, tenemos

$$\begin{aligned} (D_x\delta(x) * f(x), \varphi(x)) &= (f(x), (D_y\delta(y), \varphi(x+y))) = \\ &= \big(f(x), \big(\delta(y), D_y^*\varphi(x+y)\big)\big) = (f(x), (\delta(y), D_x^*\varphi(x+y))) = \\ &= (f(x), D_x^*\varphi(x)) = (D_x f(x), \varphi(x))\ . \end{aligned} \tag{61.10}$$

Por lo tanto,

$$D_x\delta(x) * f(x) = D_x f(x)\,. \tag{61.11}$$

Además,

$$\begin{aligned} (D_x(f * g)(x), \varphi(x)) &= ((f * g)(x), D_x^*\varphi(x)) = \\ &= \Big(f(x), \big(g(y), \widehat{D_{x+y}^*\varphi}(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x), (D_y g\widehat{(y), \varphi(}x+y))\Big) = \\ &= (f(x) * D_x g(x), \varphi(x)) \end{aligned} \tag{61.12}$$

de modo que

$$D_x(f * g)(x) = f(x) * D_x g(x) = D_x f(x) * g(x)\,. \tag{61.13}$$

Entonces, un operador diferencial a coeficientes constantes aplicado sobre un producto de convolución actúa sobre uno cualquiera de los factores.

Lema 61.2. *De la convergencia $f_n \to f$ en $\mathcal{K}^*$ se deduce la convergencia de $f_n * g \to f * g$ en, al menos, las siguientes condiciones:*

- *los soportes de las distribuciones $\{f_n\}$ están contenidos en un mismo conjunto compacto,*
- *g es de soporte compacto,*
- *los soportes de $\{f_n\}$ y g están acotados del mismo lado y de manera independiente de n.*

En esos casos, el producto de convolución es continuo en $\mathcal{K}^*$,

$$\lim_{n\to\infty} (f_n * g) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) * g\,. \tag{61.14}$$

Corolario 61.3. *Si la funcional f_t depende de un parámetro t y existe su* ***derivada débil*** *respecto de t,*

$$(\partial_t f_t(x), \varphi(x)) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f_{t+\varepsilon}(x) - f_t(x)}{\varepsilon}, \varphi(x) \right) , \tag{61.15}$$

entonces

$$\partial_t \left(f_t * g \right) = \partial_t f_t * g \tag{61.16}$$

en cualquiera de las siguientes condiciones:

- *las funcionales f_t tienen sus soportes contenidos en un mismo conjunto compacto, independiente de t,*
- *g es de soporte compacto,*
- *f_t y g tienen soportes acotados del mismo lado, y de manera independiente de t.*

Es sabido que la transformada de Fourier de un producto de convolución de funciones sumables en la recta, $f_1(x), f_2(x) \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$, está dado por el producto de sus transformadas de Fourier, $\mathcal{F}[f_1 * f_2](\sigma) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[f_1](\sigma)\, \mathcal{F}[f_2](\sigma)$. Veremos que esta propiedad se extiende al producto de convolución de distribuciones sobre el espacio $\mathcal{K}$ cuando uno de los factores es una funcional de soporte compacto.

En efecto, si $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^*$, y f_2 es de soporte compacto, el producto de convolución $f_1 * f_2$ está definido por

$$(f_1 * f_2, \varphi) = (f_1, \chi) \ , \tag{61.17}$$

donde

$$\chi(x) = (f_2(y), \varphi(x+y)) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \, . \tag{61.18}$$

Ya sabemos que la transformada de Fourier de una distribución de soporte compacto puede ser representada como una distribución regular sobre el espacio $\mathcal{Z}$, definida por una función analítica entera de crecimiento polinomial (ver ec. (57.23)), $\mathcal{F}[f_2](\sigma) = g_2(\sigma)$. En esas condiciones,

$$\begin{aligned} \chi(x) &= (f_2(y), \varphi(x+y))_{\mathcal{K}} = (\mathcal{F}[f_2(y)], \mathcal{F}[\varphi(x+y)])_{\mathcal{Z}} = \\ &= (g_2(\sigma), e^{i\,\sigma\,x} \psi(\sigma))_{\mathcal{Z}} = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\sigma\,x} g_2^*(\sigma)\, \psi(\sigma)\, d\sigma = \\ &= \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1} \left[g_2^*(\sigma)\, \psi(\sigma) \right] (x) \, , \end{aligned} \tag{61.19}$$

donde $\psi(\sigma) = \mathcal{F}[\varphi(x)](\sigma)$, y donde hemos tenido en cuenta que el producto $g_2^*(\sigma)\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$.

En consecuencia,

$$(f_1 * f_2, \varphi)_{\mathcal{K}} = \left(f_1, \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}^{-1}\left[g_2^*(\sigma)\,\psi(\sigma)\right]\right)_{\mathcal{K}} =$$

$$\left(\mathcal{F}[f_1], \sqrt{2\pi}\,g_2^*(\sigma)\,\psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = \left(\sqrt{2\pi}\,g_2(\sigma)\,\mathcal{F}[f_1], \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = \tag{61.20}$$

$$= (\mathcal{F}[f_1 * f_2], \psi)_{\mathcal{Z}}\ ,\ \forall\,\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f_1]\,\mathcal{F}[f_2]\,, \tag{61.21}$$

donde una de las distribuciones tiene soporte compacto y su transformada de Fourier es una función analítica entera de crecimiento (a lo sumo) polinomial.

62. Aplicaciones del producto de convolución

Ecuaciones elípticas: Sea $\rho(\mathbf{x})\,, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, una densidad de masa continua y de soporte compacto. El potencial gravitatorio que produce satisface la ecuación diferencial de Poisson,

$$\triangle v(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\,, \tag{62.1}$$

cuya solución es una función con derivadas continuas de segundo orden dada por la integral

$$v(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel}\ d^3\mathbf{y}\,. \tag{62.2}$$

Ahora bien, esa expresión tiene el aspecto de una convolución (en tres dimensiones):

$$v = G * \rho\,, \tag{62.3}$$

donde la función de Green del Laplaciano[43], $G = \dfrac{-1}{4\,\pi\,r}$ con $r = \parallel \mathbf{x} \parallel$, es una distribución regular definida sobre $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ que satisface

$$\triangle G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\,. \tag{62.9}$$

[43]La función de Green del Laplaciano en un espacio de dimensión n es la solución de la ecuación diferencial inhomogénea

$$\triangle G = \delta \Rightarrow G = \frac{-\,r^{2-n}}{(n-2)\,\Omega_n}\ ,\ n > 2\,, \tag{62.4}$$

donde $\Omega_n = \dfrac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ es la superficie de la esfera de radio 1 en dicho espacio.

Consideremos ahora una distribución arbitraria de soporte compacto, $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)^*$. La distribución definida por la convolución $v = \left(\frac{-1}{4\,\pi\, r}\right) * \rho$ satisface la ecuación de Poisson,

$$\triangle v = \triangle \left(\frac{-1}{4\,\pi\, r} * \rho \right) = \left(\triangle \frac{-1}{4\,\pi\, r} \right) * \rho = \delta * \rho = \rho \,. \tag{62.10}$$

$\diamond$

En general, dada una ecuación diferencial elíptica a coeficientes constantes,

$$Lu = f \,, \tag{62.11}$$

ella puede ser estudiada en el espacio de distribuciones (tomando por inhomogeneidad f a una distribución de soporte compacto).

La función de Green de L es una distribución que satisface

$$LG = \delta \,. \tag{62.12}$$

Ella está definida a menos de una solución de la ecuación homogénea. Si G es conocida, una solución particular de la ecuación inhomogénea (62.11) puede ser

---

En efecto, como r^{2-n} es una distribución regular (respecto de la medida de integración $d^n\mathbf{x} = r^{n-1}\, dr\, d\Omega$), para $\varphi(r, \Omega) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left(\triangle r^{n-2}, \varphi\right) &= \left(r^{n-2}, \triangle\varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r\geq\varepsilon} r^{2-n}\, \triangle\varphi(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r\geq\varepsilon} \left\{ \overrightarrow{\nabla} \cdot \left[r^{2-n}\, \overrightarrow{\nabla}\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\, \overrightarrow{\nabla} r^{2-n} \right] + \varphi(\mathbf{x}) \triangle r^{2-n} \right\}\, d^n\mathbf{x} \,. \end{aligned} \tag{62.5}$$

Teniendo en cuenta que r^{2-n} es una función homogénea de grado $(2-n)$, se verifica que $\triangle r^{2-n} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left(\triangle r^{n-2}, \varphi\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r=\varepsilon} \left\{ -\varepsilon^{2-n}\, \partial_r \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})\, (n-2)\, \varepsilon^{1-n} \right\} \varepsilon^{n-1}\, d\Omega_n \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ -\varepsilon \int_{r=\varepsilon} \partial_r\varphi(\mathbf{x})\, d\Omega_n + (n-2) \int_{r=\varepsilon} \varphi(\mathbf{x})\, d\Omega_n \right\} = \\ &= 0 + (2-n)\, \Omega_n\, \varphi(\mathbf{0}) = (2-n)\, \Omega_n\, \left(\delta(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\right) \,, \end{aligned} \tag{62.6}$$

para toda $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En consecuencia,

$$\triangle \left(\frac{r^{2-n}}{(2-n)\,\Omega} \right) = \delta(\mathbf{x}) \,, \tag{62.7}$$

para $n \geq 3$. Para dimensión $n = 2$, un cálculo enteramente similar muestra que

$$\triangle \left(\frac{\log r}{2\pi} \right) = \delta(\mathbf{x}) \,. \tag{62.8}$$

$\diamond$

escrita como $u = G * f$. En efecto,

$$Lu = L\,(G * f) = LG * f = \delta * f = f\,. \tag{62.13}$$

Ecuaciones parabólicas: En la teoría de la transmisión del calor, la temperatura de una barra infinita evoluciona según la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{62.14}$$

donde $u(x,t)$ tiene una derivada primera respecto de t y una derivada segunda respecto de x continuas para $t > 0$. Si la distribución inicial de temperatura en la barra está dada por la función $u(x, t = 0) = \mu(x)$, la solución de (62.14) para $t > 0$ es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}}\,\mu(y)\,dy\,. \tag{62.15}$$

Si $\mu(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, esta integral (que existe para una clase más amplia de funciones) puede ser escrita como la convolución

$$u(x,t) = \frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} * \mu(x)\,. \tag{62.16}$$

En el caso general, podemos suponer que $\mu(x)$ es una distribución arbitraria de soporte compacto, mientras que $u(x,t)$ en (62.16) es una distribución en la variable x que también depende del parámetro t.

La derivada débil de $u(x,t)$ respecto de ese parámetro está dada por

$$\partial_t u(x,t) = \partial_t \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} * \mu(x) \right) = \partial_t \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) * \mu(x)\,, \tag{62.17}$$

en razón de las propiedades de continuidad de la convolución antes mencionadas.

Po otra parte,

$$\partial_x^2 u(x,t) = \partial_x^2 \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} * \mu(x) \right) = \partial_x^2 \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) * \mu(x)\,. \tag{62.18}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \backslash \{0\})\right)$, de modo que sus derivadas como distribución y derivada débil coinciden con las respectivas derivadas parciales como función de ambas variables[44], y dado que

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}=0\,, \tag{62.20}$$

vemos que $u(x,t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}u(x,t)=\mathbf{0}\,. \tag{62.21}$$

Además, para $t\to 0^+$ también satisface la condición inicial,

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}*\mu(x)\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)*\mu(x)=\delta(x)*\mu(x)=\mu(x) \tag{62.22}$$

(ver ecuación (51.11)). ◇

En el caso general, dada la ecuación diferencial a coeficientes constantes

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\,, \tag{62.23}$$

donde $u(x,t)$ es una distribución en la variable x que depende además del parámetro t, el problema de Cauchy consiste en hallar una solución que se reduzca a una distribución dada $\mu(x)$ para $t\to 0^+$.

La solución de esa ecuación para la cual la condición inicial es $\mu(x)=\delta(x)$, $G(x,t)$, es llamada **solución fundamental**. Una vez conocida $G(x,t)$, la solución del problema de Cauchy se expresa como

$$u(x,t)=G(x,t)*\mu(x)\,, \tag{62.24}$$

suponiendo que la convolución en el miembro de la derecha esté bien definida. En efecto, para $t>0$ tenemos

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\partial}{\partial t}-P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}u(x,t)=\\ =\left\{\frac{\partial}{\partial t}-P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}G(x,t)*\mu(x)=\mathbf{0}*\mu(x)=\mathbf{0}\,,\end{gathered} \tag{62.25}$$

[44]En efecto,

$$\partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}},\varphi(x)\right)=\int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]}\partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x)\,dx\,, \tag{62.19}$$

puesto que esta integral converge uniformemente para $t>0$.

mientras que

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \lim_{t\to 0^+} G(x,t) * \mu(x) = \delta(x) * \mu(x) = \mu(x)\,. \tag{62.26}$$

Ecuaciones hiperbólicas: Una **solución fundamental** de la ecuación de las ondas en una dimensión,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \tag{62.27}$$

está dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\theta(x+t) - \theta(x-t)\right\}\,. \tag{62.28}$$

En efecto, es inmediato mostrar que[45]

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \mathbf{0}\,. \tag{62.31}$$

En cuanto a la condición inicial, es evidente que

$$\begin{gathered} \lim_{t\to 0^+} G(x,t) = \mathbf{0}, \\ \lim_{t\to 0^+} \partial_t G(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\left\{\delta(x+t) + \delta(x-t)\right\} = \delta(x)\,. \end{gathered} \tag{62.32}$$

Llamemos $\dot{G}(x,t)$ a la derivada débil de $G(x,t)$ respecto de t,

$$\dot{G}(x,t) := \partial_t G(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\delta(x+t) + \delta(x-t)\right\}\,. \tag{62.33}$$

Ella constituye una segunda solución fundamental, que difiere de la primera en las condiciones iniciales que satisface.

En efecto, también resulta inmediato verificar que

$$\frac{\partial^2 \dot{G}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \dot{G}}{\partial x^2} = \mathbf{0}\,. \tag{62.34}$$

Por otra parte,

$$\begin{gathered} \lim_{t\to 0^+} \dot{G}(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \partial_t G(x,t) = \delta(x)\,, \\ \lim_{t\to 0^+} \partial_t \dot{G}(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \partial_t^2 G(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \partial_x^2 G(x,t) = \mathbf{0}\,, \end{gathered} \tag{62.35}$$

---

[45] La derivada débil de $\theta(x-t)$ respecto de t está definida por

$$\partial_t\left(\theta(x-t), \varphi(x)\right) = \partial_t \int_t^\infty \varphi(x)\,dx = -\varphi(t) = -\left(\delta(x-t), \varphi(x)\right)\,, \tag{62.29}$$

de modo que $\partial_t \theta(x-t) = -\delta(x-t)$. Similarmente,

$$\partial_t\left(\delta(x-t), \varphi(x)\right) = \partial_t \varphi(t) = \varphi'(t) = \left(-\delta'(x-t), \varphi(x)\right)\,, \tag{62.30}$$

de donde $\partial_t \delta(x-t) = -\delta'(x-t)$.

ya que

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\partial_x^2 G(x,t), \varphi(x)\right) = \lim_{t\to 0^+} \left(G(x,t), \partial_x^2 \varphi(x)\right) = 0 \tag{62.36}$$

por (62.32).

En esas condiciones, la solución de (62.27) que satisface las condiciones iniciales $u(x, t = 0) = u_0(x)$, $\partial_t u(x, t = 0) = u_1(x)$, está dada por

$$u(x,t) = G(x,t) * u_1(x) + \dot{G}(x,t) * u_0(x)\,. \tag{62.37}$$

En efecto, por las propiedades de la convolución es evidente que

$$\begin{array}{c} \left\{\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} u(x,t) = \\ = \left\{\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} G(x,t) * u_1(x) + \left\{\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} \dot{G}(x,t) * u_0(x) = \mathbf{0}\,. \end{array} \tag{62.38}$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{c} u(x, 0^+) = \mathbf{0} * u_1(x) + \delta(x) * u_0(x) = u_0(x)\,, \\ \partial_t u(x,t) = \delta(x) * u_1(x) + \mathbf{0} * u_0(x) = u_1(x)\,. \end{array} \tag{62.39}$$

Nótese que, siendo $G(x,t)$ y $\dot{G}(x,t)$ de soporte compacto $\forall\, t > 0$, la ecuación (62.37) tiene sentido $\forall\, u_0,\ u_1 \in \mathcal{K}^*$.

Por otra parte, la solución puede ser escrita como

$$\begin{array}{c} u(x,t) = G(x,t) * u_1(x) + \dfrac{1}{2}\left\{\delta(x+t) + \delta(x-t)\right\} * u_0(x) = \\ = G(x,t) * u_1(x) + \dfrac{1}{2}\left\{u_0(x+t) + u_0(x-t)\right\}, \end{array} \tag{62.40}$$

en términos de la distribución u_0 trasladada. Si además u_1 es regular[46], obtenemos la solución de DÁlembert,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{u_0(x+t) + u_0(x-t)\right\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\, dy\,. \tag{62.42}$$

◇

[46]Para u_1 regular tenemos

$$\begin{array}{c} (G(x,t) * u_1(x), \varphi(x)) = (u_1(y), (G(x,t), \varphi(x+y))) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} u_1^*(y) \left(\frac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t} \varphi(x)\, dx\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1^*(y)\, dy\right) \varphi(x)\, dx\,. \end{array} \tag{62.41}$$

Para el caso general de una ecuación de orden m en t, si $P(x,t)$ es un polinomio en dos variables a coeficientes constantes y de orden m en t, el problema de Cauchy consiste en hallar la solución de la ecuación diferencial

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=\mathbf{0} \tag{62.43}$$

que satisfaga las condiciones iniciales

$$\begin{gathered} u(x,t=0)=u_0(x),\ \partial_t u(x,t=0)=u_1(x),\ \dots,\\ \partial_t^{m-1}u(x,t=0)=u_{m-1}(x)\,. \end{gathered} \tag{62.44}$$

Se llama solución fundamental a aquella distribución $G_0(x,t)$ que satisface la ecuación homogénea (62.43), y las condiciones iniciales

$$G_0(x,t=0)=\mathbf{0},\ \partial_t G_0(x,t=0)=\mathbf{0},\ \dots,\ \partial_t^{m-1}G_0(x,t=0)=\delta(x)\,. \tag{62.45}$$

Nótese que

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\partial_x^k G_0(x,t)=\mathbf{0},\quad P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\partial_t G_0(x,t)=\mathbf{0}\,, \tag{62.46}$$

dado que P tiene coeficientes constantes, y que además

$$\begin{gathered} \partial_x^k G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \partial_t\partial_x^k G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \dots,\\ \partial_t^{m-1}\partial_x^k G_0(x,t=0)=\delta^{(k)}(x)\,,\\ \partial_t G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \partial_t\partial_t G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \dots,\\ \partial_t^{m-2}\partial_t G_0(x,t=0)=\delta(x)\,,\\ \partial_t^{m-1}\partial_t G_0(x,t)=Q\left(\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial t}\right)G_0(x,t)\,, \end{gathered} \tag{62.47}$$

donde $Q(x,t)$ es un polinomio de orden $m-1$ en t, de modo que

$$\partial_t^{m-1}\partial_t G_0(x,t=0)=\mathcal{A}_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\,. \tag{62.48}$$

Se ve entonces que, tomando combinaciones lineales de $\partial_t G_0(x,t)$, $G_0(x,t)$ y de sus derivadas respecto de x, es posible construir una segunda solución fundamental $G_1(x,t)$ que satisfaga (62.43) y las condiciones iniciales

$$\begin{gathered} G_1(x,t=0)=\mathbf{0},\ \partial_t G_1(x,t=0)=\mathbf{0},\ \dots,\ \partial_t^{m-2}G_1(x,t=0)=\delta(x),\\ \partial_t^{m-1}G_1(x,t=0)=\mathbf{0}\,. \end{gathered} \tag{62.49}$$

Este proceso puede continuarse para construir nuevas soluciones fundamentales $G_k(x,t)$, con $k = 1, 2, \ldots, m-1$, con derivadas nulas en $t = 0$ a excepción de $\partial_t^k G_k(x, t = 0) = \delta(x)$, para finalmente expresar la solución de (62.43) y (62.44) como

$$u(x,t) = G_{m-1}(x,t) * u_0(x) + G_{m-2}(x,t) * u_1(x) + \cdots + G_0(x,t) * u_{m-1}(x)\,. \tag{62.50}$$

63. Derivación e integración de orden arbitrario

Sea $g(x)$ una función localmente integrable con soporte en la semirrecta $x \geq 0$. La primitiva de orden n de $g(x)$ que se anula en $x = 0$ está dada por la fórmula de Cauchy,

$$g_{(n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x g(y)\,(x-y)^{n-1}\,dy\,, \tag{63.1}$$

para $n = 1, 2, \ldots$, como puede comprobarse fácilmente integrando por partes.

El segundo miembro de esta igualdad también puede ser entendido como el producto de convolución de dos distribuciones regulares,

$$g_{(n)}(x) = g(x) * \frac{x_+^{n-1}}{\Gamma(n)} = g(x) * \Phi_n\,, \tag{63.2}$$

dado que ambas funcionales tienen soporte contenido en $\mathbb{R}^+$ (ver ec. (61.5)).

Pero el miembro de la derecha de (63.2) tiene sentido, no sólo para distribuciones regulares, sino para toda distribución con soporte en $\mathbb{R}^+$. En particular, para $n = 1$ tenemos

$$g_{(1)}(x) = g(x) * \frac{x_+^{0}}{\Gamma(1)} = g(x) * \theta(x)\,, \tag{63.3}$$

lo que corresponde a una primitiva de g como distribución, ya que

$$g'_{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\theta(x) * g(x)\right) = \theta'(x) * g(x) = \delta(x) * g(x) = g(x)\,. \tag{63.4}$$

Nótese que $\mathrm{Sop}\big(g_{(1)}\big) \subset \mathbb{R}^+$. En efecto, si $\mathrm{Sop}(\varphi(x)) \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$ entonces

$$\begin{gathered} \chi(x) := (\theta(y), \varphi(x+y)) = \textstyle\int_x^\infty \varphi(y)\,dy = 0, \forall\, x \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (g(x), \hat{\chi}(x)) = 0 \Rightarrow \big(g_{(1)}(x), \varphi(x)\big) = 0\,. \end{gathered} \tag{63.5}$$

Por lo tanto, $g_{(1)}$ es la primitiva de g que tiene su soporte contenido en $\mathbb{R}^+$.

En la Sección 54 hemos visto que la distribución $\Phi_\lambda = x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$, que es regular para $\Re(\lambda) > 0$, existe por extensión analítica en todo el plano complejo del parámetro λ como una distribución con soporte en $\mathbb{R}^+$. En efecto, dado que $x_+^{\lambda-1}$

y $\Gamma(\lambda)$ sólo presentan polos simples en $\lambda = -k$, con $k \in \mathbb{N}$, de (54.16) y (54.9) tenemos

$$\lim_{\lambda\to -k} \Phi_\lambda = \frac{\operatorname{Res} x_+^{\lambda-1}\big|_{\lambda=-k}}{\operatorname{Res}\Gamma(\lambda)\big|_{\lambda=-k}} = \frac{(-1)^k\delta^{(k)}(x)/k!}{(-1)^k/k!} = \delta^{(k)}(x)\,, \tag{63.6}$$

para $k = 0, -1, -2, \ldots$

En consecuencia, la convolución

$$g_{(\lambda)} := g * \Phi_\lambda \tag{63.7}$$

tiene sentido $\forall\, g \in \mathcal{K}^*$ con soporte contenido en $\mathbb{R}^+$, y se extiende analíticamente a todo el plano λ como una distribución con soporte en esa semirecta[47]. En particular, para $\lambda = 0$ tenemos

$$g_{(0)} = g * \Phi_0 = g * \delta(x) = g\,, \tag{63.8}$$

mientras que para valores enteros negativos de λ,

$$g_{(-n)} = g * \Phi_{-n} = g * \delta^{(n)}(x) = g^{(n)} \tag{63.9}$$

se reduce a la derivada n-ésima de g (como distribución).

Vemos entonces que una misma expresión, la convolución en el miembro de la derecha de la ec. (63.7), da las derivadas y primitivas de la distribución g para valores enteros de λ. Pero esa convolución tiene también sentido $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$, por lo que podemos llamar a $g^{(-\lambda)} := g_{(\lambda)}$ la **derivada de orden** $(-\lambda)$ **de** g (o, equivalentemente, su **primitiva de orden** λ).

Esta operación de derivación (o integración) de orden complejo tiene algunas propiedades de la derivación usual. Por ejemplo, la derivada de orden $-\mu$ de la derivada de orden $-\lambda$ es la derivada de orden $-(\lambda+\mu)$. En efecto, consideremos la convolución

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\,. \tag{63.10}$$

Para $\Re(\lambda) > 0$ y $\Re(\mu) > 0$, se trata de la convolución de distribuciones regulares con soporte en $\mathbb{R}^+$ que, por (61.4) y (61.5), se reduce a la distribución regular

[47]En efecto, si $\operatorname{Sop}(\varphi(x)) \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, entonces $\chi(x) := (\Phi_\lambda(y), \varphi(x+y)) = \int_0^\infty \frac{y^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\,\varphi(x+y)\,dy = 0, \forall\, x \geq 0, \forall\, \Re(\lambda) > 0$ y, por extensión analítica, también $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $(g(x), \hat{\chi}(x)) = 0$, es decir, $\big(g_{(\lambda)}(x), \varphi(x)\big) = 0$.

definida por la función

$$(\Phi_\lambda * \Phi_\mu)(x) = \int_0^x \frac{(x-y)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \, dy = \tag{63.11}$$

$$= \frac{x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-z)^{\lambda-1} \, z^{\mu-1} \, dz$$

para $x \geq 0$, y $(\Phi_\lambda * \Phi_\mu)(x) = 0$ para $x < 0$. La integral en el miembro de la derecha de (63.11) es la función de Euler

$$B(\lambda, \mu) := \int_0^1 (1-z)^{\lambda-1} \, z^{\mu-1} \, dz = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} \, . \tag{63.12}$$

En consecuencia, para $\Re(\lambda), \Re(\mu) > 0$ tenemos que

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \Phi_{\lambda+\mu} \, . \tag{63.13}$$

Pero, en virtud de la unicidad de la extensión analítica de ambos miembros (en λ y en μ), esta igualdad vale $\forall \, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Entonces,

$$(g * \Phi_\lambda) * \Phi_\mu = g * (\Phi_\lambda * \Phi_\mu) = g * \Phi_{\lambda+\mu} \, , \ \forall \, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \, . \tag{63.14}$$

En particular, si $\mu = -\lambda$,

$$(g * \Phi_\lambda) * \Phi_{-\lambda} = g * \Phi_0 = g * \delta(x) = g \, , \tag{63.15}$$

de donde resulta que las operaciones de derivación e integración de orden arbitrario son la inversa una de la otra.

Otras consecuencias:

$$\Phi_{1-\lambda} = \Phi_{1-\lambda} * \delta(x) = \Phi_{1-\lambda} * \Phi_{-1} * \theta(x) = \Phi_{-\lambda} * \theta(x) = \theta^{(\lambda)}(x) \, , \tag{63.16}$$

$$\left(\frac{x_+^{\lambda-n-1}}{\Gamma(\lambda-n)} \right)^{(\lambda)} = \Phi_{\lambda-n} * \Phi_{-\lambda} = \Phi_{\lambda-n-\lambda} = \Phi_{-n} = \delta^{(n)}(x) \, . \tag{63.17}$$

El problema de Abel: Consideremos una masa m que puede deslizarse sin rozamiento, bajo la acción de la gravedad, sobre una curva en un plano vertical. Se trata de estudiar el tiempo $t(x)$ que le toma a esa partícula alcanzar el nivel $z = 0$, si parte desde el reposo a una altura $z = x$.

De la conservación de la energía tenemos

$$\frac{1}{2} m v(z)^2 = mg(x-z) \Rightarrow |v(z)| = \sqrt{2g(x-z)} \, . \tag{63.18}$$

Entonces, la componente vertical de la velocidad a una altura z está dada por

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(x-z)}\ \sin\theta(z)\,, \tag{63.19}$$

donde $\theta(z)$ es el ángulo que forma la tangente a la curva en ese punto con una recta horizontal.

Si la forma de la curva fuese conocida, digamos $y = y(z)$, tendríamos que $\cot\theta(z) = dy/dz$, y la solución estaría dada por

$$t(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{2g(x-z)}\ \sin\theta(z)}\,. \tag{63.20}$$

En cambio, la pregunta que se pretende responder aquí es cual es la curva $y(z)$ que hace que el tiempo de caída, $t(x)$, sea una función dada de la altura x desde la cual es soltada la partícula. Para ello basta con determinar de (63.20) la función $\varphi(z) = 1/\sin\theta(z)$, por lo que el problema se reduce a resolver la **ecuación integral de Abel**

$$\int_0^x \frac{\varphi(z)}{\sqrt{2g(x-z)}}\, dz = t(x)\,. \tag{63.21}$$

Nótese que se trata de una ecuación integral de **primera especie**, del tipo de Volterra, cuyo núcleo no es de cuadrado sumable.

Más generalmente, se llama **ecuación de Abel generalizada** a

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\ \varphi(z)\,dz = f(x)\,, \tag{63.22}$$

donde $0 < \alpha < 1$, $\varphi(z)$ es la incógnita y $f(x)$ es una función dada. En particular, para $\alpha \geq 1/2$ el núcleo de ese operador integral de Volterra no es de cuadrado integrable.

Ahora bien, esta ecuación también puede interpretarse como

$$\frac{x_+^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \varphi = \Phi_{1-\alpha} * \varphi = f\,, \tag{63.23}$$

que tiene sentido $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$, y $\forall\, f \in \mathcal{K}^*$ de soporte contenido en $\mathbb{R}^+$. Su solución en el espacio de distribuciones está dada simplemente por

$$\varphi = \Phi_{\alpha-1} * (\Phi_{1-\alpha} * \varphi) = \Phi_{\alpha-1} * f = \Phi_\alpha * \Phi_{-1} * f = \Phi_\alpha * f'\,. \tag{63.24}$$

Supongamos ahora que f sea una distribución regular definida por una función $f(x)$ diferenciable para $x \neq 0$ y nula para $x < 0$. Entonces, su derivada como distribución es

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} + f(0^+)\,\delta(x)\,, \tag{63.25}$$

y la solución de (63.23) se reduce a

$$\varphi(x) = \Phi_\alpha(x) * \frac{df(x)}{dx} + f(0^+)\,\Phi_\alpha(x)\,. \tag{63.26}$$

En particular, para $\alpha > 0$ (lo que hace a Φ_α regular) se tiene

$$\varphi(x) = f(0^+)\,\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-z)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{df(z)}{dz}\,dz\,, \tag{63.27}$$

para $x > 0$.

Volviendo al problema original (donde $\alpha = 1/2$), si tomamos, por ejemplo, $f(x) = T\sqrt{2g/\pi}$ constante, entonces $\frac{df(x)}{dx} = 0$ y obtenemos

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sin\theta(x)} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{x}}\,, \tag{63.28}$$

lo que conduce a una cicloide (isócrona) para la trayectoria de la partícula. $\diamond$

64. Descomposición en distribuciones propias

Los operadores (esencialmente autoadjuntos) que representan a los observables de la Mecánica Cuántica **posición** e **impulso** no tienen autovectores en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\begin{array}{c} (x-\lambda)\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \text{ a. e.} \Rightarrow \varphi(x) = \mathbf{0}(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}), \\ \left(-i\dfrac{d}{dx} - \lambda\right)\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \sim e^{i\lambda x} \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R})\,. \end{array} \tag{64.1}$$

No obstante, esos problemas de autovalores sí tienen solución en $\mathcal{S}^*$, porque

$$(x-\lambda)\,\delta(x-\lambda) = \mathbf{0}\,, \forall\,\lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{64.2}$$

mientras que $e^{i\lambda x} \in \mathcal{S}^*\,, \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$.

Veremos en qué sentido estas distribuciones propias conforman sistemas ortogonales y completos.

Primero señalemos que, identificando las funcionales regulares con las funciones que les dan origen, podemos escribir

$$\mathcal{S} \subset \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^*\,. \tag{64.3}$$

Consideremos ahora un operador lineal $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, simétrico y continuo respecto de la convergencia en ese espacio. Entonces

$$\begin{array}{c} (\varphi_1, A\varphi_2)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (A\varphi_1, \varphi_2)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})}\,, \quad \forall\,\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{S}\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} A\varphi_n(x) = A\varphi(x) \text{ en } \mathcal{S}, \quad \forall\,\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ en } \mathcal{S}\,. \end{array} \tag{64.4}$$

Su adjunto en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, $A^\dagger$, está definido en un dominio $\mathcal{D}(A^\dagger) \supset \mathcal{S}$, y su gráfica contiene a la de toda extensión simétrica de A en el espacio de Hilbert.

Por otra parte, para toda funcional $f \in \mathcal{S}^*$, la expresión

$$(g, \varphi)_{\mathcal{S}} := (f, A\varphi)_{\mathcal{S}} \tag{64.5}$$

define una distribución sobre $\mathcal{S}$. En efecto, la linealidad de g es evidente a partir de la linealidad de A y de f. En cuanto a la continuidad, tomemos una secuencia convergente $\varphi_n(x) \to \varphi(x) \in \mathcal{S}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (g, \varphi_n)_{\mathcal{S}} = \lim_{n\to\infty} (f, A\varphi_n)_{\mathcal{S}} = \Big(f, \lim_{n\to\infty} A\varphi_n\Big)_{\mathcal{S}} = (f, A\varphi)_{\mathcal{S}} = (g, \varphi)_{\mathcal{S}}\,, \tag{64.6}$$

dada la continuidad de f y de A.

En esas condiciones, podemos decir que el ***adjunto*** de A en $\mathcal{S}^*$, que también denotaremos por $A^\dagger$, está definido sobre todo ese espacio de modo que

$$A^\dagger f = g\,. \tag{64.7}$$

Así definido, $A^\dagger$ es evidentemente lineal y continuo respecto de la convergencia débil. En efecto, si $f_n \to f$ en $\mathcal{S}^*$, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(A^\dagger f_n, \varphi\right)_{\mathcal{S}} = \lim_{n\to\infty} (f_n, A\varphi)_{\mathcal{S}} = (f, A\varphi)_{\mathcal{S}} = \left(A^\dagger f, \varphi\right)_{\mathcal{S}}\,. \tag{64.8}$$

En particular, $\forall\, \psi(x) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$ y $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$, y teniendo en cuenta que A es simétrico y que $A\psi(x) \in \mathcal{S}$, tenemos

$$\left(A^\dagger \psi, \varphi\right)_{\mathcal{S}} = (\psi, A\varphi)_{\mathcal{S}} = (\psi, A\varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (A\psi, \varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (A\psi, \varphi)_{\mathcal{S}} \tag{64.9}$$

y, en consecuencia, $A^\dagger \psi(x) = A\psi(x)$. En ese sentido, $A^\dagger$ constituye una **extensión** de A a todo $\mathcal{S}^*$.

Una distribución[48] χ_λ es una funcional propia de $A^\dagger$ correspondiente al autovalor λ si

$$A^\dagger \chi_\lambda = \lambda \chi_\lambda\,. \tag{64.10}$$

Se puede demostrar el siguiente teorema (ver I. M. Guelfand y G. E. Chilov, *Les distributions*, Vol. I - IV).

[48]Recordemos que toda distribución sobre $\mathcal{S}$ es la derivada de cierto orden (finito) de una distribución regular definida por una función continua en la recta, cuyo crecimiento es a lo sumo polinomial.

Teorema 64.1. *Si el operador lineal $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es simétrico y continuo, y admite una extensión autoadjunta en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, entonces la extensión de A a $\mathcal{S}^*$, $A^\dagger$, admite en ese espacio un sistema **ortogonal** y **completo** de distribuciones propias (en un sentido que se aclara a continuación), correspondientes a autovalores reales.*

En ese enunciado, ***completo*** significa que toda funcional regular ψ definida por una función $\psi(x) \in \mathcal{S}$ (denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$) es el límite de un desarrollo débilmente convergente de la forma

$$\psi = \sum_\lambda (\chi_\lambda, \psi)_\mathcal{S}\, \chi_\lambda \,. \tag{64.11}$$

Esto significa que $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$ se tiene

$$(\psi, \varphi)_\mathcal{S} = (\psi, \varphi)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})} = \sum_\lambda (\chi_\lambda, \psi)^*_\mathcal{S}\, (\chi_\lambda, \varphi)_\mathcal{S} \ . \tag{64.12}$$

En particular, para $\psi(x) \equiv \varphi(x)$,

$$(\varphi, \varphi)_\mathcal{S} = \ \parallel \varphi \parallel_2{}^2 \ = \sum_\lambda |(\chi_\lambda, \varphi)_\mathcal{S}|^2 \ . \tag{64.13}$$

Esta ecuación es una generalización de la igualdad de Parseval (que, a su vez, generaliza el teorema de Pitágoras), lo que justifica el término ***ortogonal***.

Estos resultados se extienden a todo el espacio de Hilbert $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{S}}$ en el siguiente sentido: si $f(x)$ es una función de cuadrado sumable en la recta, entonces la distribución regular que ella define es el límite débil de un desarrollo de la forma

$$f = \sum_\lambda \widetilde{f}(\lambda)\, \chi_\lambda \,, \tag{64.14}$$

donde los coeficientes de ese desarrollo satisfacen

$$\parallel f \parallel_2{}^2 \ = \sum_\lambda \left| \widetilde{f}(\lambda) \right|^2 \ . \tag{64.15}$$

Ejemplos: El operador impulso, definido como $P = -i\frac{d}{dx}$ sobre $\mathcal{D}(P) = \mathcal{S}$, es simétrico y continuo sobre $\mathcal{S}$, y admite una (única) extensión autoadjunta en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ (ver las *Notas sobre operadores no acotados*).

Su extensión a $\mathcal{S}^*$ está dada por $P^\dagger f = -if'$, para toda $f \in \mathcal{S}^*$. En efecto, $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\left(P^\dagger f, \varphi\right)_\mathcal{S} = (f, -i\varphi')_\mathcal{S} = (-if', \varphi)_\mathcal{S} \ . \tag{64.16}$$

Las funcionales propias de $P^\dagger$ son distribuciones regulares que están dadas por las funciones $\chi_\lambda = \dfrac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Según el teorema anterior, para $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ se tiene

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}\, d\lambda \tag{64.17}$$

en el sentido de la convergencia débil, donde

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \left(\frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}, \varphi(x) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}\, \varphi(x)\, dx\,. \tag{64.18}$$

En efecto, en este caso $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ no es otra cosa que la transformada de Fourier de $\varphi(x) \in \mathcal{S} \subset \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$ y la integral en (64.17) converge uniformemente en λ (ver el Lema de Riemann - Lebesgue en las *Notas sobre la Transformación de Fourier en* $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$).

La ortogonalidad se reduce en este caso a

$$\|\, \varphi\, \|_2{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2\, d\lambda = \|\, \widetilde{\varphi}\, \|_2{}^2\,, \tag{64.19}$$

que es la igualdad de Parseval.

Por otra parte, dada $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, la funcional regular que ella define es el límite débil de una integral de la forma

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \widetilde{f}(\lambda)\, \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}\, d\lambda\,, \tag{64.20}$$

donde $\widetilde{f}(\lambda) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ y satisface $\|\, \widetilde{f}(\lambda)\, \|_2 = \|\, f(x)\, \|_2$. En efecto, $\widetilde{f}(\lambda)$ es aquí la transformada de Fourier de $f(x)$ (en el sentido de $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$) y la convergencia en media del lado derecho de (64.20) (ver el Teorema de Plancherel en las *Notas sobre la Transformación de Fourier en* $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$) garantiza su convergencia débil.

Similarmente, con las distribuciones propias del operador posición podemos escribir para toda $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \delta(x-\lambda)\, d\lambda \tag{64.21}$$

en el sentido de convergencia débil de la integral. En efecto, $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}$ tenemos

(64.22)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)^* \big(\delta(x-\lambda), \varphi(x)\big)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)^* \varphi(\lambda)\, d\lambda = (f,\varphi)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})} = (f,\varphi)_{\mathcal{S}}\ .$$

◇

Bibliografía:

- I. M. Guelfand y G. E. Chilov, *Les distributions*, Vol. I - III, Dunod, París, 1964-1972.
- A.N.Kolmogorov y S.V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.*