CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANÁLISIS FUNCIONAL

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE TEORÍA DE DISTRIBUCIONES

1. El espacio $\mathcal{K}$

Al considerar el espacio de las funciones continuas en $[a,b]$, hemos visto que ciertas funcionales lineales resultan continuas respecto de la convergencia uniforme, pero no respecto de la convergencia en media. Similarmente, al estudiar el completamiento de ese espacio respecto de la distancia derivada de la convergencia en media, hemos visto que ciertas funcionales lineales que es posible definir sobre $\mathcal{C}_2(a,b)$ ya no tienen sentido sobre $\mathbf{L_2}(a,b)$.

De ese modo, al ampliar el conjunto de las funciones consideradas, o al relajar el sentido de convergencia, ocurre una reducción en el conjunto de funcionales lineales y continuas que es posible definir sobre ese espacio.

En particular, toda funcional lineal y continua (acotada) en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ está unívocamente asociada con el producto escalar por un vector fijo de ese mismo espacio.

En esa condiciones, es vez de intentar incrementar aún más el conjunto de funciones relajando las condiciones que sobre ellas pesan, o de relajar el sentido de convergencia en ese espacio (con la consiguiente reducción del conjunto de funcionales), podemos asignar a las funcionales lineales y continuas un sentido de funciones generalizadas e imponer fuertes restricciones sobre el espacio de funciones, buscando incrementar el conjunto de esas funcionales.

Por ejemplo, podemos trabajar sobre el espacio métrico $\mathcal{K}_N$, formado por el conjunto de las funciones de soporte[1] compacto y con derivadas continuas hasta

[1] El soporte de una función $\varphi(x)$ (definida en casi todo punto), $\mathrm{Sop}(\varphi(x))$, es la clausura del conjunto de puntos donde la función toma valores no nulos.

el orden N, $\mathcal{C}_0^N(\mathbb{R})$, estructurado con una distancia que implica la convergencia uniforme de las N primeras derivadas de toda secuencia convergente,

$$\begin{aligned}\rho_N(\varphi,\psi) := \max\nolimits_{x\in\mathbb{R}} \{ \mid \varphi(x)-\psi(x) \mid + \mid \varphi'(x)-\psi'(x) \mid + \\ + \cdots + \mid \varphi^{(N)}(x)-\psi^{(N)}(x) \mid \} \, .\end{aligned} \tag{1.1}$$

Nótese que, como conjuntos, $\mathcal{K}_N \subset \mathcal{K}_M$ si $N > M$, mientras que toda secuencia convergente en $\mathcal{K}_N$ también lo es $\mathcal{K}_M$.

En lo que sigue, estaremos interesados en la intersección de todos esos espacios, $\mathcal{K} = \bigcap_N \mathcal{K}_N$, donde no podremos definir una distancia, pero sí un sentido de convergencia compatible con $\rho_N(\varphi,\psi)$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

El conjunto de las funciones que tienen derivadas continuas de todo orden y se anulan idénticamente fuera de un intervalo de longitud finita[2] constituye el espacio lineal $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Como sabemos, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En ese sentido, se puede decir que $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ es el completamiento de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ respecto de la distancia derivada de la norma $|| \, ||_2$.

En ese espacio lineal introducimos el siguiente **sentido de convergencia**.

Definición 1.1. Diremos que la sucesión $\{\varphi_n(x)\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ converge a la función $\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ si:

- $\exists$ un intervalo de longitud finita $[a,b]$ fuera del cual las funciones $\varphi(x)$ y $\{\varphi_n(x)\}$ se anulan idénticamente,
- $\forall k \in \mathbb{N}$, la secuencia de derivadas de orden k, $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ converge uniformemente a la correspondiente derivada del límite, $\varphi^{(k)}(x)$.

Así estructurado, ese espacio lineal se denota por $\mathcal{K}$, y es llamado espacio básico o de funciones de base o **de prueba (test-functions)**.

Nótese que tanto la derivación, como la multiplicación por funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y las traslaciones sobre la recta, dejan invariante al espacio $\mathcal{K}$. En efecto, $\forall \, \varphi(x) \in \mathcal{K}$

[2]El siguiente ejemplo muestra que tales funciones existen:

$$\varphi(x) = e^{\dfrac{-1}{(x-a)^2}} \, e^{\dfrac{-1}{(x-b)^2}} \, , \text{ for } a < x < b, \quad \varphi(x) \equiv 0, \text{ para } x \notin (a,b) \, . \tag{1.2}$$

tenemos que

$$\varphi'(x) \in \mathcal{K}\,,$$

$$\alpha(x)\varphi(x) \in \mathcal{K}\,, \forall\, \alpha(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})\,, \tag{1.3}$$

$$\varphi(x+h) \in \mathcal{K}\,, \forall\, h \in \mathbb{R}\,.$$

Puede mostrarse fácilmente que todas esas operaciones son **continuas** respecto del sentido de convergencia adoptado. Por ejemplo, si $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, entonces $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$ en $\mathcal{K}$, dado que sus soportes están contenidos en un mismo compacto sobre la recta, y sus derivadas de cualquier orden convergen uniformemente a la correspondiente derivada del límite.

2. Distribuciones sobre $\mathcal{K}$

Se llama **distribución** (o **función generalizada**) definida sobre la recta a toda funcional lineal y continua sobre el espacio $\mathcal{K}$,

$$f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{C}\,. \tag{2.1}$$

Ejemplos: Sea $f(x)$ una función definida sobre la recta, tal que resulte absolutamente integrable en todo intervalo compacto (**localmente sumable**), $f(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(\mathbb{R})$. Se puede definir una distribución (que denotamos por la misma letra) mediante la expresión

$$f[\varphi] := \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\varphi(x)\,, \tag{2.2}$$

que converge $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$. Toda distribución que puede ser representada de esa manera se dice **regular**.

En efecto, $f[\varphi]$ así definida es evidentemente lineal. Además, si $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$ entonces, en particular, $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ uniformemente. En consecuencia,

$$|f[\varphi_n] - f[\varphi]| \leq \int_{a[\varphi]}^{b[\varphi]} |f(x)|\, |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \leq \epsilon_n \int_{a[\varphi]}^{b[\varphi]} |f(x)| dx \to 0 \tag{2.3}$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $f[\varphi]$ es también continua.

Si $f(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \Rightarrow f(x) \in \mathbf{L_1}(a,b)$, para todo intervalo compacto $[a,b]$. Por lo tanto, $f(x) \in \mathbf{L_1^{(loc.)}}(\mathbb{R})$ y define una distribución regular,

$$f[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\varphi(x) = (f,\varphi)_{\mathbf{L_2(\mathbb{R})}}\,, \tag{2.4}$$

que puede expresarse en términos del producto escalar en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. Es por ello que usualmente se adopta la notación $(f, \varphi) := f[\varphi]$.

Un ejemplo de distribución **singular** (no regular) corresponde a la **delta de Dirac**:

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) := \varphi(x_0)\,. \tag{2.5}$$

En efecto, esta funcional es evidentemente lineal. Para $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, tenemos

$$\varphi_n(x_0) \to \varphi(x_0)\,, \tag{2.6}$$

de modo que también es continua,

$$(\delta(x - x_0), \varphi_n(x)) = \varphi_n(x_0) \longrightarrow \varphi(x_0) = (\delta(x - x_0), \varphi(x))\ . \tag{2.7}$$

Otro ejemplo corresponde al **valor principal** de $1/x$. La función $1/x$ no es integrable en ningún intervalo que contenga al origen, de modo que no define una funcional regular. Pero para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ existe la integral en valor principal

$$\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\right\} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx\,. \tag{2.8}$$

En efecto, supongamos que $\varphi(x) = 0$ para $|x| > a > 0$, donde $a = a[\varphi]$; entonces

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{\int_{-a}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{a}\right\} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)}{x}\, dx = \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \varphi(0) \lim_{\epsilon\to 0^+} \left\{\log(\epsilon/a) + \log(a/\epsilon)\right\}\ , \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde el último término se anula.

Esta funcional es claramente lineal. Para ver que también es continua consideremos una secuencia $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$. Por el teorema del valor medio, tenemos

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, [\varphi_n(x) - \varphi(x)]\right) &= \int_{-a}^{a} \frac{[\varphi_n(x) - \varphi(x)] - [\varphi_n(0) - \varphi(0)]}{x}\, dx = \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{x\,[\varphi_n'(c(x)) - \varphi'(c(x))]}{x}\, dx\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $c(x)$ está entre x y 0. Entonces,

$$\left|\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, [\varphi_n(x) - \varphi(x)]\right)\right| \leq 2\,a\,\varepsilon_n \to 0\,, \tag{2.11}$$

puesto que $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$ uniformemente en $[-a,a]$. De ese modo, VP $\frac{1}{x}$ define una distribución singular.

3. Propiedades locales de las distribuciones

Como aplicaciones de $\mathcal{K}$ en $\mathbb{C}$, las distribuciones no tienen un sentido puntual. Pero sí es posible asignarles propiedades **locales** en el siguiente sentido.

Se dice que una distribución es **nula** en un conjunto abierto de la recta si $\forall\,\varphi(x) \in \mathcal{K}$ cuyo soporte está contenido en ese conjunto es $(f,\varphi) = 0$. Por ejemplo, $\delta(x)$ es nula en algún entorno de todo punto $x \neq 0$.

Si f es no nula en todo entorno de un punto x_0, se dice que x_0 es un **punto esencial** de f. Por ejemplo, x_0 es un punto esencial de $\delta(x-x_0)$. Similarmente, $x=0$ es un punto esencial de la distribución regular correspondiente a la función $f(x) = x^2$ (a pesar de que $f(0) = 0$).

El conjunto de los puntos esenciales de una distribución constituye su **soporte**, $\mathrm{Sop}(f)$. Por ejemplo, el soporte de $\delta(x-x_0)$ está concentrado en un punto, $\mathrm{Sop}(\delta(x-x_0)) = \{x_0\}$. En el caso de una funcional regular f definida por una función localmente sumable $f(x)$ (definida en casi todo punto), $\mathrm{Sop}(f)$ es la clausura del conjunto de puntos donde $f(x) \neq 0$.

Si una función de prueba $\varphi_0(x) \in \mathcal{K}$ se anula idénticamente en un abierto que contiene al soporte de una distribución f, entonces $(f,\varphi_0) = 0$. De ese modo, es posible modificar la función de prueba fuera del soporte de una distribución sin modificar el valor que esta toma, $(f,\varphi+\varphi_0) = (f,\varphi)$.

4. El espacio dual: $\mathcal{K}^*$

Sobre el conjunto de las distribuciones se definen las operaciones de adición y multiplicación por números de manera que

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) := \alpha^*\,(f,\varphi) + \beta^*\,(g,\varphi)\,,\ \forall\varphi(x) \in \mathcal{K}\,, \tag{4.1}$$

con lo que evidentemente se obtienen funcionales lineales y continuas. Para el caso de funcionales regulares, esto se reduce a las operaciones usuales sobre las funciones que las definen,

$$\begin{aligned} \alpha^* \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \varphi(x)\,dx + \beta^* \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* \varphi(x)\,dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]^* \varphi(x)\,dx\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Así estructurado, el conjunto de las distribuciones sobre $\mathcal{K}$ constituye un espacio lineal, llamado **espacio dual** de $\mathcal{K}$ y denotado por $\mathcal{K}^*$.

En el espacio $\mathcal{K}^*$ se introduce el siguiente sentido de convergencia: se dice que una secuencia de distribuciones $\{f_n\}$ **converge débilmente** a $f \in \mathcal{K}^*$ si

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi)\,,\ \forall \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \tag{4.3}$$

Si el límite de una secuencia de distribuciones existe, entonces es único. En efecto, si $\{f_n\} \to f$ y $\{f_n\} \to g$ en $\mathcal{K}^*$ entonces, para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ se tiene que $(f, \varphi) = (g, \varphi)$, de donde resulta que (como aplicaciones) las distribuciones f y g son iguales.

Por otra parte, la operación de pasaje al límite es lineal: si $\{f_n\} \to f$ y $\{g_n\} \to g$ en $\mathcal{K}^*$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha f_n + \beta g_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \{\alpha^* (f_n, \varphi) + \beta^* (g_n, \varphi)\} = (\alpha f + \beta g, \varphi)\ , \tag{4.4}$$

para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} [\alpha f_n + \beta g_n] = \alpha f + \beta g\,. \tag{4.5}$$

En particular, si una distribución es el límite de una serie en $\mathcal{K}^*$,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \Rightarrow (f, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} h_k, \varphi \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (h_k, \varphi)\,,\ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \tag{4.6}$$

La convergencia en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ implica convergencia débil en $\mathcal{K}^*$. En efecto, si una secuencia de funciones de cuadrado sumable converge en media, $\{f_n\} \to f$, para la secuencia de funcionales regulares que ellas definen tenemos que

$$(f_n, \varphi) = (f_n, \varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} \to_{n\to\infty} (f, \varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (f, \varphi)\ , \tag{4.7}$$

para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K} \subset \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, en virtud de la continuidad del producto escalar en ese espacio de Hilbert.

En el caso de funcionales regulares, la convergencia débil también estará asegurada toda vez que pueda conmutarse el límite con la integral que define la funcional. Ese es el caso de secuencias de funciones localmente sumables que convergen uniformemente en todo intervalo cerrado. En efecto, si $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente en todo conjunto compacto,

$$(f_n - f, \varphi) = \int_{a[\varphi]}^{b[\varphi]} [f_n(x) - f(x)]^*\ \varphi(x)\, dx \to_{n\to\infty} 0\,. \tag{4.8}$$

El pasaje al límite bajo el signo integral es también posible bajo condiciones menos restrictivas, como por ejemplo cuando

- $f_n(x) \to f(x)$ en casi todo punto y $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall\, n$, donde $g(x)$ es localmente sumable,
- $f_n(x) \to f(x)$ monótonamente, siendo $f(x)$ localmente sumable.

Ejemplos: Sea

$$f_\epsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, \ |x| > \epsilon\,, \\ \\ 0\,, \ |x| \leq \epsilon\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Esta función permite definir una funcional regular que tiene por límite en $\mathcal{K}^*$ a una distribución singular,

$$\lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon = \mathrm{VP}\frac{1}{x} \tag{4.10}$$

(en este caso no es posible intercambiar el límite con la integral).

Otro ejemplo de una secuencia de funcionales regulares que converge a una distribución singular es

$$f_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \to_{t\to 0^+} \delta(x)\,. \tag{4.11}$$

En efecto,

$$\begin{gathered} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\,,\, \varphi(x) \right) = \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left[\varphi(0) + \varphi(x) - \varphi(0)\right] dx = \\ \varphi(0) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}}^{\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2}\, dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}}^{\frac{a[\varphi]}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} \left[\varphi(z\sqrt{4t}) - \varphi(0)\right] dz \to \varphi(0) \end{gathered} \tag{4.12}$$

para $t \to 0^+$, puesto que $\varphi(z\sqrt{4t}) - \varphi(0) = z\sqrt{4t}\, \varphi'(c(z,t))$, con $c(z,t)$ entre 0 y $z\sqrt{4t}$, en virtud del teorema del valor medio, mientras que $\varphi'(x)$ está uniformemente acotada en toda la recta. $\diamond$

Se puede demostrar de manera general que toda funcional singular es el límite débil de una secuencia de distribuciones regulares, que incluso pueden ser elegidas como definidas por funciones del espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Similarmente, toda distribución de soporte compacto es el límite débil de una secuencia de distribuciones regulares definidas por funciones del espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

También es posible mostrar que $\mathcal{K}^*$ es **completo** en el sentido de que, si existe el límite de las secuencias numéricas $\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi)$, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$, entonces el conjunto de esos límites define una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{K}$,

$$(f, \varphi) := \lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) \ . \tag{4.13}$$

Tratándose de aplicaciones de $\mathcal{K}$ en el cuerpo de los complejos, no existe una operación de producto o composición de distribuciones que, en el caso de funcionales regulares, corresponda al producto usual (punto a punto) de funciones. Pero sí es posible definir el producto de distribuciones por funciones en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de la siguiente manera.

Definición 4.1. Dada $f \in \mathcal{K}^*$ y $\alpha(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ se define la funcional αf mediante la relación

$$(\alpha f, \varphi) := (f, \alpha^* \varphi) \ , \tag{4.14}$$

lo que tiene sentido puesto que, para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, $\alpha(x)^*\varphi(x) \in \mathcal{K}$. Así definida, αf es una funcional lineal y continua.

La linealidad de αf es evidente. Para verificar la continuidad consideremos una secuencia convergente en $\mathcal{K}$, $\varphi_n \to \varphi$. Las funciones $\alpha(x)^*\varphi_n(x)$ son idénticamente nulas fuera de un mismo intervalo acotado, dentro del cual la secuencia de sus derivadas k-ésimas converge uniformemente, $(\alpha(x)^*\varphi_n(x))^{(k)} \to (\alpha(x)^*\varphi(x))^{(k)}$. Por lo tanto, la secuencia $\alpha(x)^*\varphi_n(x) \to \alpha(x)^*\varphi(x)$ en $\mathcal{K}$. Entonces, como consecuencia de la continuidad de f tenemos

$$(\alpha f, \varphi_n) = (f, \alpha^* \varphi_n) \to (f, \alpha^* \varphi) = (\alpha f, \varphi) \ . \tag{4.15}$$

5. La derivación en $\mathcal{K}^*$

Consideremos primero una funcional regular definida por una función $f(x)$ absolutamente continua en la recta, $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \varphi(x)\, dx$. Como su derivada $f'(x)$ existe en casi todo punto y es localmente integrable, podemos definir otra funcional regular como

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^* \varphi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \varphi'(x)\, dx = -\,(f, \varphi') \ , \tag{5.1}$$

donde (para integrar por partes) hemos tenido en cuenta que $\varphi \in \mathcal{K}$ es diferenciable y de soporte compacto, y (en el último paso) que la derivación es una aplicación de $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$ (ver (1.3)).

Nótese que en el miembro de la derecha en (5.1) ya no aparece la derivada de la función $f(x)$. De hecho, dado que $\varphi'(x) \in \mathcal{K}$, esa expresión tiene sentido para toda funcional $f \in \mathcal{K}^*$. Esto sugiere la siguiente definición.

Definición 5.1. Dada una distribución sobre $\mathcal{K}$, $f \in \mathcal{K}^*$, se define su **derivada** como la funcional cuyos valores están dados por

$$(f', \varphi) := -\,(f, \varphi')\,,\ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \tag{5.2}$$

Así definida, f' es una funcional lineal y continua. En efecto, f' es lineal como consecuencia de que la derivación sobre funciones de $\mathcal{K}$ es lineal. En cuanto a la continuidad, nótese que si $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, de la definición de convergencia en $\mathcal{K}$ (ver Sección 1) resulta que la secuencia de sus derivadas también converge en ese espacio a la derivada del límite, $\varphi_n'(x) \to \varphi'(x)$. Entonces, como consecuencia de la continuidad de f tenemos

$$(f', \varphi_n) = -\,(f, \varphi_n') \to -\,(f, \varphi') = (f', \varphi)\ . \tag{5.3}$$

De esa definición surgen las siguientes propiedades:

• La derivación en $\mathcal{K}^*$ es una operación lineal, pues $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} ((f+g)', \varphi) &= -\,(f+g, \varphi') = -\,(f, \varphi') - (g, \varphi') = \\ &= (f', \varphi) + (g', \varphi) = (f' + g', \varphi)\ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

• Toda función generalizada admite derivadas de todo orden. En efecto, para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K} \Rightarrow \varphi^{(n)}(x) \in \mathcal{K},\ \forall\, n$. Entonces

$$\left(f^{(n)}, \varphi\right) = (-1)^n \left(f, \varphi^{(n)}\right)\ . \tag{5.5}$$

• La operación de derivación es continua en $\mathcal{K}^*$. Supongamos que la secuencia de funciones generalizadas $\{f_n\}$ converge a f en $\mathcal{K}^*$. Entonces, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ se tiene

$$(f_n', \varphi) = -\,(f_n, \varphi') \to -\,(f, \varphi') = (f', \varphi)\ . \tag{5.6}$$

Por lo tanto, $f_n' \to f'$ en $\mathcal{K}^*$.

• Como consecuencia de la continuidad de la derivación, toda serie convergente de funciones generalizadas puede ser derivada término a término cualquier número de veces,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \Rightarrow f^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^{(n)} . \tag{5.7}$$

Esto representa una libertad que no se tiene cuando se trata de series de funciones, ya que en ese caso se deben requerir condiciones adicionales, como la convergencia uniforme de la serie de las derivadas, para poder asegurar que ésta converge a la derivada de la suma de la serie.

Ejemplos: La secuencia de distribuciones regulares $\left\{\frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right\}$ tiende a la distribución nula $\mathbf{0} \in \mathcal{K}^*$ cuando $\nu \to \infty$, dado que la secuencia de funciones converge uniformemente a 0 en toda la recta,

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\sin(\nu x)}{\nu}, \varphi(x)\right) = \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} \lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right) \varphi(x)\, dx = 0\,, \tag{5.8}$$

$\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$.

Entonces, dado que la derivación es una operación continua en $\mathcal{K}^*$,

$$\left(\lim_{\nu\to\infty} \frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right)' = \lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\sin(\nu x)}{\nu}\right)' = \lim_{\nu\to\infty} \cos(\nu x) = \mathbf{0}\,. \tag{5.9}$$

Similarmente, $\lim_{\nu\to\infty} \sin(\nu x) = \mathbf{0}$. Y tomando sucesivas derivadas,

$$\lim_{\nu\to\infty} \left[\nu^n \cos(\nu x)\right] = \mathbf{0} = \lim_{\nu\to\infty} \left[\nu^n \sin(\nu x)\right] . \tag{5.10}$$

Consideremos la función discontinua

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

y la distribución regular que ella define,

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\, dx\,. \tag{5.12}$$

Su derivada resulta

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = -\left(\theta(x), \varphi'(x)\right) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \left(\delta(x), \varphi(x)\right) , \tag{5.13}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{K}$. En consecuencia, $\theta'(x) = \delta(x)$.

Similarmente,

$$(\delta'(x), \varphi(x)) = -\left(\delta(x), \varphi'(x)\right) = -\varphi'(0)\,. \tag{5.14}$$

$\diamond$

Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$, cuya derivada es continua a trozos, con discontinuidades aisladas de altura finita en los puntos $\{a_k\}$. Ella define una distribución regular (que denotamos por f) cuya derivada está dada por

$$(f', \varphi) = -\int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} f(x)^* \varphi'(x)\, dx =$$

$$= \sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)^* \varphi(x)\, dx - \tag{5.15}$$

$$-\sum_k \left\{ f(a_{k+1}-0)^* \varphi(a_{k+1}) - f(a_k+0)^* \varphi(a_k) \right\},$$

donde la primera suma en el miembro de la derecha es finita en razón de que φ es de soporte compacto, y la segunda es nula porque $f(x)$ es continua. Entonces, la derivada de la distribución f es una funcional regular definida por la función $f'(x)$ (este es un caso particular de distribución regular definida por una función absolutamente continua, que ya hemos considerado al principio de esta Sección - ver ec. (5.1)).

Sea ahora $f(x)$ una función continua y diferenciable a trozos, con discontinuidades aisladas (sin puntos de acumulación) de altura finita en los puntos $\{a_k\}$, donde $f(a_k+0) - f(a_k-0) = h_k$. La derivada de la distribución regular que ella define satisface

$$(f', \varphi) = -\int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} f(x)^* \varphi'(x)\, dx =$$

$$= \sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)^* \varphi(x)\, dx + \sum_k \left[f(a_k+0)^* - f(a_k-0))^* \right] \varphi(a_k) \tag{5.16}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}^* \varphi(x)\, dx + \sum_k h_k^* \, \varphi(a_k)\,,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{K}$. En consecuencia, la derivada de f es una funcional singular dada por

$$f' = \frac{df}{dx} + \sum_k h_k \, \delta(x - a_k)\,, \tag{5.17}$$

donde hemos llamado $\frac{df}{dx}$ a la distribución regular definida por la función $f'(x)$ (que, por hipótesis, existe en casi todo punto y es localmente integrable). Téngase en cuenta que la serie en el segundo miembro es convergente en $\mathcal{K}^*$ puesto que, aplicada a una función de soporte compacto, siempre se reduce a una suma finita.

Ejemplo: Consideremos ahora la función definida como

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \ 0 < x < \pi \,, \tag{5.18}$$

y extendida a toda la recta como función impar de período 2π. Esta es una función discontinua en los puntos $x_k = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, con una discontinuidad de altura $h = \pi$ en todos ellos. Excepto en los puntos de discontinuidad, esta función es diferenciable y su derivada es $f'(x) = -1/2$.

Por el resultado anterior, podemos escribir la derivada de la función generalizada que ella define como

$$f' = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) \,, \tag{5.19}$$

donde la serie del segundo miembro es una funcional bien definida ya que su valor en una función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ se reduce a una suma finita.

La función $f(x)$ también puede ser representada mediante su serie de Fourier,

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \,, \tag{5.20}$$

que converge puntualmente al valor de $f(x)$ para todo $x \neq 2\pi k$ y converge a 0 en los puntos de discontinuidad de $f(x)$. Como la convergencia no es uniforme, esto no es suficiente para concluir que esta serie converge en $\mathcal{K}^*$ a la distribución f.

Para ver que esa serie también converge débilmente[3], recordemos primero que la serie de Fourier de una función continua a trozos en el intervalo $(-\pi, \pi)$ puede ser integrada término a término, resultando en una serie que converge puntualmente en ese intervalo a la integral de la función (que es allí una función continua).

En nuestro caso, la serie

$$F(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \tag{5.21}$$

converge absoluta y uniformemente en toda la recta a una primitiva de $f(x)$, que es continua y 2π-periódica: $F'(x) = f(x)$ excepto en los puntos de discontinuidad de $f(x)$. Por lo tanto, el segundo miembro de la ecuación (5.21), entendida como serie de distribuciones regulares, también converge en el espacio $\mathcal{K}^*$ a la funcional regular F definida por la función (continua en $\mathbb{R}$ y diferenciable a trozos) $F(x)$.

[3]La convergencia débil también está garantizada por la convergencia en media de la serie de Fourier en todo compacto.

En esas condiciones, la continuidad de la derivación en $\mathcal{K}^*$ nos permite derivar esa serie término a término para obtener

$$F' = f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} \,. \tag{5.22}$$

Pero como esta serie converge en $\mathcal{K}^*$, puede ser nuevamente derivada término a término para obtener de (5.19) y (5.22)

$$f' = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) \,. \tag{5.23}$$

De esta igualdad se deduce el siguiente **desarrollo de Fourier** para la δ-periódica:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \,. \tag{5.24}$$

$\diamond$

Un razonamiento similar permite asignar un sentido como distribución a la suma de series de la forma $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}$, donde los coeficientes satisfacen relaciones $|C_k| \leq M k^{n-2}$, con M constante y $n \in \mathbb{N}$.

Entendidas como series de funciones, ellas son claramente divergentes. Pero como series de funcionales regulares resultan convergentes, dado que son la derivada n-ésima como distribución de una serie que converge uniformemente en toda la recta a un límite continuo y 2π-periódico (y que, por lo tanto, también converge débilmente):

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{C_k}{(ik)^n}\, e^{ikx} \Rightarrow F^{(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx} \,. \tag{5.25}$$

De hecho, se puede demostrar que toda distribución (regular o singular) es la derivada de cierto orden de una distribución regular definida por una función continua.

En particular, consideremos una distribución $f \in \mathcal{K}^*$ de soporte compacto, $\mathrm{Sop}\,(f) \subset [-a, a]$, con $a > 0$. Para un dado $\varepsilon > 0$, tomemos una función real $h_\varepsilon(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ que satisfaga

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1\,, \forall\, |x| \leq a\,, \\ \\ 0\,, \forall\, |x| \geq a + \varepsilon\,. \end{cases} \tag{5.26}$$

En esas condiciones, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ tenemos que

$$(f, \varphi) = (f, h_\varepsilon\, \varphi) + (f, [1 - h_\varepsilon]\, \varphi) = (f, h_\varepsilon\, \varphi) \;, \tag{5.27}$$

dado que $\mathrm{Sop}(f) \cap \mathrm{Sop}[1 - h_\varepsilon(x)] = \emptyset$.

Ahora bien, como f puede representarse como $f_0^{(n)}$, donde f_0 una distribución regular definida por una función continua $f_0(x)$ y $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$
\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \left(f_0^{(n)}, h_\varepsilon\, \varphi\right) = (-1)^n \left(f_0, (h_\varepsilon\, \varphi)^{(n)}\right) \\
&= (-1)^n \textstyle\sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(f_0, h_\varepsilon^{(n-k)}\, \varphi^{(k)}\right) \qquad (5.28) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\left(h_\varepsilon^{(n-k)}\, f_0\right)^{(k)}, \varphi\right) .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe un conjunto de funciones continuas

$$
f_{\varepsilon,k}(x) = (-1)^{n-k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} h_\varepsilon(x)^{(n-k)}\, f_0(x)\,, \ \ k = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{5.29}
$$

con soporte contenido en el intervalo cerrado $[-(a+\varepsilon), a+\varepsilon]$, tales que la distribución de soporte compacto f puede escribirse como

$$
f = \sum_{k=0}^{n} \left(f_{\varepsilon,k}(x)\right)^{(k)} . \tag{5.30}
$$

Si $f \in \mathcal{K}^*$ tiene soporte concentrado en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, un razonamiento similar permite mostrar que en este caso la funcional es de la forma

$$
f = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \delta^{(k)}(x - x_0)\,, \tag{5.31}
$$

para algún $n \in \mathbb{N}$.

Vemos entonces que las rígidas restricciones que hemos impuesto sobre las funciones del espacio $\mathcal{K}$ (que, no obstante, es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$), nos permiten obtener un conjunto muy amplio de funciones generalizadas (toda restricción del espacio conlleva una ampliación del espacio dual) sobre las cuales aplicar con gran libertad las operaciones de paso al límite y diferenciación antes definidas.

6. Ecuaciones diferenciales en $\mathcal{K}^*$

Consideraremos ahora el problema de reconstruir una función generalizada a partir de su derivada.

Primero mostraremos que sólo las distribuciones (regulares definidas por funciones) constantes tienen por derivada a la distribución nula. La igualdad $y' = \mathbf{0}$ implica que, para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, es

$$(y', \varphi) = -(y, \varphi') = 0 \,. \tag{6.1}$$

Esta ecuación sólo define a la funcional y en el subespacio de $\mathcal{K}$ formado por las funciones $\varphi(x)$ que son la derivada de una función de prueba.

Una condición necesaria y suficiente para que $\varphi_0(x) \in \mathcal{K}$ sea la derivada de una función $\psi(x) \in \mathcal{K}$ es que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = 0$. En efecto, si $\varphi_0(x) = \psi'(x)$,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x)\, dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = 0 \,. \tag{6.2}$$

Inversamente, si $\varphi_0(x)$ satisface esa condición, tenemos que la integral $\int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x')\, dx' = 0$ para todo x tal que $|x| > a[\varphi_0] > 0$ (con a finito, ya que $\varphi_0(x)$ es de soporte compacto). Entonces, la primitiva

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(x')\, dx' \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}) \,. \tag{6.3}$$

Ahora bien, dada una función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, en general $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = (\mathbf{1}, \varphi) = C \neq 0$ (donde $\mathbf{1}$ corresponde a la distribución regular definida por una función idénticamente igual a 1, y $C = C[\varphi]$). Sea $\varphi_1(x) \in \mathcal{K}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\, dx = (\mathbf{1}, \varphi_1) = 1$. Entonces la diferencia $\varphi_0(x) = \varphi(x) - C\varphi_1(x)$ satisface que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx = C - C = 0 \,, \tag{6.4}$$

de modo que $\varphi_0(x)$ es la derivada de una función de $\mathcal{K}$ como en (6.3), $\varphi_0(x) = \psi'(x)$.

En consecuencia, podemos escribir que

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_0 + C\varphi_1) = 0 + C\,(y, \varphi_1) = \alpha^*\,(\mathbf{1}, \varphi) \,, \tag{6.5}$$

donde la constante $\alpha = (y, \varphi_1)^*$.

Por lo tanto, la solución de la ecuación $y' = \mathbf{0}$ es una distribución constante, $y = \alpha\,\mathbf{1}$, donde α queda determinado por el valor que la funcional toma sobre una función particular $\varphi_1(x) \in \mathcal{K}$.

De esto resulta que si dos distribuciones tienen la misma derivada, $f' = g'$, entonces sólo difieren en una constante, $f = g + \alpha\,\mathbf{1}$.

Ahora mostraremos que toda $f \in \mathcal{K}^*$ tiene una primitiva, que es solución de $y' = f$. Esta ecuación significa que, para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$,

$$(y', \varphi) = -(y, \varphi') = (f, \varphi) \,, \tag{6.6}$$

lo que sólo define a la funcional y sobre el subespacio de las funciones de $\mathcal{K}$ que son la derivada de un elemento de $\mathcal{K}$.

Como mostramos anteriormente, podemos escribir una función arbitraria de $\mathcal{K}$ como $\varphi(x) = \varphi_0(x) + C\varphi_1(x)$, donde $\varphi_0(x) = \psi'(x)$, con $\psi(x)$ definida en (6.3), $C = (\mathbf{1}, \varphi)$, y $\varphi_1(x)$ es una función fija de $\mathcal{K}$ tal que $(\mathbf{1}, \varphi_1) = 1$. Entonces, de (6.6) resulta que

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_0 + C\varphi_1) = -(f, \psi) + C\,(y, \varphi_1) = -(f, \psi) + \alpha^*\,(\mathbf{1}, \varphi)\ , \tag{6.7}$$

lo que determina la funcional y en todo $\mathcal{K}$, a menos de una (distribución) constante aditiva. Esta constante es fijada por el valor que toma la funcional sobre una función particular, $\alpha = (y, \varphi_1)^*$.

Se puede ver que el último miembro de (6.7) define una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{K}$. Su primer término determina una solución particular de la ecuación inhomogénea $y' = f$ (la correspondiente a $\alpha = 0$), mientras que la constante es la solución general de la ecuación homogénea $y' = 0$.

La linealidad de y en (6.7) es evidente. Para mostrar su continuidad, consideremos una secuencia de funciones $\varphi_{(n)}(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$, cuyos soportes estén contenidos en el intervalo $[-a, a]$, y formemos la secuencia $\varphi_{(n),0}(x) = \varphi_{(n)}(x) - C_n\,\varphi_1(x)$, donde $C_n = (\mathbf{1}, \varphi_{(n)})$. Esta secuencia converge a $\varphi_0(x) = \varphi(x) - C\,\varphi_1(x)$ en $\mathcal{K}$, con $C = (\mathbf{1}, \varphi)$.

Entonces,

$$\begin{array}{c} |\psi_n(x) - \psi(x)| = \left| \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi_{(n),0}(y) - \varphi_0(y)\right) dy \right| \leq \\[2ex] \leq \int_{-a}^{a} |\varphi_n(y) - \varphi(y)|\ dy + |(\mathbf{1}, \varphi_n - \varphi)| \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(y)|\ dy < \\[2ex] < 2\,a\,\varepsilon_n + \delta_n\ ,\ \forall\, x\ , \end{array} \tag{6.8}$$

donde el miembro de la derecha puede hacerse tan pequeño como se quiera con sólo tomar n suficientemente grande.

En esas condiciones, la secuencia $\{\psi_n(x)\}$ también converge a $\psi(x)$ en $\mathcal{K}$, y podemos escribir

$$(y, \varphi_n - \varphi) = -(f, \psi_n - \psi) + \alpha^*\,(\mathbf{1}, \varphi_n - \varphi) \to 0 \tag{6.9}$$

cuando $n \to \infty$.

En particular, si la inhonogeneidad f es regular, ella está definida por una función $f(x)$ localmente sumable, de la cual $F(x) = \int_0^x f(x')\,dx'$ es una primitiva (absolutamente continua). Entonces, integrando por partes y teniendo en cuenta que $\psi(x)$ es de soporte compacto, tenemos

$$
\begin{aligned}
-\,(f,\psi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)^*\psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)^*\varphi_0(x)\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)^*\left[\varphi(x) - C\varphi_1(x)\right]\,dx = (F - \beta\,1, \varphi)\,,
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

donde $\beta = (F, \varphi_1)^*$. Esto corresponde a una funcional regular definida por una primitiva de $f(x)$.

Más generalmente, la ecuación diferencial

$$
a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0\,,
\tag{6.11}
$$

donde $a_k(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\,, k = 0, 1, \ldots, n$, no tiene otras soluciones en $\mathcal{K}^*$ que las correspondientes a las soluciones clásicas de esa ecuación en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, a menos que $a_n(x)$ tenga ceros. En ese caso pueden existir nuevas soluciones cuyas derivadas tienen soporte concentrado en los ceros de $a_n(x)$[4]. También puede ocurrir que las soluciones clásicas no permitan definir una distribución. Esto se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos: Consideremos la ecuación $x\,y' = 0$. Sus únicas soluciones en el espacio de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ son las constantes. En el espacio $\mathcal{K}^*$ ella implica

$$
(xy', \varphi(x)) = -\big(y, [x\,\varphi(x)]'\big) = 0\,,
\tag{6.12}
$$

$\forall\,\varphi(x) \in \mathcal{K}$. Esta relación sólo define a la funcional y sobre el subespacio de las funciones de prueba que son la derivada de una función de $\mathcal{K}$ que se anula en $x = 0$.

Siempre podemos seleccionar dos funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{K}$ tales que

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{1}, \varphi_1(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,dx = 1\,,\ (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi_1(x)) = \int_{-\infty}^{0} \varphi_1(x)\,dx = 0\,,\\
(\mathbf{1}, \varphi_2(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x)\,dx = 0\,,\ (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi_2(x)) = \int_{-\infty}^{0} \varphi_2(x)\,dx = 1\,.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Dada $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ arbitraria, llamemos

$$
C_1 = (\mathbf{1}, \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx, \quad C_2 = (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx\,.
\tag{6.14}
$$

[4]Puede demostrarse que toda distribución con soporte concentrado en un punto x_0 es una combinación lineal de la funcional $\delta(x - x_0)$ y de un número finito de sus derivadas (ver ec. (5.31)).

La función $\varphi_0(x) = \varphi(x) - C_1\varphi_1(x) - C_2\varphi_2(x)$ satisface

$$(6.15)\qquad \begin{aligned} (\mathbf{1}, \varphi_0(x)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\, dx, = C_1 - C_1 - 0 = 0\,, \\ (\mathbf{1} - \theta(x), \varphi_0(x)) &= \int_{-\infty}^{0} \varphi_0(x)\, dx = C_2 - 0 - C_2 = 0\,. \end{aligned}$$

En consecuencia, su primitiva $\psi(x)$, definida como en (6.3), es una función de $\mathcal{K}$ que se anula en el origen. Por lo tanto, por (6.12) tenemos que para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ es

$$(6.16)\qquad \begin{aligned} (y, \varphi) &= (y, \psi'(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)) = \\ &= 0 + C_1\,(y, \varphi_1(x)) + C_2\,(y, \varphi_2(x)) = (\alpha\mathbf{1} + \beta(\mathbf{1} - \theta(x)), \varphi)\ , \end{aligned}$$

donde $\alpha = (y, \varphi_1)^*$ y $\beta = (y, \varphi_2)^*$.

Vemos entonces que hay dos soluciones linealmente independientes para la ecuación $x\,y' = \mathbf{0}$: $y_1 = \mathbf{1}$ y $y_2 = \theta(x)$. Esto es evidente para la primera, y es fácil de verificar para la segunda,

$$(6.17)\qquad (x\,\theta'(x), \varphi(x)) = (\delta(x), x\,\varphi(x)) = [x\,\varphi(x)]_{x=0} = 0\,.$$

Esto también muestra que $x\,\delta(x) = \mathbf{0}$.

Consideremos ahora la ecuación diferencial $x^3 y' + 2y = 0$. La solución clásica en el espacio de funciones corresponde a

$$(6.18)\qquad \frac{d}{dx}\,\log y(x) = \frac{d}{dx}\,x^{-2} \Rightarrow y(x) = C\,e^{1/x^2}\,.$$

Pero como esta función no es integrable en ningún intervalo que contenga a $x = 0$, ella no permite definir una funcional regular. Más aún, dado que presenta una singularidad esencial en el origen, tampoco admite una **regularización** que permita definir una distribución singular (al estilo de $\mathrm{VP}\frac{1}{x}$). De ese modo, la única solución en $\mathcal{K}^*$ es la trivial, $y = \mathbf{0}$. $\diamond$

7. La distribución x_+^λ

Consideremos la función

$$(7.1)\qquad x_+^\lambda := \begin{cases} 0, \ \text{para } x \leq 0\,, \\ \\ x^\lambda, \ \text{para } x > 0\,, \end{cases}$$

para $-1 < \lambda < 0$. Como es localmente integrable, permite definir una distribución regular como

$$(x_+^\lambda, \varphi) = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx, \quad -1 < \lambda < 0\,. \tag{7.2}$$

Su derivada como función,

$$\frac{d\, x_+^\lambda}{dx} = \begin{cases} 0, \text{ para } x < 0\,, \\ \\ \lambda\, x^{\lambda-1}, \text{ para } x > 0\,, \end{cases} \tag{7.3}$$

no es integrable en ningún intervalo que contenga al origen, y no corresponde a una distribución regular.

Pero, naturalmente, su derivada como distribución existe y está dada por

$$\begin{array}{c} \big((x_+^\lambda)', \varphi\big) = -\,\big(x_+^\lambda, \varphi'\big) = -\displaystyle\int_0^1 x^\lambda \varphi'(x)\, dx - \int_1^\infty x^\lambda \varphi'(x)\, dx = \\ \\ = -\,\big(x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0)]\big)\Big|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx \\ \\ -\,\big(x^\lambda \varphi(x)\big)\Big|_1^\infty + \displaystyle\int_1^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\, dx = \\ \\ = \displaystyle\int_0^1 \lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \int_1^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\, dx + \varphi(0)\,, \end{array} \tag{7.4}$$

para todo $-1 < \lambda < 0$. Esta expresión define una funcional singular que, para funciones de prueba que se anulan en $x = 0$, se reduce a tomar la integral

$$\int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\, dx\,. \tag{7.5}$$

Para funciones de prueba arbitrarias, $\varphi(0) \neq 0$, y la última línea de la ecuación (7.4) constituye una **regularización** de la integral en (7.5), que en ese caso es divergente.

Teniendo en cuenta (7.3), resulta natural definir la funcional x_+^λ, para $-2 < \lambda < -1$, a partir de la ecuación (7.4) como

$$x_+^\lambda := \left(\frac{x_+^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right)'\,, \tag{7.6}$$

que evidentemente es lineal y continua en $\mathcal{K}$.

En esas condiciones, para $-2 < \lambda < 0$, $\lambda \neq -1$ y $\forall\, \varphi \in \mathcal{K}$, tenemos

$$\big(x_+^\lambda, \varphi\big) = \int_0^1 x^\lambda[\varphi(x) - \varphi(0)]\, dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}\,, \tag{7.7}$$

expresión que se reduce a (7.2) para $-1 < \lambda < 0$.

Extendiendo de ese modo la definición de x_+^λ, hemos obtenido una expresión para los valores que esa funcional toma sobre funciones de $\mathcal{K}$ que tiene sentido en una región más amplia del parámetro λ, y que se reduce a la expresión original para $-1 < \lambda < 0$. De hecho, el segundo miembro de (7.7) constituye una **extensión analítica** en λ del segundo miembro de (7.2).

En efecto, para toda $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, $F(\lambda^*) := (x_+^\lambda, \varphi)$ es una función analítica de λ^* en la región $-1 < \Re(\lambda) < 0$ (donde la funcional es regular). Su derivada está dada por $\frac{dF}{d\lambda^*} = \int_0^\infty \ln x \, x^{\lambda^*} \varphi(x)\, dx$, ya que esta integral es absoluta y uniformemente convergente para esos valores de λ. La extensión analítica de $F(\lambda^*)$ permite definir la funcional x_+^λ para todo valor de λ donde aquella existe.

En ese sentido, para $-1 < \lambda < 0$ podemos escribir (x_+^λ, φ) de la forma[5]

$$\begin{aligned} \left(x_+^\lambda, \varphi\right) = &\int_0^1 x^\lambda \left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right] dx + \\ &+ \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\lambda+1+k)} \,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Ahora bien, como funciones de λ, la primer integral en el miembro de la derecha de (7.10) converge para $\Re(\lambda) > -n-1$, la segunda converge $\forall \lambda$ complejo, mientras que la última suma presenta polos simples en $\lambda = -1, -2, ..., -n$, cuyos residuos son

$$\operatorname{Res}\,(x_+^\lambda, \varphi)\big|_{\lambda=-k-1} = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\delta^{(k)}(x), \varphi(x)\right) \,. \tag{7.11}$$

[5]Este procedimiento es similar al que permite extender analíticamente la definición de la función $\Gamma(\lambda)$: para $\lambda > -1$ se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda+1) := \int_0^\infty x^\lambda e^{-x}\, dx = &\int_0^1 x^\lambda \left[e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right] dx + \int_1^\infty x^\lambda e^{-x}\, dx + \\ &+ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(\lambda+1+k)} \,, \end{aligned} \tag{7.8}$$

expresión que se extiende analíticamente a $\Re(\lambda) > -n-1$, y presenta polos simples en $\lambda = -1, -2, ...,$ con residuos dados por

$$\operatorname{Res}\Gamma(\lambda+1)\big|_{\lambda=-k-1} = \frac{(-1)^k}{k!} \,. \tag{7.9}$$

Podemos decir entonces que la distribución x_+^λ se extiende analíticamente[6] a todo el plano complejo del parámetro λ, presentando polos simples en los puntos $\lambda = -1, -2, ..., -n$, con residuos dados por las distribuciones

$$\text{Res}\, x_+^\lambda\big|_{\lambda=-k-1} = \frac{(-1)^k}{k!}\,\delta^{(k)}(x)\,. \tag{7.16}$$

Nótese que $\forall\,\varphi(x) \in \mathcal{K}$ con soporte contenido en la semirrecta $x < 0$, la función (x_+^λ, φ) es idénticamente nula para $\Re(\lambda) \in (-1, 0)$. En consecuencia, su extensión analítica al resto del plano toma también valores nulos para tales funciones de prueba. Es decir, el soporte de la extensión analítica de x_+^λ también está contenido en el semieje positivo $x \geq 0$.

Finalmente, señalemos que $x_+^{\lambda-1}$ y $\Gamma(\lambda)$ presentan polos simples para los mismos valores de λ ($\lambda = -k$, con $k \in \mathbb{N}$). Entonces, la distribución $\Phi_\lambda := x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$, que es regular para $\Re(\lambda) > 0$, existe por extensión analítica en todo el plano complejo del parámetro λ como una distribución con soporte en $\mathbb{R}^+$. En particular, de (7.16) y (7.9) tenemos que

$$\lim_{\lambda\to -k} \Phi_\lambda = \frac{\text{Res}\, x_+^{\lambda-1}\big|_{\lambda=-k}}{\text{Res}\,\Gamma(\lambda)\big|_{\lambda=-k}} = \frac{(-1)^k\delta^{(k)}(x)/k!}{(-1)^k/k!} = \delta^{(k)}(x)\,, \tag{7.17}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

[6]Este procedimiento de definición de funcionales por extensión analítica en un parámetro es conocido como proceso de **regularización de integrales divergentes**, y suele ser muy usado en Física por conveniencia de cálculo. Por ejemplo, la integral

$$I = \int_0^\infty x^{-3/2}\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right)\,dx \tag{7.12}$$

puede ser entendida como el valor en $\lambda = -3/2$ de la función analítica definida por

$$I(\lambda) = \int_0^\infty x^\lambda\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right)\,dx\,, \tag{7.13}$$

integral que converge para $\Re(\lambda) > -2$. Pero para $\Re(\lambda) > -1$, $I(\lambda)$ puede ser escrita como

$$I(\lambda) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-ax}\,dx - \int_0^\infty x^\lambda e^{-ax}\,dx = \left(a^{-(\lambda+1)} - b^{-(\lambda+1)}\right)\Gamma(\lambda+1)\,, \tag{7.14}$$

ya que cada integral es convergente. En virtud de la unicidad de la extensión analítica, esa igualdad vale $\forall\lambda \neq -1, -2, ...$ En particular,

$$I(-3/2) = \left(a^{1/2} - b^{1/2}\right)\Gamma(-1/2) = -\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)2\sqrt{\pi}\,. \tag{7.15}$$

$\diamond$

8. Transformación de Fourier en $\mathcal{K}$. El espacio Z.

Recordemos que el conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es un subespacio denso del espacio de Schwartz[7]. Sea $\varphi(x) \in \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$. Entonces, su transformada de Fourier es también una función del espacio de Schwartz, dado que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$.

Pero como esa función es de soporte compacto tenemos

$$\mathcal{F}[\varphi](\sigma) = \psi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-i\sigma x} \varphi(x)\, dx\,, \tag{8.1}$$

donde $\varphi(x) = 0 \;\forall\, x \notin (-a[\varphi], a[\varphi])$. En esas condiciones, $\psi(s)$ puede ser definida para valores complejos de su argumento, $s = \sigma + i\tau$. En efecto, la integral

$$\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-i\sigma x} e^{\tau x} \varphi(x)\, dx \tag{8.2}$$

existe para todo $s \in \mathbb{C}$, puesto que

$$|\psi(s)| \leq \frac{e^{|\tau| a}\, ||\varphi(x)||_1}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{8.3}$$

Similarmente, las derivadas de todo orden de $\psi(s)$ también existen en todo el plano complejo. Ellas están dadas por

$$\psi^{(n)}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-isx} (-ix)^n \varphi(x)\, dx\,, \tag{8.4}$$

dado que esas integrales convergen absoluta y uniformemente en s para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\psi^{(n)}(s)\right| \leq \frac{e^{Ta}\, ||x^n\, \varphi(x)||_1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{para } |\Im(s)| \leq T, \text{ con } T > 0\,. \tag{8.5}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de una función del espacio $\mathcal{K}$ es una función analítica entera (holomorfa en todo el plano - sin singularidades, excepto en el infinito).

Ya sabemos que dicha transformada de Fourier es también una función de decrecimiento rápido sobre el eje real. Para s complejo tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi^{(q)}](s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} e^{-isx} \varphi^{(q)}(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]} (is)^q\, e^{-isx} \varphi(x)\, dx = (is)^q\;\psi(s)\,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

para todo q, de donde resulta que

$$|s^q \psi(s)| \leq \frac{e^{|\Im(s)|\, a} ||\varphi^{(q)}||_1}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{8.7}$$

[7]Ver las *Notas sobre la transformación de Fourier.*

En consecuencia, $\psi(s)$ es una función de decrecimiento rápido sobre toda recta horizontal ($\Im(s) =$ constante).

Inversamente, toda función analítica entera $\psi(s)$ que verifica desigualdades de la forma

$$|s^q \psi(s)| \leq K_q[\psi]\, e^{|\Im(s)|\, a[\psi]},\ \forall\, q \in \mathbb{N} \tag{8.8}$$

(donde las constantes K_q y a dependen de $\psi(s)$) es la transformada de Fourier de una función $\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ que se anula idénticamente para $|x| \geq a$.

El conjunto de las funciones analíticas enteras que verifican (8.8) constituye un espacio lineal, denotado por $\mathcal{Z}$. De ese modo, la transformación de Fourier establece una correspondencia biunívoca entre los espacios $\mathcal{K}$ y $\mathcal{Z}$,

$$\mathcal{F} : \mathcal{K} \leftrightarrow \mathcal{Z}\,. \tag{8.9}$$

Restringiendo los argumentos de las funciones contenidas en $\mathcal{Z}$ a valores reales, tenemos que $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S}$ es un subespacio denso de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En efecto, sea $\chi(\sigma) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, y supongamos que $\chi(\sigma) \perp \mathcal{Z}$. Entonces,

$$\begin{gathered} (\chi, \psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = 0,\ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathcal{F}^{-1}[\chi](x), \varphi(x))_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = 0,\ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}\,. \end{gathered} \tag{8.10}$$

Y como $\mathcal{K} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, es $\mathcal{F}^{-1}[\chi] = \mathbf{0} \Rightarrow \chi = \mathbf{0}$. Por lo tanto, todo vector de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ está contenido en $\overline{\mathcal{Z}}$.

La ecuación (8.4) muestra que si $\psi(s) \in \mathcal{Z} \Rightarrow \psi^{(q)}(s) \in \mathcal{Z}$, dado que $[(-ix)^n \varphi(x)] \in \mathcal{K}$. Es decir,

$$\frac{d}{ds} : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}\,. \tag{8.11}$$

Evidentemente, el espacio $\mathcal{Z}$ también es invariante frente al producto por funciones analíticas enteras de crecimiento polinomial sobre rectas horizontales (en particular, polinomios): si $P(s)$ es una función entera que, para ciertas constantes $C > 0$ y $m \geq 0$ y $b > 0$, satisface

$$|P(s)| \leq C\ (1 + |s|^m)\, e^{|\Im(s)| b} \Rightarrow P(s)\psi(s) \in \mathcal{Z},\ \forall\, \psi(s) \in \mathcal{Z}\,. \tag{8.12}$$

También es posible trasladar las funciones de $\mathcal{Z}$ sin sacarlas de ese espacio. En efecto, si $\psi(s) \in \mathcal{Z} \Rightarrow \psi(s + h) \in \mathcal{Z}, \forall\, h \in \mathbb{C}$.

Por lo dicho anteriormente, vemos que la transformación de Fourier establece una correspondencia (lineal) biunívoca entre el espacio $\mathcal{K}$ y el espacio $\mathcal{Z}$, $\mathcal{F} : \mathcal{K} \leftrightarrow$

$\mathcal{Z}$. Esto permite introducir en $\mathcal{Z}$ un **sentido de convergencia** a partir de la convergencia en $\mathcal{K}$.

Definición 8.1. Se dice que $\psi_n(s) \to \psi(s)$ en $\mathcal{Z}$ si $\varphi_n(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi_n](x) \to \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x)$ en $\mathcal{K}$.

Esto implica, en particular, la convergencia uniforme en toda región acotada del plano complejo de la secuencia de las derivadas $\psi_n^{(k)}(s)$ a la correspondiente derivada del límite, $\psi^{(k)}(s)$. En efecto[8], como $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon_n \,, \forall\, x$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\psi_n^{(k)}(s) - \psi^{(k)}(s)\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-a}^{a} e^{-isx} (-ix)^k \left[\varphi_n(x) - \varphi(x)\right] \right| \leq \\ &\leq \frac{a^k\, e^{|\Im(s)|\, a}}{\sqrt{2\pi}} \,||\varphi_n(x) - \varphi(x)||_1 \leq \frac{a^k\, e^{T\, a}}{\sqrt{2\pi}}\, 2\, a\, \varepsilon_n \,, \end{aligned} \tag{8.14}$$

$\forall\, |\Im(s)| \leq T$, lo que puede hacerse tan pequeño como se quiera con sólo tomar n suficientemente grande.

Por otra parte, como $\psi(s) \in \mathcal{Z}$ es una función analítica entera, su series de Taylor converge en todo el plano complejo. Entonces, para la función trasladada podemos escribir

$$\psi(s+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\, \psi^{(k)}(s), \forall\, h \in \mathbb{C}\,. \tag{8.15}$$

Esta serie también converge en el sentido de la convergencia en el espacio $\mathcal{Z}$, pues

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\, \psi^{(k)}(s)\right](x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\, \mathcal{F}^{-1}\left[\psi^{(k)}(s)\right](x) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}\, (-ix)^k\, \varphi(x) \longrightarrow_{n\to\infty} e^{-ihx}\varphi(x) \end{aligned} \tag{8.16}$$

en el sentido de la convergencia en $\mathcal{K}$.

---

[8] Similarmente,

$$\begin{aligned} \left|(is)^q \left[\psi_n^{(k)}(s) - \psi^{(k)}(s)\right]\right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-a}^{a} e^{-isx} \left\{(-ix)^k \left[\varphi_n(x) - \varphi(x)\right]\right\}^{(q)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{|\Im(s)|\, a} \,||\left\{x^k \left[\varphi_n(x) - \varphi(x)\right]\right\}^{(q)}||_1 \to 0 \end{aligned} \tag{8.13}$$

cuando $n \to \infty$.

9. Distribuciones sobre $\mathcal{Z}$

De forma similar a como se hizo con el espacio $\mathcal{K}$, se introducen las funcionales lineales y continuas sobre el espacio $\mathcal{Z}$. Estas **distribuciones**, que pueden ser **regulares** o **singulares** (con el mismo significado que antes), conforman el espacio dual $\mathcal{Z}^*$ respecto de operaciones lineales definidas de la misma manera que antes.

Además, se define la convergencia débil en $\mathcal{Z}^*$ de modo que

$$g_n \to g \text{ si } (g_n, \psi) \to (g, \psi)\,, \ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,. \tag{9.1}$$

También se define una operación de derivación sobre elementos de $\mathcal{Z}^*$ de modo que, para toda función $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$, la distribución derivada satisface

$$(g', \psi) = -\,(g, \psi')\ . \tag{9.2}$$

Al igual que la derivación en $\mathcal{K}^*$, ésta es una operación continua: si $g_n \to g$ en $\mathcal{Z}^*$, entonces $(g_n', \psi) = -(g_n, \psi') \to -(g, \psi') = (g', \psi)$.

En particular, $\mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{Z}^*$. En efecto, si $g(\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, ella permite definir una distribución regular sobre $\mathcal{Z}$ como el producto escalar

$$(g, \psi) := (g, \psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})}\ . \tag{9.3}$$

Esta funcional es evidentemente lineal. Para ver que también es continua, tomemos una secuencia $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ en $\mathcal{Z}$. Esto significa que sus antitransformadas de Fourier $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$ y, por lo tanto, también convergen en media. En esas condiciones, siendo $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[g](x)$ (en el sentido de $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$), y teniendo en cuenta las propiedades de $\mathcal{F}$ y la continuidad del producto escalar en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, tenemos

$$\begin{gathered}(g, \psi_n) = (g, \psi_n)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (f, \varphi_n)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} \to_{n\to\infty} \\ \to (f, \varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g, \psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g, \psi)\ .\end{gathered} \tag{9.4}$$

10. Transformada de Fourier en $\mathcal{K}^*$

Hemos visto que la transformada de Fourier establece una correspondencia biunívoca entre los elementos de los espacios $\mathcal{K}$ y $\mathcal{Z}$, que preserva las operaciones lineales y la convergencia de secuencias. Es posible establecer una correspondencia similar entre los respectivos espacios duales, $\mathcal{K}^*$ y $\mathcal{Z}^*$, que generaliza la correspondencia inducida por $\mathcal{F}$ entre sus subespacios $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$.

En efecto, para toda $f(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, cuya transformada $g(\sigma) = \mathcal{F}[f](\sigma) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, y para toda función $\varphi(x) \in \mathcal{K}$, cuya transformada $\psi(\sigma) = \mathcal{F}[\varphi](\sigma) \in \mathcal{Z}$, tenemos

$$(f,\varphi)_{\mathcal{K}} = (f,\varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g,\psi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (g,\psi)_{\mathcal{Z}} \ , \tag{10.1}$$

donde hemos incluido como subíndice el espacio en que actúa cada funcional.

Definición 10.1. Dada $f \in \mathcal{K}^*$ diremos que $g \in \mathcal{Z}^*$ es su **transformada de Fourier** si, para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$, se cumple que

$$(g,\psi)_{\mathcal{Z}} = (f,\varphi)_{\mathcal{K}} \ , \tag{10.2}$$

donde $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x) \in \mathcal{K}$. Esta relación puede entenderse como una generalización de la igualdad de Parseval.

Cada distribución $f \in \mathcal{K}^*$ define, a través de esa relación, una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{Z}$, que denotamos por $\mathcal{F}[f]$:

$$(\mathcal{F}[f],\psi)_{\mathcal{Z}} := \left(f,\mathcal{F}^{-1}[\psi]\right)_{\mathcal{K}} \ . \tag{10.3}$$

En efecto, es evidente que $\mathcal{F}[f]$ así definida es lineal. Veamos que también es continua. Consideremos una secuencia convergente $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{K}$; sus transformadas de Fourier $\psi_n(\sigma) \to \psi(\sigma)$ en $\mathcal{Z}$. Entonces, de (10.3) resulta que

$$(\mathcal{F}[f],\psi_n)_{\mathcal{Z}} = (f,\varphi_n)_{\mathcal{K}} \to (f,\varphi)_{\mathcal{K}} = (\mathcal{F}[f],\psi)_{\mathcal{Z}} \ , \tag{10.4}$$

dada la continuidad de f.

En ese sentido, toda distribución sobre $\mathcal{K}$ tiene una transformada de Fourier, que es un elemento de $\mathcal{Z}^*$,

$$\mathcal{F} : \mathcal{K}^* \to \mathcal{Z}^* \, . \tag{10.5}$$

Además, si $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^*$ tienen la misma transformada, $\mathcal{F}[f_1] = \mathcal{F}[f_2] \in \mathcal{Z}^* \Rightarrow f_1 = f_2$.

Inversamente, toda distribución sobre $\mathcal{Z}$ define, a través de (10.2), una distribución sobre $\mathcal{K}$ de la que es su transformada de Fourier. En consecuencia, $\mathcal{F}$ es una aplicación biunívoca de $\mathcal{K}^*$ sobre $\mathcal{Z}^*$, $\mathcal{F} : \mathcal{K}^* \leftrightarrow \mathcal{Z}^*$. Su inversa, $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Z}^* \to \mathcal{K}^*$, satisface que

$$\left(\mathcal{F}^{-1}[g],\varphi\right)_{\mathcal{K}} = (g,\mathcal{F}[\varphi])_{\mathcal{Z}} \, , \ \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K} \, , \tag{10.6}$$

y se tiene que $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]\right] = f, \ \forall\, f \in \mathcal{K}^*$ y $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[g]\right] = g, \ \forall\, g \in \mathcal{Z}^*$.

La transformación de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{K}^* \to \mathcal{Z}^*$ es una aplicación continua (respecto de la convergencia débil de funcionales). En efecto, si $f_n \to f$ en el espacio $\mathcal{K}^*$ entonces, para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$, se tiene

$$(\mathcal{F}[f_n], \psi)_{\mathcal{Z}} = (f_n, \varphi)_{\mathcal{K}} \to (f, \varphi)_{\mathcal{K}} = (\mathcal{F}[f], \psi)_{\mathcal{Z}} \ , \tag{10.7}$$

donde $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x)$. Por lo tanto, también se tiene que $\mathcal{F}[f_n] \to \mathcal{F}[f]$ en $\mathcal{Z}^*$.

Similarmente, su inversa $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{Z}^* \to \mathcal{K}^*$ es también una aplicación continua.

Puede comprobarse fácilmente que son válidas las mismas fórmulas que para las transformadas y antitransformadas de Fourier de derivadas de funciones en $\mathcal{S}$:

$$\begin{gathered}\mathcal{F}[f]' = \mathcal{F}[-ix\, f] \Rightarrow \mathcal{F}[P(x)\, f] = P(i\tfrac{d}{d\sigma})\mathcal{F}[f]\,, \\ \mathcal{F}[f'] = i\sigma\, \mathcal{F}[f] \Rightarrow P(\sigma)\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[P(-i\tfrac{d}{dx})\, f]\,.\end{gathered} \tag{10.8}$$

Por ejemplo,

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{F}[f]', \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = -\left(\mathcal{F}[f], \psi'(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = -\left(f, -ix\varphi(x)\right)_{\mathcal{K}} = \\ = \left(-ixf, \varphi(x)\right)_{\mathcal{K}} = \left(\mathcal{F}[-ixf], \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} \ , \ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,.\end{gathered} \tag{10.9}$$

Ejemplos: La trasformada de Fourier de la distribución $\delta(x)$ está dada por

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{F}[\delta(x)], \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = \left(\delta(x), \varphi(x)\right)_{\mathcal{K}} = \varphi(0) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)\, d\sigma = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}}, \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} \ , \ \forall\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,.\end{gathered} \tag{10.10}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}[\delta(x)] = \mathbf{1}/\sqrt{2\pi}$.

Similarmente, para la transformada de Fourier de una constante tenemos

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{F}[\mathbf{1}], \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = \left(\mathbf{1}, \varphi(x)\right)_{\mathcal{K}} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\, \psi(0) = \\ = \left(\sqrt{2\pi}\, \delta(\sigma), \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}\end{gathered} \tag{10.11}$$

para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$. Entonces, $\mathcal{F}[\mathbf{1}] = \sqrt{2\pi}\, \delta(\sigma)$.

Consideremos ahora un polinomio $P(x)$ ($\notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$). Tenemos

$$\mathcal{F}[P(x)] = \mathcal{F}[P(x)\, \mathbf{1}] = P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)\, \mathcal{F}[\mathbf{1}] = \sqrt{2\pi}\, P\left(i\frac{d}{d\sigma}\right)\, \delta(\sigma)\,, \tag{10.12}$$

que es una distribución con soporte concentrado en el origen.

Similarmente,

$$\mathcal{F}\left[P\left(-i\frac{d}{dx}\right)\,\delta(x)\right]=P(\sigma)\mathcal{F}[\delta(x)]=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}}\,P(\sigma)\,. \tag{10.13}$$

La función $e^{bx}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ define una distribución regular y, en ese sentido, tiene una transformada de Fourier. Tenemos

$$\begin{aligned}
&\big(\mathcal{F}[e^{b\,x}],\psi(\sigma)\big)_{\mathcal{Z}}=\big(e^{b\,x}\,\mathbf{1},\varphi(x)\big)_{\mathcal{K}}=\big(\mathbf{1},e^{b^*x}\,\varphi(x)\big)_{\mathcal{K}}=\\
&\left(\sqrt{2\pi}\,\delta(\sigma),\psi\left(\sigma-(ib)^*\right)\right)_{\mathcal{Z}}=\sqrt{2\pi}\,\psi\left(-(ib)^*\right)=\\
&=\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((-ib)^*\right)^k}{k!}\,\psi^{(k)}(0)=\\
&=\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((-ib)^*\right)^k}{k!}\,\left((-1)^k\delta^{(k)}(\sigma),\psi(\sigma)\right)\,,
\end{aligned}\tag{10.14}$$

para toda función (entera) $\psi(\sigma)\in\mathcal{Z}$. Entonces,

$$\delta(\sigma+ib):=\mathcal{F}[e^{b\,x}](\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ib)^k}{k!}\,\delta^{(k)}(\sigma)\,, \tag{10.15}$$

donde la serie (formalmente una serie de Taylor) converge débilmente a una distribución que toma valores nulos sobre toda función de $\mathcal{Z}$ que se anule en $s=(-ib)^*$. ◇

En el caso general, el hecho de que las funciones del espacio $\mathcal{Z}$ sean analíticas enteras permite definir funcionales trasladadas, $g(\sigma)\to g(\sigma+h)$, mediante la relación

$$(g(\sigma+h),\psi(\sigma))_{\mathcal{Z}}:=(g(\sigma),\psi(\sigma-h^*))_{\mathcal{Z}}\,,\ \forall\,\psi(\sigma)\in\mathcal{Z}\,, \tag{10.16}$$

lo que evidentemente corresponde a una funcional lineal y continua.

Teniendo en cuenta que la serie de Taylor para $\psi(\sigma)$ también converge en $\mathcal{Z}$, y que g es continua, tenemos

$$\begin{aligned}
&(g(\sigma+h),\psi(\sigma))_{\mathcal{Z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-h^*)^k}{k!}\,\left(g(\sigma),\psi^{(k)}(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}=\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\,g^{(k)}(\sigma),\psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}\,,
\end{aligned}\tag{10.17}$$

de donde resulta la convergencia débil de la serie

$$g(\sigma + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\, g^{(k)}(\sigma)\,. \tag{10.18}$$

En ese sentido, las distribuciones sobre $\mathcal{Z}$ son analíticas enteras.

Consideremos ahora una distribución $f \in \mathcal{K}^*$ de soporte compacto contenido en $[-a, a]$. Ya sabemos que, $\forall\, \varepsilon > 0$, tales funcionales pueden ser representadas como sumas de derivadas de distribuciones regulares definidas por funciones continuas $f_{\varepsilon,k}(x)$ con soporte contenido en $[-(a+\varepsilon), a+\varepsilon]$ (ver ec. (5.30)),

$$f = \sum_{k=0}^{n} \big(f_{\varepsilon,k}(x)\big)^{(k)}\,. \tag{10.19}$$

Su transformada de Fourier está dada por

$$\begin{array}{c} (\mathcal{F}[f], \psi)_{\mathcal{Z}} = (f, \mathcal{F}^{-1}[\psi])_{\mathcal{K}} = \\[2ex] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(f_{\varepsilon,k}(x), (\mathcal{F}^{-1}[\psi](x))^{(k)}\right)_{\mathcal{K}} = \\[2ex] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left(\mathcal{F}[f_{\varepsilon,k}(x)], (i\,\sigma)^k \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}} = \\[2ex] = \left(\sum_{k=0}^{n}(i\,\sigma)^k g_{\varepsilon,k}(\sigma), \psi(\sigma)\right)_{\mathcal{Z}}\,, \end{array} \tag{10.20}$$

donde

$$g_{\varepsilon,k}(s) := \mathcal{F}[f_{\varepsilon,k}(x)](s) = \int_{-(a+\varepsilon)}^{a+\varepsilon} e^{-i\,s\,x} f_{\varepsilon,k}(x)\, dx\,, \tag{10.21}$$

la transformada de Fourier de una función continua de soporte compacto, es una función analítica entera de su argumento que satisface

$$\left|g_{\varepsilon,k}^{(q)}(s)\right| \leq e^{|\Im(s)|(a+\varepsilon)}\, \frac{(a+\varepsilon)^q}{\sqrt{2\pi}}\, \parallel f_{\varepsilon,k}(x) \parallel_1\;. \tag{10.22}$$

En consecuencia, $\forall\, \varepsilon > 0$, la transformada de Fourier de una distribución de soporte compacto puede ser representada como una distribución regular definida por una función analítica entera de crecimiento polinomial (sobre el eje real),

$$\mathcal{F}[f] = g(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} (i\,\sigma)^k g_{\varepsilon,k}(\sigma)\,. \tag{10.23}$$

Ejemplo: Finalmente obtendremos la transformada de Fourier de la distribución x_+^λ. Para ello tendremos en cuenta que $\mathcal{F} : \mathcal{K}^* \to \mathcal{Z}^*$ es una aplicación continua.

Consideremos la función (localmente integrable) $e^{-\tau x}x_+^\lambda$, con $\tau > 0$ y $\lambda > 0$, que converge uniformemente a x_+^λ en todo intervalo cerrado $[a,b]$, para $\tau \to 0^+$. Entonces, también converge débilmente:

$$\lim_{\tau\to 0^+} e^{-\tau x}x_+^\lambda = x_+^\lambda \text{ en } \mathcal{K}^* \Rightarrow \lim_{\tau\to 0^+} \mathcal{F}\left[e^{-\tau x}x_+^\lambda\right] = \mathcal{F}\left[x_+^\lambda\right] \text{ en } \mathcal{Z}^* . \tag{10.24}$$

Ahora bien, para $\tau > 0$ y $\lambda > 0$, $e^{-\tau x}x_+^\lambda \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, por lo que su transformada de Fourier como distribución es una funcional regular determinada por su transformada como función. Teniendo en cuenta que, además, $e^{-\tau x}x_+^\lambda \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, dicha transformada está dada por la integral

$$\mathcal{F}\left[e^{-\tau x}x_+^\lambda\right](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-i(\sigma - i\tau)x}x^\lambda\, dx . \tag{10.25}$$

Cambiando la variable de integración por $\xi = (\sigma - i\tau)x$, y corriendo el camino de integración de la recta $[0,(\sigma - i\tau)\infty)$ al semieje imaginario negativo, $[0,-i\infty)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-\tau x}x_+^\lambda\right](\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma - i\tau)^{-\lambda-1}\int_0^{-i\infty} e^{-i\xi}\xi^\lambda\, d\xi = \\ &= \frac{e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}(\sigma - i\tau)^{-\lambda-1}\int_0^\infty e^{-\eta}\eta^\lambda\, d\eta = \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)\, e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}(\sigma - i\tau)^{-\lambda-1} .\end{aligned} \tag{10.26}$$

En esas condiciones,

$$\mathcal{F}\left[x_+^\lambda\right] = \frac{\Gamma(\lambda+1)\, e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}(\sigma - i0)^{-\lambda-1} , \tag{10.27}$$

donde

$$(\sigma - i0)^{-\lambda-1} := \lim_{\tau\to 0^+}(\sigma - i\tau)^{-\lambda-1} . \tag{10.28}$$

Por otra parte, para toda $\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$ y $\forall\, \lambda > 0$,

$$\left(\mathcal{F}[x_+^\lambda], \psi\right)_{\mathcal{Z}} = \left(x_+^\lambda, \varphi\right)_{\mathcal{K}} , \tag{10.29}$$

donde $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}[\psi](x)$. Pero ya hemos visto que el miembro de la derecha se extiende analíticamente (de manera única) a todo el plano complejo de la variable λ, presentando polos simples en $\lambda = -1. -2, \dots$ Por lo tanto, la funcional $\mathcal{F}\left[x_+^\lambda\right]$ también se extiende analíticamente a todo el plano λ, presentando los mismos polos. De (10.29) resulta que dicha extensión representa la transformada de Fourier de la extensión analítica de x_+^λ para todo $\lambda \neq -1, -2, \dots$.

En particular, la funcional $\Phi_{\lambda+1} := x_+^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$ existe en todo el plano complejo λ, y tiene por transformada de Fourier a

$$\mathcal{F}\left[\Phi_{\lambda+1}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\right] = \frac{e^{-i(\lambda+1)\pi/2}}{\sqrt{2\pi}}\,(\sigma - i0)^{-\lambda-1}\,. \tag{10.30}$$

$\diamond$

11. Distribuciones temperadas

El conjunto de las funcionales lineales y continuas (respecto de la convergencia uniforme de las derivadas de todo orden en toda la recta) definidas sobre el espacio de Schwartz, $\mathcal{S} \supset \mathcal{K}$, constituye el espacio de las **distribuciones temperadas**, $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{K}^*$[9].

El nombre se justifica por el hecho de que este subespacio de $\mathcal{K}^*$ no contiene distribuciones regulares de crecimiento rápido, como $e^{b\,x}$ con $\Re(b) \neq 0$, que sí tienen sentido sobre $\mathcal{K}$.

Las definiciones de las operaciones lineales, de derivación y pasaje al límite en $\mathcal{S}^*$ son enteramente similares a las dadas anteriormente, y no serán repetidas aquí.

También se puede definir el producto de distribuciones temperadas por funciones con derivadas de todo orden de crecimiento polinomial: $h(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$\left|h^{(q)}(x)\right| \leq C_q\,(1+|x|)^{k_q}\,,\ q = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11.1}$$

para ciertas constantes C_q y k_q que dependen de $h(x)$.

Se puede demostrar que toda distribución sobre el espacio $\mathcal{S}$ es la derivada de cierto orden de una distribución regular definida por una función continua de crecimiento polinomial.

Por otra parte, dado que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$, resulta que las transformadas de Fourier de distribuciones sobre $\mathcal{S}$ son también funcionales sobre ese mismo espacio. De hecho, $\mathcal{F}$ es una aplicación biunívoca sobre $\mathcal{S}^*$,

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}^* \leftrightarrow \mathcal{S}^*\,. \tag{11.2}$$

12. Producto directo de distribuciones

Sea $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Puede definirse una funcional lineal y continua (respecto de la convergencia uniforme de las derivadas parciales de todo orden) sobre ese espacio mediante el **producto directo** de dos distribuciones en una variable:

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x,y)) := (f(x), (g(y), \varphi(x,y)))\,. \tag{12.1}$$

[9]Nótese que, como $\mathcal{Z} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}^* \subset \mathcal{Z}^*$

En efecto, para x fijo, $\varphi(x,y) \in \mathcal{K}_y$, de modo que tiene sentido tomar

$$\chi(x) := (g(y), \varphi(x,y)) \ , \tag{12.2}$$

lo que define una función de soporte compacto (dado que $\varphi(x,y)$ es de soporte compacto en $\mathbb{R}^2$, y se anula para $|x| \geq a[\varphi]$, $\forall\, y$).

Por otra parte, dado que $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}^\infty$, por el teorema del valor medio podemos escribir

$$\left| \frac{\partial_y^k \varphi(x+\varepsilon,y) - \partial_y^k \varphi(x,y)}{\varepsilon} - \partial_x \partial_y^k \varphi(x,y) \right| =$$

$$= \left| \partial_x \partial_y^k \varphi(x+\varepsilon_1,y) - \partial_x \partial_y^k \varphi(x,y) \right| = \left| \varepsilon_1\, \partial_x^2 \partial_y^k \varphi(x+\varepsilon_2,y) \right| < \tag{12.3}$$

$$< |\varepsilon|\, M_k[\varphi] \rightarrow_{\varepsilon\rightarrow 0} 0, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{N}\,,$$

donde $|\varepsilon| > |\varepsilon_1| > |\varepsilon_2| > 0$.

Entonces,

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0} \frac{\varphi(x+\varepsilon,y) - \varphi(x,y)}{\varepsilon} = \partial_x \varphi(x,y)\,, \text{ en } \mathcal{K}_y, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{12.4}$$

(donde $\partial_x \varphi(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$). En consecuencia, como g es una funcional continua, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\chi'(x) = \lim_{\varepsilon\rightarrow 0} \left(g(y), \frac{\varphi(x+\varepsilon,y) - \varphi(x,y)}{\varepsilon} \right) = (g(y), \partial_x \varphi(x,y)) \ . \tag{12.5}$$

Con el mismo argumento vemos que, en general,

$$\chi^{(n)}(x) = (g(y), \partial_x^n \varphi(x,y)) \ . \tag{12.6}$$

Por lo tanto, $\chi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, y el producto directo está bien definido:

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), \chi(x)) \ . \tag{12.7}$$

13. Producto de convolución en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$

Sean $f(x), g(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$. La función definida por la **convolución** de $f(x)$ y $g(x)$,

$$h(x) = (f * g)\,(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})\,. \tag{13.1}$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
||h||_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,|g(y)|\, dy\, dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|g(y)|\, dx\, dy = ||f||_1\, ||g||_1\,,
\end{aligned} \tag{13.2}
$$

donde se ha cambiado el orden de integración (lo que está justificado por el teorema de Fubini, ya que la integral doble existe), y se ha cambiado la variable de integración $x \to x + y$.

Así definido, el producto de convolución es asociativo y conmutativo,

$$
(f * g) * h = f * (g * h)\,, \quad f * g = g * f\,. \tag{13.3}
$$

Por ejemplo,

$$
(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(x-z)\, dz = (g * f)(x), \tag{13.4}
$$

donde se ha cambiado la variable de integración por $z = x - y$.

La convolución $(f * g)\,(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$ permite definir una distribución regular sobre $\mathcal{K}$,

$$
(f * g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right\}^* \varphi(x)\, dx\,, \tag{13.5}
$$

donde $\varphi(x) \in \mathcal{K}$. Como esta función es acotada, la integral doble existe; entonces se puede cambiar el orden de las integrales y la variable de integración $x \to x + y$, para obtener

$$
\begin{aligned}
(f * g, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)^*\, g(y)^* \varphi(x)\, dx\, dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^*\, g(y)^* \varphi(x+y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \left(g(y), \varphi(x+y)\right)\, dx\,,
\end{aligned} \tag{13.6}
$$

ya que la función desplazada $\varphi(x + y) \in \mathcal{K}_y$.

En la Sección anterior hemos visto que la función

$$
\chi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \tag{13.7}
$$

como consecuencia de la continuidad de g y de que $\varphi(x + y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pero, en general, $\chi(x)$ no es una función de soporte compacto en la recta debido a que $\varphi(x + y)$ no es de soporte compacto en el plano, sino que toma valores constantes sobre las rectas $x + y =$ constante.

No obstante, existen ciertos casos en los que

$$(f * g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \chi(x)\, dx \tag{13.8}$$

puede interpretarse como el valor que la distribución f toma sobre una función del espacio $\mathcal{K}$.

Por ejemplo, supongamos que la función $g(y)$ sea de soporte compacto en la recta y. Como $\varphi(x+y)$ también lo es, y su soporte se desplaza a medida que se varía x, se ve que para $|x|$ suficientemente grande la intersección de ambos soportes es vacía. En esas condiciones, $\chi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ y

$$(f * g, \varphi) = (f, \chi)\ . \tag{13.9}$$

Como el producto de convolución es simétrico, la misma conclusión se obtiene si $f(x)$ es de soporte compacto, intercambiando los roles de $g(x)$ y $f(x)$.

Supongamos ahora que el soporte de $g(y)$ sólo esté acotado de un lado, digamos por abajo. Como el soporte de $\varphi(x+y)$ se desplaza hacia la izquierda cuando x crece, para x suficientemente grande la intersección de ambos soportes es vacía. En consecuencia, existe un $a[\varphi]$ tal que si $x \geq a[\varphi]$, entonces la función $\chi(x) = 0$. Es decir, en este caso $\chi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, y su soporte está acotado por arriba.

Ahora bien, si el soporte de la función $f(x)$ también está acotado por abajo, la intersección de los soportes de $f(x)$ y $\chi(x)$, $\mathrm{Sop}(f(x)) \bigcap \mathrm{Sop}(\chi(x))$, es un compacto. La integral en el segundo miembro de (13.8) sólo es sensible a los valores de $\chi(x)$ en esa intersección, y su valor no cambia si cambiamos la función $\chi(x)$ por otra función de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ que coincida con ella en el soporte de $f(x)$:

$$\chi(x) \to \hat{\chi}(x) \in \mathcal{K},\ \text{ tal que } \hat{\chi}(x) = \chi(x),\ \forall\, x \in \mathrm{Sop}(f(x))\,. \tag{13.10}$$

En esas condiciones,

$$(f * g, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \chi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* \hat{\chi}(x)\, dx = (f, \hat{\chi})\,. \tag{13.11}$$

Similares conclusiones se obtienen para el caso en que los soportes de $f(x)$ y $g(x)$ estén ambos acotados por arriba.

Vemos entonces que, al menos cuando

- una de las funciones $f(x)$ o $g(x)$ tiene soporte compacto,
- ambas funciones tienen soporte acotado del mismo lado,

la distribución regular definida por el producto de convolución $f * g$ puede describirse como

$$(f * g, \varphi) = (f, \hat{\chi}) \quad (\text{ó } (g, \hat{\chi})) \,, \tag{13.12}$$

donde $\hat{\chi}(x) \in \mathcal{K}$ es tal que

$$\hat{\chi}(x) = \chi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \,, \; \forall\, x \in \mathrm{Sop}(f(x)) \,. \tag{13.13}$$

Nótese que en ambos casos la intersección

$$\mathrm{Sop}(f(x) \times g(y)) \cap \mathrm{Sop}(\varphi(x+y)) \tag{13.14}$$

es un compacto en el plano. Con un razonamiento similar al anterior, también podríamos cambiar

$$\begin{gathered} \varphi(x+y) \to \hat{\varphi}(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2), \text{ tal que} \\ \hat{\varphi}(x,y) = \varphi(x+y), \; \forall\, \langle x, y \rangle \in \mathrm{Sop}(f(x) \times g(y)) \,, \end{gathered} \tag{13.15}$$

y representar a la distribución $f * g$ como un producto directo de distribuciones,

$$((f * g)(x), \varphi(x)) = (f(x) \times g(y), \hat{\varphi}(x,y)) \;. \tag{13.16}$$

14. Producto de convolución en $\mathcal{K}^*$

Teniendo en cuenta que para mostrar que $\chi(x) = (g(y), \varphi(x+y)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sólo hemos recurrido a la continuidad de la funcional g, vemos que las mismas consideraciones hechas en la Sección anterior valen para todo par de distribuciones $f, g \in \mathcal{K}^*$.

Entonces, cuando la intersección de los soportes

$$\mathrm{Sop}(f(x) \times g(y)) \cap \mathrm{Sop}(\varphi(x+y)) \tag{14.1}$$

es un compacto en el plano, lo que ocurre al menos cuando

- f ó g es de soporte compacto,
- f y g tienen soporte acotado del mismo lado,

podemos definir el **producto de convolución** de esas distribuciones como un producto directo:

Definición 14.1. $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$,

$$((f * g)(x), \varphi(x)) := (f(x) \times g(y), \hat{\varphi}(x,y)) \;, \tag{14.2}$$

donde $\hat{\varphi}(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\hat{\varphi}(x,y) = \varphi(x+y), \; \forall\, \langle x, y \rangle \in \mathrm{Sop}(f(x) \times g(y)) \,. \tag{14.3}$$

En esas condiciones, se puede demostrar que el producto de convolución de distribuciones tiene las mismas propiedades de asociatividad y conmutatividad que la convolución de funciones en $\mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, ecuación (13.3).

Ejemplo: Si f y g son distribuciones regulares definidas por funciones localmente sumables, $f(x)$ y $g(x)$, que tienen su soporte contenido en la semirrecta $x \geq 0$, tenemos

$$\begin{array}{l}
(f * g, \varphi) = \Big(f(x), (g(y), \widehat{\varphi(x} + y)) \Big) = \\[2ex]
\quad = \displaystyle\int_0^\infty f(x)^* \int_0^\infty g(y)^* \varphi(x+y)\, dy\, dx = \\[2ex]
\quad = \displaystyle\int_0^{a[\varphi]} f(x)^* \int_x^{a[\varphi]} g(y-x)^* \varphi(y)\, dy\, dx = \\[2ex]
\quad = \displaystyle\int_0^{a[\varphi]} \left\{ \int_0^y f(x)\, g(y-x)\, dx \right\}^* \varphi(y)\, dy = \\[2ex]
\quad = \left(\displaystyle\int_0^y f(x)\, g(y-x)\, dx, \varphi(y) \right) ,
\end{array} \tag{14.4}$$

donde $\varphi(x) \in \mathcal{K}$ tal que $\varphi(x) = 0,\ \forall\, x > a[\varphi]$. Entonces, la convolución $f * g$ es la distribución regular dada por la función

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi = \int_0^x f(x-\xi)\, g(\xi)\, d\xi\,. \tag{14.5}$$

◇

La funcional $\delta(x-a)$ es de soporte compacto, al igual que sus derivadas de todo orden, de modo que existe su convolución con todo otro elemento de $\mathcal{K}^*$: $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{K}$ se tiene

$$\begin{array}{l}
(\delta(x-a) * f(x), \varphi(x)) = (f(x) * \delta(x-a), \varphi(x)) = \\[1ex]
\quad = (f(x)\, (\delta(y-a), \varphi(x+y))) = (f(x), \varphi(x+a)) \; .
\end{array} \tag{14.6}$$

Recordando que

$$(f(x-a), \varphi(x)) := (f(x), \varphi(x+a)) \tag{14.7}$$

vemos que

$$\delta(x-a) * f(x) = f(x) * \delta(x-a) = f(x-a)\,. \tag{14.8}$$

En particular, para $a = 0$,

$$\delta(x) * f(x) = f(x) * \delta(x) = f(x)\,, \tag{14.9}$$

lo que muestra que $\delta(x)$ es la unidad respecto del producto de convolución.

Si D_x es un operador diferencial a coeficientes constantes, tenemos

$$\begin{aligned} (D_x\delta(x) * f(x), \varphi(x)) &= (f(x), (D_y\delta(y), \varphi(x+y))) = \\ &= \big(f(x), \big(\delta(y), D_y^*\varphi(x+y)\big)\big) = (f(x), (\delta(y), D_x^*\varphi(x+y))) = \\ &= (f(x), D_x^*\varphi(x)) = (D_x f(x), \varphi(x))\ . \end{aligned} \tag{14.10}$$

Por lo tanto,

$$D_x\delta(x) * f(x) = D_x f(x)\,. \tag{14.11}$$

Además,

$$\begin{aligned} (D_x(f * g)(x), \varphi(x)) &= ((f * g)(x), D_x^*\varphi(x)) = \\ &= \Big(f(x), \big(g(y), \widehat{D_{x+y}^*\varphi}(x+y)\big)\Big) = \Big(f(x), (D_y g(\widehat{y), \varphi(}x+y))\Big) = \\ &= (f(x) * D_x g(x), \varphi(x)) \end{aligned} \tag{14.12}$$

de modo que

$$D_x(f * g)(x) = f(x) * D_x g(x) = D_x f(x) * g(x)\,. \tag{14.13}$$

Entonces, un operador diferencial a coeficientes constantes aplicado sobre un producto de convolución actúa sobre uno cualquiera de los factores.

Lema 14.2. *De la convergencia $f_n \to f$ en $\mathcal{K}^*$ se deduce la convergencia de $f_n * g \to f * g$ en, al menos, las siguientes condiciones:*

- *los soportes de las distribuciones $\{f_n\}$ están contenidos en un mismo conjunto compacto,*
- *g es de soporte compacto,*
- *los soportes de $\{f_n\}$ y g están acotados del mismo lado y de manera independiente de n.*

En esos casos, el producto de convolución es continuo en $\mathcal{K}^*$,

$$\lim_{n\to\infty} (f_n * g) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) * g\,. \tag{14.14}$$

Corolario 14.3. *Si la funcional f_t depende de un parámetro t y existe su **derivada débil** respecto de t,*

$$(\partial_t f_t(x), \varphi(x)) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f_{t+\varepsilon}(x) - f_t(x)}{\varepsilon}, \varphi(x) \right) , \tag{14.15}$$

entonces

$$\partial_t \left(f_t * g \right) = \partial_t f_t * g \tag{14.16}$$

en cualquiera de las siguientes condiciones:

- *las funcionales f_t tienen sus soportes contenidos en un mismo conjunto compacto, independiente de t,*
- *g es de soporte compacto,*
- *f_t y g tienen soportes acotados del mismo lado, y de manera independiente de t.*

Es sabido que la transformada de Fourier de un producto de convolución de funciones sumables en la recta, $f_1(x), f_2(x) \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$, está dado por el producto de sus transformadas de Fourier, $\mathcal{F}[f_1 * f_2](\sigma) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}[f_1](\sigma)\, \mathcal{F}[f_2](\sigma)$. Veremos que esta propiedad se extiende al producto de convolución de distribuciones sobre el espacio $\mathcal{K}$ cuando uno de los factores es una funcional de soporte compacto.

En efecto, si $f_1, f_2 \in \mathcal{K}^*$, y f_2 es de soporte compacto, el producto de convolución $f_1 * f_2$ está definido por

$$(f_1 * f_2, \varphi) = (f_1, \chi) \ , \tag{14.17}$$

donde

$$\chi(x) = (f_2(y), \varphi(x+y)) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \, . \tag{14.18}$$

Ya sabemos que la transformada de Fourier de una distribución de soporte compacto puede ser representada como una distribución regular sobre el espacio $\mathcal{Z}$, definida por una función analítica entera de crecimiento polinomial (ver ec. (10.23)), $\mathcal{F}[f_2](\sigma) = g_2(\sigma)$. En esas condiciones,

$$\begin{aligned} \chi(x) = (f_2(y), \varphi(x+y))_{\mathcal{K}} = (\mathcal{F}[f_2(y)], \mathcal{F}[\varphi(x+y)])_{\mathcal{Z}} = \\ = (g_2(\sigma), e^{i\,\sigma\,x} \psi(\sigma))_{\mathcal{Z}} = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\sigma\,x} g_2^*(\sigma)\, \psi(\sigma)\, d\sigma = \\ = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}^{-1} \left[g_2^*(\sigma)\, \psi(\sigma) \right] (x) \, , \end{aligned} \tag{14.19}$$

donde $\psi(\sigma) = \mathcal{F}[\varphi(x)](\sigma)$, y donde hemos tenido en cuenta que el producto $g_2^*(\sigma)\, \psi(\sigma) \in \mathcal{Z}$.

En consecuencia,

$$(f_1 * f_2, \varphi)_{\mathcal{K}} = \big(f_1, \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}^{-1}\,[g_2^*(\sigma)\,\psi(\sigma)]\big)_{\mathcal{K}} =$$

$$\big(\mathcal{F}[f_1], \sqrt{2\pi}\,g_2^*(\sigma)\,\psi(\sigma)\big)_{\mathcal{Z}} = \big(\sqrt{2\pi}\,g_2(\sigma)\,\mathcal{F}[f_1], \psi(\sigma)\big)_{\mathcal{Z}} = \tag{14.20}$$

$$= (\mathcal{F}[f_1 * f_2], \psi)_{\mathcal{Z}}\ ,\ \forall\,\psi(\sigma) \in \mathcal{Z}\,.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f_1]\,\mathcal{F}[f_2]\,, \tag{14.21}$$

donde una de las distribuciones tiene soporte compacto y su transformada de Fourier es una función analítica entera de crecimiento (a lo sumo) polinomial.

15. Aplicaciones del producto de convolución

Ecuaciones elípticas: Sea $\rho(\mathbf{x})\,, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, una densidad de masa continua y de soporte compacto. El potencial gravitatorio que produce satisface la ecuación diferencial de Poisson,

$$\triangle v(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\,, \tag{15.1}$$

cuya solución es una función con derivadas continuas de segundo orden dada por la integral

$$v(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel}\ d^3\mathbf{y}\,. \tag{15.2}$$

Ahora bien, esa expresión tiene el aspecto de una convolución (en tres dimensiones):

$$v = G * \rho\,, \tag{15.3}$$

donde la función de Green del Laplaciano[10], $G = \dfrac{-1}{4\,\pi\,r}$ con $r = \parallel \mathbf{x} \parallel$, es una distribución regular definida sobre $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ que satisface

$$\triangle G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\,. \tag{15.9}$$

---

[10] La función de Green del Laplaciano en un espacio de dimensión n es la solución de la ecuación diferencial inhomogénea

$$\triangle G = \delta \Rightarrow G = \frac{-\,r^{2-n}}{(n-2)\,\Omega_n}\ ,\ n > 2\,, \tag{15.4}$$

donde $\Omega_n = \dfrac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ es la superficie de la esfera de radio 1 en dicho espacio.

Consideremos ahora una distribución arbitraria de soporte compacto, $\rho \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)^*$. La distribución definida por la convolución $v = \left(\frac{-1}{4\,\pi\,r}\right) * \rho$ satisface la ecuación de Poisson,

$$\triangle v = \triangle \left(\frac{-1}{4\,\pi\,r} * \rho \right) = \left(\triangle \frac{-1}{4\,\pi\,r} \right) * \rho = \delta * \rho = \rho\,. \tag{15.10}$$

◇

En general, dada una ecuación diferencial elíptica a coeficientes constantes,

$$Lu = f\,, \tag{15.11}$$

ella puede ser estudiada en el espacio de distribuciones (tomando por inhomogeneidad f a una distribución de soporte compacto).

La función de Green de L es una distribución que satisface

$$LG = \delta\,. \tag{15.12}$$

Ella está definida a menos de una solución de la ecuación homogénea. Si G es conocida, una solución particular de la ecuación inhomogénea (15.11) puede ser

---

En efecto, como r^{2-n} es una distribución regular (respecto de la medida de integración $d^n\mathbf{x} = r^{n-1}\,dr\,d\Omega$), para $\varphi(r,\Omega) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tenemos

$$\begin{aligned} \left(\triangle r^{n-2}, \varphi\right) &= \left(r^{n-2}, \triangle\varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r\geq\varepsilon} r^{2-n}\,\triangle\varphi(\mathbf{x})\,d^n\mathbf{x} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r\geq\varepsilon} \left\{ \overrightarrow{\nabla} \cdot \left[r^{2-n}\,\overrightarrow{\nabla}\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})\,\overrightarrow{\nabla} r^{2-n} \right] + \varphi(\mathbf{x})\triangle r^{2-n} \right\}\,d^n\mathbf{x}\,. \end{aligned} \tag{15.5}$$

Teniendo en cuenta que r^{2-n} es una función homogénea de grado $(2-n)$, se verifica que $\triangle r^{2-n} = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left(\triangle r^{n-2}, \varphi\right) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r=\varepsilon} \left\{ -\varepsilon^{2-n}\,\partial_r\varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})\,(n-2)\,\varepsilon^{1-n} \right\} \varepsilon^{n-1}\,d\Omega_n \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\{ -\varepsilon \int_{r=\varepsilon} \partial_r\varphi(\mathbf{x})\,d\Omega_n + (n-2) \int_{r=\varepsilon} \varphi(\mathbf{x})\,d\Omega_n \right\} = \\ &= 0 + (2-n)\,\Omega_n\,\varphi(\mathbf{0}) = (2-n)\,\Omega_n\,\left(\delta(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})\right)\,, \end{aligned} \tag{15.6}$$

para toda $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En consecuencia,

$$\triangle \left(\frac{r^{2-n}}{(2-n)\,\Omega} \right) = \delta(\mathbf{x})\,, \tag{15.7}$$

para $n \geq 3$. Para dimensión $n = 2$, un cálculo enteramente similar muestra que

$$\triangle \left(\frac{\log r}{2\pi} \right) = \delta(\mathbf{x})\,. \tag{15.8}$$

◇

escrita como $u = G * f$. En efecto,

$$Lu = L\,(G * f) = LG * f = \delta * f = f\,. \tag{15.13}$$

Ecuaciones parabólicas: En la teoría de la transmisión del calor, la temperatura de una barra infinita evoluciona según la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{15.14}$$

donde $u(x,t)$ tiene una derivada primera respecto de t y una derivada segunda respecto de x continuas para $t > 0$. Si la distribución inicial de temperatura en la barra está dada por la función $u(x, t = 0) = \mu(x)$, la solución de (15.14) para $t > 0$ es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}} \mu(y)\,dy\,. \tag{15.15}$$

Si $\mu(x) \in \mathbf{L_1}(\mathbb{R})$, esta integral (que existe para una clase más amplia de funciones) puede ser escrita como la convolución

$$u(x,t) = \frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} * \mu(x)\,. \tag{15.16}$$

En el caso general, podemos suponer que $\mu(x)$ es una distribución arbitraria de soporte compacto, mientras que $u(x,t)$ en (15.16) es una distribución en la variable x que también depende del parámetro t.

La derivada débil de $u(x,t)$ respecto de ese parámetro está dada por

$$\partial_t u(x,t) = \partial_t \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} * \mu(x) \right) = \partial_t \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) * \mu(x)\,, \tag{15.17}$$

en razón de las propiedades de continuidad de la convolución antes mencionadas.

Po otra parte,

$$\partial_x^2 u(x,t) = \partial_x^2 \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} * \mu(x) \right) = \partial_x^2 \left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \right) * \mu(x)\,. \tag{15.18}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \backslash \{0\})\right)$, de modo que sus derivadas como distribución y derivada débil coinciden con las respectivas derivadas parciales como función de ambas variables[11], y dado que

$$(15.20)\qquad \left\{\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}=0\,,$$

vemos que $u(x,t)$ satisface la ecuación diferencial

$$(15.21)\qquad \left\{\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}u(x,t)=\mathbf{0}\,.$$

Además, para $t\to 0^+$ también satisface la condición inicial,

$$(15.22)\qquad \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}*\mu(x)\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{e^{-\dfrac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)*\mu(x)=\delta(x)*\mu(x)=\mu(x)$$

(ver ecuación (4.11)). $\diamond$

En el caso general, dada la ecuación diferencial a coeficientes constantes

$$(15.23)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\,,$$

donde $u(x,t)$ es una distribución en la variable x que depende además del parámetro t, el problema de Cauchy consiste en hallar una solución que se reduzca a una distribución dada $\mu(x)$ para $t\to 0^+$.

La solución de esa ecuación para la cual la condición inicial es $\mu(x)=\delta(x)$, $G(x,t)$, es llamada **solución fundamental**. Una vez conocida $G(x,t)$, la solución del problema de Cauchy se expresa como

$$(15.24)\qquad u(x,t)=G(x,t)*\mu(x)\,,$$

suponiendo que la convolución en el miembro de la derecha esté bien definida. En efecto, para $t>0$ tenemos

$$(15.25)\qquad \begin{array}{l}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}-P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right\}u(x,t)=\\[2ex] =\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}-P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right\}G(x,t)*\mu(x)=\mathbf{0}*\mu(x)=\mathbf{0}\,,\end{array}$$

[11]En efecto,

$$(15.19)\qquad \partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}},\varphi(x)\right)=\int_{-a[\varphi]}^{a[\varphi]}\partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x)\,dx\,,$$

puesto que esta integral converge uniformemente para $t>0$.

mientras que

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \lim_{t\to 0^+} G(x,t) * \mu(x) = \delta(x) * \mu(x) = \mu(x)\,. \tag{15.26}$$

Ecuaciones hiperbólicas: Una **solución fundamental** de la ecuación de las ondas en una dimensión,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \tag{15.27}$$

está dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\theta(x+t) - \theta(x-t)\right\}\,. \tag{15.28}$$

En efecto, es inmediato mostrar que[12]

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \mathbf{0}\,. \tag{15.31}$$

En cuanto a la condición inicial, es evidente que

$$\begin{gathered}\lim_{t\to 0^+} G(x,t) = \mathbf{0},\\ \lim_{t\to 0^+} \partial_t G(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}\left\{\delta(x+t) + \delta(x-t)\right\} = \delta(x)\,.\end{gathered} \tag{15.32}$$

Llamemos $\dot{G}(x,t)$ a la derivada débil de $G(x,t)$ respecto de t,

$$\dot{G}(x,t) := \partial_t G(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\delta(x+t) + \delta(x-t)\right\}\,. \tag{15.33}$$

Ella constituye una segunda solución fundamental, que difiere de la primera en las condiciones iniciales que satisface.

En efecto, también resulta inmediato verificar que

$$\frac{\partial^2 \dot{G}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \dot{G}}{\partial x^2} = \mathbf{0}\,. \tag{15.34}$$

Por otra parte,

$$\begin{gathered}\lim_{t\to 0^+} \dot{G}(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \partial_t G(x,t) = \delta(x)\,,\\ \lim_{t\to 0^+} \partial_t \dot{G}(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \partial_t^2 G(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \partial_x^2 G(x,t) = \mathbf{0}\,,\end{gathered} \tag{15.35}$$

---

[12]La derivada débil de $\theta(x-t)$ respecto de t está definida por

$$\partial_t\left(\theta(x-t), \varphi(x)\right) = \partial_t \int_t^\infty \varphi(x)\, dx = -\varphi(t) = -\left(\delta(x-t), \varphi(x)\right)\,, \tag{15.29}$$

de modo que $\partial_t \theta(x-t) = -\delta(x-t)$. Similarmente,

$$\partial_t\left(\delta(x-t), \varphi(x)\right) = \partial_t \varphi(t) = \varphi'(t) = \left(-\delta'(x-t), \varphi(x)\right)\,, \tag{15.30}$$

de donde $\partial_t \delta(x-t) = -\delta'(x-t)$.

ya que

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\partial_x^2 G(x,t), \varphi(x)\right) = \lim_{t\to 0^+} \left(G(x,t), \partial_x^2\varphi(x)\right) = 0 \tag{15.36}$$

por (15.32).

En esas condiciones, la solución de (15.27) que satisface las condiciones iniciales $u(x,t=0) = u_0(x)$, $\partial_t u(x,t=0) = u_1(x)$, está dada por

$$u(x,t) = G(x,t) * u_1(x) + \dot{G}(x,t) * u_0(x)\,. \tag{15.37}$$

En efecto, por las propiedades de la convolución es evidente que

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} u(x,t) = \\ &= \left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} G(x,t) * u_1(x) + \left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\} \dot{G}(x,t) * u_0(x) = \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{15.38}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} u(x,0^+) &= \mathbf{0} * u_1(x) + \delta(x) * u_0(x) = u_0(x)\,, \\ \partial_t u(x,t) &= \delta(x) * u_1(x) + \mathbf{0} * u_0(x) = u_1(x)\,. \end{aligned} \tag{15.39}$$

Nótese que, siendo $G(x,t)$ y $\dot{G}(x,t)$ de soporte compacto $\forall\, t > 0$, la ecuación (15.37) tiene sentido $\forall\, u_0,\, u_1 \in \mathcal{K}^*$.

Por otra parte, la solución puede ser escrita como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= G(x,t) * u_1(x) + \frac{1}{2}\left\{\delta(x+t) + \delta(x-t)\right\} * u_0(x) = \\ &= G(x,t) * u_1(x) + \frac{1}{2}\left\{u_0(x+t) + u_0(x-t)\right\}, \end{aligned} \tag{15.40}$$

en términos de la distribución u_0 trasladada. Si además u_1 es regular[13], obtenemos la solución de DÁlembert,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{u_0(x+t) + u_0(x-t)\right\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)\, dy\,. \tag{15.42}$$

$\diamond$

[13] Para u_1 regular tenemos

$$\begin{aligned} &(G(x,t) * u_1(x), \varphi(x)) = (u_1(y), (G(x,t), \varphi(x+y))) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1^*(y) \left(\tfrac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t} \varphi(x)\, dx\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1^*(y)\, dy\right) \varphi(x)\, dx\,. \end{aligned} \tag{15.41}$$

Para el caso general de una ecuación de orden m en t, si $P(x,t)$ es un polinomio en dos variables a coeficientes constantes y de orden m en t, el problema de Cauchy consiste en hallar la solución de la ecuación diferencial

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=\mathbf{0} \tag{15.43}$$

que satisfaga las condiciones iniciales

$$\begin{gathered} u(x,t=0)=u_0(x),\ \partial_t u(x,t=0)=u_1(x),\ \ldots, \\ \partial_t^{m-1}u(x,t=0)=u_{m-1}(x)\,. \end{gathered} \tag{15.44}$$

Se llama solución fundamental a aquella distribución $G_0(x,t)$ que satisface la ecuación homogénea (15.43), y las condiciones iniciales

$$G_0(x,t=0)=\mathbf{0},\ \partial_t G_0(x,t=0)=\mathbf{0},\ \ldots,\ \partial_t^{m-1}G_0(x,t=0)=\delta(x)\,. \tag{15.45}$$

Nótese que

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\partial_x^k G_0(x,t)=\mathbf{0},\quad P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\partial_t G_0(x,t)=\mathbf{0}\,, \tag{15.46}$$

dado que P tiene coeficientes constantes, y que además

$$\begin{gathered} \partial_x^k G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \partial_t\partial_x^k G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \ldots, \\ \partial_t^{m-1}\partial_x^k G_0(x,t=0)=\delta^{(k)}(x)\,, \\ \partial_t G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \partial_t\partial_t G_0(x,t=0)=\mathbf{0}\,,\ \ldots, \\ \partial_t^{m-2}\partial_t G_0(x,t=0)=\delta(x)\,, \\ \partial_t^{m-1}\partial_t G_0(x,t)=Q\left(\tfrac{\partial}{\partial x},\tfrac{\partial}{\partial t}\right)G_0(x,t)\,, \end{gathered} \tag{15.47}$$

donde $Q(x,t)$ es un polinomio de orden $m-1$ en t, de modo que

$$\partial_t^{m-1}\partial_t G_0(x,t=0)=\mathcal{A}_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x)\,. \tag{15.48}$$

Se ve entonces que, tomando combinaciones lineales de $\partial_t G_0(x,t)$, $G_0(x,t)$ y de sus derivadas respecto de x, es posible construir una segunda solución fundamental $G_1(x,t)$ que satisfaga (15.43) y las condiciones iniciales

$$\begin{gathered} G_1(x,t=0)=\mathbf{0},\ \partial_t G_1(x,t=0)=\mathbf{0},\ \ldots,\ \partial_t^{m-2}G_1(x,t=0)=\delta(x), \\ \partial_t^{m-1}G_1(x,t=0)=\mathbf{0}\,. \end{gathered} \tag{15.49}$$

Este proceso puede continuarse para construir nuevas soluciones fundamentales $G_k(x,t)$, con $k = 1, 2, \ldots, m-1$, con derivadas nulas en $t = 0$ a excepción de $\partial_t^k G_k(x, t = 0) = \delta(x)$, para finalmente expresar la solución de (15.43) y (15.44) como

$$u(x,t) = G_{m-1}(x,t) * u_0(x) + G_{m-2}(x,t) * u_1(x) + \cdots + G_0(x,t) * u_{m-1}(x) \,. \tag{15.50}$$

16. Derivación e integración de orden arbitrario

Sea $g(x)$ una función localmente integrable con soporte en la semirrecta $x \geq 0$. La primitiva de orden n de $g(x)$ que se anula en $x = 0$ está dada por la fórmula de Cauchy,

$$g_{(n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x g(y)\,(x-y)^{n-1}\,dy \,, \tag{16.1}$$

para $n = 1, 2, \ldots$, como puede comprobarse fácilmente integrando por partes.

El segundo miembro de esta igualdad también puede ser entendido como el producto de convolución de dos distribuciones regulares,

$$g_{(n)}(x) = g(x) * \frac{x_+^{n-1}}{\Gamma(n)} = g(x) * \Phi_n \,, \tag{16.2}$$

dado que ambas funcionales tienen soporte contenido en $\mathbb{R}^+$ (ver ec. (14.5)).

Pero el miembro de la derecha de (16.2) tiene sentido, no sólo para distribuciones regulares, sino para toda distribución con soporte en $\mathbb{R}^+$. En particular, para $n = 1$ tenemos

$$g_{(1)}(x) = g(x) * \frac{x_+^{0}}{\Gamma(1)} = g(x) * \theta(x) \,, \tag{16.3}$$

lo que corresponde a una primitiva de g como distribución, ya que

$$g'_{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\theta(x) * g(x)\right) = \theta'(x) * g(x) = \delta(x) * g(x) = g(x) \,. \tag{16.4}$$

Nótese que $\mathrm{Sop}\big(g_{(1)}\big) \subset \mathbb{R}^+$. En efecto, si $\mathrm{Sop}(\varphi(x)) \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$ entonces

$$\begin{array}{c} \chi(x) := (\theta(y), \varphi(x+y)) = \int_x^\infty \varphi(y)\,dy = 0, \forall\, x \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (g(x), \hat{\chi}(x)) = 0 \Rightarrow \big(g_{(1)}(x), \varphi(x)\big) = 0 \,. \end{array} \tag{16.5}$$

Por lo tanto, $g_{(1)}$ es la primitiva de g que tiene su soporte contenido en $\mathbb{R}^+$.

En la Sección 7 hemos visto que la distribución $\Phi_\lambda = x_+^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$, que es regular para $\Re(\lambda) > 0$, existe por extensión analítica en todo el plano complejo del parámetro λ como una distribución con soporte en $\mathbb{R}^+$. En efecto, dado que $x_+^{\lambda-1}$ y $\Gamma(\lambda)$ sólo presentan polos simples en $\lambda = -k$, con $k \in \mathbb{N}$, de (7.16) y (7.9) tenemos

$$\lim_{\lambda \to -k} \Phi_\lambda = \frac{\operatorname{Res} x_+^{\lambda-1}\big|_{\lambda=-k}}{\operatorname{Res}\Gamma(\lambda)\big|_{\lambda=-k}} = \frac{(-1)^k \delta^{(k)}(x)/k!}{(-1)^k/k!} = \delta^{(k)}(x)\,, \tag{16.6}$$

para $k = 0, -1, -2, \ldots$

En consecuencia, la convolución

$$g_{(\lambda)} := g * \Phi_\lambda \tag{16.7}$$

tiene sentido $\forall\, g \in \mathcal{K}^*$ con soporte contenido en $\mathbb{R}^+$, y se extiende analíticamente a todo el plano λ como una distribución con soporte en esa semirecta[14]. En particular, para $\lambda = 0$ tenemos

$$g_{(0)} = g * \Phi_0 = g * \delta(x) = g\,, \tag{16.8}$$

mientras que para valores enteros negativos de λ,

$$g_{(-n)} = g * \Phi_{-n} = g * \delta^{(n)}(x) = g^{(n)} \tag{16.9}$$

se reduce a la derivada n-ésima de g (como distribución).

Vemos entonces que una misma expresión, la convolución en el miembro de la derecha de la ec. (16.7), da las derivadas y primitivas de la distribución g para valores enteros de λ. Pero esa convolución tiene también sentido $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, por lo que podemos llamar a $g^{(-\lambda)} := g_{(\lambda)}$ la **derivada de orden** $(-\lambda)$ **de** g (o, equivalentemente, su **primitiva de orden** λ).

Esta operación de derivación (o integración) de orden complejo tiene algunas propiedades de la derivación usual. Por ejemplo, la derivada de orden $-\mu$ de la derivada de orden $-\lambda$ es la derivada de orden $-(\lambda + \mu)$. En efecto, consideremos la convolución

$$\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} * \frac{x_+^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\,. \tag{16.10}$$

Para $\Re(\lambda) > 0$ y $\Re(\mu) > 0$, se trata de la convolución de distribuciones regulares con soporte en $\mathbb{R}^+$ que, por (14.4) y (14.5), se reduce a la distribución regular

[14]En efecto, si $\operatorname{Sop}(\varphi(x)) \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, entonces $\chi(x) := (\Phi_\lambda(y), \varphi(x+y)) = \int_0^\infty \frac{y^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\, \varphi(x+y)\, dy = 0, \forall\, x \geq 0, \forall\, \Re(\lambda) > 0$ y, por extensión analítica, también $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $(g(x), \hat{\chi}(x)) = 0$, es decir, $\left(g_{(\lambda)}(x), \varphi(x)\right) = 0$.

definida por la función

$$
\begin{aligned}
(\Phi_\lambda * \Phi_\mu)(x) &= \int_0^x \frac{(x-y)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \, \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \, dy = \\
&= \frac{x^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-z)^{\lambda-1} \, z^{\mu-1} \, dz
\end{aligned} \tag{16.11}
$$

para $x \geq 0$, y $(\Phi_\lambda * \Phi_\mu)(x) = 0$ para $x < 0$. La integral en el miembro de la derecha de (16.11) es la función de Euler

$$
B(\lambda, \mu) := \int_0^1 (1-z)^{\lambda-1} \, z^{\mu-1} \, dz = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} \, . \tag{16.12}
$$

En consecuencia, para $\Re(\lambda), \Re(\mu) > 0$ tenemos que

$$
\Phi_\lambda * \Phi_\mu = \frac{x_+^{\lambda+\mu-1}}{\Gamma(\lambda+\mu)} = \Phi_{\lambda+\mu} \, . \tag{16.13}
$$

Pero, en virtud de la unicidad de la extensión analítica de ambos miembros (en λ y en μ), esta igualdad vale $\forall \, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Entonces,

$$
(g * \Phi_\lambda) * \Phi_\mu = g * (\Phi_\lambda * \Phi_\mu) = g * \Phi_{\lambda+\mu} \, , \ \forall \, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \, . \tag{16.14}
$$

En particular, si $\mu = -\lambda$,

$$
(g * \Phi_\lambda) * \Phi_{-\lambda} = g * \Phi_0 = g * \delta(x) = g \, , \tag{16.15}
$$

de donde resulta que las operaciones de derivación e integración de orden arbitrario son la inversa una de la otra.

Otras consecuencias:

$$
\Phi_{1-\lambda} = \Phi_{1-\lambda} * \delta(x) = \Phi_{1-\lambda} * \Phi_{-1} * \theta(x) = \Phi_{-\lambda} * \theta(x) = \theta^{(\lambda)}(x) \, , \tag{16.16}
$$

$$
\left(\frac{x_+^{\lambda-n-1}}{\Gamma(\lambda-n)} \right)^{(\lambda)} = \Phi_{\lambda-n} * \Phi_{-\lambda} = \Phi_{\lambda-n-\lambda} = \Phi_{-n} = \delta^{(n)}(x) \, . \tag{16.17}
$$

El problema de Abel: Consideremos una masa m que puede deslizarse sin rozamiento, bajo la acción de la gravedad, sobre una curva en un plano vertical. Se trata de estudiar el tiempo $t(x)$ que le toma a esa partícula alcanzar el nivel $z = 0$, si parte desde el reposo a una altura $z = x$.

De la conservación de la energía tenemos

$$
\frac{1}{2} m v(z)^2 = mg(x-z) \Rightarrow |v(z)| = \sqrt{2g(x-z)} \, . \tag{16.18}
$$

Entonces, la componente vertical de la velocidad a una altura z está dada por

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(x-z)}\ \sin\theta(z)\,, \tag{16.19}$$

donde $\theta(z)$ es el ángulo que forma la tangente a la curva en ese punto con una recta horizontal.

Si la forma de la curva fuese conocida, digamos $y = y(z)$, tendríamos que $\cot\theta(z) = dy/dz$, y la solución estaría dada por

$$t(x) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{2g(x-z)}\ \sin\theta(z)}\,. \tag{16.20}$$

En cambio, la pregunta que se pretende responder aquí es cual es la curva $y(z)$ que hace que el tiempo de caída, $t(x)$, sea una función dada de la altura x desde la cual es soltada la partícula. Para ello basta con determinar de (16.20) la función $\varphi(z) = 1/\sin\theta(z)$, por lo que el problema se reduce a resolver la **ecuación integral de Abel**

$$\int_0^x \frac{\varphi(z)}{\sqrt{2g(x-z)}}\, dz = t(x)\,. \tag{16.21}$$

Nótese que se trata de una ecuación integral de **primera especie**, del tipo de Volterra, cuyo núcleo no es de cuadrado sumable.

Más generalmente, se llama **ecuación de Abel generalizada** a

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\, \varphi(z)\, dz = f(x)\,, \tag{16.22}$$

donde $0 < \alpha < 1$, $\varphi(z)$ es la incógnita y $f(x)$ es una función dada. En particular, para $\alpha \geq 1/2$ el núcleo de ese operador integral de Volterra no es de cuadrado integrable.

Ahora bien, esta ecuación también puede interpretarse como

$$\frac{x_+^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \varphi = \Phi_{1-\alpha} * \varphi = f\,, \tag{16.23}$$

que tiene sentido $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$, y $\forall\, f \in \mathcal{K}^*$ de soporte contenido en $\mathbb{R}^+$. Su solución en el espacio de distribuciones está dada simplemente por

$$\varphi = \Phi_{\alpha-1} * (\Phi_{1-\alpha} * \varphi) = \Phi_{\alpha-1} * f = \Phi_\alpha * \Phi_{-1} * f = \Phi_\alpha * f'\,. \tag{16.24}$$

Supongamos ahora que f sea una distribución regular definida por una función $f(x)$ diferenciable para $x \neq 0$ y nula para $x < 0$. Entonces, su derivada como distribución es

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} + f(0^+)\,\delta(x)\,, \tag{16.25}$$

y la solución de (16.23) se reduce a

$$\varphi(x) = \Phi_\alpha(x) * \frac{df(x)}{dx} + f(0^+)\,\Phi_\alpha(x)\,. \tag{16.26}$$

En particular, para $\alpha > 0$ (lo que hace a Φ_α regular) se tiene

$$\varphi(x) = f(0^+)\,\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-z)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{df(z)}{dz}\,dz\,, \tag{16.27}$$

para $x > 0$.

Volviendo al problema original (donde $\alpha = 1/2$), si tomamos, por ejemplo, $f(x) = T\sqrt{2g/\pi}$ constante, entonces $\frac{df(x)}{dx} = 0$ y obtenemos

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sin\theta(x)} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{x}}\,, \tag{16.28}$$

lo que conduce a una cicloide (isócrona) para la trayectoria de la partícula. $\diamond$

17. Descomposición en distribuciones propias

Los operadores (esencialmente autoadjuntos) que representan a los observables de la Mecánica Cuántica **posición** e **impulso** no tienen autovectores en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\begin{gathered} (x-\lambda)\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0 \text{ a. e.} \Rightarrow \varphi(x) = \mathbf{0}(x) \in \mathbf{L_2}(\mathbb{R}), \\ \left(-i\frac{d}{dx} - \lambda\right)\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) \sim e^{i\lambda x} \notin \mathbf{L_2}(\mathbb{R})\,. \end{gathered} \tag{17.1}$$

No obstante, esos problemas de autovalores sí tienen solución en $\mathcal{S}^*$, porque

$$(x-\lambda)\,\delta(x-\lambda) = \mathbf{0}\,, \forall\,\lambda \in \mathbb{R}\,, \tag{17.2}$$

mientras que $e^{i\lambda x} \in \mathcal{S}^*\,, \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$.

Veremos en qué sentido estas distribuciones propias conforman sistemas ortogonales y completos.

Primero señalemos que, identificando las funcionales regulares con las funciones que les dan origen, podemos escribir

$$\mathcal{S} \subset \mathbf{L_2}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^*\,. \tag{17.3}$$

Consideremos ahora un operador lineal $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, simétrico y continuo respecto de la convergencia en ese espacio. Entonces

$$\begin{gathered} (\varphi_1, A\varphi_2)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (A\varphi_1, \varphi_2)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})}\,, \quad \forall\,\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{S}\,, \\ \lim_{n\to\infty} A\varphi_n(x) = A\varphi(x) \text{ en } \mathcal{S}, \quad \forall\,\varphi_n(x) \to \varphi(x) \text{ en } \mathcal{S}\,. \end{gathered} \tag{17.4}$$

Su adjunto en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, $A^\dagger$, está definido en un dominio $\mathcal{D}(A^\dagger) \supset \mathcal{S}$, y su gráfica contiene a la de toda extensión simétrica de A en el espacio de Hilbert.

Por otra parte, para toda funcional $f \in \mathcal{S}^*$, la expresión

$$(g, \varphi)_{\mathcal{S}} := (f, A\varphi)_{\mathcal{S}} \tag{17.5}$$

define una distribución sobre $\mathcal{S}$. En efecto, la linealidad de g es evidente a partir de la linealidad de A y de f. En cuanto a la continuidad, tomemos una secuencia convergente $\varphi_n(x) \to \varphi(x) \in \mathcal{S}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} (g, \varphi_n)_{\mathcal{S}} = \lim_{n\to\infty} (f, A\varphi_n)_{\mathcal{S}} = \Big(f, \lim_{n\to\infty} A\varphi_n\Big)_{\mathcal{S}} = (f, A\varphi)_{\mathcal{S}} = (g, \varphi)_{\mathcal{S}}\,, \tag{17.6}$$

dada la continuidad de f y de A.

En esas condiciones, podemos decir que el ***adjunto*** de A en $\mathcal{S}^*$, que también denotaremos por $A^\dagger$, está definido sobre todo ese espacio de modo que

$$A^\dagger f = g\,. \tag{17.7}$$

Así definido, $A^\dagger$ es evidentemente lineal y continuo respecto de la convergencia débil. En efecto, si $f_n \to f$ en $\mathcal{S}^*$, $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(A^\dagger f_n, \varphi\right)_{\mathcal{S}} = \lim_{n\to\infty} (f_n, A\varphi)_{\mathcal{S}} = (f, A\varphi)_{\mathcal{S}} = \left(A^\dagger f, \varphi\right)_{\mathcal{S}}\,. \tag{17.8}$$

En particular, $\forall\, \psi(x) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{S}^*$ y $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$, y teniendo en cuenta que A es simétrico y que $A\psi(x) \in \mathcal{S}$, tenemos

$$\left(A^\dagger \psi, \varphi\right)_{\mathcal{S}} = (\psi, A\varphi)_{\mathcal{S}} = (\psi, A\varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (A\psi, \varphi)_{\mathbf{L_2}(\mathbb{R})} = (A\psi, \varphi)_{\mathcal{S}} \tag{17.9}$$

y, en consecuencia, $A^\dagger\psi(x) = A\psi(x)$. En ese sentido, $A^\dagger$ constituye una **extensión** de A a todo $\mathcal{S}^*$.

Una distribución[15] χ_λ es una funcional propia de $A^\dagger$ correspondiente al autovalor λ si

$$A^\dagger \chi_\lambda = \lambda \chi_\lambda\,. \tag{17.10}$$

Se puede demostrar el siguiente teorema (ver I. M. Guelfand y G. E. Chilov, *Les distributions*, Vol. I - IV).

[15]Recordemos que toda distribución sobre $\mathcal{S}$ es la derivada de cierto orden (finito) de una distribución regular definida por una función continua en la recta, cuyo crecimiento es a lo sumo polinomial.

Teorema 17.1. *Si el operador lineal $A : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es simétrico y continuo, y admite una extensión autoadjunta en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$, entonces la extensión de A a $\mathcal{S}^*$, $A^\dagger$, admite en ese espacio un sistema* ***ortogonal*** *y* ***completo*** *de distribuciones propias (en un sentido que se aclara a continuación), correspondientes a autovalores reales.*

En ese enunciado, ***completo*** significa que toda funcional regular ψ definida por una función $\psi(x) \in \mathcal{S}$ (denso en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$) es el límite de un desarrollo débilmente convergente de la forma

$$\psi = \sum_\lambda (\chi_\lambda, \psi)_{\mathcal{S}}\, \chi_\lambda\,. \tag{17.11}$$

Esto significa que $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{S}$ se tiene

$$(\psi, \varphi)_{\mathcal{S}} = (\psi, \varphi)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})} = \sum_\lambda (\chi_\lambda, \psi)^*_{\mathcal{S}}\, (\chi_\lambda, \varphi)_{\mathcal{S}}\ . \tag{17.12}$$

En particular, para $\psi(x) \equiv \varphi(x)$,

$$(\varphi, \varphi)_{\mathcal{S}} = \parallel \varphi \parallel_2{}^2 = \sum_\lambda |(\chi_\lambda, \varphi)_{\mathcal{S}}|^2\ . \tag{17.13}$$

Esta ecuación es una generalización de la igualdad de Parseval (que, a su vez, generaliza el teorema de Pitágoras), lo que justifica el término ***ortogonal***.

Estos resultados se extienden a todo el espacio de Hilbert $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{S}}$ en el siguiente sentido: si $f(x)$ es una función de cuadrado sumable en la recta, entonces la distribución regular que ella define es el límite débil de un desarrollo de la forma

$$f = \sum_\lambda \widetilde{f}(\lambda)\, \chi_\lambda\,, \tag{17.14}$$

donde los coeficientes de ese desarrollo satisfacen

$$\parallel f \parallel_2{}^2 = \sum_\lambda \left| \widetilde{f}(\lambda) \right|^2\ . \tag{17.15}$$

Ejemplos: El operador impulso, definido como $P = -i\frac{d}{dx}$ sobre $\mathcal{D}(P) = \mathcal{S}$, es simétrico y continuo sobre $\mathcal{S}$, y admite una (única) extensión autoadjunta en $\mathbf{L_2}(\mathbb{R})$ (ver las *Notas sobre operadores no acotados*).

Su extensión a $\mathcal{S}^*$ está dada por $P^\dagger f = -if'$, para toda $f \in \mathcal{S}^*$. En efecto, $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\left(P^\dagger f, \varphi\right)_{\mathcal{S}} = (f, -i\varphi')_{\mathcal{S}} = (-if', \varphi)_{\mathcal{S}}\ . \tag{17.16}$$

Las funcionales propias de $P^\dagger$ son distribuciones regulares que están dadas por las funciones $\chi_\lambda = \dfrac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Según el teorema anterior, para $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ se tiene

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}\, d\lambda \tag{17.17}$$

en el sentido de la convergencia débil, donde

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \left(\frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}, \varphi(x) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}\, \varphi(x)\; dx\,. \tag{17.18}$$

En efecto, en este caso $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ no es otra cosa que la transformada de Fourier de $\varphi(x) \in \mathcal{S} \subset \mathbf{L}_1(\mathbb{R})$ y la integral en (17.17) converge uniformemente en λ (ver el Lema de Riemann - Lebesgue en las *Notas sobre la Transformación de Fourier en* $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$).

La ortogonalidad se reduce en este caso a

$$\| \varphi \|_2{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2\, d\lambda = \| \widetilde{\varphi} \|_2{}^2\,, \tag{17.19}$$

que es la igualdad de Parseval.

Por otra parte, dada $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, la funcional regular que ella define es el límite débil de una integral de la forma

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \widetilde{f}(\lambda)\, \frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}\, d\lambda\,, \tag{17.20}$$

donde $\widetilde{f}(\lambda) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ y satisface $\| \widetilde{f}(\lambda) \|_2 = \| f(x) \|_2$. En efecto, $\widetilde{f}(\lambda)$ es aquí la transformada de Fourier de $f(x)$ (en el sentido de $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$) y la convergencia en media del lado derecho de (17.20) (ver el Teorema de Plancherel en las *Notas sobre la Transformación de Fourier en* $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$) garantiza su convergencia débil.

Similarmente, con las distribuciones propias del operador posición podemos escribir para toda $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \delta(x-\lambda)\, d\lambda \tag{17.21}$$

en el sentido de convergencia débil de la integral. En efecto, $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)^* \big(\delta(x-\lambda), \varphi(x)\big)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)^* \varphi(\lambda)\, d\lambda = (f,\varphi)_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})} = (f,\varphi)_{\mathcal{S}}\,. \tag{17.22}$$

◇

Bibliografía:

- I. M. Guelfand y G. E. Chilov, *Les distributions*, Vol. I - III, Dunod, París, 1964-1972.
- A.N.Kolmogorov y S.V. Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.*