ApunTEX de
ANÁLISIS MATEMÁTICO II

2001

Índice

1

LA TOPOLOGÍA DE LOS ESPACIOS EUCLÍDEOS

1.1 Productos internos y normas

Definición 1.1 Sea V un espacio vectorial real. Un *producto interior* o *producto escalar* es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & x \cdot y \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $x \cdot x \geq 0 \qquad \forall x \in V$
2. $x \cdot x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $x \cdot y = y \cdot x \qquad \forall x, y \in V$
4. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \qquad \forall x, y, z \in V$
5. $(ax) \cdot y = a(x \cdot y) = x \cdot (ay) \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Definición 1.2 Sea V un espacio vectorial real. Una *norma* en V es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \|x\| \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|ax\| = |a|\|x\| \quad \forall x \in V, \quad \forall a \in \mathbb{R}$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$ (desigualdad triangular)

Un espacio vectorial real en el que hay definida una norma, se llama *espacio normado*.

Proposición 1.1 Sea V un espacio vectorial real con un producto interior o producto escalar. La aplicación

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \|x\| = \sqrt{x \cdot x} \end{array}$$

es una norma en V que verifica la siguiente propiedad:

$$x \cdot y \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \forall x, y \in V$$

y además $x \cdot y = \|x\|\,\|y\| \Longleftrightarrow \exists\, C > 0 \,|\, x = Cy$
denominada *desigualdad de Cauchy - Schwarz.* Dicha norma es la norma asociada al producto escalar.

Demostración:

1. $\forall x \in V \quad x \cdot x \geq 0 \Longrightarrow \forall x \in V \quad \|x\| = \sqrt{x \cdot x} \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x \cdot x} = 0 \Longleftrightarrow x \cdot x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

3. $\|ax\|^2 = (ax) \cdot (ax) = a^2(x \cdot x) = a^2\|x\|^2 \Longrightarrow \|ax\| = |a|\,\|x\|$
$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall x \in V$
Para demostrar la desigualdad triangular, previamente demostraremos la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Es claro que si $x = 0$ o $y = 0$ entonces la propiedad se cumple. Sean pues, $x, y \in V$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con $x, y \neq 0$ y consideremos el vector $z = ax - by$; entonces es:
$$0 \leq z \cdot z = (ax - by) \cdot (ax - by) = a^2\|x\|^2 - 2ab(x \cdot y) + b^2\|y\|^2$$
Tomando $a = \|y\|$ y $b = \|x\|$ resulta
$0 \leq z \cdot z = 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\|(x \cdot y) = 2\|x\|\,\|y\|(\|x\|\,\|y\| - x \cdot y) \Longrightarrow$
$(\|x\|\,\|y\| - x \cdot y) \geq 0 \Longleftrightarrow x \cdot y \leq \|x\|\,\|y\|$
Por otra parte, si existe una constante $C > 0$ tal que $x = Cy \Longrightarrow$
$\|x\| = C\|y\| \Longrightarrow x \cdot y = Cy \cdot y = C\|y\|^2 = \|x\|\,\|y\|$.
Recíprocamente, si $x \cdot y = \|x\|\,\|y\| \Longrightarrow z = \|y\|x - \|x\|y = 0$, ya que se tendría $0 \leq z \cdot z \leq 0 \Longleftrightarrow z \cdot z = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
Así pues, $x = \dfrac{\|x\|}{\|y\|}y$ y por tanto, basta tomar como constante positiva $C = \dfrac{\|x\|}{\|y\|}$.

4. $\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = \|x\|^2+2x\cdot y+\|y\|^2 \leq \|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Longrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Todo es pacio normado puede considerarse como espacio métrico, pues la norma induce la distancia:
$$d(x, y) = \|x - y\|$$

1.2 El espacio $\mathbb{R}^n$

El espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$
El conjunto $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n\}$, está dotado de una estructura de espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$.
La familia de vectores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la denominada base canónica, siendo

$$e_j = (0, \ldots, 0, \overbrace{1}^{(j)}, 0, \ldots, 0) \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

En $\mathbb{R}^n$ $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ es un producto escalar. Por otra parte, en $\mathbb{R}$, el valor absoluto $|\quad|$ define una norma, y en $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ define también una norma denominada *norma euclídea* cuya distancia asociada se llama asimismo *distancia euclídea*:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Proposición 1.2 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $\quad \forall j = 1, \ldots, n$ es

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \sup_{1 \leq j \leq n} \{|x_j|\}$$

Demostración:
$\forall j = 1, \ldots, n$ se tiene

$$x_j^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \|x\|^2 \leq n \left(\sup_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \right)^2 \Longrightarrow |x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \sup_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

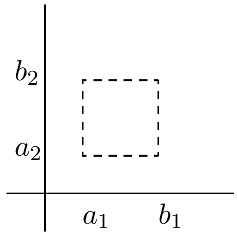
1.3 Abiertos, cerrados y entornos en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.3 Se llama rectángulo abierto en $\mathbb{R}^n$ y se denota por $\mathcal{J}$ al conjunto

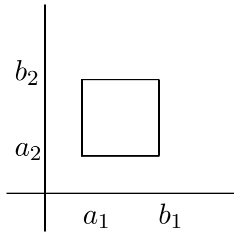
$$\mathcal{J} = \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_i < x_i < b_i, \forall i = 1, \ldots, n, \text{ con } a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

Definición 1.4 Se llama rectángulo cerrado en $\mathbb{R}^n$ y se denota por $\mathcal{I}$ al conjunto

$$\mathcal{I} = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_i \leq x_i \leq b_i, \forall i = 1, \ldots, n, \text{ con } a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$



$\mathcal{J} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$



$\mathcal{I} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

Definición 1.5 Se llama longitud del rectángulo $\mathcal{I}$ a la expresión

$$l(\mathcal{I}) = \sup_{1 \leq j \leq n} \{|b_j - a_j|\}$$

Definición 1.6 Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ está acotado cuando está contenido en algún rectángulo, ya sea abierto o cerrado.

1.4 Teoremas de los rectángulos encajados y Bolzano-Weierstrass

Teorema 1.1 (de los rectángulos encajados) Sea $\{\mathcal{I}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de rectángulos cerrados encajados en $\mathbb{R}^n$, es decir,

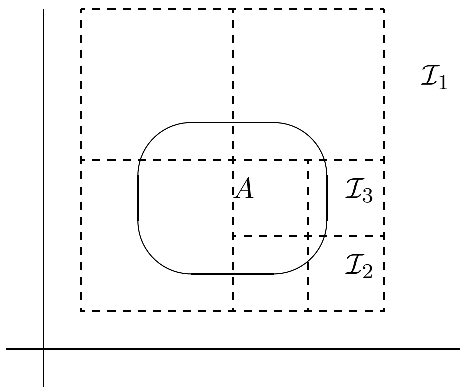
$$\mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2 \cdots \supseteq \mathcal{I}_k \supseteq \cdots$$

entonces existe $x \in \mathbb{R}^n \,|x \in \mathcal{I}_k \,\forall k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k \neq \emptyset$$

Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass) Todo subconjunto infinito y acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación.

Demostración:
Sea A un conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$. Consideremos $\mathcal{I}_1 \subseteq A$. Si se divide $\mathcal{I}_1$ en cuatro rectángulos iguales, alguno de ellos o todos posee infinitos puntos de A; elijamos uno de los subrectángulos y llamémosle $\mathcal{I}_2$. Este proceso se puede repetir indefinidamente, y así se construye una sucesión de rectángulos cerrados y encajados $\mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2 \cdots \supseteq \mathcal{I}_k \supseteq \cdots$ en la que cada $\mathcal{I}_k$ contiene infinitos puntos de A.



Por otra parte es

$$l(\mathcal{I}_2) = \frac{1}{2}\, l(\mathcal{I}_1); \quad l(\mathcal{I}_3) = \frac{1}{2}\, l(\mathcal{I}_2) = \frac{1}{2^2}\, l(\mathcal{I}_1)$$

y en general, $0 < l(\mathcal{I}_k) = \dfrac{1}{2}\, l(\mathcal{I}_{k-1}) = \dfrac{1}{2^{k-1}}\, l(\mathcal{I}_1)$. Por el axioma de los rectángulos encajados 1.1

$$\exists\, y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_k$$

Veamos que necesariamente y es un punto de acumulación de A.
Sea V un entorno arbitrario de y; $\exists r > 0 \,|\, y \in B(y,r) \subset V$ donde

$$B(y,r) = \{z \in \mathbb{R}^n \,|\, \|z - y\| < r\}$$

es la bola abierta centrada en y de radio r. Como la sucesión $\left\{\dfrac{1}{2^k}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$, es claro que $\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \,|\, \dfrac{1}{2^{k_0-1}} < \dfrac{r}{\sqrt{n}\, l(\mathcal{I}_1)}$; veamos que $\mathcal{I}_{k_0} \subset B(y,r)$; en efecto, dado $w \in \mathcal{I}_{k_0}$ es

$$\|w - y\| \leq \sqrt{n} \sup_{1\leq i\leq n} \{|w_i - y_i|\} \leq \sqrt{n}\, l(\mathcal{I}_{k_0}) = \sqrt{n}\, \frac{1}{2^{k_0-1}}\, l(\mathcal{I}_1) < r$$

Téngase en cuenta que en particular $y \in \mathcal{I}_{k_0}$. Por tanto $w \in B(y,r)$ y así $B(y,r)$ contiene infinitos puntos de A y V también, luego y es un punto de acumulación de A.

1.5 Compacidad. Teorema de Heine-Borel y sus aplicaciones

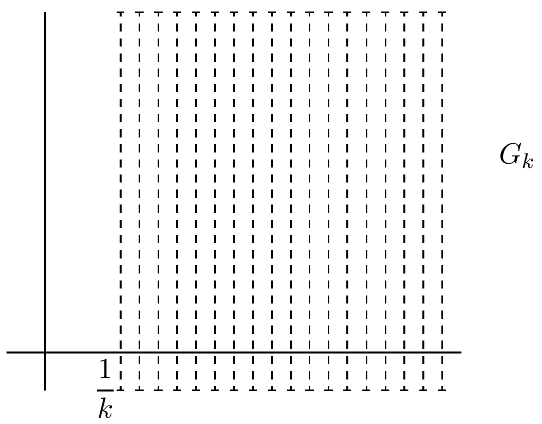
Definición 1.7 Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es compacto si $\forall$ recubrimiento abierto de K digamos

$$\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in L}$$

existe un subrrecubrimiento finito, es decir, $\exists\, L' \subset L$ finito, tal que

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in L'} G_\alpha$$

Ejemplo 1.1 Todo conjunto finito de $\mathbb{R}^n$ es compacto; sea $K = \{x_1, \ldots, x_p\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in L}$ un recubrimiento abierto arbitrario de K; $\forall\, j = 1, \ldots, p$ $\exists\, \alpha_j \in L \,|\, x_j \in G_{\alpha_j}$ luego $K \subset G_{\alpha_1} \bigcup \ldots \bigcup G_{\alpha_p}$
El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ no es compacto; en efecto, si consideramos $\forall\, k \in \mathbb{N}$ el conjunto $G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > \dfrac{1}{k}\}$ es claro que la familia $\mathcal{G} = \{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ constituye un recubrimiento abierto de A del que no puede extraerse ningún subrrecubrimiento finito.



Teorema 1.3 (Heine-Borel) $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\Longleftrightarrow$ K es cerrado y acotado.

Demostración:
" $\Longrightarrow$ "

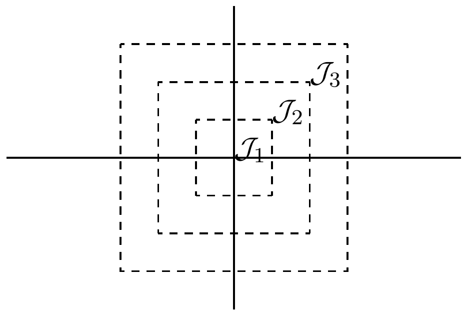
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto; consideremos la familia $\mathcal{G} = \{\mathcal{J}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ donde

$$\mathcal{J}_k = \overbrace{(-k,k) \times \cdots \times (-k,k)}^{n \quad veces}$$

es un rectángulo abierto en $\mathbb{R}^n$. Es claro que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_k = \mathbb{R}^n$$

luego $\mathcal{G}$ es un recubrimiento abierto de K. Por hipótesis, $\exists\, k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$ tales que $K \subset \mathcal{J}_{k_1} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{J}_{k_p}$.



Ahora bien, $\mathcal{J}_{k_1} \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{J}_{k_p} = \mathcal{J}_M$
donde $M = \max\limits_{1\leq i\leq p}\{k_i\}$. Por tanto, K es acotado.
Por otra parte, si $x \notin \mathbb{R}^n$ y consideramos $\forall\, m \in \mathbb{N}$ el conjunto

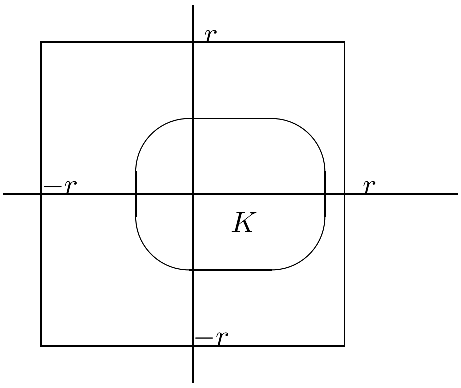
$$G_m = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| > \frac{1}{m}\}$$

que es abierto de $\mathbb{R}^n$, es $K \subset \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} G_m$. Por hipótesis,
$K \subset G_{m_1} \bigcup \cdots \bigcup G_{m_p} = G_M$ donde $M = \max\limits_{1\leq i\leq p}\{m_i\}$. Así pues,

$$x \in \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \frac{1}{M}\} \subset \mathbb{R}^n - K$$

y se concluye que $\mathbb{R}^n - K$ es abierto o equivalentemente que K es cerrado.
“ $\Longleftarrow$ ”

Supongamos ahora que K es cerrado y acotado. Sea $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in L}$ un recubrimiento abierto y arbitrario de K. Por hipótesis K es acotado, luego $\exists r > 0 \,|\, K \subset \mathcal{I}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x_j| \leq r,\ \forall j = 1, \ldots n\}$ con $\mathcal{I}_1$ rectángulo cerrado.



Razonemos por reducción al absurdo; si suponemos que de $\mathcal{G}$ no se puede extraer un subrrecubrimiento finito entonces al dividir $\mathcal{I}_1$ en cuatro rectángulos iguales, ha de existir uno de ellos, que llamaremos $\mathcal{I}_2$ tal que $\mathcal{I}_2 \bigcap K$ no puede recubrirse con un número finito de abiertos de $\mathcal{G}$, (y en particular es no vacío), ya que de lo contrario podría hallarse un subrrecubrimiento finito de K. Siguiendo con este proceso, se construye una sucesión

$$\mathcal{I}_1 \supseteq \mathcal{I}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{I}_k \supseteq \cdots$$

de rectángulos encajados, con $l(\mathcal{I}_1) = 2r,\ l(\mathcal{I}_2) = r,\ l(\mathcal{I}_3) = \dfrac{r}{2}, \ldots,$
y en general, $l(\mathcal{I}_k) = \dfrac{r}{2^{k-2}}$.
Sea $y \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k$; es claro que $y \in K'$, es decir, y es un punto de acumulación de K, y como K es cerrado necesariamente $y \in K$. Así pues $\exists \alpha \in L \,|\, y \in G_\alpha$ y como G_α es abierto, $\exists s > 0 \,|\, y \in B(y,s) \subset G_\alpha$; por otra parte, $\left\{ \dfrac{1}{2^k} \right\} \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$, luego $\exists k_0 \in \mathbb{N} \,|\, \dfrac{1}{2^{k_0-2}} < \dfrac{s}{r\sqrt{n}}$ y es $\mathcal{I}_{k_0} \subset B(y,s) \subset G_\alpha$; en efecto, si $\omega \in \mathcal{I}_{k_0}$ entonces

$$\|\omega - y\| \leq \sqrt{n} \sup_{1 \leq i \leq n} \{\omega_i - y_i\} \leq \sqrt{n}\, l(\mathcal{I}_{k_0}) = \frac{r\sqrt{n}}{2^{k_0-2}} < s.$$

Esto contradice el hecho de que $\mathcal{I}_{k_0} \bigcap K$ no puede recubrirse con un número finito de abiertos de la familia G, y en definitiva, necesariamente K es compacto.

Observación 1.1 Esta propiedad caracteriza los espacios normados de dimensión finita. En un espacio métrico arbitrario, no todo conjunto acotado y cerrado ha de ser necesariamente compacto; sin embargo el recíproco sí es cierto.

Aplicaciones:

Teorema 1.4 (de intersección de Cantor) Sea $F_1 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos con F_1 acotado $\Longrightarrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$

Demostración:
Si $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k \supset F_1$ donde $G_k = \mathbb{R}^n | F_k$ es abierto $\forall k \in \mathbb{N}$.
Ahora bien, F_1 es compacto, por ser cerrado y acotado, luego
$\exists k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N} \,|\, F_1 \subset G_{k_1} \bigcup \cdots \bigcup G_{k_m} = G_M$ siendo $M = \max_{1\leq i\leq m} k_i$.
Por tanto,

$$F_1 \subset G_M = \mathbb{R}^n | F_M$$

lo cual implica que $F_1 \bigcap F_M = \emptyset$ que es absurdo, ya que $F_M \subset F_1$ y es no vacío. En definitiva es $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$.

Teorema 1.5 (del recubrimiento de Lebesgue o del número de Lebesgue)
Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha\in L}$ un recubrimiento abierto de K. Entonces existe un número estrictamente positivo $\lambda > 0$ (denominado número de Lebesgue asociado al recubrimiento $\mathcal{G}$) tal que
$\forall x, y \in K, \quad \|x - y\| < \lambda \Longrightarrow \exists \alpha \in L \,|\, x, y \in G_\alpha$.

Demostración:
Dado $z \in K, \quad \exists \alpha(z) \in L \,|\, z \in G_{\alpha(z)}$. Como $G_{\alpha(z)}$ es abierto $\exists \delta(z) > 0 \,|$
$z \in B(z, 2\delta(z)) \subset G_{\alpha(z)}$. Consideremos la familia $\mathcal{S} = \{B(z, \delta(z)\}_{z\in K}$ de bolas abiertas. Es claro que $K \subset \bigcup_{z\in K} B(z, \delta(z))$.
Por ser K compacto, $\exists z_1, \ldots, z_p \in K$ tales que $K \subset B(z_1, \delta(z_1)) \bigcup \cdots \bigcup B(z_p, \delta(z_p))$.
Sea $\lambda = \min_{1\leq i\leq p} \delta(z_i) > 0$. Dados ahora, $x, y \in K$ tales que $\|x - y\| < \lambda$ es claro que $\exists j = 1, \ldots, p \,|\, x \in B(z_j, \delta(z_j)) \Longrightarrow \|x - z_j\| < \delta(z_j) < 2\,\delta(z_j) \Longrightarrow$
$x \in B(z_j, 2\,\delta(z_j)) \subset G_{\alpha(z_j)}$ y por tanto

$$\|y - z_j\| \leq \|y - x\| + \|x - z_j\| < \lambda + \delta(z_j) \leq 2\,\delta(z_j)$$

luego $y \in B(z_j, 2\,\delta(z_j)) \subset G_{\alpha(z_j)}$, es decir, $x, y \in G_{\alpha(z_j)}$, donde $\alpha(z_j) \in L$.

Definición 1.8 Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto y $x \in \mathbb{R}^n$; se llama distancia del punto x al conjunto F a

$$d(x, F) = \inf_{z\in F}\{\|x - z\|\} \geq 0$$

Teorema 1.6 (del punto próximo) Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ no vacío y cerrado, y sea $x \notin F \Longrightarrow \exists\, y \in F$ tal que

$$\|y - x\| \leq \|z - x\| \quad \forall\, z \in F$$

Demostración:
Como $x \notin F$ y F es cerrado es $d(x, F) > 0$; $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ se considera el conjunto

$$F_k = \left\{ z \in F \mid \|x - z\| \leq d + \frac{1}{k} \right\}$$

siendo $d = d(x, F) > 0$. Se tiene que $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad F_k$ es cerrado y no vacío; además, $F_k \supset F_{k+1} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. (Si algún $F_k = \emptyset \Longrightarrow \forall\, z \in F$ es $\|x - z\| > d + \dfrac{1}{k}$ lo cual es absurdo pues entonces $d(x, F) \geq d + \dfrac{1}{k}$). Por otra parte F_1 es acotado, luego

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset \qquad ,$$

es decir, $\exists\, y \in \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} F_k$ luego $\|y - x\| = d$; en efecto, $\|y - x\| \leq d + \dfrac{1}{k}$ $\forall\, k \in \mathbb{N} \Longrightarrow d \leq \|y - x\| \leq d$. Así pues $\|y - x\| \leq \|z - x\| \quad \forall\, z \in F$.

Teorema 1.7 (del contorno circunscrito) Sean $K \subset \mathbb{R}^2$ un compacto y $G \supset K$ un abierto $\Longrightarrow \exists$ una curva C cerrada totalmente contenida en G circunscrita a K y que está formada por la unión de un número finito de arcos de circunferencias.

Demostración:
$\forall\, x \in K \quad \exists\, \delta(x) > 0 \mid x \in B\left(x, \dfrac{\delta(x)}{2}\right) \subset G$. Sea el recubrimiento abierto de K, $\quad \mathcal{G} = \left\{ B\left(x, \dfrac{\delta(x)}{2}\right) \right\}_{x \in K}$. Por ser K compacto, $\exists\, x_1, \ldots, x_p \in K$ tales que $K \subset B\left(x_1, \dfrac{\delta(x_1)}{2}\right) \bigcup \cdots \bigcup B\left(x_p, \dfrac{\delta(x_p)}{2}\right)$; uniendo entonces arcos de estas bolas se forma la curva cerrada C.

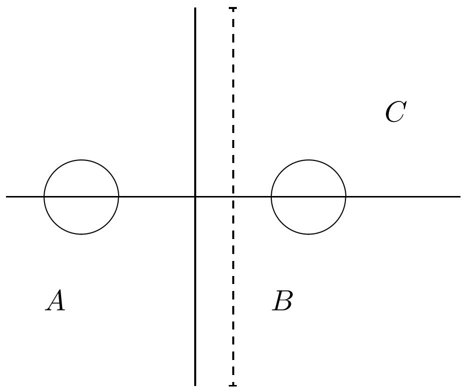
1.6 Conjuntos conexos

Definición 1.9 Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es conexo si no existen dos conjuntos abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que:

1. $A \bigcap C \neq \emptyset$

2. $B \bigcap C \neq \emptyset$
3. $A \bigcap B \bigcap C = \emptyset$
4. $(A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) = C$

Ejemplo 1.2 Sea $C = B((4,0),1) \bigcup B((-4,0),1) \subset \mathbb{R}^2$; es claro que tomando $A = \{(x,y) \,|\, x < 1\}$ y $B = \{(x,y) \,|\, x > 1\}$ resultan ser una pareja de desconexión de C, luego C no es conexo sino disconexo.



Teorema 1.8 El intervalo $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ es conexo; en $\mathbb{R}$ cualquier intervalo es conexo, ya sea éste abierto, cerrado, semiabierto o semicerrado.

Demostración:
Supongamos que $I = [0,1]$ no es conexo. En ese caso $\exists\, A, B \subset \mathbb{R}$ abiertos, tales que

1. $A \bigcap I \neq \emptyset$
2. $B \bigcap I \neq \emptyset$
3. $A \bigcap B \bigcap I = \emptyset$
4. $(A \bigcap I) \bigcup (B \bigcap I) = I$

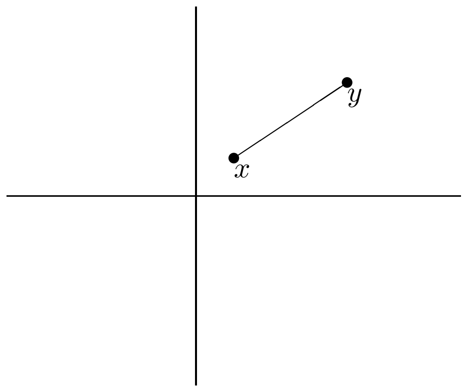
Puesto que $A \bigcap I$ y $B \bigcap I$ son abiertos en I con la topología de subespacio, es claro que contienen infinitos puntos, luego pueden encontrarse $a, b \in I$ con $0 < a < b < 1$ siendo $a \in A$ y $b \in B$ (o $a \in B$ y $b \in A$).
El conjunto $C = \{x \in A \,|\, x < b\} \neq \emptyset$ $(a \in C)$ y está acotado superiormente

por b; llamemos $c = \sup C$. Se tiene que $0 < a \leq c \leq b < 1$ luego $c \in I \subset A \bigcup B$; así pues $c \in A$ o $c \in B$.
Si $c \in A$, necesariamente $c \neq b$ (por 3.) luego $c < b \Longrightarrow \exists\, a_1 \in A$ con $c < a_1 < b$ (Téngase en cuenta que $A \bigcap I$ es abierto en I). Pero esto contradice que $c = \sup C$, por tanto, $c \notin A$.
Si $c \in B$, necesariamente $c \neq a$ (por 3.) luego $a < c \Longrightarrow \exists\, b_1 \in B$ con $b_1 < c$ (Téngase en cuenta que $B \bigcap I$ es abierto en I); ahora esto contradice que $c = \sup C$,por tanto, $c \notin B$. Ahora bien, esto es una contradicción y, en definitiva, se ha de concluir que $I = [0, 1]$ es conexo, e igualmente cualquier intervalo de la recta real.

Teorema 1.9 $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Demostración:
Si suponemos que no es conexo, entonces $\exists\, A, B \subset \mathbb{R}^n$ abiertos no vacíos, tales que:

1. $A \bigcap B = \emptyset$
2. $A \bigcup B = \mathbb{R}^n$



Sean $x \in A$, $y \in B$ y consideremos el segmento

$$S = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = x + t(y - x),\ t \in [0, 1]\}$$

Se tiene que $A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid x + t(y - x) \in A\}$ y $B_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid x + t(y - x) \in B\}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$ abiertos; además, $0 \in A_1$ y $1 \in B_1 \Longrightarrow A_1 \neq \emptyset$ y $B_1 \neq \emptyset$. Por otra parte, $A_1 \bigcap I \neq \emptyset$ y $B_1 \bigcap I \neq \emptyset$. Finalmente $A_1 \bigcap B_1 \bigcap I = \emptyset$ y $(A_1 \bigcap I) \bigcup (B_1 \bigcap I) = I$. Así pues, $I = [0, 1]$ no es conexo, lo cual es una contradicción, por lo que $\mathbb{R}^n$ es conexo.

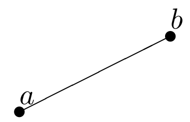
Corolario 1.10 En $\mathbb{R}^n$ los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$.
En efecto, si $\exists\, \emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^n$ abierto y cerrado, entonces el par $(A, \mathbb{R}^n|A)$ constituye una pareja de desconexión de $\mathbb{R}^n$ lo cual es absurdo.

Definición 1.10 Se llama *dominio* a todo abierto conexo de $\mathbb{R}^n$.

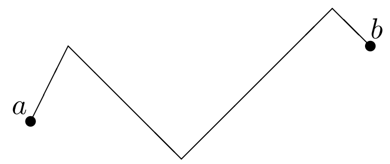
Proposición 1.3 Un abierto $C \subset \mathbb{R}^n$ es conexo $\Longleftrightarrow$ No se puede poner como unión de dos abiertos disjuntos no vacíos.

Definición 1.11 Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$; se denomina *segmento de extremos* a y b al conjunto:

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^n$$

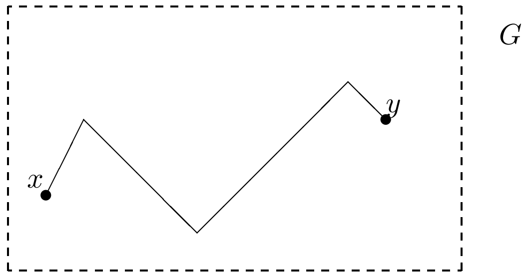


Definición 1.12 Dados dos puntos $a, b \in \mathbb{R}^n$ se denomina *poligonal de extremos* a y b en $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto de segmentos que unen a y b, de forma tal que el origen de cada segmento es el extremo del anterior y el extremo de cada uno de ellos es el origen del posterior.



Notación 1.1 Poligonal de extremos a y b, $\mathcal{P} \equiv \{L_1, \ldots, L_k\}$ donde
$\forall\, j = 1, \ldots, k$ es
$L_j = [z_{j-1}, z_j] = \{z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1}) \mid t \in [0, 1]\}$ y $z_0 = a$ y $z_k = b$.

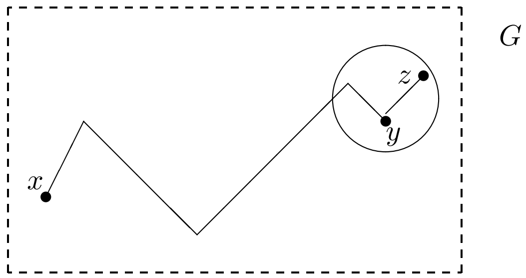
Teorema 1.11 Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. G es conexo $\Longleftrightarrow \forall\, x, y \in G\ \exists$ una poligonal totalmente contenida en G que une x con y (simbólicamente $x \sim y$).



Demostración:
"$\Longleftarrow$"
Si G no es conexo, existen abiertos disjuntos A, B no vacíos tales que $G = A \bigcup B$. Sean $x \in A$ e $y \in B$. Por hipótesis, $\exists\, \mathcal{P} \equiv \{L_1, \ldots, L_k\} \subset G$ tal que $x \sim y$. Como $z_0 = a$ y $z_1 \in A \bigcup B$ se deduce que $\exists\, j = 1, \ldots, k \,|$ $z_{j-1} \in A, \quad z_j \in B$. Entonces,

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} \,| z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1} \in A\}, \quad B_1 = \{t \in \mathbb{R} \,|\, z_{j-1} + t(z_j - z_{j-1} \in B\}$$

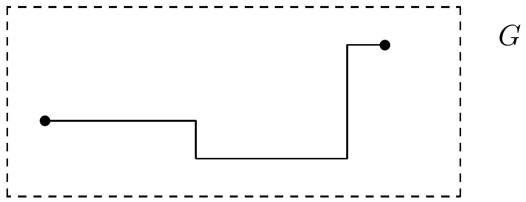
serían un par de desconexión de $I = [0, 1]$, lo cual es absurdo; así pues, G es conexo.
"$\Longrightarrow$"
Dado $x \in G$ fijo, veamos que $\forall\, y \in G\ \exists$ una poligonal $\mathcal{P} \subset G$ tal que $x \sim y$.



Sean $G_1 = \{y \in G \,|\, \exists$ una poligonal $\mathcal{P} \subset G$ tal que $y \sim x \subset G\}$ y sea $G_2 = G | G_1$; es claro que $G_1 \neq \emptyset$ pues $x \in G_1$. Además, $G_1 \bigcup G_2 = G$ y $G_1 \bigcap G_2 = \emptyset$. Si se demuestra que G_1, G_2 son abiertos, se habrá de deducir que $G_2 = \emptyset$ que es lo que se quería probar.
Sea $y \in G_1 \subset G$; como G es abierto $\exists\, r > 0 \,|\, B(y, r) \subset G \Longrightarrow$ $\forall\, z \in B(y, r) \quad z \in G_1$, luego $B(y, r) \subset G_1$ y así G_1 es abierto. Por otra parte, si $y \in G_2 \subset G \Longrightarrow \exists\, r > 0 \,|\, B(y, r) \subset G$. En el caso en que $B(y, r) \subset G_2$ ya

estaría; de lo contrario $\exists\, y_r \in G_1 \bigcap B(y,r) \Longrightarrow y \sim x \subset G$ y por tanto $y \in G_1$ lo cual es una contradicción; en definitiva G_2 es también abierto.

Teorema 1.12 $G \subset \mathbb{R}^n$ es conexo $\Longleftrightarrow \forall\, x, y \in G\, \exists$ una poligonal totalmente contenida en G que une x e y, cuyos segmentos son paralelos a los ejes de coordenadas.



Teorema 1.13 En $\mathbb{R}$ un conjunto no vacío es conexo $\Longleftrightarrow$ el conjunto es un intervalo o un punto.

Demostración:
"$\Longleftarrow$"
Ya se ha demostrado anteriormente.
"$\Longrightarrow$"
Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto conexo, y sean $x, y \in A$ arbitrarios con $x < y$; veamos que $\forall z \in \mathbb{R} \,|\, x < z < y$ se tiene que $z \in A$. ; en efecto, si $z \notin A$ entonces $(-\infty, z) \bigcap A$ y $(z, \infty) \bigcap A$ formarían un par de desconexión de A, lo cual es absurdo.

2

CONVERGENCIA

2.1 Sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Límites. Subsucesiones

Definición 2.1 Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} X:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ k & \longrightarrow & x_k=(x_{k_1},\ldots,x_{k_n}) \end{array}$$

Suele identificarse la sucesión con su rango, es decir, con el conjunto imagen de la aplicación; de ahí la habitual notación: $X=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Definición 2.2 Dada una sucesión $X=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ y $x\in\mathbb{R}^n$; se dice que x es el límite de dicha sucesión, o que la sucesión converge a x y se denota por

$$(x_k)\longrightarrow x \qquad o \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x$$

si $\forall$ entorno V de x en $\mathbb{R}^n$ $\exists\, k_v\in\mathbb{N}\,|\,\forall\, k\geq k_v,\ x_k\in V$.

Proposición 2.1 $(x_k)\longrightarrow x\in\mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \forall\,\epsilon>0\,\exists\, k_\epsilon\in\mathbb{N}\,|\,\forall\, k\geq k_\epsilon$, $\|x_k-x\|<\epsilon \Longleftrightarrow \forall\,\epsilon>0\,\exists\, k_\epsilon\in\mathbb{N}\,|\,\forall\, k\geq k_\epsilon,\ x_k\in B(x,\epsilon)$.
Recordemos que $\|x_k-x\|^2=\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{k_j}-x_j)^2$.

Observación 2.1 El límite de una sucesión, si es que existe, es único; en efecto,
si $(x_k)\longrightarrow x$ y $(x_k)\longrightarrow y$, siendo $x\neq y$ y consideramos $r=\|x-y\|>0$, es

$$B\left(x,\frac{r}{3}\right)\bigcap B\left(y,\frac{r}{3}\right)=\emptyset,$$

y sin embargo, $\exists\, k_0\in\mathbb{N}\,|\,\forall\, k\geq k_0$, $x_k\in B\left(x,\frac{r}{3}\right)\bigcap B\left(y,\frac{r}{3}\right)$ lo cual es absurdo. Así pues, necesariamente $x=y$.

Definición 2.3 Se dice que una sucesión $X=(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ es acotada si el conjunto $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^n$ está acotado, es decir, si $\exists\, M>0\,|\ \|x_k\|\leq M$
$\forall\, k\in\mathbb{N}$.

Proposición 2.2 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\longrightarrow x\in\mathbb{R}^n \Longrightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada.

Demostración:
Dado $\epsilon=1$, $\exists k_1\in\mathbb{N}\,|\,\forall\, k\geq k_1$ $\|x_k-x\|<1 \Longrightarrow \|x_k\|<1+\|x\|$ $\forall\, k\geq k_1$.
Si elegimos $M=\max\{\|x_1\|,\ldots,\|x_{k_1-1}\|,1+\|x\|\}>0$, tenemos una cota de la sucesión, luego es acotada.

Definición 2.4 Dada una sucesión $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ se obtienen n sucesiones en $\mathbb{R}$, que se denominan sus n sucesiones componentes o parciales, $(x_{k_j})_{k\in\mathbb{N}}$
$\forall\, j \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & (x_{1_1}, & x_{1_2}, & \dots, & x_{1_n}) \\ x_2 & = & (x_{2_1}, & x_{2_2}, & \dots, & x_{2_n}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k & = & (x_{k_1}, & x_{k_2}, & \dots, & x_{k_n}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Es claro que $\forall\, j \in \{1,\dots,n\}$ $(x_{k_j})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión de escalares reales.

Teorema 2.1 Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión;

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x \iff (x_{k_j})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x_j \quad \forall\, j \in \{1,\dots,n\}$$

siendo $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

Demostración:

Es consecuencia de las siguientes desigualdades:

$$|x_{k_j} - x_j| \le \|x_k - x\| \le \sqrt{n} \sup_{1\le j\le n} \{|x_{k_j} - x_j|\}$$

2.2 Operaciones con sucesiones

Sean $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $Y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dos sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Se definen las sucesiones suma o resta de X e Y como sigue: $X \pm Y = (x_k \pm y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, la sucesión producto escalar de X e Y como sigue: $X \cdot Y = (x_k \cdot y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Asimismo, si $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, es una sucesión en $\mathbb{R}$ e $Y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, entonces $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \cdot Y = (\lambda_k y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, es una sucesión en $\mathbb{R}^n$; si $\forall\, k \in \mathbb{N}$ es $\lambda_k \neq 0$ entonces $\left(\dfrac{y_k}{\lambda_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ también es una sucesión bien definida. Por otra parte, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ y $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, se define la sucesión $\lambda X = (\lambda x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2.3 Sucesiones de Cauchy

Definición 2.5 Se dice que una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy si

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\ k_\epsilon \in \mathbb{N} \mid \forall\, p, q \ge k_\epsilon \quad \|x_p - x_q\| < \epsilon.$$

Proposición 2.3 Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$Todas sus sucesiones componentes son de Cauchy en $\mathbb{R}$. Simbólicamente:
$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $(x_{k_j})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ $\forall\, j \in \{1,\ldots,n\}$.
En $\mathbb{R}^n$ una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy, luego $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea es un espacio métrico completo.

Proposición 2.4 Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ dos sucesiones convergentes $\Longrightarrow (x_k)\cdot(y_k) \subset \mathbb{R}$ es una sucesión convergente.

Demostración:
Supongamos que $(x_k) \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n$, $(y_k) \longrightarrow y \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$|x_k\cdot y_k - x\cdot y| \leq |x_k\cdot y_k - x_k\cdot y| + |x_k\cdot y - x\cdot y| \leq \|x_k\|\,\|y_k - y\| + \|x_k - x\|\,\|y\| < \epsilon$$

$\forall\, k \geq k_0$
Téngase en cuenta que toda sucesión convergente es acotada.

Proposición 2.5 Dada $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión convergente y supongamos que
$(x_k) \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow (\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow \|x\|$ en $\mathbb{R}$

Demostración:
Basta aplicar la siguiente propiedad: $|\,\|x_k\| - \|x\|\,| \leq \|x_k - x\|$

Definición 2.6 Dada una sucesión $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ se llama subsucesión de X a toda aplicación $X\circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ donde $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ p & \longrightarrow & k_p \end{array}$ es una función creciente.

Notación 2.1 $(x_{k_p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$

Proposición 2.6 Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es una sucesión convergente $\Longrightarrow \forall\,(x_{k_p})_{p\in\mathbb{N}}$ subsucesión es convergente y lo hace al mismo límite.

Definición 2.7 Se denomina *valor de adherencia* de una sucesión de $\mathbb{R}^n$ a cualquier punto de $\mathbb{R}^n$ que sea límite de alguna subsucesión de la dada.

Ejemplo 2.1 En $\mathbb{R}$, la sucesión $\left\{\dfrac{1}{p}\right\}_{p\in\mathcal{P}}$ donde $\mathcal{P} = \{q \in \mathbb{N} \,|\, q \quad \text{es primo}\}$, es una subsucesión de la siguiente sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Observación 2.2 Si una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tiene límite entonces dicho límite es su único valor de adherencia.
Si una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tiene un valor de adherencia no tiene necesariamente que ser convergente.

Ejemplo 2.2 En $\mathbb{R}$ la sucesión $\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \ldots, n, \frac{1}{n+1}, n+1, \ldots\}$ no es convergente, pero el $0 \in \mathbb{R}$ es un valor de adherencia.

Proposición 2.7 Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ es valor de adherencia, abreviadamente v. a. de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \Longrightarrow \forall j = 1, \ldots, n$
a_j es valor de adherencia de$(x_{k_j})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

Demostración:
$\exists\, (x_{k_p})_{p\in\mathbb{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que $(x_{k_p})_{p\in\mathbb{N}} \longrightarrow a \Longleftrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, n$, $(x_{k_{p_j}}) \longrightarrow a_j$ en $\mathbb{R} \Longrightarrow a_j$ es v.a. de $(x_{k_j})_{k\in\mathbb{N}} \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$, ya que $(x_{k_{p_j}}) \subset (x_{k_j}) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$

Proposición 2.8 Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy y tiene un valor de adherencia entonces el valor de adheencia es el límite de la sucesión.

Teorema 2.2 (Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ acotada contiene alguna subsucesión convergente.

Demostración:
Por hipótesis el conjunto $A_0 = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ subconjunto de $\mathbb{R}^n$ está acotado. Si A_0 es finito, es decir, si tiene un número finito de vectores distintos entonces de A_0 puede extraerse una subsucesión constante, luego convergente, y estaría demostrado. Si A_0 es infinito, como es acotado, $\exists x^* \in A_0'$ (punto de acumulación). Veamos que x^* es límite de alguna subsucesión de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Dado $\epsilon = 1 \quad \exists\, k_1 \in \mathbb{N} \,|\, x_{k_1} \in B(x^*, 1) \bigcap A_0$.
El conjunto $A_1 = \{x_k \,|\, k > k_1\} \subset A_0$ y x^* es también punto de acumulación de A_1.
Dado $\epsilon = \frac{1}{2} \quad \exists\, k_2 \in \mathbb{N} \,|\, x_{k_2} \in B(x^*, \frac{1}{2}) \bigcap A_1$. Así sucesivamente, se construye una subsucesión (x_{k_p}) con $x_{k_p} \in B(x^*, \frac{1}{p}) \bigcap A_{p-1}$ y siendo $A_p = \{x_k \,|\, k > k_p\}$.
Es claro, por construcción, que $(x_{k_p}) \longrightarrow x^*$. Así toda sucesión acotada tiene algún valor de adherencia.

Definición 2.8 Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad f_k : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial. Consideremos la sucesión de funciones

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^m)^D$. Se dice que $(f_k) \longrightarrow f$ *puntualmetnte* en $D_0 \subset D$ si $\forall\, x \in D_0$
$(f_k(x)) \longrightarrow f(x)$ en $\mathbb{R}^m$ siendo $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ otra función. Es la denominada *convergencia puntual*

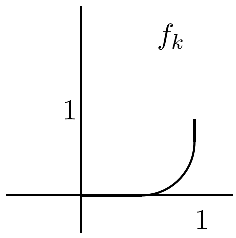
Definición 2.9 Se dice que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow f$ *uniformemente* en D_0 si y sólo si $\forall\, \epsilon > 0$
$\exists\, k_\epsilon \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, k \geq k_\epsilon \quad \|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \forall\, x \in D_0$. Es la denominada *convergencia uniforme*

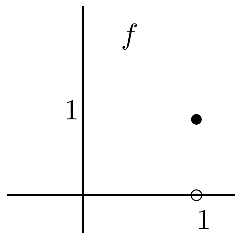
Notación 2.2 $(f_k) \xrightarrow{u} f$ en D_0.

Observación 2.3 $(f_k) \xrightarrow{u} f$ en $D_0 \Longrightarrow (f_k) \longrightarrow f$ puntualmente.
El recíproco no es cierto.

Ejemplo 2.3 Sean $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\begin{array}{rcl} f_k : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^k \end{array}$ y $\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si t} \neq 1 \\ 1 \text{ si t=1} \end{cases} \end{array}$

Se tiene que $(f_k) \longrightarrow f$ pero $(f_k) \not\xrightarrow{u} f$





3

FUNCIONES CONTINUAS

3.1 Límites de funciones

Definición 3.1 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial, siendo $A = D(f)$ el dominio de la función f. Se denominan *funciones coordenadas* de f a las funciones f_j

$$\begin{array}{ccc} A \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ & f_j \searrow & \downarrow p_j \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

donde p_j es la proyección j-ésima, $\forall\, j = 1, \ldots, m$. Por otra parte,
$\forall\, x \in A$, $\forall\, j = 1, \ldots, m$ es $f_j(x) = (p_j \circ f)(x) = p_j(f(x))$.

Notación 3.1 $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \quad \forall\, x \in A$.

Definición 3.2 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $a \in A'$ (un punto de acumulación de A); se dice que el límite de la función f es $b \in \mathbb{R}^m$ cuando x tiende a a y se escribe

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b \in \mathbb{R}^m \qquad \text{o más brevemente} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = b$$

si $\forall\, V$ entorno de $b \in \mathbb{R}^m$ $\exists$ un entorno U de $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall\, x \in (U \bigcap A) - \{a\}$ es $f(x) \in V \Longleftrightarrow f((U \bigcap A) - \{a\}) \subset V$

Notación 3.2 $f(x) \longrightarrow b$ si $x \to a$

Proposición 3.1 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \,|\, \forall\, x \in B(a, \delta)^* \bigcap A$, es $f(x) \in B(b, \epsilon)$ siendo $B(a, \delta)^* = B(a, \delta) - \{a\}$ un entorno reducido de a.

Proposición 3.2 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \,|\, \forall\, x \in A$,
$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - b\| < \epsilon$

Observación 3.1 El límite de una función en un punto, si existe, es único; en efecto,
si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ siendo $b \neq c$, entonces $\|b - c\| = r > 0$.
Sea $\epsilon = \frac{r}{3}$, $\quad \exists\, \delta > 0 \,|\, \|f(x) - b\| < \frac{r}{3}\, \forall\, x \in B(a, \delta)^* \bigcap A$ y $\exists\, \delta' > 0 \,|$
$\forall\, x \in B(a, \delta')^* \bigcap A$ es $\|f(x) - c\| < \frac{r}{3}$. Sea $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$, entonces
$\forall\, x \in B(a, \delta'')^* \bigcap A \neq \emptyset$, pues $a \in A'$, es
$\|b - c\| \leq \|b - f(x)\| + \|f(x) - c\| < \frac{2r}{3} < r$ lo cual es absurdo.

Proposición 3.3 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $a \in A'$ y $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f_j(x) = b_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, m$$

Demostración:
$\forall\, j = 1, \ldots, m$ es $|f_j(x) - b_j| \leq \|f(x) - b\| \leq \sqrt{m} \cdot \sup_{1 \leq j \leq m} \{|f_j(x) - b_j|\}$

Teorema 3.1 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall\, (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$, tal que $(x_k) \longrightarrow a$ con $x_k \neq a \,\forall\, k \in \mathbb{N}$ y $x_k \neq x_p$ si $k \neq p$, es $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en $\mathbb{R}$.

Demostración:
" $\Rightarrow$ " Por hipótesis, $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Dado un entorno V de b en $\mathbb{R}$, existe un entorno U de a tal que $f((U \bigcap A) - \{a\}) \subset V$; si consideramos una sucesión arbitraria $(x_k) \subset A$ con $(x_k) \longrightarrow a$ en las condiciones mencionadas , entonces, $\exists\, k_U \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, k \geq k_U \quad x_k \in U$ luego $\forall\, k \geq k_U$ es $f(x_k) \in V$.
" $\Leftarrow$ " Sean dos sucesiones $(x_k), (y_k) \subset A$ que cumplen las hipótesis, y con $\{x_k\} \bigcap \{y_k\} = \emptyset$; supongamos que $f(x_k) \longrightarrow c_1$ y que $f(y_k) \longrightarrow c_2$. Si se toma la sucesión $(z_k) \subset A$ dada por $z_k = \begin{cases} x_k \text{ si } k \text{ par} \\ y_k \text{ si } k \text{ impar} \end{cases}$ es claro que cumple las hipótesis, luego $(f(z_k))$ es convergente. Ahora bien, $(f(x_k))$ y $(f(y_k))$ son subsucesiones suyas convergentes lo cual implica que $c_1 = c_2$. Denominemos $b = \lim_{k \to \infty} f(z_k)$ y veamos que $\lim_{x \to a} f(x) = b$. En efecto, si fuera
$\lim_{x \to a} f(x) \neq b \quad \exists\, \epsilon > 0 \,|\, \forall\, j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in (B(a, \frac{1}{j}) \bigcap A) - \{a\}$ tal que $f(x_j) \notin B(b, \epsilon)$. De esta manera, se construye una sucesión $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset A - \{a\}$ tal que $(f(x_j))$ no es convergente, lo cual contradice la hipótesis.

Definición 3.3 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$, i. e., $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,|\, \forall\, x \in A$, $0 < \|x - a\| < \delta$ es $|f(x) - b| < \varepsilon$.
$\forall\, B \subset A$ tal que $a \in B'$ se define

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = \lim_{x \to a} (f|_B)(x)$$

donde $f|_B : B \longrightarrow \mathbb{R}$ es la restricción de f a B.

Proposición 3.4 $\lim_{x \to a} f(x) = b \Longrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = b$ siendo $B \subset A$ tal que $a \in B'$ arbitrario.

El recíproco no es cierto; en efecto, si consideramos la función

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array}$$

es claro que si $a \in \mathbb{R}|\mathbb{Q}$ es $\lim\limits_{x\to a,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = 0$, y sin embargo $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$.

Proposición 3.5 Si $B_1, B_2 \subset A$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in B_1}} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in B_2}} f(x) = b_2$ y es $b_1 \neq b_2$ entonces puede asegurarse que no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Definición 3.4 Si $B \subset A$ es el conjunto de puntos de una recta que pasa por a, al $\lim\limits_{x\to a,\, x\in B} f(x)$ lo denominaremos *límite direccional*.

Ejemplo 3.1 Sean $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$\forall\, \lambda > 0$ sea $B_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y-b = \lambda(x-a)\}$ una recta que pasa por (a,b) y cuya pendiente es λ. Estudiando los límites direccionales

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\,\in B_\lambda}} f(x,y)$$

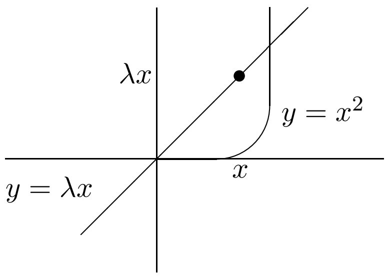
dicho límite se reduce a un límite del tipo $\lim\limits_{x\to a} g(x,\lambda)$. Si resulta que no es independiente de λ entonces ya se puede deducir que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$. En caso de que $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$ es $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\,\in B_\lambda}} f(x,y) = c$ tampoco puede garantizarse que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ sea c ya que puede ocurrir que no exista el límite global, pero se tiene información del posible valor del mismo.

Ejemplo 3.2 Sea la función

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } y = x^2 \\ 0 \text{ si } y \neq x^2 \end{array} \right. \end{array}$$

Veamos que todos los límites direccionales son 0; en efecto, sea
$B_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \lambda x\}\, \forall\,\lambda \in \mathbb{R}$. Es claro que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=\lambda x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,\lambda x) = 0$$



Si tomamos ahora el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ entonces $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = 1$, y por tanto no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Definición 3.5 Sean $f : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $(a,b) \in (x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$. Supongamos que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$ $\forall\, y \in [y_1, y_2]$ fijo con $y \neq b$ se considera la función

$$\begin{array}{rcl} f_y : [x_1, x_2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Si $\forall\, y \in [y_1, y_2]$ existe $\lim\limits_{x\to a} f_y(x) = h(y)$ puede estudiarse el $\lim\limits_{y\to b} h(y)$.
Recíprocamente, si $\forall\, x \in [x_1, x_2]$ fijo con $x \neq a$ se considera la función:

$$\begin{array}{rcl} f_x : [y_1, y_2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

y si existe $\forall\, x \in [x_1, x_2]$ el $\lim\limits_{y\to b} f_x(y) = g(x)$ entonces puede estudiarse el $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Pues bien, los límites $\lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f_y(x)\right)$ y $\lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{y\to b} f_x(y)\right)$ se denominan *primer y segundo límites reiterados* respectivamente. La anterior definición es generalizable a $\mathbb{R}^n$.

Observación 3.2 1. Puede existir $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ pero no existir los límites reiterados.

Ejemplo 3.3 Sea la función:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \left\{ \begin{array}{cl} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\left|y \operatorname{sen} \frac{1}{xy}\right| \leq |y| \leq \|(x,y)\| < \varepsilon \text{ si } \|(x,y)\| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0;$$

sin embargo no existe $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ ya que si $y \neq 0 \nexists \lim\limits_{x\to 0} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{xy}$.

2. Pueden existir y ser iguales los límites reiterados y, sin embargo, no existir el límite global.

   Ejemplo 3.4 Sea la función:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

   Puede verse que $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$. Sin embargo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; en efecto, estudiando los límites direccionales se ve que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2 x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

   luego son todos distintos, pues dependen de λ, y así no existe el límite global.

3. Si existen los límites reiterados y son distintos puede asegurarse que no existe el límite.

   Ejemplo 3.5 Sea la función:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-x+y}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases} \end{array}$$

   Puede verse que $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 1$ y que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = -1$, luego $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Proposición 3.6 Si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$ y existe el primer límite reiterado
$c_{12} = \lim\limits_{y\to b}\left(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)\right)$ entonces necesariamente $c_{12} = c$.

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \,|\, 0 < |x-a| < \delta$ y $0 < |y-b| < \delta \Longrightarrow |f(x,y)-c| < \frac{\varepsilon}{3}$. Si ahora $y \neq b$ es arbitrario $\exists\, \delta' > 0 \,|\, 0 < |x-a| < \delta' \Longrightarrow |f(x,y)-h(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ y además $\exists\, \delta'' > 0 \,|\, 0 < |y-b| < \delta'' \Longrightarrow |h(y)-c_{12}| < \frac{\varepsilon}{3}$. Basta tomar entonces $\gamma = \min\{\delta, \delta'\delta''\}$. Así si $0 < |x-a| < \gamma$ y $0 < |y-b| < \gamma$ entonces

$$|c_{12}-c| \leq |c_{12}-h(y)|+|h(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-c| < \varepsilon \Longrightarrow c_{12}-c = 0 \Longleftrightarrow c_{12} = c$$

Análogamente se puede razonar con el segundo límite reiterado.

Definición 3.6 Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; se dice que f *tiende uniformemente hacia* $h(y)$ cuando $x \to a$ en un entorno reducido de b de radio r si
$\forall\, \varepsilon > 0 \,|\, \exists\, \delta > 0 \,|\, |f(x,y)-h(y)| < \varepsilon$ cualquiera que sea x que cumpla $0 < |x-a| < \delta$ y $\forall\, y \in (b-r, b+r) - \{b\}$.

Proposición 3.7 Bajo las siguientes hipótesis:

1. $\exists\, s > 0 \,|\, \forall\, y,\ 0 < |y-b| < s\, \exists \displaystyle\lim_{x \to a} f(x,y) = h(y)$ y
   $\forall\, x,\ 0 < |x-a| < s \quad \exists \displaystyle\lim_{y \to b} f(x,y) = g(x)$.

2. f tiende uniformemente hacia $h(y)$ cuando $x \to a$ en un cierto entorno reducido de b, digamos, por ejemplo, $(b-r, b+r)^* = (b-r, b+r) - \{b\}$.

3. Existe $c_{12} = \displaystyle\lim_{y \to b} \Big(\lim_{x \to a} f(x,y) \Big)$.

entonces $\exists\, c_{21}$ y además $c_{12} = c_{21}$.

Demostración:
Dado $\varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ (puede tomarse $\delta < s$) tal que si $0 < |x-a| < \delta$, $|f(x,y)-h(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, y \in (b-r, b+r)^*$. Además $\exists\, \delta' > 0$ (puede tomarse $\delta' < r$) tal que si $0 < |y-b| < \delta'$ entonces $|h(y)-c_{12}| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Sea $\delta_0 = \min\{\delta, \delta'\}$. Es claro que si $0 < |x-a| < \delta_0$ entonces $|f(x,y)-c_{12}| \leq |f(x,y)-h(y)| + |h(y)-c_{12}| < \varepsilon$ y tomando límites se deduce que $|g(x)-c_{12}| \leq \varepsilon \Longrightarrow |c_{21}-c_{12}| \leq \varepsilon \Longrightarrow c_{12} = c_{21}$.

3.2 Continuidad: definición y primeras propiedades

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D$

Definición 3.7 Se dice que f es *continua* en $a \in D$ si $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ y $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

Proposición 3.8 f es continua en $a \in D \iff \forall V$ entorno de $f(a)$ $\exists U$ entorno de a tal que $f(U \bigcap D) \subset V$, es decir, $\forall x \in U \bigcap D$ es $f(x) \in V$.

Proposición 3.9 f es continua en $a \in D \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$,
$x \in B(a, \delta) \bigcap D \Longrightarrow$
$f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ lo cual equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid x \in D \text{ con } \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Teorema 3.2 Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial, y $a \in D$; son equivalentes:

i) f es continua en a.

ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$, $\|x - a\| < \delta$ y $x \in D \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

iii) $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ con $(x_k) \longrightarrow a \Longrightarrow (f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(a)$.

La demostración se deja como ejercicio.

3.3 Propiedades globales

Definición 3.8 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de varias variables, (o función escalar de variable vectorial o un campo escalar); se dice que f es *continua* en $A \subset D$ si f es continua en $a, \forall a \in A$. Se trata de la continuidad global.

Proposición 3.10 Son equivalentes:

i) f es continua en D o f es globalmente continua.

ii) $\forall G \subset \mathbb{R}$ abierto $\exists G_1 \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tal que $f^{-1}(G) = G_1 \bigcap D$.

iii) $\forall F \subset \mathbb{R}$ cerrado $\exists F_1 \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, tal que $f^{-1}(F) = F_1 \bigcap D$.

Demostración:
i)$\Longrightarrow$ii) Si $G \subset \mathbb{R}^m$ es abierto tal que $f^{-1}(G) = \emptyset$, basta tomar
$G_1 = \emptyset \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Así, $f^{-1}(G) = \emptyset = \emptyset \bigcap D$. Si $f^{-1}(G) \neq \emptyset$, para cada $y \in G \mid \exists a_y \in D \mid y = f(a_y)$ existe $\varepsilon_y > 0 \mid B(y, \varepsilon_y) \subset G$, y además

$\exists\,\delta_y > 0 \,|\, f(B(a_y, \delta_y) \bigcap D) \subset B(y, \varepsilon_y) \subset G$. Sea entonces $G_1 = \bigcup_{y \in f^{-1}(G)} B(a_y, \varepsilon_y)$ que es abierto en $\mathbb{R}^n$ y que cumple

$$f^{-1}(G) \subset G_1 \bigcap D = \bigcup_{y \in f^{-1}(G)} B(a_y, \varepsilon_y) \bigcap D \subset f^{-1}(G)$$

ii)$\Longrightarrow$ iii) Tomando complementarios.
iii)$\Longrightarrow$ i) Por reducción al absurdo.

3.4 Funciones lineales

Definición 3.9 Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es lineal si cumple la siguiente condición:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall\, \alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$$

Puede verse que necesariamente ha de ser de la forma

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \lambda x \end{array}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Toda función lineal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es globalmente continua en $\mathbb{R}$ Análogamente se definen las funciones lineales $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Proposición 3.11 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función lineal y sean $\{e_j\}_{j=1}^n$ y $\{u_i\}_{i=1}^m$ bases frefijadas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente; entonces existe una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ asociada a la aplicación lineal f respecto a dichas bases, que se forma como sigue:
La columna j-ésima de A viene dada por las coordenadas respecto a la base $\{u_i\}_{i=1}^m$ del vector $f(e_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n$.

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\ & & \uparrow & & \\ & & f(e_j) & & \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

Además, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $f(x) = y = (y_1, \ldots, y_m)$ entonces $Ax = y$, es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

En efecto,
$f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(x_n) =$
$x_1(a_{11}u_1 + \cdots + a_{m1}u_m) + \cdots + x_n(a_{1n}u_1 + \cdots + a_{mn}u_m) =$
$(\underbrace{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n}_{y_1})u_1 + \cdots + (\underbrace{a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n}_{y_m})u_m$

Proposición 3.12 Toda aplicación lineal entre espacios euclídeos es globalmente continua.

Demostración:
$\forall\, i = 1, \ldots, m$ es $|y_i|^2 = |(x_1, \ldots, x_n) \cdot (a_{i1}, \ldots, a_{in})|^2 \leq \|x\|^2 \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$
de donde $\|f(x)\|^2 = \|y\|^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \|x\|^2 = C^2\|x\|^2 \Longrightarrow$
$\|f(x)\| \leq C\|x\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$ con $C > 0$ una constante.
De esta manera, si $a \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ entonces basta elegir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ y se cumple que $\forall\, x \mid \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| = \|f(x - a)\| \leq C\|x - a\| < \varepsilon$

Notación 3.3 Se denota por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ al espacio de todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Con las operaciones habituales tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$; además, $\forall\, u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$,
$\|u\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \{\|u(x)\|\}$ es una norma en dicho espacio.

3.5 Preservación de la conexión y la compacidad

Teorema 3.3 Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en H donde $H \subset D$ es un conjunto conexo $\Longrightarrow f(H) \subset \mathbb{R}^m$ es conexo.

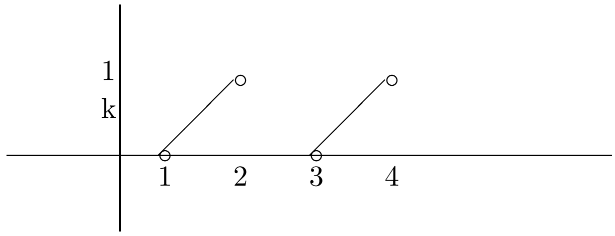
Demostración:
Es claro que si denotamos por $h = f|_H$ entonces $f(H) = h(H)$. Supongamos que $h(H)$ no es conexo; entonces existen dos abiertos $A, B \subset \mathbb{R}^m$ que forman una disconexión, es decir, $h(H) \bigcap A \neq \emptyset, \quad h(H) \bigcap B \neq \emptyset$,
$h(H) \bigcap A \bigcap B = \emptyset \quad$ y $h(H) = (h(H) \bigcap A) \bigcup (h(H) \bigcap B)$.
Sean $A_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $h^{-1}(A) = A_1 \bigcap H$ y
$h^{-1}(B) = B_1 \bigcap H$. Puede verse que A_1, B_1 forman una disconexión de H lo cual implica que H no es conexo, y esto es una contradicción.

Teorema 3.4 Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $H \subset D$ un conjunto conexo y f continua en $H \Longrightarrow \forall\, k \in \mathbb{R} \mid \inf\limits_{x \in H} \{f(x)\} < k < \sup\limits_{x \in H} \{f(x)\}$
$\exists\, x \in H \mid f(x) = k$

Demostración:
Como $f(H) \subset \mathbb{R}$ es conexo, necesariamente es un intervalo. Por tanto $\forall\, k \in \mathbb{R}$ que cumpla dichas condiciones es $k \in f(H)$, y así $\exists\, x \in H \,|\, f(x) = k$

Observación 3.3 El recíproco no es cierto;

Ejemplo 3.6 Sea $H = (1,2) \bigcup (3,4)$ y $f : H \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida tal y como aparece en la figura.



Es claro que $\forall\, x \in H$ es f continua en x.
Además $\forall\, k \in \mathbb{R} \,|\, \inf\limits_{x\in H}\{f(x)\} < k < \sup\limits_{x \in H}\{f(x)\} \quad \exists\, x \in H \,|\, f(x) = k$ y, sin embargo, H no es conexo.
Las funciones que sí lo cumplen se denominan *funciones de Darboux*.

Teorema 3.5 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en $K \subset D$, donde K es compacto $\Longrightarrow f(K) \subset \mathbb{R}^m$ es compacto.

Demostración:
Veamos que $f(K)$ es cerrado y acotado. Si $f(K)$ no es acotado entonces $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, x_k \in K \,|\, \|f(x_k)\| \geq k$. Se tiene que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ es una sucesión acotada ya que está contenida en K que es compacto. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass 2.2, admite alguna subsucesión convergente, digamos $(x_{k_p}) \longrightarrow x$ con $x \in \overline{K} = K$ pues K es cerrado. Como f es continua en x es $f(x_{k_p}) \longrightarrow f(x)$; pero esto es absurdo, ya que si, por ejemplo, tomamos $\varepsilon = 1\ \exists\, p_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, p \geq p_0 \quad \|f(x_{k_p}) - f(x)\| < 1 \Longrightarrow \|f(x_{k_p})\| \leq 1 + \|f(x)\|$ y como $k_p \leq \|f(x_{k_p})\| \leq 1 + \|f(x)\|$ y $1 + \|f(x)\|$ es constante, se llega a una contradicción. Así pues, $f(K)$ es acotado.
Sea ahora $y \in f(K)'$, un punto de acumulación de $f(K)$, i.e. $\forall$ entorno V^y de y, se tiene $(V^y - \{y\}) \bigcap f(K) \neq \emptyset$. En particular,
$\forall\, k \in \mathbb{N}\, \exists\, z_k \in K \,|\, f(z_k) \in (B(y, \frac{1}{k} - \{y\})$. Así $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ y $\|f(z_k) - y\| < \frac{1}{k}$.
Como K es compacto, admite una subsucesión convergente, digamos $(z_{k_p}) \longrightarrow z \in K$; ahora bien, f continua en $K \Longrightarrow (f(z_{k_p})) \longrightarrow f(z)$ y como

también $(f(z_{k_p})) \longrightarrow y$, es claro que $y = f(z)$ y, por tanto, $y \in f(K)$. En definitiva, $f(K)$ es cerrado y acotado, luego por el teorema de Heine-Borel 1.3 $f(K)$ es compacto.

Teorema 3.6 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $K \subset D$ con K compacto $\Longrightarrow \exists\, x^* \in K, \exists\, x_* \in K$ tales que $f(x^*) = \sup\limits_{x \in K}\{f(x)\}$ y $f(x_*) = \inf\limits_{x \in K}\{f(x)\}$

Demostración:
Como $f(K)$ es compacto $\exists\, L > 0 \,|\, f(x) \leq L \,\forall\, x \in K$.
Llamemos $M = \sup\limits_{x \in K}\{f(x)\}$ y veamos que $M \in f(K)$. Por definición de supremo, $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \exists\, x_k \in K \,|\, M - \dfrac{1}{k} \leq f(x_k)$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass 2.2 $(x_k) \subset K$ admite una subsucesión convergente, digamos $(x_{k_p}) \longrightarrow x^* \in K$. Como f es continua en x^* es $f(x_{k_p}) \longrightarrow f(x^*)$, y como $f(x_{k_p}) \longrightarrow M \Longrightarrow f(x^*) = M$. La segunda parte de la demostración es análoga.

Proposición 3.13 Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua $\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} \|f\| : D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f\|(x) = \|f(x)\| \end{array}$$

es continua. Además, se tiene que $\|f(x^*)\| = \sup\limits_{x \in K}\{\|f(x)\|\}$ y $\|f(x_*)\| = \inf\limits_{x \in K}\{\|f(x)\|\}$.

Teorema 3.7 (de la continuidad de la función inversa) Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua e inyectiva, con K compacto entonces $g : f(K) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

Notación 3.4 $\mathcal{C}_{nm}(D) = \{f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \,|\, f$ es continua en $D\}$
$\mathcal{B}_{nm}(D) = \{f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \,|\, f$ es acotada$\}$
$\mathcal{BC}_{nm}(D) = \{f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \,|\, f$ es acotada y continua en $D\}$
Los anteriores espacios de funciones tienen estructura de espacio vectorial con las operaciones habituales de las funciones.

3.6 Continuidad uniforme y teoremas del punto fijo

Definición 3.10 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función; se dice que f es *uniformemente continua* en $A \subset D$ si $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$, $\forall\, x, y \in A$, $\|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Observación 3.4 f uniformemente continua en $A \Longrightarrow f$ continua en A. El recíproco no es cierto.

Ejemplo 3.7 La función

$$\begin{array}{rcl} f:(0,\infty)\subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)=\dfrac{1}{t} \end{array}$$

es continua pero no es uniformemente continua.

Teorema 3.8 Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, $A \subset D$ compacto y f continua en $A \Longrightarrow f$ es uniformemente continua en A

Lema 3.1 Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $A \subset D$ entonces
f no es uniformemente continua en $A \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0$ y $\exists\, (x_k),\ (y_k) \subset A \mid$
$\|x_k - y_k\| < \dfrac{1}{k}$ y $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon_0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

Demostración:
(del teorema)
Supongamos que f no es uniformemente continua en A. Por el lema anterior, $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ y existen dos sucesiones $(x_k),\ (y_k) \subset A \mid \|x_k - y_k\| < \dfrac{1}{k}$ y $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon_0 \,\forall\, k \in \mathbb{N}$. Como A es compacto, A es acotado, luego (x_k) y (y_k) son sucesiones acotadas y admiten alguna subsucesión convergente. Supongamos que $(x_{k_p}) \longrightarrow x \in \overline{A} = A$, pues A es cerrado. Entonces $(y_{k_p}) \longrightarrow x$ también, ya que $\|y_{k_p} - x\| \leq \|y_{k_p} - x_{k_p}\| + \|x_{k_p} - x\| < \varepsilon$. Así pues, $f(x_{k_p}) \longrightarrow f(x)$ y $f(y_{k_p}) \longrightarrow f(x)$, lo cual es absurdo, pues
$\|f(x_{k_p}) - f(y_{k_p})\| > \varepsilon_0$

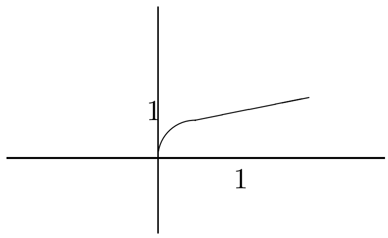
Definición 3.11 (aplicaciones lipschitzianas) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función; se dice que f *satisface la condición de Lipschitz en D* o que *es lipschitziana en D* si $\exists\, A > 0, \mid$
$\|f(x) - f(y)\| \leq A\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in D$

Definición 3.12 Se dice que f es *contractiva o contracción* si es lipschitziana y es la constante de Lipschitz $A < 1$

Observación 3.5 Toda aplicación lipschitziana es uniformemente continua. El recíproco no es cierto.

Ejemplo 3.8 Sea la función

$$\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$$



Es claro que f es uniformemente continua, pero no es lipschitziana, pues $\forall\, A > 0 \quad \exists\, t \in [0,1] \quad |\ \sqrt{t} > At$

Teorema 3.9 (de Banach del punto fijo) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función contractiva o contracción entonces f tiene un único punto fijo, i.e.,

$$\exists! \quad x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) = x$$

Demostración:
Respecto a la unicidad, si $\exists\, u, v \in \mathbb{R}^n$ tales que $u \neq v$ y es $f(u) = u, \quad f(v) = v$ entonces

$$0 < \|u - v\| = \|f(u) - f(v)\| \leq A\|u - v\| \Longrightarrow 1 \leq A$$

lo cual es absurdo dado que por hipótesis es $A < 1$; así pues es $u = v$.
En cuanto a la existencia, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, consideremos la siguiente sucesión: $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$, $x_{k+1} = f(x_k)$, $\ldots$. Es claro que

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq A\|x_k - x_{k-1}\| \leq \cdots \leq A^k\|x_1 - x_0\|$$

Así pues, dados $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > q$ se tiene

$$\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - x_{p-1}\| + \cdots + \|x_{q+1} - x_q\| \leq (a^{p-1} + \cdots + A^q)\|x_1 - x_0\|$$

de donde

$$\|x_p - x_q\| \leq A^q(1 + A + A^2 + \cdots + A^{p-q-1})\|x_1 - x_0\| < \frac{A^q}{1 - A}\|x_1 - x_0\|$$

y por tanto, la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es de Cauchy luego convergente ya que $\mathbb{R}^n$ es completo. (Téngase en cuenta que $A < 1 \Longrightarrow A^q \longrightarrow 0$ en $\mathbb{R}$ si $q \longrightarrow \infty$). Supongamos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$, entonces $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(x)$ y como $f(x_k) = x_{k+1}$ se deduce finalmente que $f(x) = x$.

Teorema 3.10 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contractiva cuya constante de Lipschitz es $A < 1$, y sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq B\}$ la bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ de radio $B > 0$ y centrada en el origen $0 \in \mathbb{R}^n$. Si se cumple que $\|f(o)\| \leq B(1 - A)$ entonces f tiene un único punto fijo en D.

Demostración:
$\forall\, x \in D$ es

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f(0)\| + \|f(0)\| \leq A\|x\| + B(1 - A) \leq AB + B(1 - A) = B$$

luego $\forall\, x \in D$ es $f(x) \in D$; construyamos la sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ de tal manera que $x_1 = 0$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $\ldots$, $x_{k+1} = f(x_k)$, $\ldots$
que es de Cauchy, y por tanto convergente. Supongamos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$; entonces $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(x)$ y como $f(x_k) = x_{k+1}$ se deduce que
$f(x) = x \in D$.

Teorema 3.11 (de Brouwer del punto fijo) Sea
$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq B\}$ donde es $B > 0$. Toda función continua
$f : D' \subset D \longrightarrow D$ cuyo dominio y rango estén contenidos en D tiene al menos un punto fijo.

3.7 Sucesiones de funciones continuas

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua $\forall\, k \in \mathbb{N}$
Recordemos algunas definiciones:

Definición 3.13 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y $D_0 \subset D$; se dice que (f_k) *converge puntualmente* a f en D_0 y se denota por $(f_k) \longrightarrow f$ en $D_0 \subset D$ si $\forall\, x \in D_0$ es $(f_k(x)) \longrightarrow f(x)$ en $\mathbb{R}^n$.

Observación 3.6 $(f_k) \longrightarrow f$ en $D_0 \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in D_0$, $\exists\, k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall\, k \geq k_0(\varepsilon, x)$

Definición 3.14 Se dice que (f_k) *converge a f uniformemente* en D_0 y se denota por $(f_k) \xrightarrow{u} f$ en D_0 si $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, k \geq k_0(\varepsilon)$ es $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D_0$.

Observación 3.7 $(f_k) \xrightarrow{u} f \Longrightarrow (f_k) \longrightarrow f$

Lema 3.2 (f_k) <u>no</u> converge uniformemente en D_0 a $f \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon_0$, $\exists\, (f_{k_p})$ subsucesión de (f_k) y $\exists\, (x_p) \subset D_0$ tales que $\|f_{k_p}(x_p) - f(x_p)\| > \varepsilon_0 \quad \forall\, p \in \mathbb{N}$

Demostración:
Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\exists\, x_1 \in D_0$ y $\exists\, k_1 \in \mathbb{N} \mid \quad \|f_{k_1}(x_1) - f(x_1)\| > \varepsilon_0$ y así sucesivamente se obtienen las dos subsucesiones.

Definición 3.15 Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es *acotada en D* si $\exists\, M > 0$, $\|f(x)\| \leq M \quad \forall\, x \in D$.

Si f es acotada entonces el conjunto $\{\|f(x)\|\}_{x\in D} \subset \mathbb{R}$ admite extremo superior (o supremo). Sea $\|f\|_D = \sup\limits_{x\in D}\{\|f(x)\|\} < \infty$. Pues bien, la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|_D : \mathcal{B}_{nm}(D) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \|f\|_D \end{array}$$

donde $\mathcal{B}_{nm}(D) = \{f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ es acotada } \}$ es una norma de nominada *norma del supremo* o *norma uniforme*. El espacio $(\mathcal{B}_{nm}(D), \|\cdot\|_D)$ es así un espacio normado.

Teorema 3.12 Sea $(f_k) \subset \mathcal{B}_{nm}(D)$ una sucesión de funciones acotadas y $f \in \mathcal{B}_{nm}(D)$ una función cualquiera; entonces

$$(f_k) \xrightarrow{u} f \text{ en } D \Longleftrightarrow (\|f_k - f\|_D) \longrightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

Demostración:
" $\Longrightarrow$ "
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall\, k \geq k_0(\varepsilon) \quad \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon\, \forall\, x \in D \Longrightarrow$
$\forall\, k \geq k_0(\varepsilon) \quad \sup\limits_{x\in D}\{\|f_k(x) - f(x)\|\} \leq \varepsilon \Longrightarrow \|f_k - f\| \leq \varepsilon \quad \forall\, k \geq k_0(\varepsilon) \Longrightarrow$
$(\|f_k - f\|_D) \longrightarrow 0$
" $\Longleftarrow$ "
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \mid \forall\, k \geq k_0(\varepsilon)$ es $\|f_k - f\|_D < \varepsilon \Longrightarrow$
$\|f_k(x) - f(x)\| \leq \|f_k - f\|_D < \varepsilon \quad \forall\, x \in D \Longrightarrow (f_k) \xrightarrow{u} f$ en D.

Teorema 3.13 (criterio de Cauchy para la convergencia uniforme) Sea $(f_k) \subset \mathcal{B}_{nm}(D)$; existe $f \in \mathcal{B}_{nm}(D)$ tal que $(f_k) \xrightarrow{u} f$ en $D \Longleftrightarrow$
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall\, p, q \geq k(\varepsilon)$ es $\|f_p - f_q\|_D \leq \varepsilon$

Demostración:
" $\Longrightarrow$ "
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall\, k \geq (\varepsilon)\|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}\, \forall\, x \in D$, así $\forall\, p, q \geq k(\varepsilon)$
$\forall\, x \in D$ es

$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| < \varepsilon \Longrightarrow \|f_p - f_q\|_D \leq \varepsilon$$

"$\Longleftarrow$"
Por hipótesis, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, p, q \geq k(\varepsilon)$ es $\|f_p - f_q\|_D \leq \varepsilon$; por tanto, $\forall\, x \in D$ la sucesión $(f_k(x)) \subset \mathbb{R}^m$ es de Cauchy; ahora bien, $\mathbb{R}^m$ es un espacio completo, luego $\forall, x \in D$ es $(f_k(x))$ convergente. Definamos la función:

$$\begin{array}{rcl} f : D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) \end{array}$$

Veamos que necesariamente $(f_k) \xrightarrow{u} f$ en D y que $f \in \mathcal{B}_{nm}(D)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, $\exists\, k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, p, q \geq k(\varepsilon)$, $\|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D$. Así pues, $\|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D \quad \forall\, q \geq p$ donde es $p \geq k(\varepsilon)$ fijo $\Longrightarrow$ $\|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall\, x \in D \quad \forall\, p \geq k(\varepsilon)$. En particular, tomando $\varepsilon = 1$ y $p \geq k(1)$ fijo $\forall\, x \in D$ es $\|f(x)\| \leq 1 + \|f_p(x)\| \leq 1 + \|f_p\|_D$ de donde se deduce que f es acotada.

Teorema 3.14 Sea (f_k) una sucesión de funciones con
$f_k : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ continua. Entonces

$$(f_k) \xrightarrow{u} f \text{ en } D \Longrightarrow f \text{ es continua.}$$

Demostración:
Sea $a \in D$. $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, k(\varepsilon), \forall\, p \geq k(\varepsilon)$ es $\|f_p(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, x \in D$. Entonces, fijado $p \geq k(\varepsilon) \quad \exists\, \delta > 0 \,|\, \|x - a\|$, $x \in D \Longrightarrow \|f_p(x) - f_p(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ (ya que f_p es continua en a). De esta manera si $p \geq k(\varepsilon)$ es fijo y
$x \in D$, $\|x - a\| < \delta$ entonces

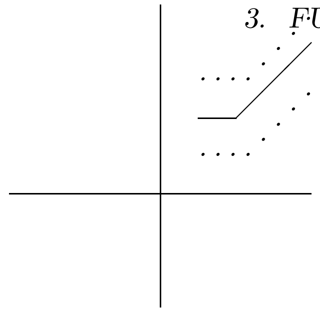
$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_p(x)\| + \|f_p(x) - f_p(a)\| + \|f_p(a) - f(a)\| < \varepsilon$$

luego f es continua en $a \in D$ y como a era arbitrario f es continua en D.

3.8 Teoremas de aproximación de funciones

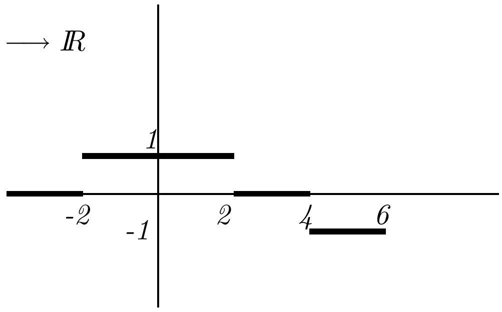
Definición 3.16 Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que la función g *aproxima uniformemente en* D *a* f *en menos de* $\varepsilon > 0$ si
$\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D$.

Definición 3.17 Se dice que f *puede aproximarse uniformemente en* D por la familia de funciones $\mathcal{G}$ si $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g_\varepsilon \in \mathcal{G}$ tal que $\|g_\varepsilon - f\|_D < \varepsilon$



Definición 3.18 La función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es *escalonada* si sólo toma un n$^{\underline{0}}$ finito de valores y cada uno de los valores no nulos que toma lo hace en todo un rectángulo de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.9 $g : I\!R \longrightarrow I\!R$



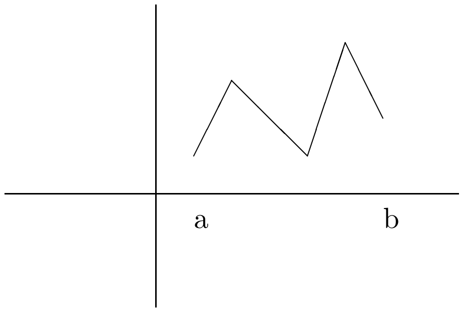
Teorema 3.15 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua con dominio D compacto $\Longrightarrow$ f puede aproximarse uniformemente en D por funciones escalonadas.

Demostración:
Como D es compacto y f es continua en D, necesariamente f es uniformemente continua. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\, x, y \in D$ con $\|x - y\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow$ $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Sean $I_1, \ldots, I_k$ rectángulos en $\mathbb{R}^n$ tales que $\forall\, j = 1, \ldots, k$, $\forall\, x, y \in I_j$ se tenga $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$ y $D \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j$; ésta elección es posible dado que D es compacto en $\mathbb{R}^n$. Definamos la siguiente función escalonada:

$$\begin{array}{rcl} g_\varepsilon : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ x & \longmapsto & g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I_r \bigcap D \\ 0 & \text{si} \qquad x \notin D \end{cases} \end{array}$$

Se tiene entonces que $\forall\, x \in D$ es $\|g_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon$ luego $\|g_\varepsilon - f\|_D \leq \varepsilon$.

Definición 3.19 La función $g : \mathcal{J} = [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *lineal a trozos* si verifica que existe una partición $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ de $\mathcal{J}$ y existen $A_r, B_r \in \mathbb{R}$, $r = 0, \ldots, k-1$ tales que $g(x) = A_r x + B_r$ si $x \in (c_r, c_{r+1})$.

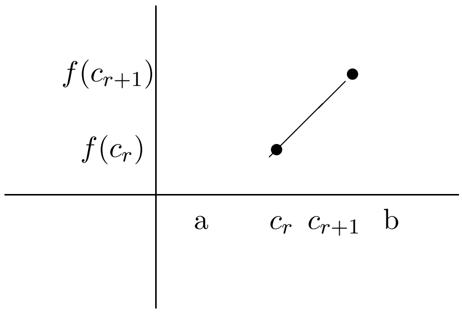


Toda función lineal a trozos es continua si se cumple que $\lim_{x \to c_r} g(x) = g(c_r)$ $\forall\, r = 0, \ldots, k-1$.

Teorema 3.16 Sea $f : \mathcal{J} = [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua donde $\mathcal{J} = [a,b]$ es compacto. Bajo estas hipótesis f puede aproximarse en $\mathcal{J}$ por una función lineal a trozos continua.

Demostración:
f es uniformemente continua. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, x, y \in \mathcal{J}$ con $x - y < \delta(\varepsilon)$ es $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se divide el intervalo $\mathcal{J} = [a,b]$ en subintervalos $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ de forma que $\forall\, r = 0, \ldots, k-1$ se cumpla que $|c_{r+1} - c_r| < \delta(\varepsilon)$, y se toma la función

$$f_\varepsilon(x) = f(c_r) + \frac{f(c_{r+1}) - f(c_r)}{c_{r+1} - c_r}(x - c_r) \quad \text{si } x \in (c_r, c_{r+1})$$



Es claro que $|f_\varepsilon - f|_I < \varepsilon$.

Definición 3.20 Sea $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función; se denomina *n-ésimo polinomio de Bernstein para la función* f y se denota por $B_n(x) = B_n(x, f)$ al polinomio

$$B_n(x,f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k}$$

Observación 3.8 El polinomio n-ésimo de Bernstein de una función constante es ella misma; en efecto, sea la función constante $f \equiv 1$, i.e., $f(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Se sabe que si $s, t \in \mathbb{R}$ entonces $(s+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^{n-k} t^k$; tomando $s = 1 - x$ y $t = x$ se deduce que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k \tag{3.1}$$

y por tanto, $f(x) = B_n(x, f)$. Si ahora es $f(x) = C$ con $C \in \mathbb{R}$ es $C = \sum_{k=0}^{n} C \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k \Longrightarrow f(x) = B_n(x, f)$

Algunas propiedades de combinatoria:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.2}$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n} \binom{n}{k} \tag{3.3}$$

$$\binom{n-2}{k-2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} \tag{3.4}$$

De la ecuación 3.1 para el caso $n-1$ resulta

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}$$

Multiplicando ahora los dos miembros por x y utilizando la ecuación 3.3 se tiene

$x = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

y así se deduce que si $f(x) = x$ entonces $B_n(x, f) = f(x)$.

Consideremos ahora la función $f(x) = x^2$; de la ecuación 3.1 y para el caso $n-2$ se obtiene

$$1 = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k}$$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad opr x^2 y utilizando la ecuación 3.4 se deduce

$$x^2 = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2}(1-x)^{n-(k+2)} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+2)(k+1)}{n(n-1)} \binom{n}{k+2} x^{k+2}(1-x)^{n-(k+2)} =$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \Longrightarrow$$

$$(n^2-n)x^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2-k) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \tag{3.5}$$

Finalmente, y utilizando el hecho de que $x = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ junto con la ecuación 3.5 se deduce que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x$$

y así el polinomio de Bernstein de la función $f(x) = x^2$ es
$B_n(x,f) = \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x.$

Teorema 3.17 (de aproximación de Bernstein) Si $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces $B_n(\cdot, f) \xrightarrow{u} f$ en $I = [0,1]$

Teorema 3.18 (de aproximación de Weierstrass) Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua; entonces $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, p_\varepsilon$ polinomio tal que $|p_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [a,b]$.

Definición 3.21 Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones; se definen las funciones *supremo* e *ínfimo* como sigue:

$$\begin{array}{rcl} \sup\{f,g\} : D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sup\{f,g\}(x) = \sup\limits_{x\in D}\{f(x), g(x)\} \\ \inf\{f,g\} : D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \inf\{f,g\}(x) = \inf\limits_{x\in D}\{f(x), g(x)\} \end{array}$$

Observación 3.9 $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ es $\sup\{a,b\} = \dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ e $\inf\{a,b\} = \dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

Teorema 3.19 (de aproximación de Stone) Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $\mathcal{L}$ una familia de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ que verifica:

1. $\forall\, f, g \in \mathcal{L} \quad \sup\{f,g\},\ \inf\{f,g\} \in \mathcal{L}$
2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x, y \in K$ con $x \neq y \quad \exists\, f \in \mathcal{L} \,|\, f(x) = a$ y $f(y) = b$

Entonces $\forall\, F : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua F puede aproximarse uniformemente en K por $\mathcal{L}$

Demostración:
Dados $\varepsilon > 0$ y $x \in K$ arbitrario, $\forall\, y \in K$ con $y \neq x$ es $F(x), F(y) \in \mathbb{R}$, luego por hipótesis $\exists\, g_{x,y} \in \mathcal{L} \,|\, g_{x,y}(x) = F(x)$ y $g_{x,y}(y) = F(y)$. Así, $\forall\, y \in K$ con $y \neq x \quad \exists\, U(y)$ entorno abierto de $y \,|\, z \in K \bigcap U(y) \Rightarrow g_{x,y}(z) > F(z) - \varepsilon$. Como K es compacto, existen $y_1, \ldots, y_r \in K$ tales que $K \subset U(y_1) \bigcup \cdots \bigcup U(y_r)$. Sea $h_x = \sup\{g_{x,y_1}, \ldots, g_{x,y_r}\} \in \mathcal{L}$; es claro que $h_x(x) = F(x)$ y además $\forall\, z \in K$ es $h_x(z) > F(z) - \varepsilon$. Existe $V(x)$ entorno abierto de x tal que $z \in K \bigcap V(x) \Rightarrow h_x(z) < F(z) + \varepsilon$. Como K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_s$ tales que $K \subset V_{x_1} \bigcup \cdots \bigcup V_{x_s}$. Sea $h = \inf\{h_{x_1}, \ldots, h_{x_s}\} \in \mathcal{L}$. Se tiene que $\forall\, z \in K$ es $h(z) < F(z) + \varepsilon$ y $h(z) > F(z) - \varepsilon$ luego $|h(z) - F(z)| < \varepsilon \quad \forall\, z \in K$.

Teorema 3.20 (de aproximación de Stone-Weirstrass) Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $\mathcal{A}$ una familia de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ que verifica:

1. $\exists\, e \in \mathcal{A} \,|\, e(x) = 1\ \forall\, x \in K$
2. $\forall\, f, g \in \mathcal{A},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in \mathcal{A}$
3. $f, g \in \mathcal{A} \Longrightarrow f \cdot g \in \mathcal{A}$
4. $\mathcal{A}$ separa puntos de K, i. e. $\forall\, x, y \in K$ con $x \neq y$ $\exists\, f \in \mathcal{A} \,|\, f(x) \neq f(y)$

entonces $\forall\, F : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua F puede aproximarse uniformemente en K por $\mathcal{A}$.

Demostración:
Por verificar 1., 2., 3. y 4. la familia $\mathcal{A}$ cumple las hipótesis del teorema de Stone; en efecto, $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \forall\, x, y \in K$ con $x \neq y$ $\exists f \in \mathcal{A} \,|\, f(x) \neq f(y)$; así $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha f(x) + \beta & = & a \\ \alpha f(y) + \beta & = & b \end{array} \right.$$

Tomemos entonces $g = \alpha f + \beta e \in \mathcal{A}$ que cumple $g(x) = a$ y $g(y) = b$. Además, $f \in \mathcal{A} \Rightarrow f^+, f^- \in \mathcal{A}$ luego $|f| = f^+ - f^- \in \mathcal{A}$ y por la observación 3.9 se tiene que $\sup\{f, g\}$, $\inf\{f, g\} \in \mathcal{A}\ \forall f, g \in \mathcal{A}$.
Consideremos ahora la familia $\mathcal{L}$ de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$ que pueden aproximarse uniformemente en K por $\mathcal{A}$, i.e., la adherencia en $(\mathcal{B}_{n1}(K), \|\cdot\|_k)$ de $\mathcal{A}$. Es claro que $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$; si se demuestra que $\mathcal{L}$ verifica la primera hipótesis del teorema de Stone 3.19, entonces se tendrá que $\forall F : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua F puede aproximarse uniformemente en K por $\mathcal{L}$.
Según la observación 3.9 es suficiente probar que si $h \in \mathcal{L}$ entonces $|h| \in \mathcal{L}$; sea $h \in \mathcal{L} \Longrightarrow |h|$ es continua en K. Además, $\exists\, (h_k) \subset \mathcal{A}$ tal que $\|h_k - h\|_K \longrightarrow 0$ si $k \to \infty$. Por otra parte, $\exists\, M > 0 \,|\, \|h\|_K < M$. Sea $k_0 \in \mathbb{N} \,|\, \forall k \geq k_0$ es $\|h_k\|_K < M + 1$ y consideremos la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [-(M+1), M+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & |t| \end{array}$$

Por el teorema de Weierstrass 3.18 $\exists\, p_\varepsilon$ polinomio en $t \in \mathbb{R}$ tal que $|\ |t| - p_\varepsilon(t)\ | < \frac{\varepsilon}{2}\quad \forall t \in [-(M+1), M+1]$. Como $\forall k \geq k_0$ y $\forall x \in K$ es $|h_k(x)| \in [-(M+1), M+1]$ se tiene que

$$|\ |h_k(x)| - p_\varepsilon(h_k(x))\ | \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in K,\ \forall k \geq k_0$$

Así,
$|\ |h(x)| - p_\varepsilon(h_k(x))\ | \leq |\ |h(x)| - |h_k(x)|\ | + |\ |h_k(x)| - p_\varepsilon(h_k(x))\ | \leq$
$|\ h(x) - h_k(x)\ | + |\ |h_k(x)| - p_\varepsilon(h_k(x))\ | \leq \varepsilon$.
y queda demostrado que $|h| \in \mathcal{L}$; téngase en cuenta que por verificar $\mathcal{A}$ la propiedad 3. es $p_\varepsilon(h_k) \in \mathcal{A}$.

Definición 3.22 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función y sean $f = (f_1, \ldots, f_m)$ sus componentes, donde $\forall j = 1, \ldots, m \quad f_j : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; se dice que $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es *una función polinomial de n variables de grado s* si es de la forma

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq s} a_{1\cdots n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

donde los $a_{1\cdots n} \in \mathbb{R}$
$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es *polinomial* si todas sus funciones componentes son polinomiales de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Toda función polinomial de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua.

Teorema 3.21 (de aproximación polinomial) $\forall f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua con K compacto f puede aproximarse uniformemente en K por funciones polinomiales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Sea $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua. Supongamos que es $f = (f_1, \ldots, f_m)$ con $f_j : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \ldots, m$ continua. Puesto que la familia $\mathcal{A}$ de las funciones polinomiales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ verifica las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass f_j puede aproximarse uniformemente en K por $p_{j\varepsilon} \quad \forall j = 1, \ldots, m$. Sea entonces $p_\varepsilon = (p_{1\varepsilon}, \ldots, p_{m\varepsilon})$; ésta es una función polinomial de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que aproxima a f uniformemente en K.

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua y $D^* \supset D$. ¿Bajo qué hipótesis se puede extender f a D?, i.e. ¿bajo qué condiciones $\exists\, g : D^* \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua tal que $g|_D = f$?

Ejemplo 3.10 Sea la función

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t} \end{array}$$

$\nexists$ extensión continua de f a $\mathbb{R}$.

3.9 Otros resultados: teoremas de Tietze, Arzelá-Ascoli

Lema 3.3 Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados y disjuntos $\Longrightarrow \exists\, \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua que verifica

1. $\varphi(x) = 0\ \forall\, x \in A$
2. $\varphi(x) = 1\ \forall\, x \in B$
3. $0 \leq \varphi(x) \leq 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

Demostración:
Sea

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)} \end{array}$$

Téngase en cuenta que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ es $d(x,A) + d(x,B) > 0$ y que las funciones

$$\begin{array}{rcl} d(\cdot\,, A) : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} d(\cdot\,, B) : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x,B) \end{array}$$

son continuas luego φ es también continua.

Teorema 3.22 (de Tietze) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada en el cerrado $D \Longrightarrow \exists\, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua que extiende a f, y además $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{|g(x)|\} = \sup\limits_{x \in D} \{|f(x)|\}$.

Demostración:
Por hipótesis es f acotada; sea $M = \sup\limits_{x \in D} \{|f(x)|\}$. Si es $M > 0$ entonces $g \equiv 0$ es extensión de f, luego supongamos que es $M > 0$. Consideremos los

conjuntos $A_1 = \{x \in D \mid f(x) \leq -\frac{M}{3}\}$ y $B_1 = \{x \in D \mid f(x) \geq \frac{M}{3}\}$ que son cerrados y disjuntos. Aplicando el lema anterior $\exists\, \varphi_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

1. $\varphi_1(x) = -\frac{M}{3}\, \forall\, x \in A_1$
2. $\varphi_1(x) = \frac{M}{3}\, \forall\, x \in B_1$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad -\frac{M}{3} \leq \varphi_1(x) \leq \frac{M}{3}$

Consideremos la función $f_2 = f - \varphi_1$ que es continua en D; es claro que $\sup\limits_{x \in D}\{|f_2(x)|\} \leq \frac{2M}{3}$; consideramos ahora los conjuntos
$A_2 = \{x \in D \mid f_2(x) \leq -\frac{2M}{9}\}$ y $B_2 = \{x \in D \mid f_2(x) \geq \frac{2M}{9}\}$
que son cerrados y disjuntos. Entonces $\exists\, \varphi_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

1. $\varphi_2(A_2) = -\frac{2M}{9}$
2. $\varphi_2(B_2) = \frac{2M}{9}$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \; -\frac{2M}{9} \leq \varphi_2(x) \leq \frac{2M}{9}$

Sea $f_3 = f_2 - \varphi_2 = f - (\varphi_1 + \varphi_2)$; se tiene que $\sup\limits_{x \in D}\{|f_3(x)|\} \leq \left(\frac{2}{M}\right)^2 M$ y que f_3 es continua en D. Se construye así una sucesión de funciones continuas $(\varphi_k) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple
$|f(x) - [\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_k(x)]| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k M \quad \forall\, x \in D$ y $\forall\, k \in \mathbb{N}$; además
$|\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \forall\, k \in \mathbb{N}$. Consideremos la función
$g_k = \varphi_1 + \cdots + \varphi_k$ que es continua; es $g_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y se cumple que si $p > q$ entonces

$$|g_p(x) - g_q(x)| = |\varphi_{q+1}(x) + \cdots + \varphi_p(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^q M \left[1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1-q}\right]$$

$\Longrightarrow |g_p(x) - g_q(x)| < \left(\frac{2}{3}\right)^q M \quad \forall\, p \geq q, \forall\, x \in D \Longrightarrow (g_k)$ es uniformemmente de Cauchy luego $\exists\, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(g_k) \xrightarrow{u} g$. Es claro que g extiende a f; en efecto, $\forall\, x \in D\, \forall\, k \in \mathbb{N}$ es $|f(x) - g_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k M \Rightarrow f(x) = g(x)\; \forall, x \in D$. Por otra parte, $|g_k(x)| = |\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{3}M\left[1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right] \Rightarrow |g(x)| \leq M\; \forall\, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n}\{|g(x)|\} \leq M$.
Ahora bien, como $\sup\limits_{x \in D}\{|f(x)|\} = M$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ y es $g|_D = f \Longrightarrow$
$\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n}\{|g(x)|\} = M$.

Teorema 3.23 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua y acotada con D cerrado $\Longrightarrow \exists\, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continua que extiende a f tal que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{\|g(x)\|\} \leq \sqrt{n} \sup\limits_{x \in D}\{\|f(x)\|\}$.

Demostración:
Si es $f = (f_1, \ldots, f_m)$ con $f_j : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada, $\forall\, j = 1, \ldots, m \quad \exists\, g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_j|_D = f_j$ y $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \{|g_j(x)|\} = \sup\limits_{x \in D}\{|f(x)|\}$; basta pues considerar la función $g = (g_1, \ldots, g_m)$.

En lo que sigue consideraremos $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y el espacio $\mathcal{C}_{nm}(K) = \{f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ es continua }\} = \mathcal{BC}_{nm}(K)$ ya que K es compacto.

Definición 3.23 Se dice que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{nm}(K)$ es *acotado (o uniformemente acotado)* si $\exists\, M > 0$ tal que $\|f\|_K \leq M \quad \forall\, f \in \mathcal{F}$.

Observación 3.10 $\forall\, f \in \mathcal{C}_{nm}(K)$ es f uniformemente continua, i.e., $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon, f) > 0 \quad |\, \forall\, x, y \in K$ con $\|x - y\| < \delta(\varepsilon, f)$ es $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Observación 3.11 Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{nm}(K)$ es finito, digamos, por ejemplo, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ entonces $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall\, x, y \in K$ con $\|x - y\| < \delta(\varepsilon)$ es $\|f_j(x) - f_j(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, j = 1, \ldots, r$.

Definición 3.24 Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{nm}(K)$; se dice que es *uniformemente equicontinuo en K* si $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \,|\, \forall\, x, y \in K$ con $\|x - y\| < \delta$ es $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathcal{F}$.

En general, las familias infinitas de $\mathcal{C}_{nm}(K)$ no son uniformemente equicontinuas en K.

Teorema 3.24 (de Arzelá-Ascoli) Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_{nm}(K)$; son equivalentes:

i) $\mathcal{F}$ es acotado y uniformemente equicontinuo en K.

ii) Cada sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en K.

Demostración:
ii) $\Longrightarrow$ *i)*
Si $\mathcal{F}$ no es acotado $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \exists\, f_k \in \mathcal{F} \,|\, \|f_k\|_K \geq k$. Así la sucesión $(f_k) \subset$

$\mathcal{F}$ no admite subsucesión uniformemente convergente en K, lo cual es una contradicción. Si $\mathcal{F}$ no es uniformemente equicontinuo en K entonces $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \,|\,$ para $\delta = 1 \quad \exists\, x_1, y_1 \in K$ con $\|x_1 - y_1\| < 1$ y $\exists\, f_1 \in \mathcal{F}$ tal que $\|f_1(x_1) - f_1(y_1)\| > \varepsilon_0$; para $\delta = \frac{1}{2}\, \exists\, x_2, y_2 \in K$ con $\|x_2 - y_2\| < \frac{1}{2}$ y $\exists\, f_2 \in \mathcal{F}$ tal que $\|f_2(x_2) - f_2(y_2)\| > \varepsilon_0$, y así sucesivamente para $\delta = \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_k, y_k \in K$ con $\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k}$ y $\exists\, f_k \in \mathcal{F}$ tal que $\|f_k(x_k) - f_k(y_k)\| > \varepsilon_0$. Consideremos pues la sucesión $(f_k) \subset \mathcal{F}$; ésta no admite subsucesiones uniformemente convergentes en K, lo cual es absurdo. En definitiva, $\mathcal{F}$ es acotado y uniformemente equicontinuo en K.

$i) \Longrightarrow ii)$

Sea $(f_k) \subset \mathcal{F}$. Como $K \subset \mathbb{R}^n$, $\exists\, C \subset K$ siendo C numerable y denso. Supongamos que $C = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$; es claro que la sucesión $(f_k(x_1))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ es acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass 2.2 admite una subsucesión convergente, digamos $(f_k^1(x_1))$. Ahora, $(f_k^1(x_2))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ es acotada, luego por el mismo teorema 2.2 admite una subsucesión convergente, $(f_k^2(x_2))$; ahora $(f_k^2(x_3)) \subset \mathbb{R}^m$ es acotada, y así sucesivamente, se construyen sucesiones convergentes

$$\begin{array}{cccccc}
f_1^1(x_1), & f_2^1(x_1), & \cdots & f_k^1(x_1), & \cdots & \longrightarrow \\
f_1^2(x_2), & f_2^2(x_2), & \cdots & f_k^2(x_2), & \cdots & \longrightarrow \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
f_1^k(x_k), & f_2^k(x_k), & \cdots & f_k^k(x_k), & \cdots & \longrightarrow
\end{array}$$

Consideremos la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ siendo $g_k = f_k^k$. Es claro que $(g_k) \subset (f_k)$; además (g_k) converge uniformemente en K.
$\forall\, x_j \in C$ es $(g_k(x_j))$ convergente en $\mathbb{R}^m$.

$$\|g_p(x) - g_q(x)\| \leq \|g_p(x) - g_p(x_i)\| + \|g_p(x_i) - g_q(x_i)\| + \|g_q(x_i) - g_q(x)\|$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \,|\, x, y \in K,\ \|x - y\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, f \in \mathcal{F}$.
Tomemos el siguiente recubrimiento abierto del compacto K,

$$\{B(x_j, \delta(\varepsilon))\}_{x_j\in C}$$

el cual admite un subrrecubrimiento finito, digamos $\{y_1, \ldots, y_r\} \subset C$. Dado $x \in K$, $\exists\, y_j \in \{y_1, \ldots, y_r\} \,|\, \|x - y_j\| < \delta(\varepsilon)$. La sucesión $(g_k(y_1))$ es convergente, luego es de Cauchy, $\exists\, k_1 \in \mathbb{N}, |\, \forall\, p, q \geq k_1$ es $\|g_p(y_1) - g_q(y_1)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\vdots$

$(g_k(y_r))$ es convergente, luego de Cauchy, $\exists\, k_r \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, p, q \geq k_r$,
$\|g_p(y_r) - g_q(y_r)\| < \frac{\varepsilon}{3}$

Sea $k = \max\{k_1, \ldots, k_r\}$, $\forall\, p, q \geq k$ es

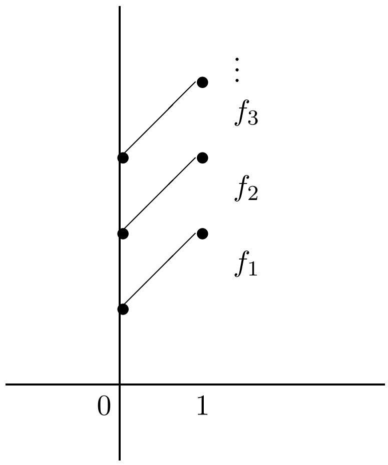
$$\|g_p(x) - g_q(x)\| \leq \|g_p(x) - g_p(y_j)\| + \|g_p(y_j) - g_q(y_j)\| + \|g_q(y_j) - g_q(x)\| < \varepsilon$$

Por tanto, aplicando el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme 3.13 resulta que (f_k) contiene al menos una subsucesión uniformemente convergente en K.

Ejemplo 3.11 Estudiar en los siguientes casos si es o no es aplicable el teorema de Arzelá-Ascoli

1. $f_n(x) = x + n \qquad x \in [0,1] \quad n \in \mathbb{N}$
2. $f_n(x) = x^n \qquad x \in [0,1] \quad n \in \mathbb{N}$
3. $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + (x-n)^2} \qquad x \in [0, +\infty) \quad n \in \mathbb{N}$

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ es f_n continua y $[0,1] \subset \mathbb{R}$ es compacto.

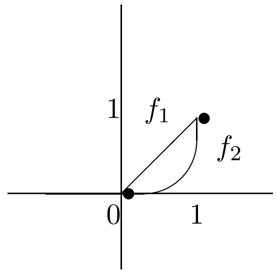


   $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in}$ es uniformemente equicontinuo en $[0,1]$; en efecto,

   $$\|f_n(x) - f_n(y)\| = |x + n - (y + n)| = |x - y| < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ si } |x - y| < \varepsilon$$

   Sin embargo, $\mathcal{F}$ no es acotado, es decir, $\nexists\, M > 0 \mid \|f_n\|_{[0,1]} < M$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Así pues, no se puede aplicar el teorema para deducir que ha de tener alguna subsucesión uniformemente convergente en $[0,1]$.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ es f_n continua y $[0,1] \subset \mathbb{R}$ compacto.



Es claro que $\forall n \in \mathbb{N}$ es $\|f_n\|_{[0,1]} \leq 1$ luego hay acotación uniforme; sin embargo, la familia no es uniformemente equicontinua ya que de lo contrario por el teorema anterior 3.24 existiría $(f_{n_p}) \subset (f_n)$ subsucesión uniformemente convergente en $[0,1]$ que necesariamente habría de hacerlo a la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

que no es continua. Esta conclusión se intuye observando el siguiente resultado:
$|x^n - y^n| = |x-y||x^{n-1} + yx^{n-2} + \cdots + y^{n-1}|$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$ es $\|f_n\|_{[0,\infty)} \leq 1$ luego es $\mathcal{F}$ acotado; por otra parte es también uniformemente equicontinuo; en efecto,

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left| \frac{1}{1+(x-n)^2} - \frac{1}{1+(y-n)^2} \right| =$$

$$\left| \frac{y^2 - x^2 + 2nx - 2ny}{[1+(x-n)^2][1+(y-n)^2]} \right| = \frac{|y-x||y+x-2n|}{[1+(x-n)^2][1+(y-n)^2]} \leq$$

$$|y-x| \frac{|y-n| + |x-n|}{[1+(x-n)^2][1+(y-n)^2]} \leq$$

$$|y-x| \left(\frac{|y-n|}{1+(y-n)^2} + \frac{|x-n|}{1+(x-n)^2} \right) \leq |y-x|$$

donde se ha tenido en cuenta que $\dfrac{\alpha}{1+\alpha^2} \leq \dfrac{1}{2} \qquad \forall \alpha > 0$

Sin embargo, no admite subsucesiones uniformemente convergentes. Téngase en cuenta que $\forall x > 0$ fijo $(f_n(x)) \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$ y que $\|f_n\|_{[0,\infty)} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Esto no contradice el teorema de Arzelá-Ascoli 3.24 dado que $[0,\infty)$ no es compacto y el teorema no es aplicable.

4

DIFERENCIACIÓN EN $\mathbb{R}^n$

4.1 La diferencial en $\mathbb{R}^n$

Definición 4.1 Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real; A abierto y $t_0 \in A$. Se dice que f es *derivable* en t_0 si existe el siguiente límite:

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

o equivalentemente si existe un número real $f'(t_0)$ tal que

$$\lim_{t \to t_0} \left(\frac{f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)}{t - t_0} \right) = 0 \quad \underset{t - t_0 = h}{\overset{\Longleftrightarrow}{\uparrow}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(t_0 + h) - f(t_0) - f'(t_0)(h)|}{|h|} = 0$$

Por tanto, f es derivable en t_0 si y sólo si existe una aplicación lineal $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(t_0 + h) - f(t_0) - u(h)|}{|h|} = 0$$

Se generaliza esta definición a funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Definición 4.2 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función vectorial de variable vectorial, con A abierto y sea $x_0 \in A$. Se dice que f es *diferenciable* en $x_0 \in A$ si existe una aplicación lineal $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x_o + h) - f(x_0) - u(h)\|}{\|h\|} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Notación 4.1 En caso de existir se denota por $Df(x_0)$ a dicha aplicación lineal u.

Definición 4.3 Si $\forall\, x \in A$ es f diferenciable en x entonces se dice que es f *diferenciable en* A

Proposición 4.1 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, A abierto y $x_0 \in A$. Si f es diferenciable en x_0 entonces la aplicación lineal $Df(x_0)$ es única.

Demostración:
Supongamos que $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ son dos aplicaciones lineales que cumplen la condición de diferenciabilidad. Sea $w = v - u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Se tiene que

$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0$ tal que $\dfrac{\|w(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon$ si $0 < \|h\| < \delta$; en efecto, $\forall\,h \in \mathbb{R}^n$ es
$$\frac{w(h)}{\|h\|} = \frac{v(h)-u(h)}{\|h\|} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-u(h)}{\|h\|} - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-v(h)}{\|h\|};$$

así pues es, claro.

Por otro lado, $\forall\,x \in \mathbb{R}^n - \{0\}\ \dfrac{\delta x}{3\|x\|} \in \mathbb{R}^n$ y $\left\|\dfrac{\delta x}{3\|x\|}\right\| < \delta \Longrightarrow \dfrac{\left\|w\left(\dfrac{\delta x}{3\|x\|}\right)\right\|}{\left\|\dfrac{\delta x}{3\|x\|}\right\|} < \varepsilon$

y así $\|w(x)\| < \varepsilon\|x\| \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \|w\| \leq \varepsilon$
En definitiva, al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, se tiene que $\|w\| = 0$
$\Longleftrightarrow w = v - u = 0 \Longleftrightarrow u = v$

Proposición 4.2 f diferenciable en $x_0 \Longrightarrow f$ continua en x_0

Demostración:
$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0) + Df(x_0)(x) - Df(x_0)(x_0) \Longrightarrow$
$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ si $\|x - x_0\| < \delta$
Téngase en cuenta que $Df(x_0)$ es lineal y continua y que f es diferenciable en x_0, luego $\lim\limits_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0)\| = 0$

Definición 4.4 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en A; se denomina *aplicación diferencial de f en A* a la función

$$\begin{array}{rcl} Df : A \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x & \longmapsto & Df(x) \end{array}$$

Ejemplos 4.1 Veamos algunos ejemplos de funciones:

1. Sea $c_b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función constante definida por $c_b(x) = b \in \mathbb{R}^m\,\forall\,x \in \mathbb{R}^n$ entonces $Dc_b(x) = 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \forall\,x \in \mathbb{R}^n$; en efecto, es claro que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|c_b(x+h) - c_b(x)\|}{\|h\|} = 0$ luego $Dc_b(x) = 0$

2. Sea $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal, i. e. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ entonces $\forall\,x \in \mathbb{R}^n$ es $Du(x) = u$; en efecto, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|u(x+h) - u(x) - u(h)\|}{\|h\|} = 0$ luego
$$\begin{array}{rcl} Du : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, R^m) \\ x & \longmapsto & Du(x) = u \end{array}$$

Proposición 4.3 Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones, A abierto y $x_0 \in A$ entonces f, g diferenciables en $x_0 \Longrightarrow \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es $\alpha f + \beta g$ diferenciable en x_0 y además $D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0)$

Demostración:
Sean $w = \alpha u + \beta v$ y $s = \alpha f + \beta g$ donde $u = Df(x_0)$ y $v = Dg(x_0)$ y veamos que $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\|s(x) - s(x_0) - w(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$; en efecto,
$\|s(x) - s(x_0) - w(x - x_0)\| =$
$\|\alpha[f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)] + \beta[g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)]\| \leq$
$|\alpha|\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\| + |\beta|\|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)\|$
luego es claro.

Proposición 4.4 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función, A abierto y $x_0 \in A$; denotemos $f = (f_1, \ldots, f_m)$ con $\forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \quad f_j : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_j = p_j \circ f$
f es diferenciable en $x_0 \Longleftrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, m$ es f_j diferenciable en x_0
Además $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tiene por aplicaciones componentes las aplicaciones diferenciales de las componentes de f i. e.
$\forall\, j = 1, \ldots, m$ es $(Df(x_0))_j = Df_j(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, es decir,

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} Df_1(x_0) \\ \vdots \\ Df_m(x_0) \end{pmatrix}$$

Demostración:
Basta considerar las siguientes desigualdades:

$$|y_j| \leq \|y\| \leq \sqrt{m} \sup_{1 \leq i \leq m} \{|y_i|\} \quad \forall\, j = 1, \ldots, m \quad \forall\, y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

en efecto, $\displaystyle\frac{|f_j(x) - f_j(x_0) - [Df(x_0)]_j(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} \leq \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$
$\forall\, j = 1, \ldots, m$ donde $[Df(x_0)]_j \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$ denota la fila j-ésima de la matriz $Df(x_0)$, luego es claro que si f es diferenciable en x_0 entonces f_j también.

Recíprocamente, si tomamos $Df(x_0) = \begin{pmatrix} Df_1(x_0) \\ \vdots \\ Df_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{x - x_0\|} \leq \sqrt{m} \sup_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{|f_j(x) - f_j(x_0) - Df_j(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} \right\}$$

y así la otra implicación es clara también.

Proposición 4.5 Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donde $m \geq 1$ una función vectorial de variable real; $\forall\, j = 1, \ldots, m$ sea $f_j : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la componente $j-$ésima de f, i. e. $f_j = p_j \circ f$;
f es diferenciable en $a \in A \Longleftrightarrow f$ es derivable en $a \in A$

Demostración:

$$\lim_{t\to a} \frac{\|f(t) - f(a) - Df(a)(t-a)\|}{|t-a|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to a} \left\| \frac{f(t) - f(a) - Df(a)(t-a)}{t-a} \right\| \Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to a} \left\| \frac{f(t) - f(a) - (t-a)Df(a)(1)}{t-a} \right\| = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a) - (t-a)Df(a)(1)}{t-a} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} - Df(a)(1) = 0 \Longleftrightarrow Df(a)(1) = \lim_{t\to a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} = f'(a)$$
siendo $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$; además,
$Df(a)(h) = hDf(a)(1) = hf'(a) \quad \forall\, h \in \mathbb{R}$ luego $Df(a) = f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$
Téngase en cuenta que $\forall\, t \in A \quad f(t) - f(a) \in \mathbb{R}^m$ y $t - a \in \mathbb{R}$
Recordemos asimismo que existe un isomorfismo $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^m$ que viene dado por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \\ x & \longmapsto & u_x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ h & \longmapsto & u_x(h) = hx \end{array} \end{array}$$

4.2 Derivadas parciales. Jacobiano

Definición 4.5 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con A abierto, y sean $x_0 \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$; se denomina *derivada de f en x_0 según la dirección de h* al valor del siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} = D_h f(x_0) \in \mathbb{R}^m$$

Definición 4.6 En los mismos términos que en la definición anterior, si
$h \in \mathbb{R}^n$ es unitario, i. e., $\|h\| = 1$ entonces se habla de *derivada direccional de f en x_0 según la dirección de h*

Proposición 4.6 Si f es diferenciable en x_0 entonces $D_h f(x_0) = Df(x_0)(h)$

Demostración:
Consideremos la función $\begin{array}{rcl} \varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = x_0 + th \end{array}$

donde $\varepsilon > 0$ cumple que $\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ es $x_0 + th \in A$; entonces

$D_h f(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(f\circ\varphi)(t) - (f\circ\varphi)(0)}{t} = (f\circ\varphi)'(0) = [D(f\circ\varphi)(0)](1) = [Df(\varphi(0))\circ D\varphi(0)](1) = Df(x_0)(D\varphi(0)(1)) = Df(x_0)(\varphi'(0)) = Df(x_0)(h)$

Definición 4.7 Sea ahora $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ la base canónica; se sabe que $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$; sea $c_j = Df(x_0)(e_j) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$ entonces si $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ i. e. $h = h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n$ resulta $Df(x_0)(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j h_j \in \mathbb{R}$ por la linealidad de $Df(x_0)$. El número $Df(x_0)(e_j)$ recibe el nombre de *derivada parcial de f en el punto x_0 respecto a la coordenada j-ésima*; se trata de una derivada direccional.

Notación 4.2 $Df(x_0)(e_j) = D_{e_j} f(x_0) = D_j f(x_0) = \dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)$

$Df(x_0) \sim (D_1 f(x_0) \cdots D_n F(x_0))$ luego

$Df(x_0)(h) = (D_1 f(x_0) \cdots D_n f(x_0)) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

Definición 4.8 En los términos anteriores, se denomina *aplicación derivada parcial j-ésima* a la función

$$\begin{array}{rcl} D_j f : A \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & D_j f(x) \end{array}$$

Definición 4.9 Si $a = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ y $A(\hat{a}) = \{x_j \in \mathbb{R} \,|\, (a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in A\}$ entonces se llama *aplicación parcial de f en el punto a con respecto a la coordenada j-ésima* a la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f_a : A(\hat{a}) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x_j & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

y se tiene que $f_a'(a_j) = D_j f(a)$

Consideraciones algebraicas

Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, entonces $V^* = L(V, \mathbb{K}) = \{h : V \longrightarrow \mathbb{K} \,|\, h \text{ es lineal }\}$ denota su dual; en particular, si $V = \mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ luego $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Además, si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V es entonces $\{v_1^*, \dots, v_n^*\} \subset V^*$ su base dual, que viene caracterizada por

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

donde δ_{ij} es la llamada *delta de Kronëcker*
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a \in A$ abierto y sea $\forall\, j = 1, \dots, n$ $\quad \begin{array}{rcl} p_j : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_j \end{array}$ la j-ésima proyección que es lineal,
i. e. $p_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$

Definición 4.10 Sea $\forall\, j = 1, \dots, n \qquad dx_j = Dp_j(x) = p_j$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario. Así,
$Df(a)(h) = D_1f(a)h_1 + \cdots + D_nf(a)h_n = D_1f(a)dx_1(h) + \cdots + D_nf(a)dx_n(h) = (D_1f(a)dx_1 + \cdots + D_nf(a)dx_n)(h) \Longleftrightarrow Df(a) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_n}dx_n$
ya que $\forall\, j = 1, \dots, n$ es $h_j = p_j(h) = Dp_j(x)(h) = dx_j(h)$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario.
en definitiva, $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ es una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ que es precisamente la base dual de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ ya que $dx_j(e_i) = p_j(e_i) = \delta_{ij}$

Definición 4.11 Recordemos que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en $a \in A$ con A abierto y $f = (f_1, \dots, f_m)$ donde $\forall\, i = 1, \dots, m \quad f_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente i-ésima de f entonces $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y además la matriz asociada a la aplicación lineal $Df(a)$ con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es

$$(D_if_j(a))_{\substack{j = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, m}}$$

en efecto, se sabe por la proposición 4.4 que la fila i-ésima de la matriz asociada a $Df(a)$ en dichas bases coincide con la $Df_i(a)$; ahora bien, como se ha visto la matriz asociada a $Df_i(a)$ es $(D_1f_i(a) \cdots D_nf_i(a))$; en definitiva,

$$Df(a) = \begin{pmatrix} D_1f_1(a) & \cdots & D_nf_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1f_m(a) & \cdots & D_nf_m(a) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

es decir, si $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$Df(a)(h) = \begin{pmatrix} Df_1(a) \\ \vdots \\ Df_m(a) \end{pmatrix} (h) = \begin{pmatrix} Df_1(a)(h) \\ \vdots \\ Df_m(a)(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} D_j f_1(a) h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} D_j f_m(a) h_j \end{pmatrix}$$

A la matriz (*) se le denomina *matriz jacobiana de la función f en el punto a* y se le denota por $Df(a) = \left(\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a)\right) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ En el caso en que $m = n$ se llama *jacobiano* al determinante de la matriz jacobiana. Si $m = 1$ la matriz jacobiana de f en a se denomina *vector gradiente de f en a* y se denota por $\nabla f(a) = (D_1 f(a) \cdots D_n f(a)) \in \mathbb{R}^n$. En este caso se tiene que $\forall\, h \in \mathbb{R}^n$ es $D_h f(a) = Df(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h = \|\nabla f(a)\| \|h\| \cos\alpha$ siendo α el ángulo que forman los vectores $\nabla f(a)$ y h. Consecuentemente es claro que la derivada direccional (h unitario) de f en a será máxima en la dirección del vector gradiente y mínima en toda dirección perpendicular al mismo.

Definición 4.12 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función; se dice que f *es continuamente diferenciable en A* o equivalentemente que f es diferenciable de clase 1 en A y se denota por $f \in \mathcal{C}^1(A)$ si f es diferenciable en A y además

$$\begin{aligned} Df : A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ x &\longmapsto Df(x) \end{aligned}$$

es continua

Notación 4.3 $\mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^m) = \{f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f \in \mathcal{C}^1(A)\}$ es un espacio vectorial con las operaciones habituales.

4.3 Existencia de la diferencial

Teorema 4.1 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con A abierto y $a \in A$; entonces

i) f diferenciable en $a \in A \Longrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, n \quad \exists\, D_j f(a)$ y $\forall\, h \in \mathbb{R}^n$ es
   (1) $\quad Df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a)(h_j)$

ii) Si existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in B(a,\delta) \quad \exists\, D_j f(x) \quad \forall\, j = 1\ldots,n$ y $D_j f(x) : B(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $a \quad \forall\, j = 1,\ldots,n$ entonces f es diferenciable en a y se verifica (1)

Demostración:
i) f diferenciable en $a \Longrightarrow \exists\, Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)|}{\|h\|} = 0$$

que implica $\forall\, j = 1,\ldots,n \quad \displaystyle\lim_{h_j\to 0} \frac{|f(a+h_je_j) - f(a) - Df(a)(e_j)h_j|}{|h_j|} = 0 \Longleftrightarrow$
$\displaystyle\lim_{h_j\to 0} \left| \frac{f(a+h_je_j) - f(a)}{h_j} - Df(a)(e_j) \right| = 0 \quad \forall\, j = 1,\ldots,n \Longleftrightarrow$
$\displaystyle\lim_{h_j\to 0} \frac{f(a+h_je_j) - f(a)}{h_j} = Df(a)(e_j) \quad \forall\, j = 1,\ldots,n$ y así
$\forall\, j = 1,\ldots,n$ existe $D_jf(a)$ y además $D_jf(a) = Df(a)(e_j)$.

ii) Sea $\delta > 0$ tal que $\forall\, x \in B(a,\delta) \quad \exists\, D_j f(x)$ y
$D_jf : B(a,\delta) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es continua en $a \quad \forall\, j = 1,\ldots,n$ entonces
$\forall\, x \in B(a,\delta)$ es
$f(x)-f(a) = f(x_1,\ldots,x_n)-f(a_1,\ldots,a_n) = f(x_1,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_{n-1},a_n)+$
$f(x_1,\ldots,x_{n-1},a_n)-f(x_1,\ldots,x_{n-2},a_{n-1},a_n)+f(x_1,\ldots,x_{n-2},a_{n-1},a_n)-\cdots+$
$f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(x_1,\ldots,x_{i-1},a_i,\ldots,a_n)+\cdots+f(x_1,x_2,a_3,\ldots,a_n)-$
$f(x_1,a_2,\ldots,a_n) + f(x_1,a_2,\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_n) = g_n(x_n) - g_n(a_n) + \cdots +$
$g_1(x_1) - g_1(a_1)$ siendo
$\forall\, i = 1,\ldots,n \quad g_i(t) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n)$ una función real de variable real derivable en un entorno de a_i.
Por el teorema del valor medio $\exists\, \xi_i \in [a_i,x_i] \,|\, g_i(x_i) - g_i(a_i) = (x_i - a_i)g_i'(\xi_i)$
donde $g_i'(\xi_i) = D_if(x_1,\ldots,x_{i-1},\xi_i,a_{i+1},\ldots,a_n) \Longrightarrow$
$f(x)-f(a) = (x_n-a_n)D_nf(x_1,\ldots,x_{n-1}\xi_n)+\cdots+(x_i-a_i)D_if(x_1,\ldots,x_{i-1},\xi_i,a_{i+1},\ldots,a_n)+$
$\cdots + (x_1 - a_1)D_if(\xi_1,a_2,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n}(D_if(a) + \varepsilon_i(x))(x_i - a_i)$ donde
$\forall\, i = 1,\ldots,n \quad \varepsilon_i(x) \longrightarrow 0$ si $x \to a$ ya que
$D_if(x_1,\ldots,x_{i-1},\xi_i,a_{i+1},\ldots,a_n) - D_if(a) = \varepsilon_i(x) \longrightarrow 0$ si $x \to a$.

En definitiva,
$f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} D_if(a)(x_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x)(x_i - a_i) \Longrightarrow$

$$\frac{|f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} D_if(a)(x_i - a_i)|}{\|x - a\|} \leq \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i(x)| \frac{|x_i - a_i|}{\|x - a\|} \leq \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i(x)| \longrightarrow 0$$

si $x \to a \Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - \sum\limits_{i=1}^{n} D_i f(a)(x_i - a_i)|}{\|x - a\|} = 0 \Longrightarrow$$

f es diferenciable en a y además $\forall\, i = 1, \ldots, n$ es $Df(a)(e_i) = D_i f(a)$

Proposición 4.7 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con A abierto. $f \in \mathcal{C}^1(A)$ (f es diferenciable de clase 1 en A)$\Longleftrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, n \quad \exists\, D_j f(x) \quad \forall\, x \in A$ y $D_j f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es continua $\forall\, j = 1, \ldots, n$

Ejemplos 4.2 Sea la función

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

Puede probarse que existen las derivadas parciales en $(0, 0)$ y son nulas, es decir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, y sin embargo, f no es diferenciable en $(0, 0)$ ya que ni tan siquiera es continua en dicho punto. Este es un ejemplo de una función que tiene derivadas parciales en un punto, es decir, existe la matriz jacobiana en dicho punto, y sin embargo no es diferenciable en él.

Ejemplos 4.3 Sea la función

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

En este caso existen las derivadas parciales en $(0, 0)$, de hecho existen en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y además es f diferenciable en $(0, 0)$, sin embargo, ni $D_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ni $D_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, luego f no es diferenciable de clase 1 en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos 4.4 Sea la función

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy = 0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

f no es continua en $(0,0)$, y por tanto, tampoco es diferenciable en $(0,0)$; no obstante, existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$; en efecto,

$$D_1 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \quad \text{y}$$

$$D_2 f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

Así pues, la aplicación lineal cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es $Df(0,0) = (0 \quad 0)$ es la candidata a aplicación diferencial. Habría que

4.4 La regla de la cadena y teoremas del valor medio

4.5 Sucesiones de aplicaciones diferenciales

4.6 Diferenciales de orden superior

4.7 Teoremas de la función inversa y de la función implícita

4.8 Teorema de Taylor

4.9 Extremos libres y condicionados