

1. NOTIUNI GENERALE.

1.1 Obiectul și importanța topografiei în domeniul tehnic.

Nevoia de cunoaștere, caracteristica esențială a omului, dar mai ales necesitatea ca suma cunoștințelor acumulate în timp să fie transmisă generațiilor viitoare s-a făcut simțită și în domeniul măsurătorilor terestre atât prin găsirea modalităților de reprezentare a unor zone prin care oamenii au călătorit cât și a celor în care își desfășurau activitatea în mod curent. Sunt cunoscute necesitățile omului pentru satisfacerea cerințelor militare, economice, de navigație, religioase, etc.

Evoluția în timp a măsurătorilor terestre a fost condiționată de dezvoltarea științelor exacte - matematica și fizica. Instrumentul teoretic al măsurătorilor terestre este furnizat de matematica prin principiile și metodele de prelucrare a măsurătorilor, instrumentele necesare observațiilor sunt construite pe baza cunoștințelor de mecanică, optică și electronică, astronomia permite obținerea datelor primare necesare prelucrării rețelelor de sprijin pe suprafețe mari și stabilirea formei și dimensiunilor Pământului, pentru ca la sfârșit să obținem imaginea micșorată a zonei de interes prin intermediul cunoștințelor de cartografie.

Respectarea cerințelor privitoare la fidelitatea reprezentării pe hartă a formelor naturale existente în teren nu se poate face fără legătura cu geografia, geologia și geomorfologia. Cunoașterea geografiei permite o tratare corespunzătoare a elementelor naturale ale terenului cum ar fi relieful, vegetația, natura solurilor, hidrografia, în timp ce apelând la geologie și geomorfologie se ajunge la formele reliefului și legile de modificare a lor.

Domeniul măsurătorilor terestre se poate împărți în următoarele ramuri principale:

- **geodezia** - care se ocupă cu studiul, măsurarea și determinarea formei și dimensiunilor globului pământesc sau a unor porțiuni întinse ale acestuia. Pentru a se realiza acest lucru, pe suprafața terestră se determină coordonatele spațiale ale unor puncte care prin unirea din aproape în aproape determină vârfurile unor triunghiuri. Odată determinate coordonatele geografice sau rectangulare ale acestor puncte, acestea devin puncte de sprijin pentru toate celelalte măsurători terestre. Totalitatea acestor puncte alcatuiește rețeaua de puncte geodezice. Datorită suprafeței mari pe care se desfășoară aceste lanțuri de triunghiuri, este necesar ca la prelucrarea măsurătorilor să se țină seama de influența curbării Pământului.
- **topografia** - care pornind de la datele furnizate de geodezie (coordoanatele unor puncte într-un sistem unitar, care însă nu delimitează detaliile din teren), să stabilească poziția relativă a obiectelor din teren și să le reprezinte pe hărți sau planuri. Caracteristic pentru lucrările topografice este că acestea se desfășoară pe suprafețe relativ mici în care influența curbării Pământului este considerată neglijabilă.
- **fotogrametria** - poate fi considerată ca o tehnică nouă în măsurătorile terestre în sensul că poziția unor detalii se obține direct pe fotografii speciale, metrice, numite fotograme, executate în anumite condiții, fie din avion (denumite fotograme aeriene) fie de la nivelul solului (fotograme terestre). Ca și topografia, exploatarea fotogramelor se face utilizând rețeaua de sprijin creată cu ajutorul geodeziei.

Prin produsele pe care le furnizează - hărți și planuri - măsurătorile terestre sunt indispensabile diverselor domenii de activitate, indiferent de stadiul de execuție al unei lucrări; sunt folosite la construcția și sistematizarea teritorială, la organizarea teritoriului agricol, la amenajarea silvică sau hidrologică, în prospectarea și exploatarea zăcămintelor de substanțe utile, precum și la elaborarea de studii și cercetări în domeniul hidrografic, pedologic, geologic, geografic.

Importanța științifică a măsurătorilor terestre constă în aceea că furnizează date necesare studierii formei și dimensiunilor reale ale Pământului și modificările în timp ale acestora.

1.2 Elementele topografice ale terenului.

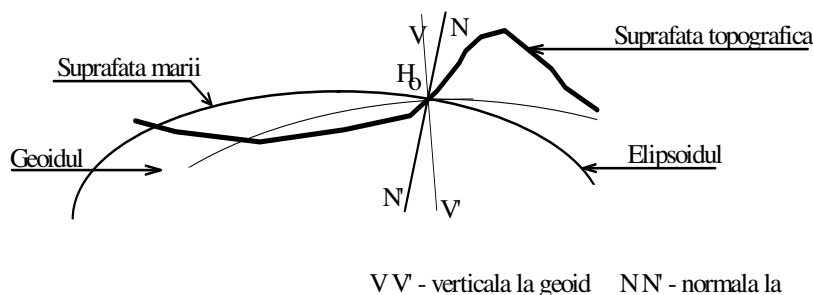


Figura 1.1 - Suprafața topografică, geoidul și elipsoidul de referință.

Este suprafața care face obiectul reprezentărilor pe hărți și planuri.

1.2.1 Forma și dimensiunile Pământului.

Sectionarea cu un plan vertical a scoarței terestre permite observația că se disting trei curbe care interesează și anume: suprafața topografică, geoidul și elipsoidul de referință (fig. 1.1).

Suprafața topografică este de fapt urma terenului lăsată pe planul de secțiune, urma care datorită neregularităților nu se poate exprima printr-un model matematic.

Geoidul reprezinta locul geometric al punctelor care materializeaza nivelul marilor si oceanelor, nivel neafectat de miscarea valurilor, curenti sau mareelor, prelungit pe sub continente. Numit si suprafata de nivel zero, nu se poate exprima printr-un model sau formula matematica. Datorita faptului ca nu reprezinta nici macar aproximativ configuratia terenului natural, nu face obiectul reprezentarii pe harti si planuri, fiind de fapt o forma geometrica ipotetica din punct de vedere al exprimarii.

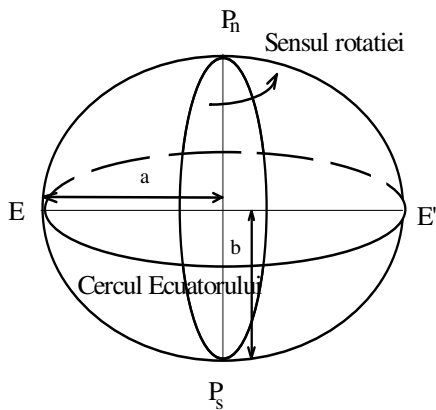


Figura 1.2 - Elipsoidul de referinta.

Elipsoidul de referinta a aparut ca urmare a imposibilitatii reprezentarii terenului sau a geoidului pe harti și planuri prin coordonate. Fiind descris de o relatie matematica, corespondenta reciproca între puncte din teren și omoloagele lor pe elipsoid permite raportarea acestora pe harti și planuri prin coordonate, într-un sistem unic și unitar. În timp, s-au folosit o serie de elipsoizi de referinta care au purtat numele celor care le-au descris prin marimile lor caracteristice: Delambre, Bessel, Heyford, Krasovski. Pentru toate tipurile de elipsoizi cunoscuti, elementele caracteristice cu valorile acestora numai pentru elipsoidul Krasovski, sunt:

$$a = 6378245 \text{ m (semi-axa mare)}$$

$$b = 6356863 \text{ m (semi-axa mica)}$$

$$a = (a-b)/a = 1/298,3 \text{ (turtirea elipsei)}$$

1.2.2 Proiectia punctelor în geodezie si topografie.

Elementul care defineste modalitatea de proiectare a punctelor pe o suprafata este marimea acesteia în sensul ca la suprafetele mari se impune sa se tina cont de curbura Pamântului (cazul unor regiuni, tari, continente sau întreg globul), în timp ce daca suprafata determinata de puncte este mica, influenta curburii se poate neglija. În primul caz avem de-a face cu ceea ce se numeste proiectie geodezica iar în al doilea caz cu o proiectie topografica a punctelor.

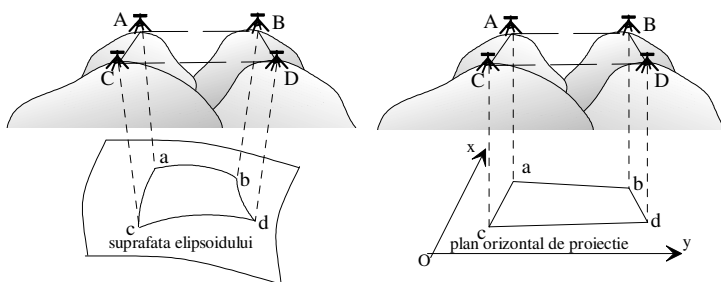


Figura 1.3 - Proiectia geodezica si proiectia topografica a punctelor

Prin proiectia geodezica a punctelor de triangulatie A, B, C, D pe suprafata elipsoidului în punctele a, b, c, d se obtin triunghiuri cu laturi curbe, laturi care se numesc si linii geodezice.

Se poate observa (figura 1.3) ca în acest caz proiectantele punctelor de triangulatie sunt convergente catre o zona din centrul globului pamântesc.

Daca suprafata pe elipsoid este mica (cazul punctelor apropiate), putem asimila elipsoidul cu o suprafata plana fara ca precizia coordonatelor si pozitia punctelor sa sufere. În acest caz proiectantele punctelor vor fi paralele între ele, iar pozitia punctelor de triangulatie se defineste prin coordonatele rectangulare plane x, y precum si prin cota H reprezentand distanta pe verticala de la suprafata de nivel zero la punctul din teren. Se poate observa ca totdeauna distantele care se pot determina pe planuri reprezinta de fapt proiectii orizontale ale distantelor înclinate corespondente.

1.2.3 Proiectii cartografice.

Deoarece în cazul general se impune reprezentarea grafica a unor suprafete întinse ale globului, se constata existenta a doua dificultati mari:

- suprafata globului este curba, apropiata de o sfera;
- reprezentarea reliefului ar trebui sa fie tridimensionala.

Aceste dificultati se pot elimina prin alegerea unui numar suficient de puncte caracteristice, proces numit si geometrizarea terenului, dupa care suprafetele curbe se transforma, prin calcule, în suprafete plane. O astfel de transformare nu se poate face însa fara ca distantele de pe elipsoid sa nu sufere modificari. Functie de sistemul de proiectie adoptat se pot modifica si alte elemente cum sunt unghiurile sau suprafetele. Clasificarea proiectiilor cartografice se va face deci functie de elementele care se pastreaza nedeformate, astfel:

- *conforme* sunt cele care pastreaza unghiurile nedeformate;
- *echivalente* sunt cele care pastreaza suprafetele nedeformate;
- *echidistante* sunt cele care pastreaza numai anumite distante nedeformate;
- *arbitrare* sunt cele care nu pastreaza nici un element nedeformat.

Din cele prezentate putem constata ca deformatiile pot fi liniare, unghiulare sau areolare (deformarea suprafetelor). Un alt criteriu de clasificare al proiectiilor cartografice este cel al modului de realizare a reprezentarii, care conduce la aspectul retelei cartografice; în acest caz clasificarea se prezinta astfel:

- *azimutale* sunt proiectiile în care reprezentarea se face pe un plan tangent sau secant la sfera în punctul central al zonei de reprezentat;
- *cilindrice* sunt cele în care reprezentarea se face pe un cilindru care are o pozitie oarecare fata de sfera (nu este obligatoriu sa fie tangent).

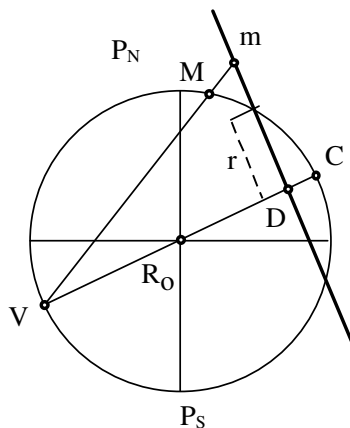


Figura 1.4 - Proiectia stereografica.

- *conice* sunt cele la care reprezentarea se face pe un con tangent sau secant la sfera. Ca variante ale acestora sunt cunoscute proiectiile policonice si cele pseudoconice.

Din prima categorie face parte proiectia stereografica, care, pentru teritoriul României a fost aplicata și cunoscuta initial ca "proiectia stereografica 1933" și mai recent "proiectia stereografica 1970"; pozitia punctului central în cele doua proiectii difera în sensul ca prima avea acest punct în zona Brasov pentru ca a doua sa-l aiba în zona Fagaras.

În figura 1.4 sunt ilustrate elementele ce caracterizeaza o proiectie stereografica :

- C - centrul de proiectie,
- V - punctul de vedere,
- R_0 - raza medie de curbura la centrul de proiectie,
- CD - adâncimea planului de proiectie,
- M - un punct pe elipsoid,
- m - proiectia pe planul secant a punctului M,
- r - raza cercului de secanta

Din a doua categorie, pentru tara noastra a fost folosita "proiectia Gauss". Reprezentarea elipsoidului se face în

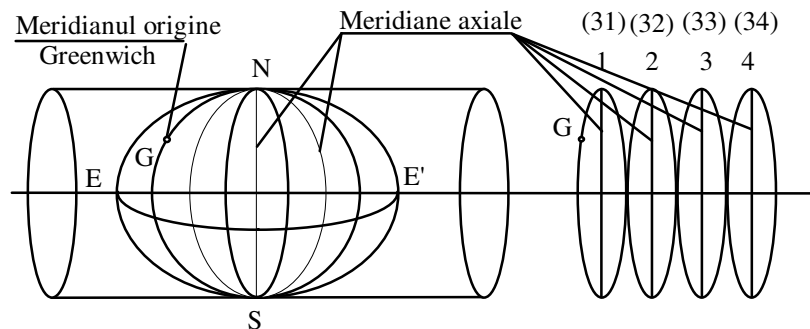


Figura 1.5 - Proiectia Gauss.

acest caz prin zone denumite fuse având în general 6° pe longitudine. Meridianul origine, numit și "meridian 0", este cel care trece prin Observatorul Greenwich. Facilitatile acestei proiectii constau în aceea ca permite reprezentarea întregului glob pe zone cuprinse între cei doi poli.

Dezavantajele se refera la situatia teritoriilor relativ mici care se reprezinta uneori pe doua fuse vecine (cazul tarii noastre în L - 34 și L - 35), precum și la faptul ca deformatiile sunt uneori mai mari decât în alte proiectii.

1.2.4 Elementele topografice ale

terenului.

În mediul înconjurator se afla o serie de obiecte naturale (vai, dealuri, munti, ape) și artificiale, aparute datorita omului (constructii, limite între folosinte sau proprietati), toate alcatuind detalii topografice.

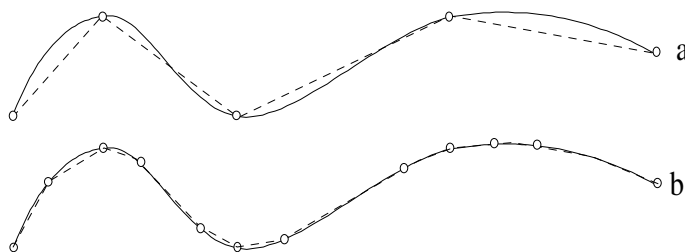


Figura 1.6 - Geometrizarea terenului

Pentru determinarea formei și pozitiei acestora, se alege pe detaliu puncte caracteristice denumite topografice, reprezentând schimbari de directie ale unui contur sau a pantei terenului, sau minimum de puncte în functie de care sa se poata reprezenta orice detaliu sau forma de teren (figura 1.6). La stabilirea minimumului de puncte este necesar sa se cunoasca scara planului sau a hartii.

Detaliile topografice sunt în general alcatuite din linii sinuoase a caror determinare și exprimare matematica ar fi practic imposibila și apoi

chiar și inutila. Aceeași linie sinuoasa se poate transforma într-o linie frânta care sa îmbrace și sa înlocuiasca cu suficienta fidelitate conturul initial. În fugura 1.6 sunt prezentate doua moduri de a geometriza un contur sinuos : în cazul "a", datorita faptului ca s-au ales putine puncte pe contur, geometrizarea este incorecta, în timp ce în cazul "b", datorita numarului adecvat de puncte alese, linia frânta care aproximeaza conturul sinuos este mult mai aproape ca forma de acest contur. Operatiunea poarta denumirea de geometrizarea terenului și se poate face atât în plan orizontal, când un punct se determina prin coordonate x și y, cât și în plan vertical, situatie în care determinarea se face prin cota și distanta fata de un reper ales.

Doua sunt categoriile de elemente care se masoara în teren și anume cele liniare respectiv unghiulare.

Intersectia suprafetei topografice cu un plan vertical ce trece prin punctele M și N se numeste aliniament, fiind o linie sinuoasa în plan vertical, în timp ce în plan orizontal este o linie dreapta.

Materializarea unui aliniament între două puncte și reprezentarea lui într-o secțiune verticală (fig.1.7) conduce la definirea următoarelor elemente topografice ale terenului:

- distanța înclinată, L , între punctele A și B, este lungimea liniei drepte între punctele marcate în teren; ea este linia geometrizată între punctele A și B din teren.
- distanța orizontală, D , reprezintă proiecția într-un plan orizontal a distanței înclinate L .
- unghiul de pantă α este unghiul format de orizontala ce trece printr-un punct și direcția către cel de-al doilea punct. Unghiurile de pantă, la fel ca și diferența de nivel, pot fi pozitive sau negative. Pozitive sunt unghiurile de pantă către toate punctele situate deasupra liniei orizontului, după cum unghiurile de pantă sunt negative pentru toate punctele situate sub liniei orizontului. Dacă direcția de referință nu este orizontala ce trece printr-un punct și verticala locului, atunci unghiul format de verticala cu direcția MN se numește unghi zenital, notat cu "z". Între unghiul zenital și unghiul de pantă al unei direcții date există totdeauna relația:

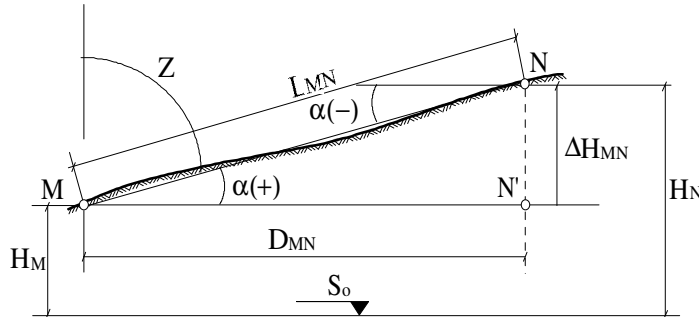


Figura 1.7 - Elementele topografice ale terenului.

$$z + \alpha = 100^\circ \quad [1.1]$$

- diferența de nivel $\Delta H_{MN} = H_N - H_M$, este distanța pe verticală între planele orizontale ce trec prin punctele M și N. Din figura 1.7 se observă că diferența de nivel poate fi pozitivă (de la M la N) sau negativă (de la N la M). Mărimea diferenței de nivel între punctele M și N se poate calcula, funcție

de lungimea înclinată L și unghiul de pantă α cu relația :

$$\Delta H_{MN} = L \cdot \sin \alpha = D \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad [1.2]$$

sau, dacă se cunoaște mărimea unghiului zenital, Z :

$$\Delta H_{MN} = L \cdot \cos Z = D \cdot \operatorname{ctg} Z \quad [1.3]$$

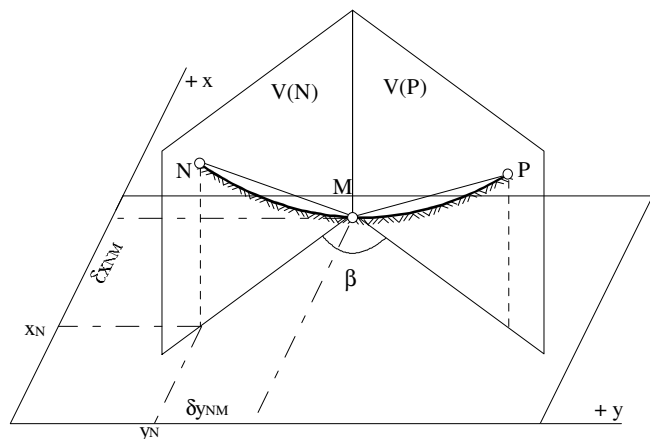


Figura 1.8 - Unghiul orizontal între două aliniamente.

- cota unui punct se definește ca distanța pe verticală de la suprafața de referință la planul orizontal ce trece prin acel punct. Din figura 1.7 se poate deduce cota punctului N, H_N , funcție de cota punctului M, H_M , presupusă cunoscută și diferența de nivel ΔH_{MN} calculată cu relațiile [1.2] sau [1.3].
- unghiul orizontal β (figura 1.8), între direcțiile MN și MP este unghiul diedru format de planele verticale ce conțin punctele M și N (planul V_N), respectiv M și P (planul V_P). Mărimea lui se obține din diferența direcțiilor către punctele P și

N, putând avea valori cuprinse între 0° și 400° .

- orientarea direcției MN, θ_{MN} , se definește ca unghiul format de direcția nordului cu direcția de măsurat (MN), unghi măsurat în sensul orar. Orientarea unei direcții se calculează din coordonatele punctelor ce determină direcția, cu relații de tipul :

$$\operatorname{tg} \theta_{MN} = \frac{\delta y_{MN}}{\delta x_{MN}} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \quad \text{sau} \quad \operatorname{ctg} \theta_{MN} = \frac{\delta x_{MN}}{\delta y_{MN}} = \frac{x_N - x_M}{y_N - y_M} \quad [1.4]$$

- poziția unui punct în plan se definește fie prin coordonatele rectangulare x și y , fie prin coordonatele polare. Coordonatele punctului M din figura 1.8 se calculează funcție de coordonatele punctului N cu relațiile:

$$\begin{aligned} X_M &= X_N + \delta x_{NM} = X_N + d_{NM} \cdot \cos \theta_{NM} \\ Y_M &= Y_N + \delta y_{NM} = Y_N + d_{NM} \cdot \sin \theta_{NM} \end{aligned} \quad [1.5]$$

1.2.5 Unitati de masura.

Funcție de elementele care se determină în operațiile topografice, în țara noastră se folosesc unitățile de măsură ale sistemului internațional și anume:

- pentru lungimi, metrul cu multiplii și submultiplii săi;
- pentru suprafețe, unitățile ce derivă din cele folosite la lungimi, metrul patrat, kilometrul patrat; se mai folosesc însa și arul, respectiv hectarul, astfel:

$$\begin{aligned} 10 \text{ m} \times 10 \text{ m} &= 1 \text{ a} && (\text{un ar}) && [1.6] \\ 100 \text{ m} \times 100 \text{ m} &= 100 \text{ a} = 1 \text{ ha} && (\text{un hectar}) && \end{aligned}$$

- pentru unghiuri, gradele și radianii. Datorita dificultatilor de exprimare în sistemul zecimal, gradatia sexagesimala a fost înlocuita cu gradatia centesimala. Astfel, un cerc are 400 grade centesimale, (notate 400^g), iar un cadran 100^g . Submultiplii sunt minutul centesimal, egal cu $1/100$ dintr-un grad (notat 1^c), respectiv secunda, egala cu $1/100$ dintr-un minut (notata 1^{cc}). Pentru transformari dintr-un sistem în altul, se folosesc urmatoarele relatii:

$$\begin{aligned} \text{din sexagesimal în centesimal} : & \quad 1^\circ = 1,111111^g & [1.7] \\ \text{din centesimal în sexagesimal} : & \quad 1^g = 0,9^\circ & [1.8] \end{aligned}$$

Radianul este unghiul caruia i se opune un arc egal cu raza cercului pe care-l descrie. Legatura între radian și unitatile de masura în grade este:

$$\begin{aligned} \text{sexagesimal} & \quad \rho'' = 206265'' & [1.9] \\ \text{centesimal} & \quad \rho^{cc} = 636620^{cc} & [1.10] \end{aligned}$$

1.3 Suprafete de referinta și sisteme de coordonate.

1.3.1 Suprafete de referinta.

Determinarea în plan vertical a pozitiei punctelor se face prin raportare la geoid, caz în care suprafata se numeste suprafata de nivel zero. Pozitia acesteia se obtine prin observatii multianuale. Aparatele cu care se determina cota marii sau oceanului se numesc medimaregrafe sau medimaremetre. Ele constituie punctele fundamentale pentru originea cotelor în lucrarile de masuratori terestre.

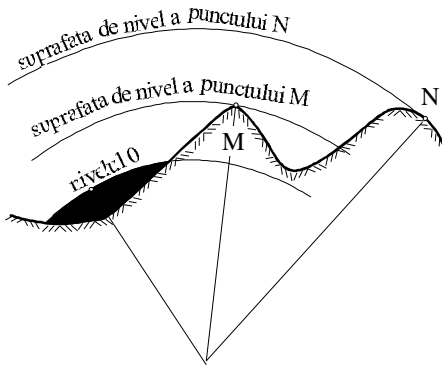


Figura 1.9 - Suprafete de nivel.

Suprafata care este normala în fiecare punct al ei la directia verticalei se numeste suprafata de nivel. Altitudinea sau cota absoluta a punctului topografic se defineste ca fiind distanta pe verticala între suprafata de nivel zero și suprafata de nivel ce trece prin punctul considerat.

În cazul suprafetelor mari se poate considera ca Pamântul este aproximativ sferic, iar suprafetele de nivel, inclusiv suprafata de nivel zero sunt sfere concentrice în centrul Pamântului (figura 1.9). Pentru suprafete mici, se considera ca suprafetele de nivel, inclusiv cea de nivel zero, sunt plane paralele și orizontale între ele.

Pentru anumite lucrari desfasurate pe suprafete mici si precis definite, este posibil ca suprafata de nivel, considerata originea în determinarea cotelor, sa fie alta decât suprafata de nivel zero, aleasa conventional; în acest caz spunem ca avem de-a face cu o altitudine conventionala a punctului. În acest caz, cotele tuturor punctelor de pe aceasta suprafata, vor diferi fata de cotele absolute cu aceeași cantitate, egala cu distanta pe verticala între suprafata de nivel zero și suprafata conventional aleasa. În aceste conditii, relieful terenului este reprezentat pe hartii sau planuri identic, indiferent de sistemul de referinta ales pentru cote (absolut sau conventional).

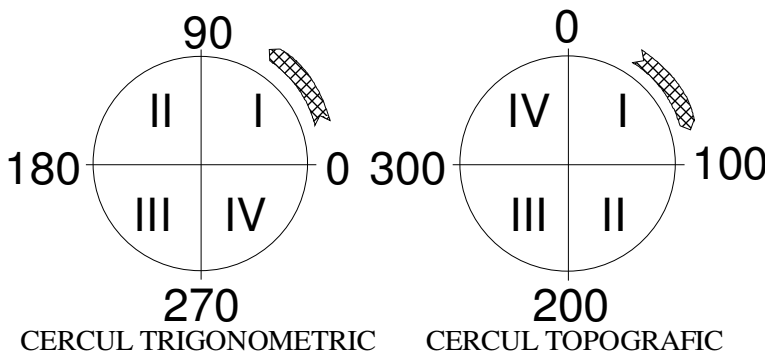


Figura 1.10 - Cercul trigonometric si cercul topografic.

1.3.2 Sisteme de coordonate.

Pentru a cunoaste directiile cardinale ale hartilor și planurilor, acestea trebuie sa fie orientate. Acest lucru înseamna ca directii identificate pe o harta sau plan sa fie facute paralele cu omoloagele lor din teren prin rotirea în mod convenabil a hartii sau planului. Directia care se foloseste în orientarea lucrarilor de masuratori terestre, numita directie de referinta, este directia nordului geografic. Deoarece determinarile se fac în sens orar, pentru a se pastra relatiile cunoscute din trigonometrie, s-a adoptat cercul topografic, la care numerotarea

cadranelor se face în sens orar, pornind de la directia nordului.

Deoarece exista nordul geografic (stabil în timp) și nordul magnetic (variabil în timp îndelungat), rezulta ca și orientarile pot fi geografice (fixe în timp) și magnetice (usor variabile în timp). Prin orice punct de pe suprafata terestra pot fi duse un meridian geografic și unul magnetic; implicit, o directie oarecare, într-un sistem de axe de coordonate este orientata fata de o paralela la meridianul axial și nu fata de meridianul geografic al locului respectiv. Considerând (figura 1.11) o directie A-B în teren, fata de aceasta se disting urmatoarele orientari:

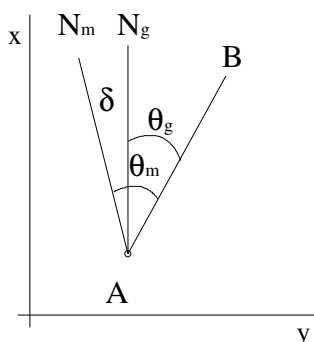


Figura 1.11 - Tipuri de orientari.

- orientarea magnetica (sau azimutul magnetic), care este unghiul format de directia nordului magnetic cu directia A-B;
- orientarea geografica (sau azimutul geografic) care este unghiul format de directia nordului geografic cu directia A-B;

Unghiul format de cele doua orientari poarta denumirea de deviatie magnetica δ . Acest unghi este necesar în cazul determinarii orientarilor cu busola, în vederea corectarii acestora pentru a se putea raporta la orientari geografice.

1.4 Notiuni de teoria erorilor de masurare.

Având în vedere ca orice masuratoare, oricât de precis ar fi executata, este însoțita de mici diferente fata de valoarea reala a marimii respective, vom defini erorile ca fiind micile diferente care apar la masurarea repetata a unei marimi. Este de mentionat ca valoarea reala a marimii masurate nu este niciodata cunoscuta.

Cauzele care conduc la aparitia erorilor se refera la:

- imperfectiunilor constructive ale aparaturii sau dispozitivelor cu care se executa masuratorile, erorile numindu-se erori instrumentale;
- datorita operatorului care executa masuratorile, caz în care erorile se numesc erori personale;
- datorita conditiilor de mediu în care se efectueaza masuratorile, situatie în care erorile se numesc erori datorate conditiilor exterioare;

Este de remarcat ca niciodata, categoriile enumerate mai sus nu actioneaza singure, ci apar toate la un loc. Eroarea se defineste matematic ca diferenta între valoarea eronata și valoarea justa, iar corectia este totdeauna diferenta între valoarea justa și valoarea eronata. Daca notam cu v_j valoarea justa si cu v_e valoarea eronata, putem scrie:

$$e = v_e - v_j \tag{1.11}$$

dupa cum :

$$c = v_j - v_e \tag{1.12}$$

Din expresiile [1.11] si [1.12] se poate scrie ca :

$$e = -c \quad \text{sau} \quad c = -e \tag{1.13}$$

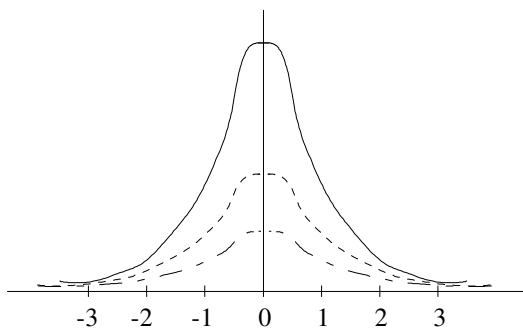


Figura 1.12 - Distributia normala a erorilor.

Daca asupra unei marimi se vor face un numar mare de determinari, se vor calcula abaterile fiecarei determinari fata de media aritmetica si se va întocmi un grafic pe care se vor raporta pe abscisa marimea erorilor si pe ordonata frecventa aparitiei unei valori a erorii, se va obtine un grafic al unei curbe, cunoscuta sub numele de "curba clopot GAUSS", reprezentând de fapt curba de distributie normala a erorilor întâmplatoare.

Clasificarea erorilor se poate face dupa:

1. marimea lor:
 - erori propriu-zise, care sunt acceptate în procesele de masurare;
 - erori grosolane, numite și greseli, care nu se accepta în șirul de masuratori, motiv pentru care, la prelucrare, sunt eliminate.

2. modul de propagare:

- sistematice, caracterizate prin aceea ca sunt constante ca semn și marime. Acest tip de erori nu se pot elimina, dar influenta lor poate fi anulata prin calcul.
- întâmplatoare sau accidentale, apar aleator ca semn și valoare, iar influenta lor nu se cunoaste și nu se poate diminua.

3. valoarea de referinta:

- reale, care reprezinta diferentele între diversele valori din șirul de determinari și valoarea reala a marimii masurate. Se poate lesne constata ca deoarece valoarea reala a marimii nu este cunoscuta, nici erorile reale nu se pot determina.
- erori aparente, care reprezinta diferenta între fiecare valoare din șirul de masuratori și valoarea cea mai probabila, definita ca media aritmetica a celor "n" determinari. În cazul unui numar de determinari facute asupra aceleasi marimi, de un singur operator, cu un singur instrument de masura si în conditii meteo aproximativ identice, suma erorilor aparente tinde la 0. Vom nota cu v erorilor aparente, cu M_i masuratorile propriu-zise si cu M media celor "n" determinari, putem scrie:

$$\begin{aligned} v_1 &= M_1 - M \\ v_2 &= M_2 - M \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= M_n - M \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = M_1 + M_2 + \dots + M_n - n \cdot M \tag{1.15}$$

Daca notam suma erorilor v_i cu $[v]$ si suma masuratorilor cu $[M]$, relatia [1.15] se poate scrie sub forma:

$$[v] = [M] - n \cdot M = 0$$

si deci:

$$[v] = 0 \tag{1.16}$$

care constituie criteriul de apreciere a corectitudinii prelucrării măsurătorilor.

Pornind de la considerentul ca un șir de măsurători este reprezentat ca o funcție de cele "n" determinari, asimilate ca "n" variabile, erorile sunt derivatele de ordinul I în raport de aceste determinari.

Diferența între oricare două măsurători din șirul de măsurători efectuate, se numește ecart; dacă aceasta diferență se face între valorile extreme, se numește ecart maxim.

Pentru a putea fi prelucrat, șirul determinărilor trebuie să se încadreze în toleranța T, care se definește ca fiind ecartul admisibil între măsurători. Valoarea toleranței se precizează prin instrucțiuni tehnice și valoarea ei este obligatoriu de respectat în orice gen de lucrări de măsurători terestre. Tehnica care se ocupă cu modul de prelucrare a măsurătorilor și ajungerea la valoarea cea mai probabilă se numește teoria erorilor de măsurare, iar procedeul se numește al celor mai mici pătrate.

După modul în care se obțin, marimile măsurate pot fi:

1. *directe*, caracterizate prin aceea că observațiile sunt făcute direct cu instrumentul asupra mărimii care se măsoară, de exemplu, măsurarea cu ajutorul ruletei a unei distanțe;
2. *indirecte*, în care, prin calcul, din mărimi determinate direct se obțin marimile care interesează. Un exemplu este determinarea a două laturi într-un triunghi în care se cunosc toate unghiurile și o latură.
3. *conditionate*, în care marimile măsurate direct trebuie să răspundă unor condiții, ca de exemplu, suma unghiurilor măsurate într-un triunghi să fie egală cu 200°.

Din punct de vedere al modului de efectuare a observațiilor sau al aparatului folosite, se disting:

- a) măsurători de aceeași precizie, în care determinările se fac cu aceeași metodă, de un singur operator care folosește un singur aparat se numesc măsurători de ponderi egale.
- b) măsurători ponderate care se efectuează cu aparate diferite, de către operatori diferiți, în condiții și cu instrumente diferite.

1.4.1 Eroarea medie patratice individuala.

Pornind de la forma generală a ecuațiilor de erori, și anume:

$$\begin{aligned} v_1 &= M_1 - M \\ v_2 &= M_2 - M \\ &\dots\dots\dots \\ v_n &= M_n - M \end{aligned} \tag{1.17}$$

pentru a se înlătura incertitudinile datorate semnelor + și - ale erorilor v_i , se ridică la pătrat suma erorilor și prin însumare se ajunge la eroarea medie patratice individuală:

$$e_q = \pm \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} \tag{1.18}$$

Această eroare constituie un criteriu de apreciere calitativă a șirului de măsurători luate individual. Asupra valorii erorii medii patratice individuale acționează preponderent erorile întâmplătoare cu valoare absolută mare, tocmai cele care determină gradul de siguranță al măsurătorilor. Datorită faptului că această eroare este relativ stabilă, este practic suficient un număr relativ mic de determinări pentru a obține această eroare cu o precizie satisfăcătoare.

1.4.2 Eroarea medie a mediei aritmetice.

Pornind de la "i" măsurători efectuate în aceleași condiții asupra unei singure mărimi M, valoarea cea mai probabilă se acceptă a fi media aritmetică. Se poate deci scrie ca:

$$M = \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_n}{n} \tag{1.19}$$

sau:

$$M = \frac{1}{n} M_1 + \frac{1}{n} M_2 + \dots + \frac{1}{n} M_n \tag{1.20}$$

dacă acceptăm ca fiecare măsurătoare este afectată de aceeași eroare, e_q , în timp ce eroarea medie patratice a valorii M va fi e_M , prin ridicare la pătrat și neglijând termenii de ordinul II (adică produsele între termenii "i" și "j"), atunci putem scrie ca :

$$\begin{aligned} e_M^2 &= \frac{1}{n^2} e_q^2 + \frac{1}{n^2} e_q^2 + \dots + \frac{1}{n^2} e_q^2 = \frac{n}{n^2} e_q^2 = \frac{1}{n} e_q^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e_M &= \pm \frac{e_q}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Această mărime este un criteriu de apreciere a preciziei măsurătorilor.