10.PUNCTUL SPAȚIAL ŞI DREAPTA SPATIALĂ, ÎN RELAȚIE CU UN PLAN OARECARE

10.1. DREAPTĂ ŞI PUNCT APARȚINÂND UNUI PLAN OARECARE

O dreaptă spațială, în raport cu un plan spațial oarecare se poate afla în una din relațiile:

- dreaptă cuprinsă în plan şi poate fi oarecare, (fig.10.1, fig.10.2), sau drepte particulare, ce pot fi orizontalele planului (fig.10.13, fig.10.14), verticalele planului (fig.10.15, fig.10.16), lateralele planului (fig.10.17, fig.10.18) şi dreptele de cea mai mare pantă ale planului (fig.10.19, fig.10.20);
- dreaptă concurentă cu un plan spațial (fig.10.9, fig.10.10).

În continuare, dreptele particulare ale unui plan spațial sunt prezentate în subcapitolul 10.4.

10.1.1. DREAPTĂ OARECARE CONȚINUTĂ ÎNTR-UN PLAN

O dreaptă aparține unui plan [**P**], dacă urmele sale se situează pe urmele corespunzătoare ale planului.

Se consideră o dreaptă **D** = **AB**, unde **A** = **D** ∩ [**H**] şi **B** = **D** ∩ [**V**]. Cunoscând urmele P_xP_y, P_xP_z, P_yP_z ale unui plan [**P**] şi faptul că **A** aparține urmei orizontale, iar **B** aparține urmei verticale, să se demonstreze că urma **C** a dreptei, cuprinsă în planul lateral, se află pe urma laterală a planului [**P**].

Demonstrația grafică este redată în figurile 10.1 şi 10.2.

10.1.2. PUNCT CARE APARȚINE UNUI PLAN

Un punct aparține unui plan, dacă aparține unei drepte situată în acel plan. Se consideră un punct **M** pe o dreaptă **D** = **AB**, unde **A** şi **B** sunt urmele dreptei cu planele [**H**] şi [**V**], iar dreapta aparține planului [**P**]. Să se demonstreze că punctul **M** aparține planului [**P**]. Demonstrația grafică este redată în figurile 10.3 şi 10.4.

10.1.3. APLICAȚII

1. Se consideră o dreaptă definită de două urme ale sale, **A** ∈ [**H**] şi **B** ∈ [**V**]. Dacă dreapta **D = AB** aparține planului [**P**], să se demonstreze grafic, în imagine axonometrică şi în epură, că urma laterală a dreptei, C, aparține urmei laterale a planului [**P**].
2. Fie un punct **I** ∈ **D = AB** ∈ [**P**]. Cunoscând proiecțiile **i'** şi **i"** să se demonstreze grafic, în imagine axonometrică şi în epură, că **i** ∈ **d = ab**.
3. Două puncte **I (i,i')** şi **J (j',j")**, aparțin dreptelor **D = AB** ∈ [**P**] şi $\mathbf{D_1}$ **= MN** ∈ [**P**]. Să se demonstreze grafic că dreapta $\mathbf{D_2}$ **= IJ** aparține, de asemenea, planului [**P**].
4. Fie dreapta **D = AB** şi punctul **M** situat pe urma orizontală a planului [**P**]. Cunoscând urmele planului [**P**] şi faptul că dreapta **D** aparține acestui plan (**A** ∈ [**H**], **B**∈ [**V**]), să se proiecteze, în imagine axonometrică şi în epură, triunghiul [**ABM**].
5. Un punct **N**, interior triunghiului [**ABM**] (v. probl. 4), aparține acestuia dacă dreapta **BN** intersectează planul orizontal [**H**] într-un punct **I**, aflat pe urma orizontală aplanului [**P**]. Să se demonstreze grafic - în imagine axonometrică şi în epură - această afirmație.

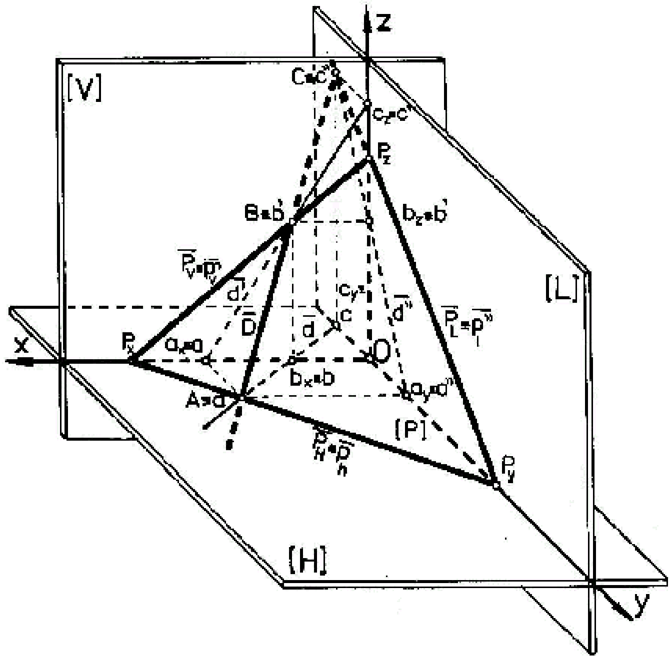


Figura 10.1

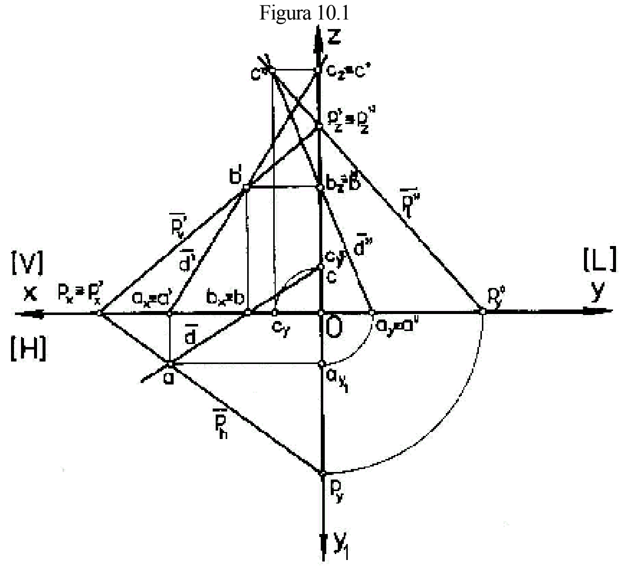


Figura 10.2

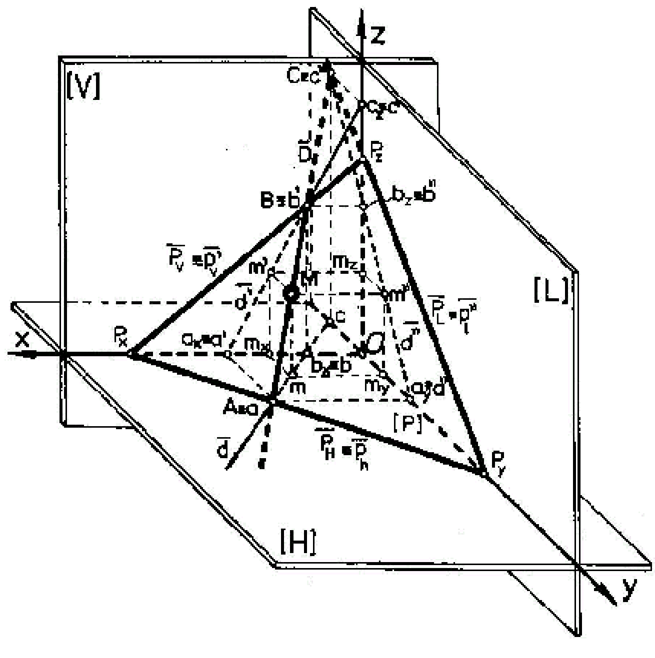


Figura 10.3

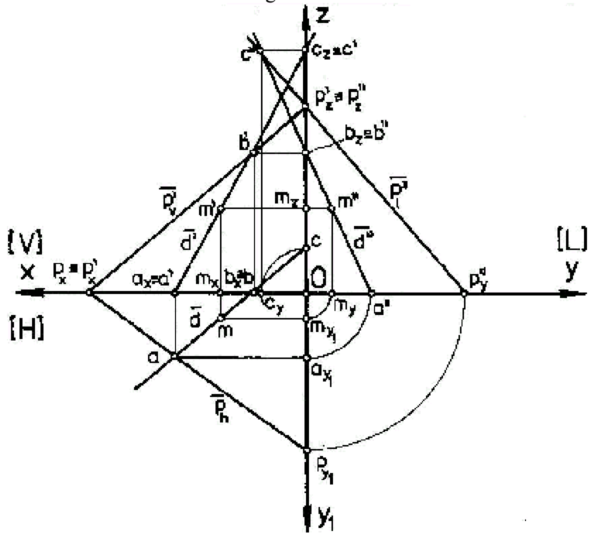


Figura 10.4

10.2.DETERMINAREA URMELOR UNUI PLAN ATUNCI CÂND SE CUNOSC ELEMENTELE GEOMETRICE CARE ÎL DEFINESC

10.2.1. CONSTRUCȚIA PROIECȚIEI ÎN IMAGINE AXONOMETRICĂ ŞI ÎN EPURĂ

Un plan este definit de trei puncte necoliniare, o dreaptă şi un punct exterior acesteia, două drepte paralele, sau două drepte concurente.

Dacă planul se defineşte prin trei puncte necoliniare, atunci prin două dintre acestea se trasează o dreaptă, iar prin al treilea o a doua dreaptă, paralelă cu prima, sau concurentă cu prima.

Dacă planul se defineşte printr-o dreaptă şi un punct exterior acesteia, prin acest punct se trasează a doua dreaptă, paralelă cu prima, sau concurentă cu aceasta. aşadar, din cele patru variante posibile, din punct de vedere al geometriei descriptive, acestea se reduc, practic, la două.

Se consideră dreptele $\mathbf{D_1} = \mathbf{AB}$ şi $\mathbf{D_2} = \mathbf{MN}$, unde **A** şi **M**, sunt urmele dreptelor cu planul orizontal de proiecție [**H**], iar **B** şi **N**, sunt urmele dreptelor cu planul vertical de proiecție. Să se determine urmele planului [**P**] definit de aceste drepte, dacă relația spațială dintre acestea este de paralelism ($\mathbf{D_1} \parallel \mathbf{D_2}$). Demonstrația grafică este redată în figurile 10.5 şi 10.6.

10.2.2. APLICAȚII

1. Să se determine şi să se explice construcția grafică corespunzătoare, în cazul determinării urmelor unui plan, atunci când se cunosc $\mathbf{D_1} = \mathbf{AB} \parallel \mathbf{D_2} = \mathbf{MN}$, unde $\mathbf{A,M} \in$ [**H**], iar $\mathbf{B,N} \in$ [**V**]. Să se determine urmele dreptelor $\mathbf{D_1}$ şi $\mathbf{D_2}$ pe planul lateral [**L**]. Notând cu **C** şi **S** aceste urme, să se demonstreze grafic că segmentul de dreaptă **CS** se suprapune peste urma laterală a planului [**P**].
2. Fie dreapta **D = AB** o dreaptă oarecare, dată prin urmele ei, $\mathbf{A} \in$ [**H**] şi $\mathbf{B} \in$ [**V**]. ştiind că proiecțiile **a'** şi **b'** se află pe urma $\mathbf{P_V} \equiv \mathbf{p'_v}$ a unui plan [**P**], să se determine, în imagine axonometrică şi în epură, urmele acestui plan. Ce fel de plan este planul [**P**] astfel definit?
3. Se consideră dreapta **D = AB**, o dreaptă oarecare, dată prin urmele ei, $\mathbf{A} \in$ [**H**] şi $\mathbf{B} \in$ [**V**]. ştiind că $\mathbf{Q_x} \equiv \mathbf{a'}$şi cunoscând faptul că punctul $\mathbf{Q_y} = \mathbf{Q_H} \cap \mathbf{Q_L}$, iar $\mathbf{B} \in \mathbf{Q_V}$, să se determine planul [**Q**]. Urma laterală, **C**, a dreptei **D** se află pe urma laterală a planului [**Q**] astfel determinat?

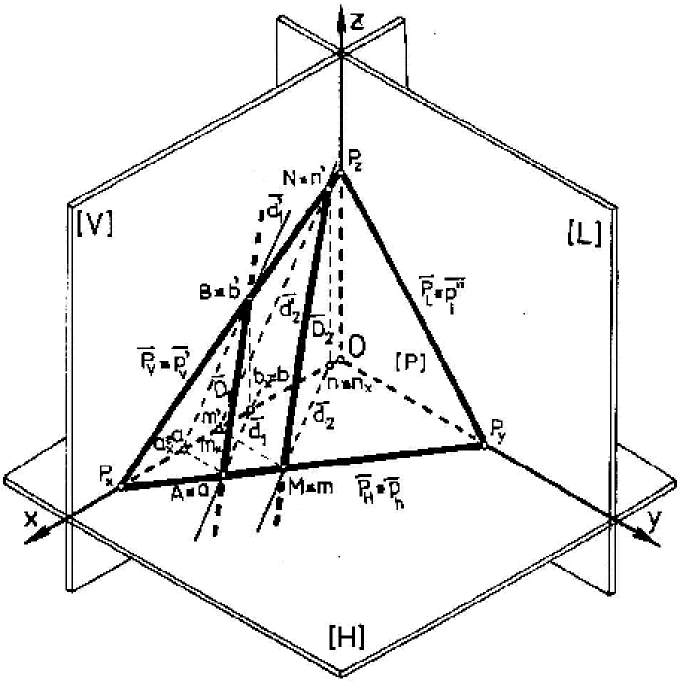


Figura 10.5

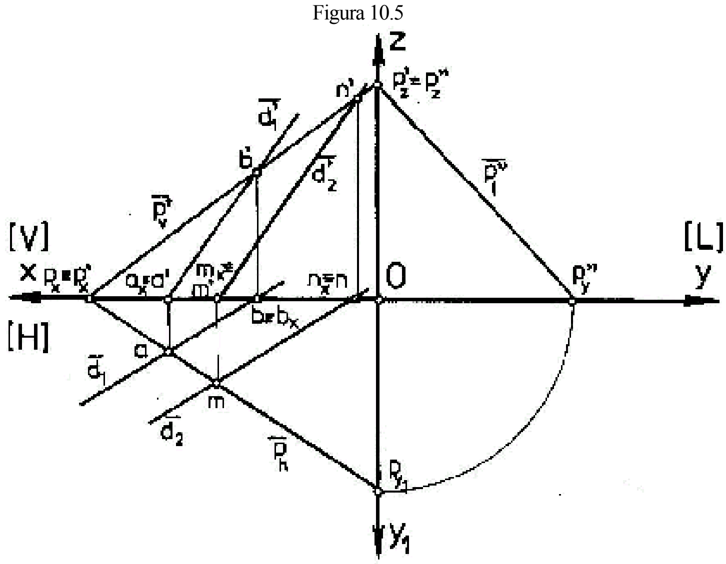


Figura 10.6

4. Fie punctele: **A** (**a,a'**) situat în triedrul V de proiecție, **B** (**b,b'**) în triedrul VI de proiecție și **C** (**c,c'**) aflat în triedrul I de proiecție. Să se determine grafic planul [**P**] definit de aceste trei puncte necoliniare.

5. Să se construiască planul [**Q**] definit de punctele **A** (**a,a'**), **B** (**b,b'**) situate în triedrul II de proiecție și punctul **C** (**c,c'**) aflat în triedrul V, punctele **A, B, C** fiind necoliniare.

6. Să se determine axonometric și în epură, urmele planului, [**P**], cunoscând trei puncte necoliniare **M, N, R** care determină acest plan.

MOD DE LUCRU

Se vor respecta etapele de mai jos:

- se reprezintă axonometric cele trei plane, care definesc triedrul I de proiecție;
- se reprezintă elementele care determină planul, respectiv punctele **M,N** și **R**,
- se reprezintă două drepte determinate de cele trei puncte, de exemplu **NR** și **MR**, notate cu $\mathbf{D_1}$ și $\mathbf{D_2}$ (drepte concurente),
- se determină urmele acestor drepte, folosind modul de lucru cunoscut din aplicațiile anterioare.

Rezultă, astfel:

$\mathbf{A_1 \equiv a_1, A_2 \equiv a_2}$,

$\mathbf{B_1 \equiv b_1', B_2 \equiv b_2'}$,

$\mathbf{C_1 \equiv c_1'', C_2 \equiv c_2''}$,

- unind proiecțiile orizontale ale urmelor celor două drepte, cu planul orizontal, rezultă urma orizontală a planului. Deci, unim $\mathbf{a_1}$ cu $\mathbf{a_2}$ și rezultă $\mathbf{P_H = p_h}$,
- unind proiecțiile pe planul vertical ale urmelor celor două drepte, rezultă urma verticală a planului. Deci, unim $\mathbf{b_1'}$ cu $\mathbf{b_2'}$ și rezultă $\mathbf{P_V = p_v'}$,
- unind proiecțiile pe planul lateral ale urmelor celor două drepte cu planul lateral de proiecție, rezultă urma laterală a planului. Deci, prin unirea punctului $\mathbf{c_1''}$ cu $\mathbf{c_2''}$, rezultă $\mathbf{P_L'' = p_l''}$.

Pentru verificarea corectitudinii construcției, trebuie ca punctele de intersecție ale urmelor planului să aparțină axelor:

$$\mathbf{P_H \cap P_V = P_x \in Ox,}$$
$$\mathbf{P_V \cap P_L = P_z \in Oz,}$$
$$\mathbf{P_L \cap P_H = P_y \in Oy;}$$

În mod asemănător se va lucra și pentru construcția epurei urmelor planului [**P**].

EXEMPLU NUMERIC

Fie punctele **M** (29,16,8), **N** (8,35,7) și **R** (16,11,2). Să se determine urmele planului [**P**] definit de aceste puncte, folosind două drepte concurente, definite de aceste puncte (fig.10.7 și fig.10.8). Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale acestor urme, cu axele de coordonate, adică: $\mathbf{P_x}$, $\mathbf{P_y}$,și $\mathbf{P_z}$.

Tabelul 10.1

Nr. variantei numerice		1	2	3	4	5	6
M	m_x	30	20	10	15	10	50
	m_y	40	20	10	20	30	20
	m_z	10	60	90	50	40	15
N	n_x	45	30	10	12	15	20
	n_y	20	30	30	48	45	48
	n_z	15	30	60	20	20	12
R	r_x	54	10	15	30	12	25
	r_y	16	40	25	20	54	20
	r_z	12	45	60	25	16	30

Pentru extinderea acestei aplicații, în tabelul 10.1 se află alte combinații de valori numerice pentru punctele **M, N** și **R**.

10.3 DETERMINAREA PUNCTULUI DE INTERSECȚIE DINTRE O DREAPTĂ ȘI UN PLAN

10.3.1. CONSTRUCȚIA PROIECȚIEI ÎN IMAGINE AXONOMETRICĂ ȘI ÎN EPURĂ

Pentru rezolvarea unor probleme de secțiuni plane în corpuri geometrice, de intersecții de corpuri geometrice și altele asemenea, este foarte important să se cunoască modul în care se poate determina grafic punctul de intersecție dintre o dreaptă și un plan oarecare. Pentru aceasta se utilizează un plan auxiliar, care, de regulă, ocupă o poziție particulară față de planele d eproiecție (perpendicular pe unul din planele de proiecție).

Fie dreapta **D(d,d')** care intersectează planul [**P**]($\mathbf{p_h}$, $\mathbf{p_v'}$). Să se determine punctul **I(i,i')** de intersecție. Pentru aceasta construim un plan auxiliar **[Q]**($\mathbf{q_h}$,$\mathbf{q_v'}$) (fig.10.9, fig.10.10), perpendicular pe planul vertical [**V**], care să conțină dreapta dată. Ca urmare, proiecția verticală a dreptei, **d'**, se suprapune peste urma verticală a planului [**Q**], respectiv $\mathbf{q_v'}$.

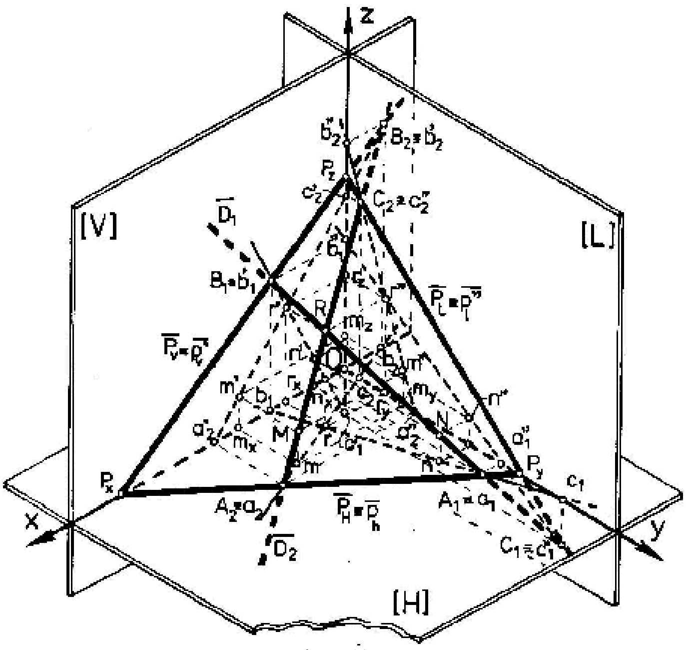


Figura 10.7

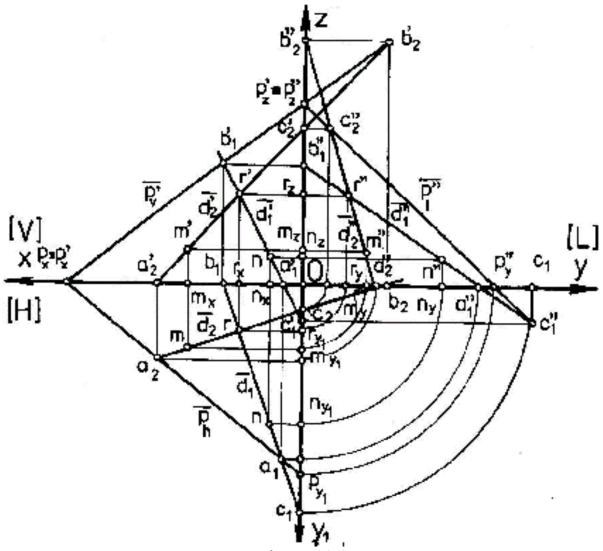


Figura 10.8

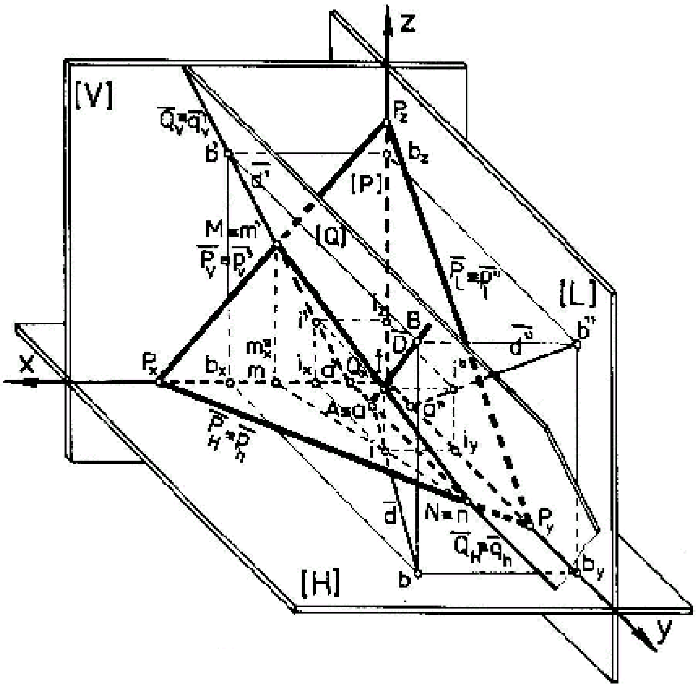


Figura 10.9

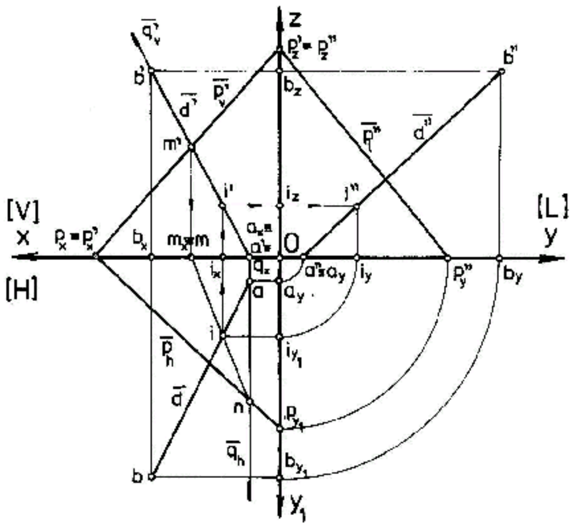


Figura 10.10

Observație

Prin construirea planului auxiliar rezultă, din intersecția celor două plane, o dreaptă auxiliară, concurentă cu dreapta dată în punctul **I(i,i')**, punct în care dreapta considerată, **D**, intersectează planul dat **[P(p_h, p_v')]**.

10.3.2.APLICAȚII

1. Să se explice construcția grafică, în imagine intuitivă și în epură, a modului de determinare a punctului de intersecție dintre o dreaptă dată **D** = **AB** și un plan oarecare [**P**].
2. Să se determine punctul de intersecție **I(i,i'**) dintre un plan [**P**] definit de punctele **A**(**a,a'**), **B**(**b,b'**) și **C**(**c,c'**), unde primele două formează o dreaptă **D = AB** (**A** ∈ [**H**], **B** ∈ [**H**]), iar punctul **C** ∈ [**L**], dar nu aparține dreptei **D** (punctele **A**, **B**, și **C** nu sunt coliniare) și dreapta $\mathbf{D_1}$ = **AC**.
3. Se cunoaște punctul **I** (**i,i'**) de intersecție dintre o dreaptă **D = AB** și un plan [**P**], punct care, totodată, se află pe o dreaptă $\mathbf{D_1}$ = **MN**. Să se construiască planul [**Q**], auxiliar, corespunzător acestei situații date.
4. Se consideră planele [**P**] și [**Q**] care se intersectează după o dreaptă $\mathbf{D_1}$ = **MN**. Planul [**Q**], fiind un plan perpendicular pe unul din planele de proiecție (la alegerea celui care rezolvă această aplicație), să se proiecteze, în imagine axonometrică și în epură, aceste elemente geometrice spațiale. Fie punctul **I** ∈ $\mathbf{D_1}$ = **MN**, să se traseze o dreaptă **D = AB** care intersectează planul [**P**] în acest punct.

5. Se consideră un număr de puncte **M, N, R**, care determină planul [**P**] şi o dreaptă **D(d,d',d")**, definită de punctele **E** şi **F**. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie dintre dreapta **D** şi planul [**P**]. Să se determine, de asemenea, şi vizibilitatea în epură a dreptei.

MOD DE LUCRU

Se vor respecta etapele prezentate în continuare:

- Se reprezintă axonometric cele trei plane de proiecţie,
- Se reprezintă punctele **M, N, R** şi proiecţiile lor pe cele trei plane, rezultând, astfel, proiecţiile pe cele trei plane ale figurii geometrice determinate de cele trei puncte **M, N, R**,
- Se reprezintă punctele **E** şi **F**, proiecţiile lor, şi, prin unirea acestora, rezultă **d, d'**şi **d"**,
- Se reprezintă planul auxiliar [**Q**] astfel încât să conţină dreapta **EF**, deci:

  EF $\in$ [**Q**],
- Pe planul de proiecţie în care urma planului [**Q**] conţine proiecţia pe acel plan a dreptei **EF**, se obţin proiecţiile punctelor **I** şi **II** adică punctele **1** şi **2**.
- Având proiecţiile pe un plan ale punctelor **I** şi **II**, vom obţine celelalte proiecţii, ţinând cont de amplasarea lor pe laturile figurii geometrice plane (triunghiul [**ABC**] $\in$ [**P**]) (fig.10.11 şi fig.10.12).
- Vom obţine dreapta definită de punctele **I** şi **II**, care aparţin, simultan, planelor [**P**] şi [**Q**]. Pe această dreaptă se va afla punctul **I(i,i',i")** de intersecţie dintre dreapta **D** şi planul [**P**].
- Aşadar, punctul de intersecţie **I** se va afla la intersecţia dreptelor menţionate, deoarece acestea sunt coplanare.
- In etapa următoare se măsoară coordonatele punctului **I**, pe axele sistemului de referinţă **Oxyz**.
- Pentru determinarea în epură a punctului de intersecţie **I**, se procedează în mod analog, iar problema cu privire la vizibilitate în epură, se rezolvă ţinând cont de regulile prezentate în cadrul noţiunilor teoretice (v.cap.5).

EXEMPLU NUMERIC

Se consideră punctele **M**(65,50,25), **N**(45,20,10) şi **R**(15,25,55), care determină planul [**P**] şi punctele **E**(70,5,50), respectiv **F**(20,50,15), care definesc dreapta **D**.

Folosind un plan auxiliar [**Q**] $\perp$ [**H**] (fig.10.11 şi 10.12), să se determine coordonatele punctului de intersecţie dintre dreapta **D** şi planul [**P**]. Să se stabilească, de asemenea, vizibilitatea în epură a dreptei **D**.

În tabelul 10.2 sunt prezentate combinaţii de valori numerice care permit extinderea aplicaţiei grafice.

Tabelul 10.2

Nr. variantei numerice		1	2	3	4	5	6
M	m_x	75	65	35	62	60	55
	m_y	50	50	60	24	15	18
	m_z	15	25	20	11	10	38
N	n_x	50	45	40	40	65	25
	n_y	10	20	40	12	40	11
	n_z	50	10	40	35	35	51
R	r_x	10	10	55	47	25	19
	r_y	30	25	35	46	40	38
	r_z	5	55	60	8	40	9
E	e_x	70	70	59	70	30	45
	e_y	20	5	54	7	35	12
	e_z	5	50	24	10	15	6
F	f_x	5	20	38	25	60	12
	f_y	50	50	37	34	60	31
	f_z	60	15	53	40	65	45
Plan auxiliar		$\perp$[V]	$\perp$[H]	$\perp$[V]	$\perp$[V]	$\perp$[H]	$\perp$[V]

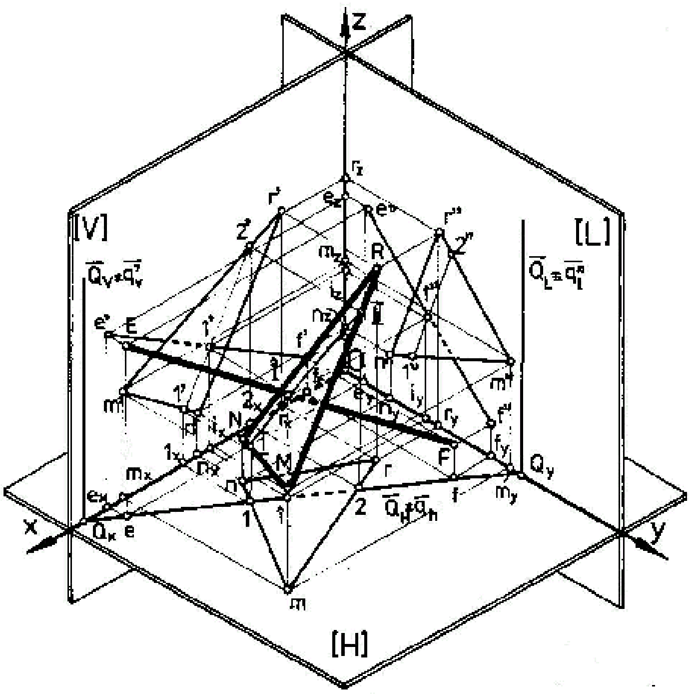


Figura 10.11

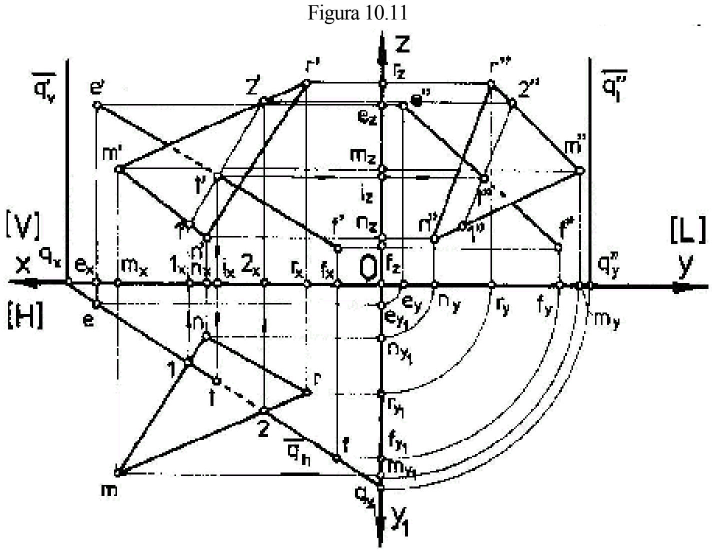


Figura 10.12

10.4. POZIȚII PARTICULARE ALE DREPTELOR CONȚINUTE ÎNTR-UN PLAN OARECARE. CONSTRUCȚIA PROIECȚIEI ÎN IMAGINE AXONOMETRICĂ ŞI ÎN EPURĂ

10.4.1. Orizontalele planului

Se consideră dreapta **D** = **BC** $\in$ [**P**], (fig.10.13, fig.10.14), paralelă cu urma orizontală a planului [**P**], şi conținută în acest plan. Să se demonstreze grafic că şi proiecția dreptei pe planul orizontal de proiecție este paralelă cu urma orizontală a planului, iar celelalte două proiecții sunt paralele cu planul orizontal de proiecție.

10.4.2 Verticalele unui plan

Se consideră o dreaptă **D** = **AC** $\in$ [**P**], (fig.10.15, fig.10.16), conținută în planul [**P**] şi paralelă cu planul vertical de proiecție. Să se demonstreze grafic că dreapta este paralelă cu planul, iar proiecția dreptei pe planul vertical este paralelă cu urma verticală a planului, în timp ce celelalte două proiecții sunt paralele cu planul vertical de proiecție.

10.4.3 Lateralele planului

Se consideră o dreaptă **D** = **AB** ∈ [**P**], (fig.10.17, fig.10.18), aparținând planului oarecare [**P**] și paralelă cu urma laterală a acesteia. Să se demonstreze grafic că și proiecția dreptei pe planul lateral este paralelă cu urma laterală a planului, ca de altfel și celelalte două proiecții.

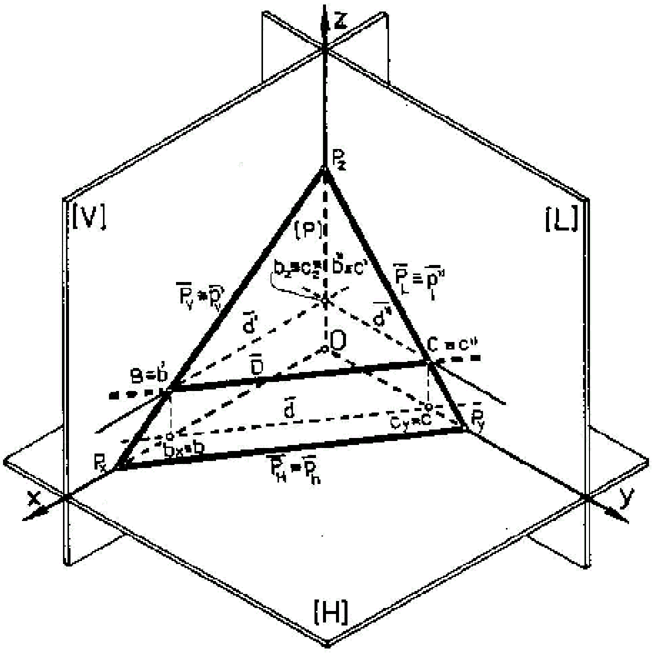


Figura 10.13

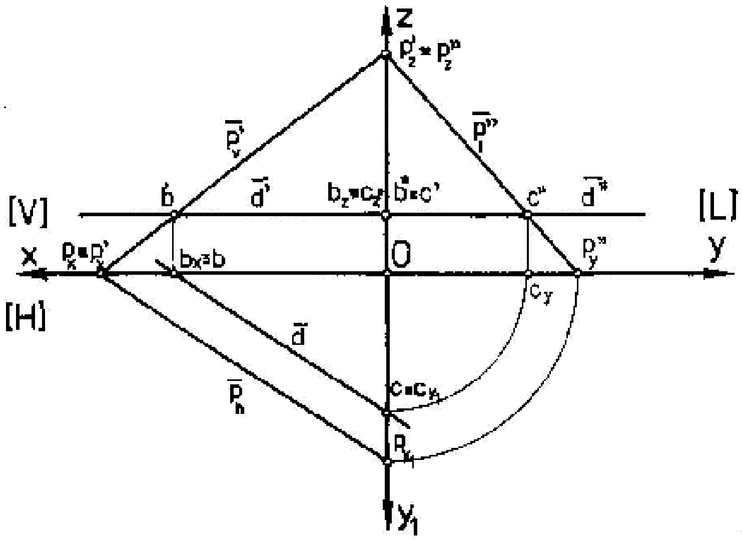


Figura 10.14

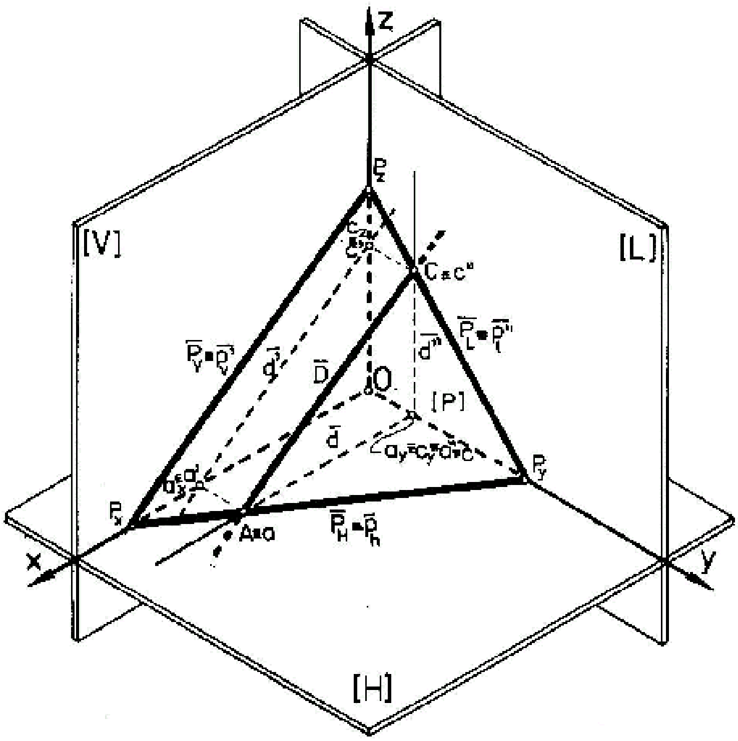


Figura 10.15

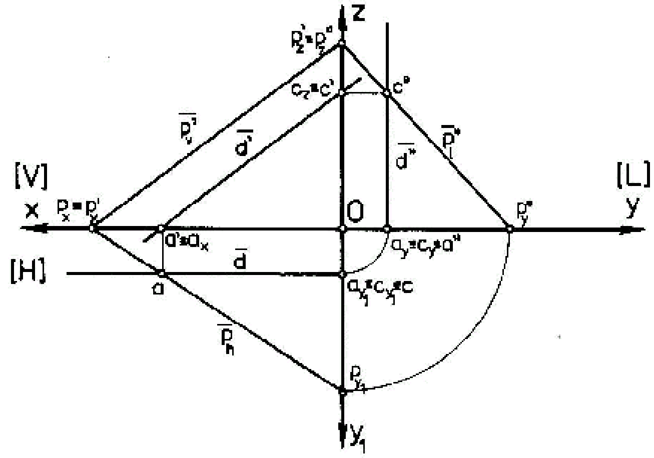


Figura 10.16

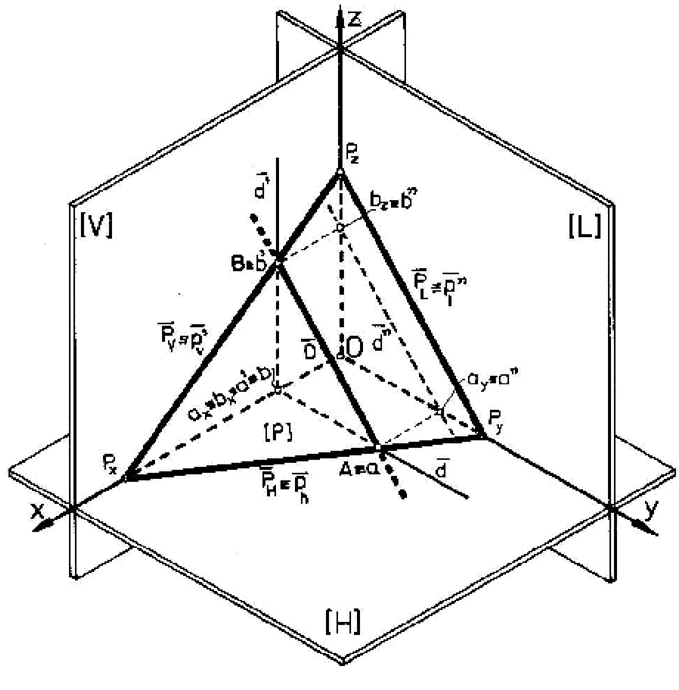


Figura 10.17

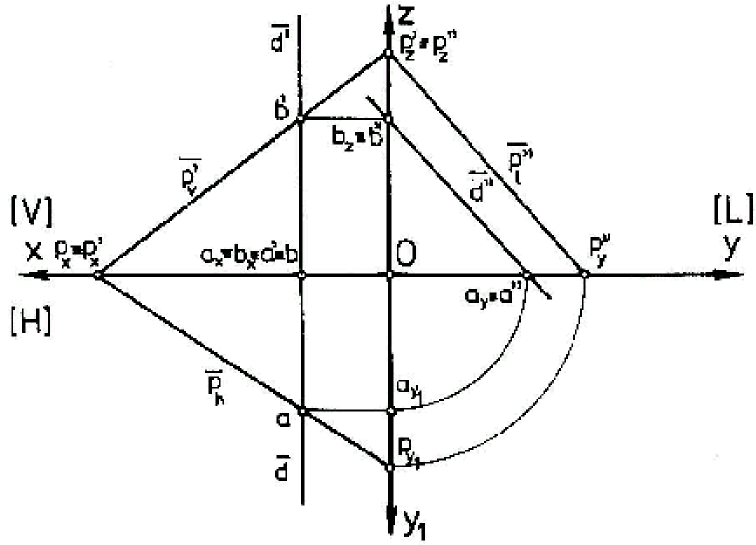


Figura 10.18

10.5.DREAPTA DE CEA MAI MARE PANTĂ A UNUI PLAN FAȚĂ DE UN PLAN DE PROIECȚIE. CONSTRUCȚIA PROIECȚIEI ÎN IMAGINE AXONOMETRICĂ ŞI ÎN EPURĂ

Dreapta de cea mai mare pantă a unui plan spațial oarecare, față de planele de proiecție, este dreapta cuprinsă în acel plan şi care formează cel mai mare unghi, în raport cu unul din planele de proiecție.`

Pentru a forma unghiul maxim, dreapta de cea mai mare pantă față de planul [**H**] de proiecție, este o dreaptă cuprinsă în planul [**P**] şi perpendiculară pe urma orizontală a acestuia (fig.10.19, fig.10.20).

Construcția grafică se obține în următoarea succesiune:

- $\mathbf{AB} \in [\mathbf{P}] \Rightarrow \mathbf{A} \in \mathbf{P_H}$ şi $\mathbf{B} \in \mathbf{P_L}$, cu condiția $\mathbf{AB} \perp \mathbf{P_H}$
- se proiectează punctul **B** pe planul orizontal şi rezultă **b**
- unghiul spațial maxim pe care planul [**P**] îl face cu planul orizontal este $\angle\mathbf{BAb}$
- se rabate punctul **B** în planul orizontal [**H**] şi rezultă punctul $\mathbf{B_1}$, la intersecția arcului de cerc cu raza **bB**, cu dreapta dusă din punctul **b** şi care formează, cu proiecția dreptei **AB** în planul orizontal, un unghi de 90°.

Observație

În figura 10.19 există următoarele relații între unghiuri:
$\angle\mathbf{BAP_x} = \angle\mathbf{BbA} = \angle\ \mathbf{bAP_x} = \angle\ \mathbf{AbB_1} = \mathbf{90°}$
$\angle\ \mathbf{BAb} = \angle\ \mathbf{baB_1} = \mathbf{max.}\ \angle\ \mathbf{[P][H].}$

Pentru determinarea în epură a unghiului maxim pe care planul [**P**] îl face cu planul orizontal, după trasarea proiecțiilor urmelor planului [**P**], se procedează astfel:

- fiind date $\mathbf{p_v'}$ şi $\mathbf{p_h}$ alegem un punct oarecare **a,** aflat pe urma orizontală $\mathbf{p_h}$ şi se trasează $\mathbf{ab} \perp \mathbf{p_h}$;
- din punctul **b** se duce perpendiculara pe **Ox** şi se determină, pe urma $\mathbf{p_v'}$, punctul **b'** care se rabate în planul orizontal, obținâd astfel, punctul $\mathbf{b_1}$, la intersecția arcului de cerc cu raza **bb'**, cu dreapta dusă din punctul **b** şi care formează un unghi de 90° cu proiecția dreptei **ab** de pe planul orizontal.

Unghiul maxim al dreptei de cea mai mare pantă, în adevărata mărime, este unghiul $\angle\mathbf{bab_1}$ (fig.10.20).

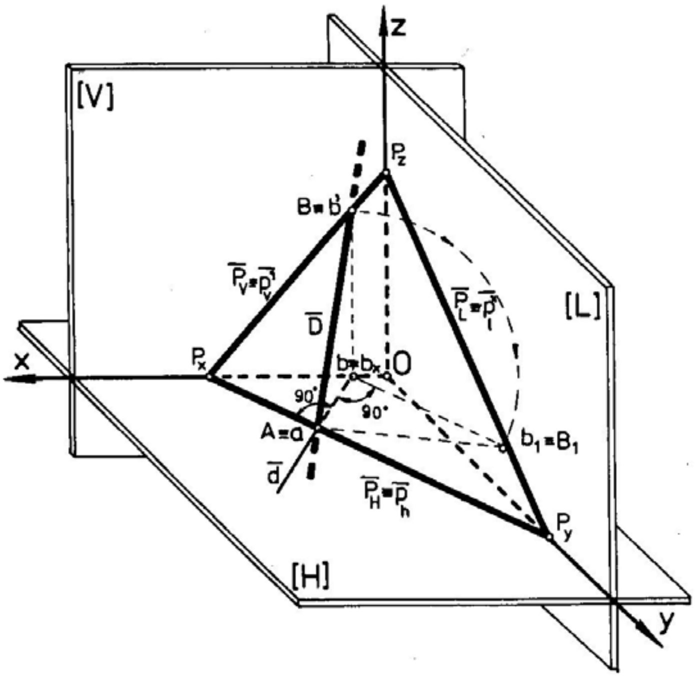


Figura 10.19

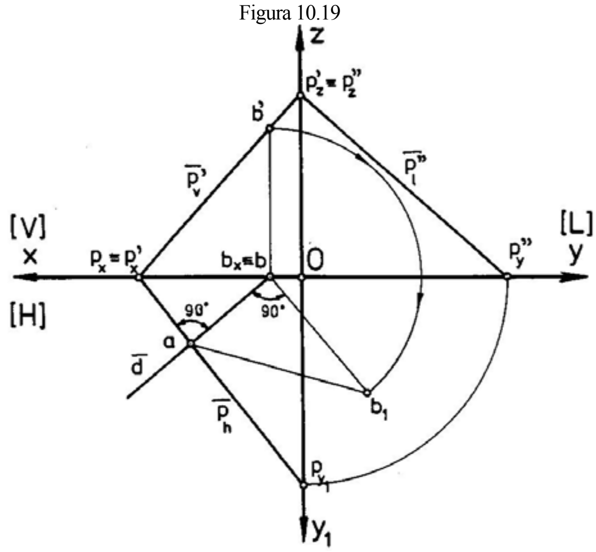


Figura 10.20

10.6. APLICAȚII

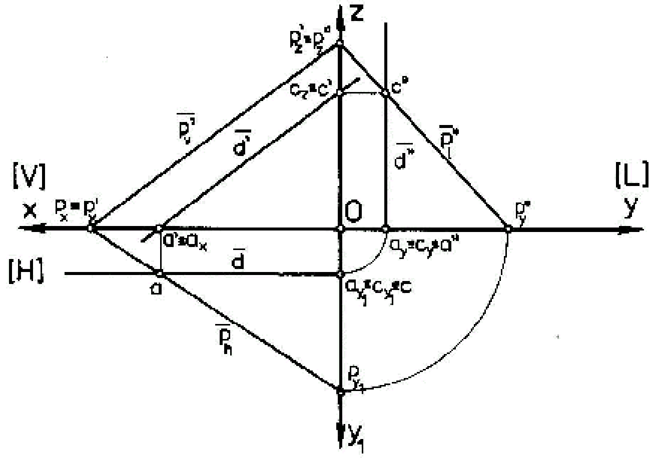
1. Se consideră planul [**P**] definit de urmele $\mathbf{P_H}$ şi $\mathbf{P_V}$. Să se determine unghiul pe care acest plan îl face cu planul vertical de proiecție [**V**].

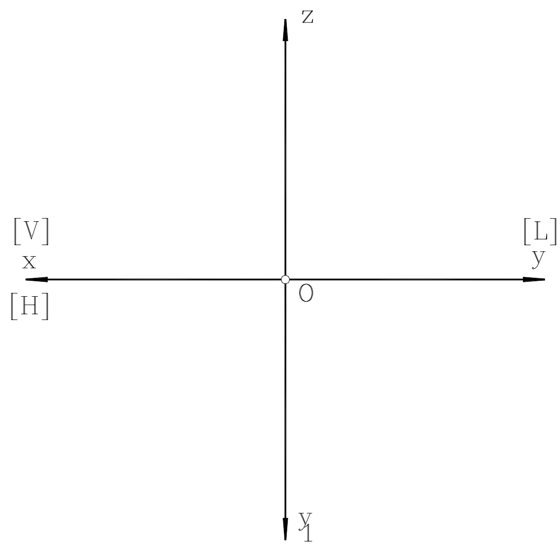
2. Unghiul pe care un plan [**Q**] îl face cu planul orizontal de proiecție este $\angle\alpha = \angle\mathbf{BAb}$, unde $\mathbf{A} \in$ [**H**], $\mathbf{B} \in$ [**V**] (dreapta **D** = **AB** este dreapta de cea mai mare pantă a planului [**Q**], față de planul orizontal).

3. Pe acelaşi desen să se traseze o orizontală, o verticală şi o laterală a aceluiaşi plan [**P**], dat prin urmele sale. Să se proiecteze triunghiul [**ABC**] rezultat din intersecția acestor drepte particulare conținute în planul [**P**] ($\mathbf{MN} \parallel \mathbf{P_H}$, $\mathbf{EF} \parallel \mathbf{P_V}$, $\mathbf{RS} \parallel \mathbf{P_L}$).

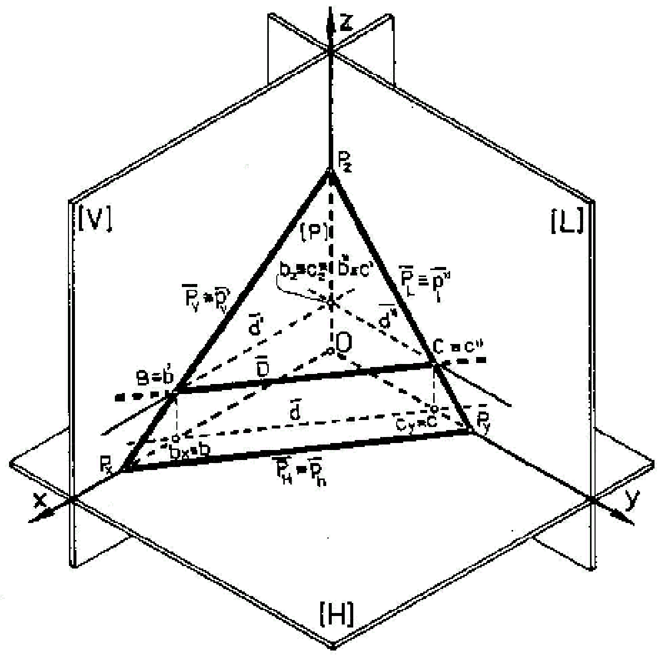
4. Să se construiască dreapta **D** = **AB**, o orizontală a unui plan [**P**], cunoscând numai urma orizontală a acestuia, $\mathbf{P_H} \equiv \mathbf{p_h}$. Cunoscând aceste elemente (**D** şi $\mathbf{P_H}$) se pot construi grafic şi celelalte două urme ale planului ? Explicați procedura în succesiunea ei.

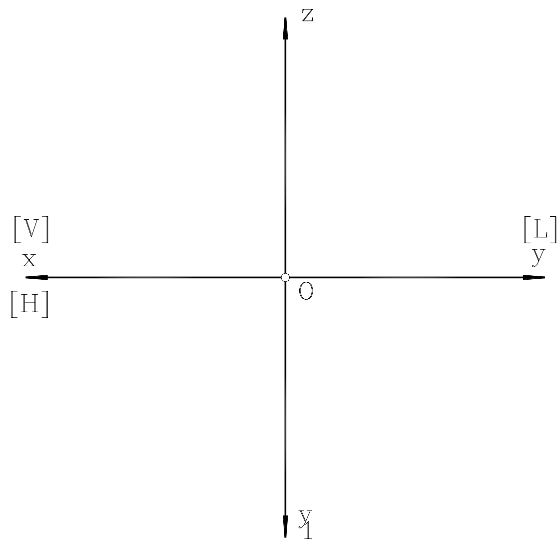
5. Având dată epura să se construiască imaginea axonometrică.





6. Având dată imaginea axonometrică să se construiască epura.




z
[V]
x
[H]
[L]
y
O
y
1