15.SECȚIUNI PLANE ÎN CORPURI GEOMETRICE

Determinarea secțiunii plane în corpuri geometrice se reduce, practic, la aflarea punctelor de intersecție dintre muchiile, sau un număr suficient de generatoare (în cazul corpurilor cilindro- conice, sferă, etc.) şi planul secant, care poate fi un plan oarecare, sau un plan particular (proiectant de regulă). Adevărata mărime a poligonului de secționare, sau a curbei astfel rezultate, se poate construi grafic apelând la una din metodele geometriei descriptive, de obicei la metoda rabaterii.

15.1. SECȚIUNI PLANE ÎN POLIEDRE

15.1.1.CONSTRUCȚIA IMAGINII AXONOMETRICE ŞI A EPUREI

Se consideră piramida triunghiulară oblică {**SABC**}, cu baza [**ABC**] situată în planul orizontal. Să se stabilească vizibilitatea proiecțiilor şi adevărata mărime a poligonului rezultat din secționarea piramidei cu un plan oarecare [**P**], ce intersectează muchiile acesteia.

În triplă proiecție ortogonală, să se determine poligonul [**EFG**] rezultat din secționarea piramidei cu planul secant oarecare [**P**], dat prin urmele sale ($\mathbf{P_H}$,$\mathbf{P_V}$). În epură, să se afle adevărata mărime a poligonului de secționare [**EFG**] (fig.15.1, fig.15.2).

Observații

- vizibilitatea în epură corespunde cazului prezentat în figurile 14.1, respectiv 14.2;
- adevărata mărime a poligonului de secționare s-a aflat utilizând metoda rabaterii,
- la acelaşi rezultat se ajunge şi dacă se foloseşte metoda schimbării planelor de proiecție.

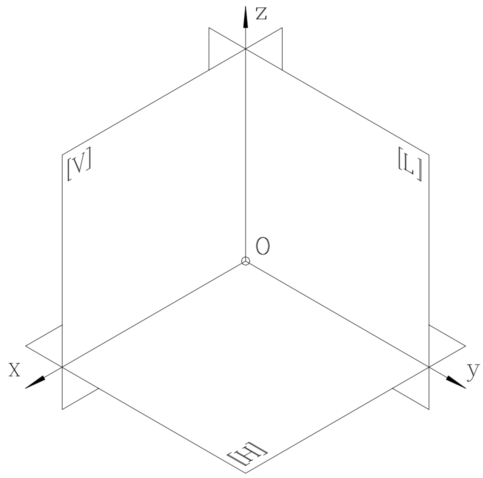
15.1.2.DETERMINAREA ADEVĂRATEI MĂRIMI A POLIGONULUI DE SECȚIONARE

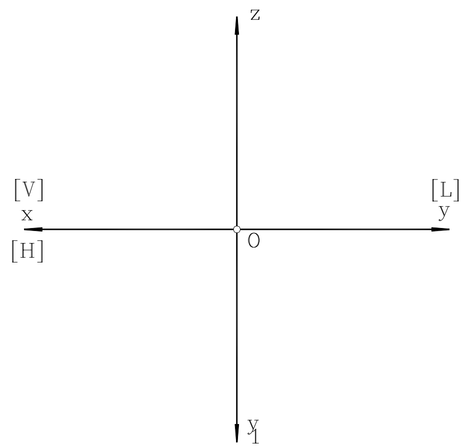
Pentru determinarea adevăratei mărimi a poligonului rezultat din secționarea unei piramide înclinate cu un plan secant (fig.15.2) se apelează la una din metodele geometriei descriptive (v. cap.11,12, sau 13). De regulă şi din motive de facilitate se apelează la metoda rabaterii şi poligonul de secționare Δ**EFG** rezultă în următoarea succesiune :

- se rabate unul din punctele de intersecție dintre urma $\mathbf{p'_v}$ cu proiecțiile muchiilor laterale ale piramidei ($\mathbf{v'_1}$,$\mathbf{v'_2}$, sau $\mathbf{v'_3}$), prin rotația în jurul axei de rabatere $\mathbf{p_h}$ (ex. $\mathbf{v'_3}$) (din proiecția în plan orizontal $\mathbf{v_3}$ se trasează perpendiculara pe urma orizontală a planului [**P**], axa rabaterii, iar din $\mathbf{v'_3}$ se duce arcul de cerc de rază $\mathbf{R = p_x v'_3}$ şi la intersecția cu perpendiculara din $\mathbf{v_3}$ rezultă un al doilea punct al urmei $\mathbf{p'_v}$ rabătută, $\mathbf{p_{1v}}$; prin acest punct şi $\mathbf{p_x}$ va trece urma verticală rabătută $\mathbf{p_{1v}}$),
- se trasează orizontalele planului [**P**] care trec prin vârfurile proiecției poligonului de intersectare pe planul vertical: **e', f', g'**; distanțele de la axa **Ox** la aceste puncte reprezintă cotele fiecăruia dintre ele şi, ca urmare, prin arcele de cerc duse din intersecția orizontalelor planului trasate, cu urma $\mathbf{p'_v}$, se rabat pe noua urmă $\mathbf{p'_{1v}}$ aceste cote,
- din punctele rezultate la intersecția arcelor de cerc cu urma $\mathbf{p'_{1v}}$, se trasează paralele la urma orizontală a planului [**P**] (axa rabaterii),
- se duc perpendiculare din vârfurile proiecției poligonului de intersectare pe planul orizontal, **e, f, g** şi, la intersecția acestora cu paralelele anterior trasate, se vor afla vârfurile triunghiului Δ**EFG** (poligonul de intersecție), în adevărată mărime.

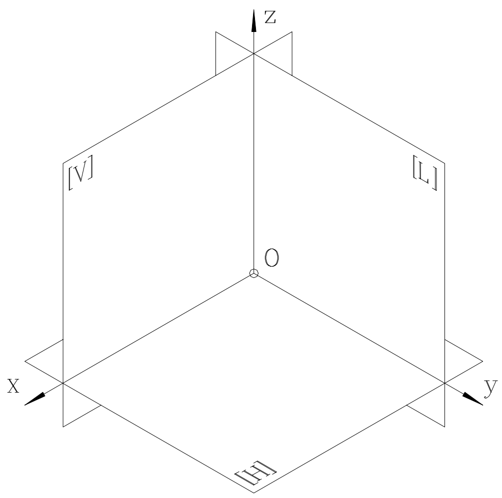
15.2.APLICAȚII

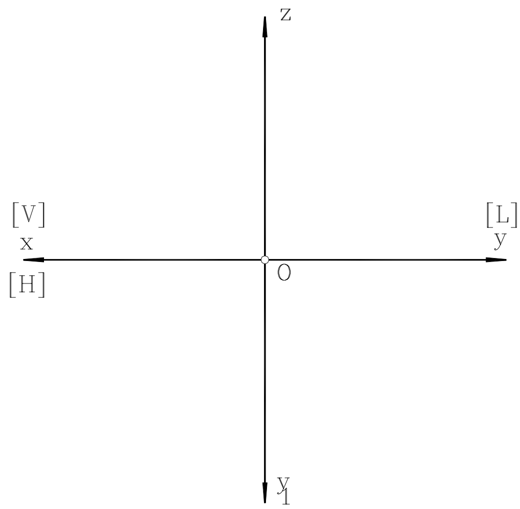
1. Fie prisma triunghiulară oblică, având bazele Δ[**ABC**] şi Δ[$\mathbf{A_1B_1C_1}$] situate, prima în planul orizontal de proiecție, iar a doua într-un plan perpendicular pe planul vertical de proiecție şi înclinat față de planul orizontal. Un planul [**P**] secant secționează această prismă. Să se determine, în epură, adevărata mărime a triunghiului rezultat în urma secționării.



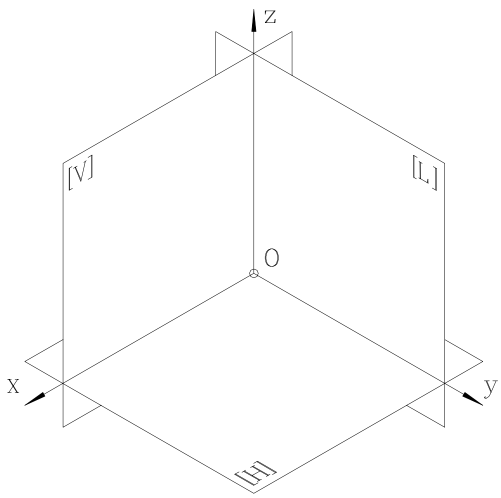


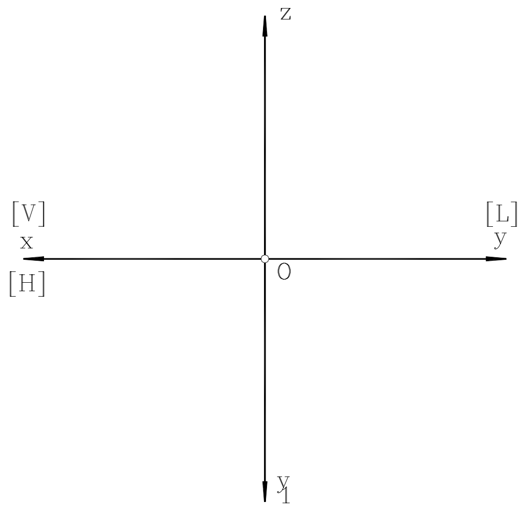
2. O prismă triunghiulară oblică, cu bazele aflate pe două plane de proiecție, este secționată cu un plan perpendicular pe al treilea plan de proiecție. Să se determine adevărata mărime a poligonului de secționare.





3. Se consideră un con circular drept $\{S_1O_1\}$, unde S_1 este vârful conului, iar O_1 centrul cercului bazei acestuia, care se află în planul orizontal de proiecție. Ce figură geometrică plană rezultă prin secționarea acestui con cu un plan de capăt (perpendicular pe planul vertical)?





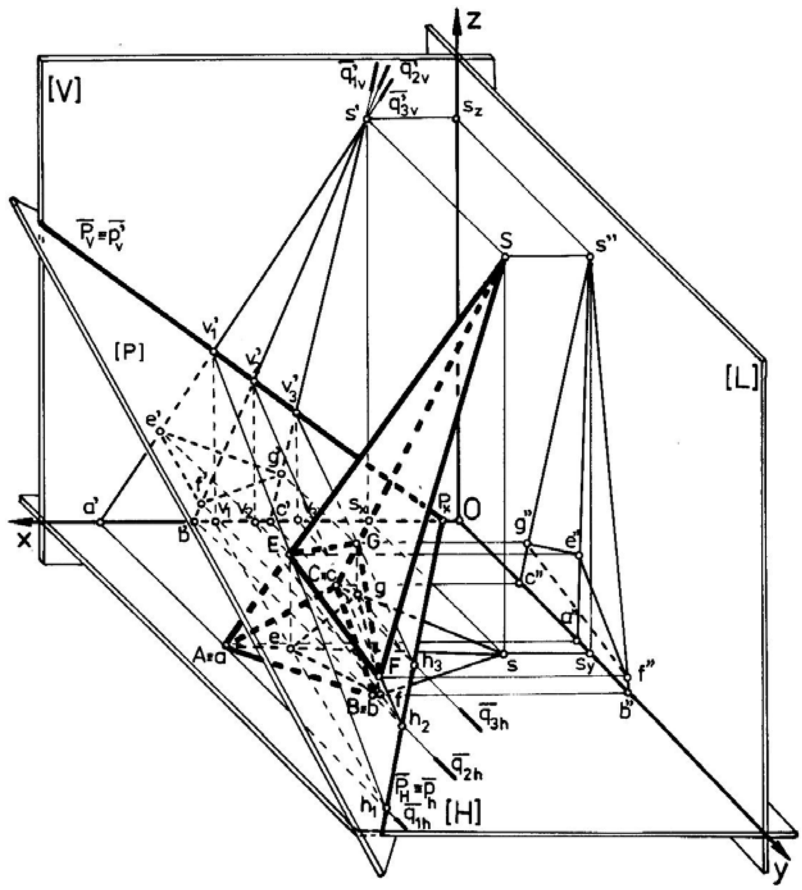


Figura 15.1

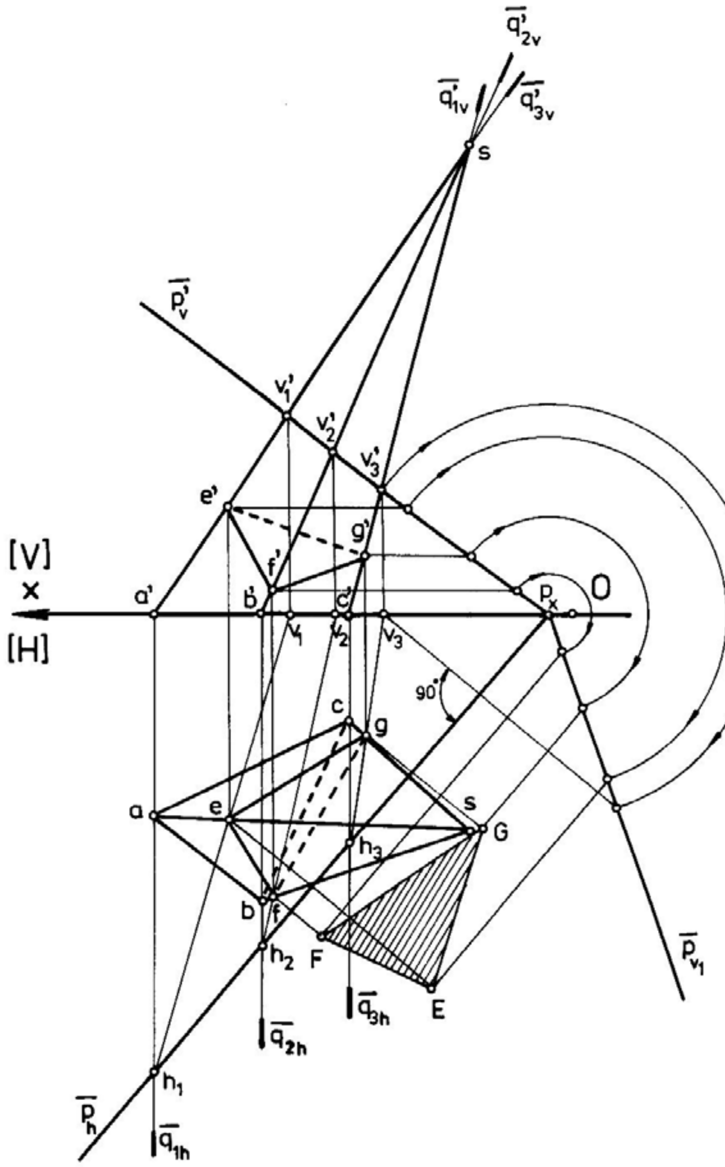


Figura 15.2

Observație

Se va avea în vedere teorema lui **Dandelin**, care afirmă că:

- dacă planul dus prin vârful conului, paralel la planul secant nu secționează conul, atunci figura geometrică plană rezultată în urma secționării cu planul secant dat este o elipsă,
- dacă planul dus prin vârful conului, paralel la planul secant este tangent la con, atunci figura geometrică plană rezultată este o parabolă,
- dacă planul dus prin vârful conului, paralel la planul secant secționează conul, atunci figura geometrică plană rezultată este o hiperbolă.

4. Se consideră un con circular drept având baza un cerc cu centrul în **Ω** și raza **R**, iar vârful conului **S**. Conul este secționat cu un plan oarecare [**P**]**(p_h,p_v',p_l'')** a cărui urmă verticală **P_v = p_v'** intersectează axa **Ox** în punctul **P_x** și trece prin punctul **V**, iar urma orizontală trece prin punctul **H**. Să se afle conturul secțiunii realizate de planul [**P**] în con. Să se determine apoi adevărata mărime. (Planul [**P**] se construiește cunoscând punctul de intersecție dintre urmele sale pe planul vertical și orizontal, precum și câte un punct situat pe fiecare dintre aceste două urme: **V**, respectiv **H**).

MOD DE LUCRU

Se vor respecta etapele de mai jos:

- se reprezintă în epură cele trei plane de proiecție,
- se construiește conul și planul secant [**P**],

- se alege un număr de generatoare i (i=1,...,n), fiind indicate în mod special cele ce trec prin punctele particulare. În fig.15.3 s-au ales 12 generatoare (**SA, SB, SC, SD, SE, SF, SG, SI, SJ, SK, SL, SM**) care se intersectează cu planul [**P**] în punctele ***I***, ***II***,..., ***XII***,
- se aleg convenabil plane auxiliare, care conțin generatoarele și au o poziție particulară față de planele de proiecție (în cazul prezentat planele alese sunt perpendiculare pe planul vertical):

$\mathbf{SA \in [Q_1] \Rightarrow s'a' \equiv q'_{1v};\ a \in q_{1h}}$

$\mathbf{SB, SM \in [Q_2] \Rightarrow s'b' \equiv s'm' \Rightarrow q'_{2v};\ b,m \in q'_{2v}}$

$\mathbf{SG \in [Q_7] \Rightarrow s'g' \equiv q'_{7v};\ g \in q_{7h}}$

$\mathbf{[Q_1] \cap [P] \Rightarrow V_1H_1(v_1h_1; v'_1h'_1)}$

$\mathbf{[Q_2] \cap [P] \Rightarrow V_2H_2(v_2h_2, v'_2h'_2)}$

$\mathbf{[Q_7] \cap [P] \Rightarrow V_7H_7(v_7h_7; v'_7h'_7)}$

$\mathbf{V_1H_1 \cap SA \Rightarrow \mathit{I}(1,1',1'')}$

$\mathbf{V_2H_2 \cap SB \Rightarrow \mathit{II}(2,2',2'')}$

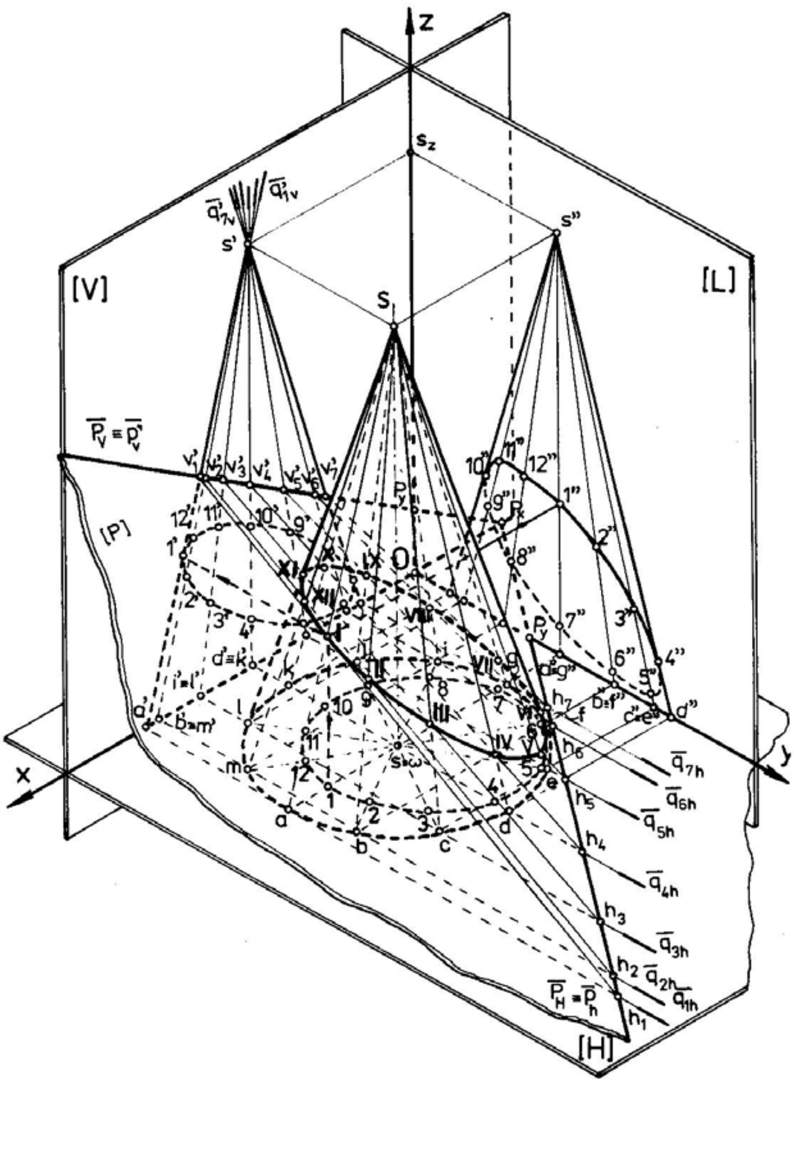
$\mathbf{V_2H_2 \cap SM \Rightarrow \mathit{XII}(12,12',12'')}$

$\mathbf{V_7H_7 \cap SG \Rightarrow \mathit{VII}(7,7',7'')}$.

In acest mod s-au obținut proiecțiile punctelor rezultate din secționarea conului cu planul secant. Poziția secțiunii obținute fiind oarecare în spațiu, se va afla adevărata mărime folosind metoda rabaterii (fig.15.4).

EXEMPLU NUMERIC

Cunoscând coordonatele vârfului conului **S**(45,40,100), ale centrului cercului bazei, **Ω**(45,40,0) şi raza acestui cerc, **R** = 30 mm., să se determine curba rezultată în urma secționării conului cu planul [**P**], construit cunoscând punctele $\mathbf{P_x}$(-24,0,0), **V**(70,0,50) şi **H**(75,130,0) (fig.15.3, fig.15.4).



igura 15.3

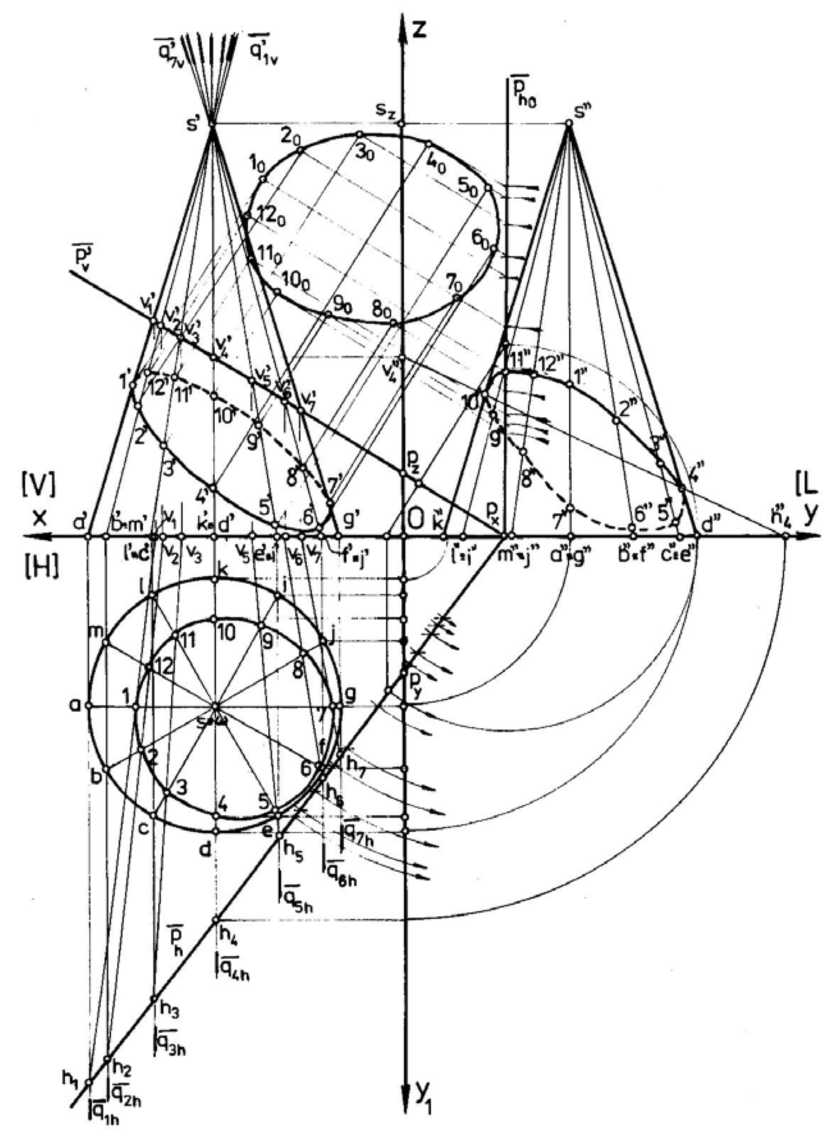


Figura 15.4