

PUNCTUL ÎN SCRIPTIVĂ

GEOMETRIA DE-

2. TRIPLA PROIECȚIE ORTOGONALĂ A PUNCTULUI. EPURA PUNCTULUI

2.1. CONSTRUCȚIA PROIECȚIEI PUNCTULUI SPAȚIAL ÎN IMAGINE AXONOMETRICĂ

Prin asocierea, în relație de perpendicularitate, a trei plane spațiale pe care se proiectează un punct, se obține tripla proiecție ortogonală a punctului, în sistemul paralel ortogonal (fig.2.1). Imaginea intuitivă, axonometrică, a celor trei plane: orizontal-[H], vertical-[V] și lateral-[L] se numește triedru de proiecție.

Se consideră punctul A din spațiu, cunoscut ca poziție. Pentru a obține proiecțiile acestuia pe cele trei plane ortogonale, trebuie să mai cunoaștem încă un element al acestui punct, ce poate fi o coordonată a acestuia, sau una din proiecții, celelalte elemente rezultând în urma construcției grafice.

Presupunem cunoscut punctul A , ca poziție în spațiu și proiecția sa pe planul orizontal [H], a (fig.2.1), situată la intersecția proiectantei coborâtă din A pe planul [H].

Din punctul a se duc proiectante pe planele vertical și lateral și la intersecția acestora cu axele de coordonate Ox și Oy obținem punctele notate cu a_x și a_y . Din aceste puncte se ridică proiectante în planele vertical și lateral iar la intersecția acestora cu proiectantele duse pe aceste plane din punctul spațial A rezultă proiecțiile a' , în planul [V] și a'' , în planul [L]. În continuare se trasează proiectanta pe planul lateral din proiecția a' și proiectanta pe planul vertical din proiecția a'' ; acestea se intersectează într-un punct situat pe axa Oz , notat cu a_z .

Sintetic, această succesiune a construcției imaginii intuitive a proiecției punctului A , atunci când este cunoscută poziția spațială a acestuia și proiecția sa pe planul [H], a , este următoarea (a fiind considerat cunoscut, se alege undeva pe proiectanta \overline{Aa}):

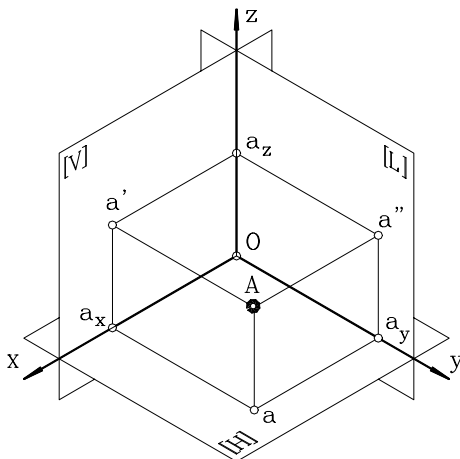


Figura 2.1

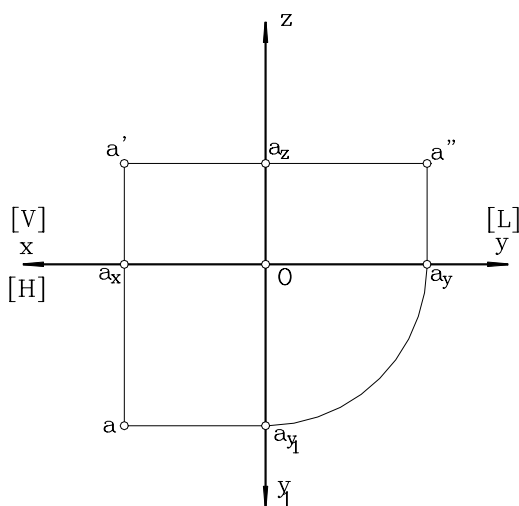


Figura 2.2

- $\overline{Aa} \perp [H] \ (\overline{Aa} \cap [H] = a)$
- $a \in [H]$
- $\overline{aa_x} \perp [V]$
- $\overline{aa_x} \perp [H] \Rightarrow \overline{aa_x} \cap [V] = a_x \in Ox$
- $\overline{aa_y} \perp [L]$
- $\overline{aa_y} \perp [H] \Rightarrow \overline{aa_y} \cap [L] = a_y \in Oy$
- $\overline{a'a'} \in [V]$
- $\overline{Aa'} \perp [V] \Rightarrow \overline{a'a'} \cap \overline{Aa'} = a' \in [V]$
- $\overline{a_y a''} \in [L]$
- $\overline{Aa''} \perp [L] \Rightarrow \overline{a_y a''} \cap \overline{Aa''} = a'' \in [L]$
- $\overline{a' a_z} \in [V]$
- $\overline{a' a_z} \perp [L] \Rightarrow \overline{a' a_z} \cap [L] = a_z \in Oz$
- $\overline{a'' a_z} \in [L]$
- $\overline{a'' a_z} \perp [V] \Rightarrow \overline{a'' a_z} \cap [V] = a_z \in Oz$

Punctele a_x, a_y și a_z reprezintă coordonatele punctului spațial A și se numesc abscisa, depărtarea, respectiv cota acestuia. În cazul aplicațiilor numerice, punctul $A(a_x, a_y, a_z)$ este dat prin valorile numerice ale coordonatelor sale.

Deoarece planele de proiecție sunt considerate infinite, acestea împart spațiul în opt triedre de proiecție, notate cu cifre romane: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.

Semnul fiecărei coordonate a punctelor aflate în aceste triedre sunt prezentate în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1

Coordonată\ Triedrul de proiecție	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
abscisa a_x	+	+	+	+	-	-	-	-
Depărtarea a_y	+	-	-	+	+	-	-	+
cota a_z	+	+	-	-	+	+	-	-

Imaginea intuitivă, sau tripla proiecție ortogonală a punctului A , permite sesizarea relației spațiu-plan ce se realizează între elementul din spațiul tridimensional, punctul A și imaginea plană a acestuia, respectiv proiecțiile a, a' și a'' . Punctul A este unic definit de proiecțiile sale, deoarece figura geometrică obținută (fig.2.1) reprezintă o prismă dreptunghiulară dreaptă (caz particular un cub, atunci când $a_x = a_y = a_z$) care are elementele componente unic definite. Deci și punctele de intersecție ale muchiilor sale, care nu sunt altcineva decât punctul spațial A , coordonatele acestuia a_x, a_y, a_z , respectiv proiecțiile a, a', a'' sunt unic definite.

Așadar, prin tripla proiecție ortogonală a punctului, se obține o corespondență biunivocă între elementul spațial și proiecțiile sale. Pentru un punct spațial se poate observa că sunt suficiente doar două proiecții pentru ca acesta să fie unic definit în spațiu.

2.2. DEFINIREA EPUREI. CONSTRUCȚIA EPUREI PUNCTULUI SPAȚIAL

Prin rabaterea planului orizontal, în sensul prezentat în figura 2.1, precum și a planului lateral, în sensul prezentat, până la supra-punerea acestora peste planul vertical $[V]$ (prin rotirea în jurul axei Ox , respectiv Oz a planelor $[H]$ și $[L]$) triedrul de proiecție devine un plan de proiecție, care poartă denumirea de epură. Procedând în acest mod, tripla proiecție ortogonală a punctului devine

epura punctului (fig.2.2), în care punctul spațial este definit numai de proiecțiile acestuia. Odată cu rabaterea planelor de proiecție se rabat și elementele geometrice cuprinse în acele plane. Cu alte cuvinte, în epură elementele spațiale nu mai apar, ele rămânând în spațiu, iar în planul epurei vor fi reprezentate doar imaginile acestora, pe cele trei plane de proiecție.

Axa Oy din triedrul de proiecție este axă comună planelor $[H]$ și $[L]$, iar după rabatere vor rezulta două axe, fiecare însoțind în rabatere planul căruia îi aparține. Axa corespunzătoare planului horizontal se notează cu Oy_1 , iar cu Oy axa corespunzătoare planului lateral (fig.2.2).

După cum s-a arătat, un punct spațial A este caracterizat de următoarele elemente geometrice: coordonatele punctului a_x, a_y, a_z și proiecțiile punctului a, a', a'' . Pentru construcția epurei (fig.2.2), ca și în cazul construcției grafice a triplei proiecții ortogonale a punctului în imagine intuitivă (axonometrică), este necesar un număr minim de elemente dintre cele ce caracterizează punctul spațial. Presupunem cunoscute, de exemplu, punctele a și a' , dispuse în epură pe aceeași proiectantă, paralelă cu axa Oz , care intersectează axa Ox în punctul a_x . În continuare, pentru aflarea grafică a celorlalte elemente, se procedează în următoarea succesiune:

$$\overline{a a'} \perp Oy_1$$

$$\overline{a a'} \cap Oy_1 = a_{y1}$$

$$Oa_{y1} = Oa_y \text{ (se rabate punctul } a_{y1} \text{ pe planul lateral [L])}$$

$$\overline{a' a''} \perp Oz$$

$$\overline{a' a''} \cap Oz = a_z$$

$$\overline{a, a''} \parallel Oz$$

$$\overline{a'' a_z} \perp Oz$$

$$\overline{a, a''} \cap \overline{a'' a_z} = a''$$

Punctul a cărui proiecție, în epură, am obținut-o, se situează în primul triedru de proiecție. Pentru obținerea epurei altui punct, aflat într-unul din triedrele II - VIII, procedeul este asemănător.

2.3. APLICAȚII

1. Să se explice construcția grafică a triplei proiecții ortogonale și a epurei corespunzătoare, pentru un punct spațial B , atunci când se cunosc proiecțiile b și b'' , dacă punctul B aparține triedrului II de proiecție ($b \in [H], b'' \in [L]$).
2. Pe același desen, să se reprezinte, în imagine axonometrică, două puncte A și B , cunoscând poziția spațială a acestora (A, B) și proiecțiile a , respectiv b' . Dacă punctul A se află în triedrul III și B în triedrul VII, să se construiască simetricile acestor puncte față de axa Oz .
3. Punctul A are coordonatele a_x, a_y și a_z , cunoscute. Dacă A aparține triedrului I, să se demonstreze grafic, în imagine axonometrică și în epură, că simetricul său, B , față de planul lateral de proiecție, se află în triedrul V de proiecție, iar simetricul său, M , față de planul vertical, în triedrul II de proiecție. Dacă $a_x = a_y = a$, să se demonstreze că :

$$BM = a \sqrt{2}$$

4. Să se explice prin ce se caracterizează un punct spațial care se află, succesiv, pe unul din planele de proiecție ($[H], [V], [L]$). Explicațiile vor fi însoțite de imaginea axonometrică și epura fiecărui punct.
5. Să se reprezinte, în imagine intuitivă și în epură, punctele A, B, C, E, F, G, M, N situate în triedrele I, II, III, IV, V, VI, VII VIII de proiecție.
6. Să se reprezinte axonometric și în epură:
 - ◆ punctul A de coordonate a_x, a_y și a_z ;
 - ◆ simetricile lui A față de $[H], [V], [L]$;
 - ◆ simetricile lui A față de axele de coordonate Ox, Oy, Oz ;
 - ◆ simetricul lui A față de punctul O .

Să se menționeze pentru fiecare punct triedrul din care acesta face parte.

MOD DE LUCRU:

Se vor respecta etapele de execuție grafică prezentate în continuare:

- se studiază semnele coordonatelor, ca urmare se menționează triedrul din care face parte punctul A ;
- se reprezintă axonometric planele de proiecție (se vor nota planele și axele de coordonate);
- se reprezintă cele trei coordonate, obținând cele trei proiecții a, a', a'' :
 - ◆ a - la intersecția proiectantelor duse din a_x și din a_y ,
 - ◆ a' - la intersecția proiectantelor duse din a_x și din a_z ,
 - ◆ a'' - la intersecția; proiectantelor duse din a_y și din a_z ;
- la intersecția proiectantelor perpendiculare pe plane duse din a, a', a'' rezultă A ;

- se reprezintă în epură planele de proiecție (se vor nota axele de coordonate);
- se reprezintă cele trei coordonate, rezultând a, a', a'' în același mod ca și la construcția axonometrică.

EXEMPLU NUMERIC

Fie punctul **A** de coordonate $a_x = 60, a_y = 30, a_z = 20$ (scara de reprezentare a acestor valori se va alege convenabil). Deoarece semnul coordonatelor este pozitiv, rezultă că acesta se află în primul triedru de proiecție (fig.2.3 și fig.2.4): **A** (60,30,20). Simetricul lui **A**, față de planul orizontal de proiecție **[H]**, va aparține triedrului IV, deoarece $-a_z = a_z$, și se va nota **A₄**: **A₄** (60,30,-20); simetricul față de planul vertical **[V]**, se află în triedrul II deoarece $-a_x = a_x$ și se notează **A₂**: **A₂** (60,-30,20); simetricul față de planul lateral, **[L]**, se află în triedrul V, deoarece $-a_y = a_y$: **A₅** (-60,30,20). În mod asemănător, se continuă rezolvarea exemplului numeric.

În tabelul 2.2 sunt prezentate mai multe variante de coordonate numerice ale punctului **A**, care pot fi utilizate în sensul extinderii aplicației grafice.

Tabelul 2.2

Nr.variantei numerice	1	2	3	4	5	6	
A	a_x	-40	40	30	50	-30	-40
	a_y	50	60	-50	20	-40	20
	a_z	20	-20	30	-30	-50	50

Tabelul 2.2 (continuare)

Nr.variantei numerice	7	8	9	10	11	12	
A	a_x	50	-50	20	-50	-40	20
	a_y	30	-40	-30	30	-30	-50
	a_z	40	30	-40	-40	50	-40

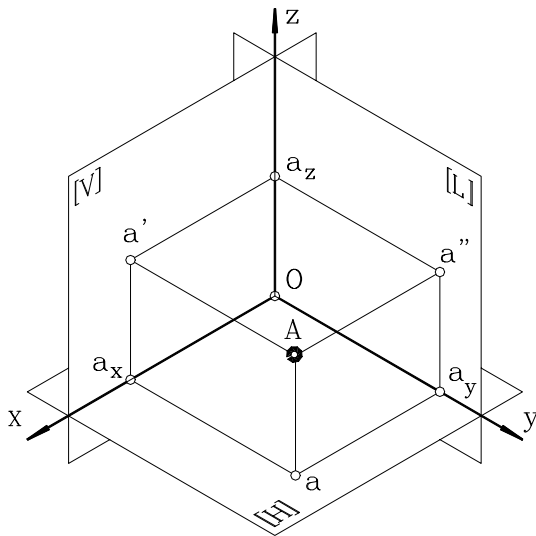


Figura 2.3

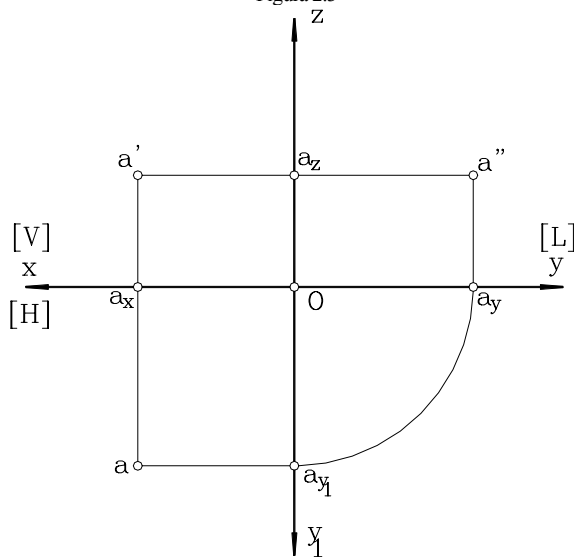
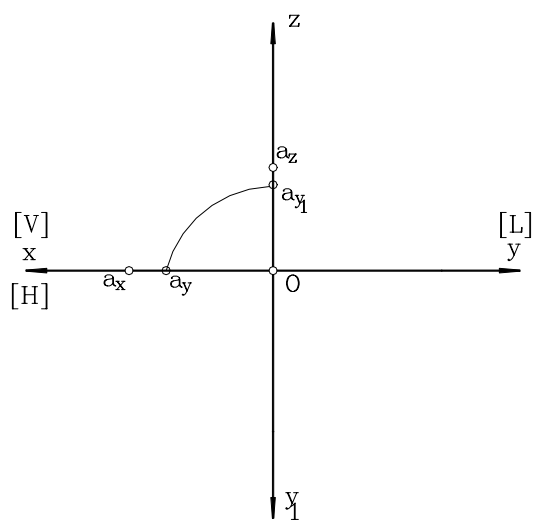
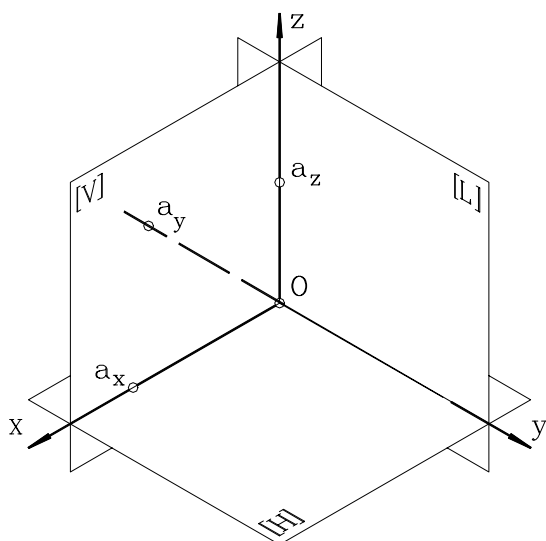
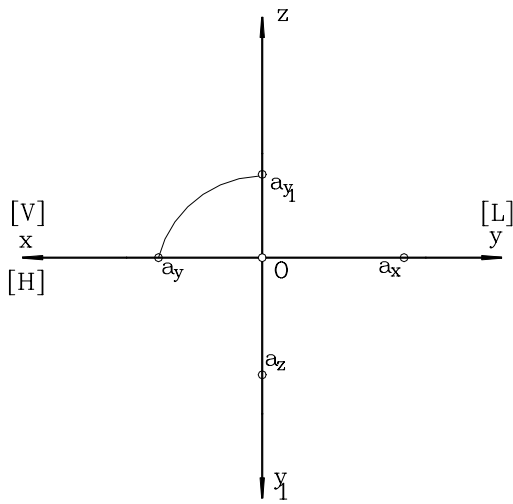
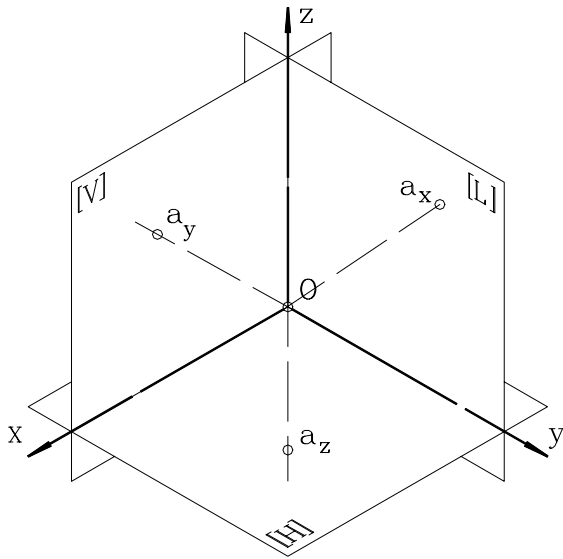


Figura 2.4

7. Să se reprezinte axonometric și în epură:
punctul A de coordonate a_x , a_y și a_z ;



8. Să se reprezinte axonometric și în epură:
punctul A de coordonate a_x , a_y și a_z ;



9. Să se reprezinte axonometric și în epură:
punctul A, cunoscând proiecția pe planul H, a, a acestuia.

