

2. FORȚE EXTERIOARE ȘI FORȚE INTERIOARE

2.1. Forțe exterioare. Clasificare

Construcțiile inginerești sunt realizate din unul sau mai multe (ER). În Rezistența materialelor se analizează fiecare ER sau subansamblu **numai în situația de echilibru sub acțiunea forțelor exterioare**, așa că valoarea torsorului forțelor exterioare, ce acționează asupra unui ER sau subansamblu, este totdeauna egal cu zero.

În cele câte urmează prin **forță** se va înțelege noțiunea de **forță generalizată: forță sau moment**.

În Rezistența materialelor noțiunea de **forță exterioară** cuprinde atât **forțele aplicate** pe suprafața ER cât și cele **distribuite pe întreaga masă a materialului** cum sunt: greutatea, forțele de inerție, forțele electromagnetice, datorită dilatării împedicate, etc., precum și **forțele de legătură dintre (ER)** numite reacțiuni.

Forțele exterioare se pot clasifica astfel:

a) după **natura** lor:

- **sarcini** sau **forțe active**;
- **reacțiuni** sau **forțe de legătură**.

b) după locul de aplicare:

- **de suprafață** sau **de contur**, ce se aplică în exteriorul ER;
- **de volum** sau **masice**, ce sunt distribuite în întregul volum al ER.

c) după mărimea suprafeței pe care se aplică, forțele de suprafață pot fi:

- **concentrate**, ce se consideră aplicate într-un punct și constituie o schematizare a forțelor distribuite pe o suprafață foarte mică, în raport cu suprafața (ER), (fig. 2.1,a);

- **distribuite**, ce se repartizează **uniform** sau cu **intensitate variabilă** pe o suprafață sau în lungul unei linii (fig. 2.1,b).

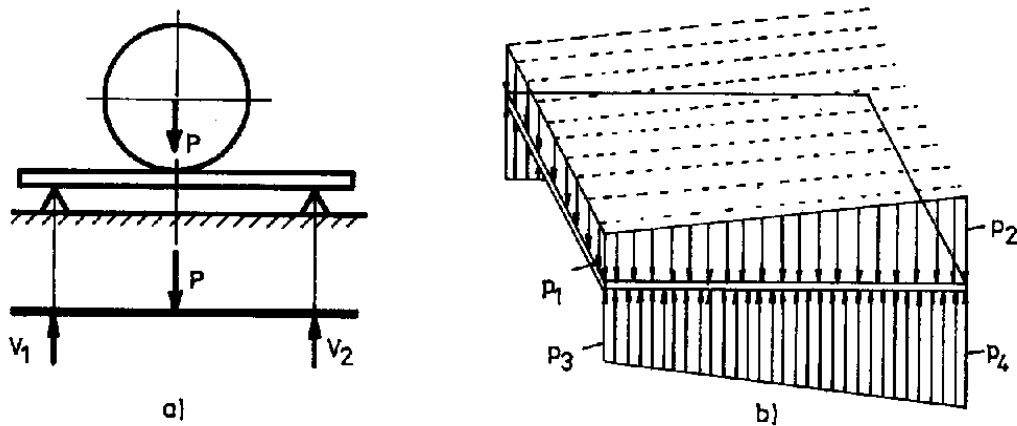


Fig. 2.1.

Forțele concentrate se măsoară în N, kN, MN, etc. iar cele distribuite pe suprafață se măsoară în N/m^2 sau Pa, N/mm^2 sau MPa, kN/m^2 , etc. iar cele distribuite în lungul unei linii în N/m, kN/m, etc.

Sarcinile aplicate (ER) pot fi clasificate astfel:

a) După **proveniență**:

- sarcini permanente**, ce-și păstrează intensitatea constantă (exemplu: greutatea proprie a ER);
- sarcini utile** formate din acelea ce rezultă din rolul funcțional al ER (exemple: greutatea autovehiculelor pentru un pod, încărcătura pentru mijloacele de transport, forța de așchiere pentru scule, etc.);
- sarcini accesorii** ce apar în timpul funcționării (exemple: forțe de inerție, forțe de frecare, dilatare împiedicată, etc.);
- sarcini accidentale**, ce acționează intermitent și neregulat (exemple: acțiunea vântului, greutatea zăpezii, etc.);
- sarcini extraordinare**, ce acționează întâmplător dar pot avea efect catastrofal (exemple: incendiile, exploziile, inundațiile, cutremurele de pământ, etc.).

Sarcinile permanente, utile și accesorii se numesc **sarcini fundamentale**.

b) După **modul de acțiune în timp** se pot clasifica în:

-**sarcini statice**, ce se aplică lent iar apoi își păstrează intensitatea constantă (fig.2.2,a);

-**sarcini dinamice**, ce se aplică cu viteză variabilă relativ mare și care pot fi:

-**sarcini aplicate brusc**, ce produc șoc (fig.2.2,b);

-**sarcini variabile în timp** a căror intensitate variază periodic după o anumită lege, (fig.2.2,c).

c) După **poziția sarcinii pe ER**

-**sarcină fixă**, ce acționează în același loc pe toată durata funcționării construcției (exemplu: greutatea proprie);

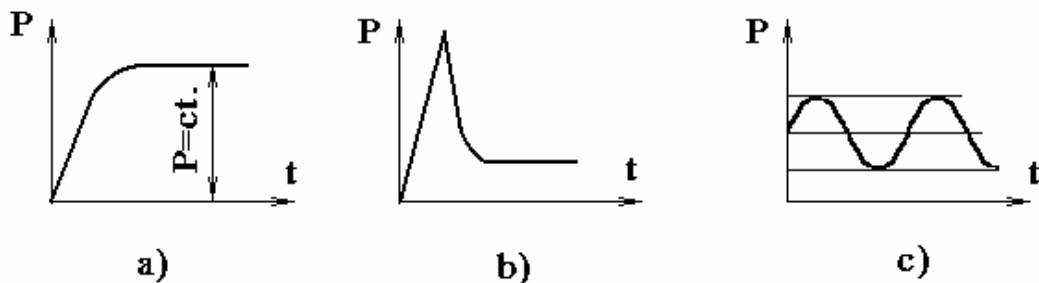


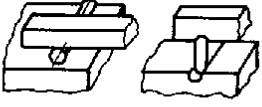
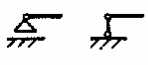
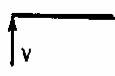
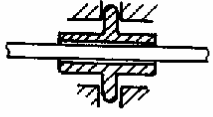
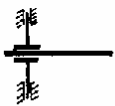

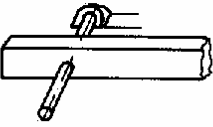
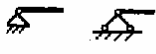
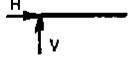
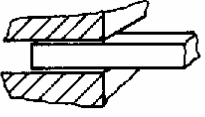

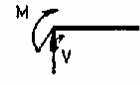
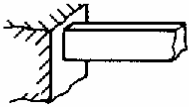
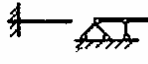
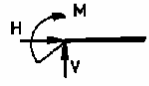
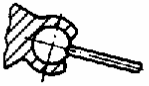

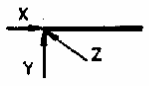
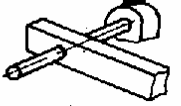

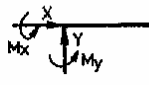
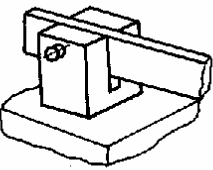
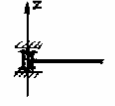
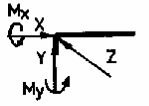
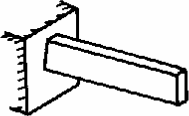
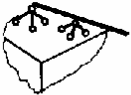
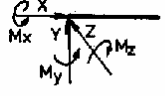
Fig. 2.2

-**sarcină mobilă**, a cărei poziție este variabilă (exemplu: greutatea unui vehicul pe un pod).

2.2. Reacțiuni

Reacțiunile sau forțele de legătură reprezintă acțiunea mecanică a legăturilor ER cu alte (ER) și iau naștere la acțiunea sarcinilor asupra ER respectiv.

Tabelul 2.1.

Solicitare	Denumire	Legătura mecanică	Simbol	Reacțiuni
plană	reazem simplu mobil			
	ghidaj dublu			
	articulație cilindrică simplă			
	ghidaj simplu			
	încastrare			
spațiu	articulație sferică			
	articulație cilindrică și ghidaj			
	articulație cilindrică			
	încastrare			

Legăturile, anulează unul sau mai multe grade de libertate ale ER, restrângându-i posibilitățile de mișcare. Conform **axiomei legăturilor, efectul legăturii unui ER, supus acțiunii sarcinilor, poate fi întotdeauna înlocuit prin reacțiuni (forțe de legătură), corespunzătoare, ce se determină din condițiile de echilibru.** Când numărul ecuațiilor de echilibru distincte este egal cu cel al reacțiunilor ER constituie un **sistem static determinat**, iar când numărul ecuațiilor de echilibru este mai mic decât numărul reacțiunilor, sistemul este **static nedeterminat**. **Gradul de nedeterminare** este dat de diferența dintre numărul reacțiunilor și numărul ecuațiilor de echilibru. Ridicarea nedeterminării, se realizează în Rezistența materialelor , prin introducerea **condițiilor geometrice de deformare**.

Felul legăturilor care pot apărea la capătul unei bare și modul de înlocuire cu reacțiuni sunt redate în tabelul 2.1.

Evaluarea sarcinilor și determinarea reacțiunilor constituie una din problemele importante ale rezistenței materialelor.

Spre deosebire de mecanica teoretică, în Rezistența materialelor **forțele sunt vectori legați** de punctul de aplicație. **Schimbarea punctului de aplicație a forței nu schimbă starea de echilibru dar poate modifica starea de solicitare a ER.**

2.3. Forțe interioare

Forțele interioare sau eforturile se produc în interiorul ER când acesta este acționat de forțe exterioare. Pentru determinarea eforturilor, Rezistența materialelor utilizează **metoda secțiunilor, a lui Cauchy**. Această metodă este echivalentă cu teorema echilibrului părților: **dacă un ER este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci și o parte oarecare din acest corp este, de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor corespunzătoare acestei părți.**

Această metodă constă în:

- secționarea imagină a ER, în locul unde urmează să fie determinate forțele interioare (eforturile) aferente;

- reprezentarea, pe porțiunile ER obținute, a forțelor exterioare și a celor interioare aferente;
- scrierea ecuațiilor de echilibru pentru sarcinile exterioare și eforturi, reprezentate pentru una din porțiunile ER secționat.

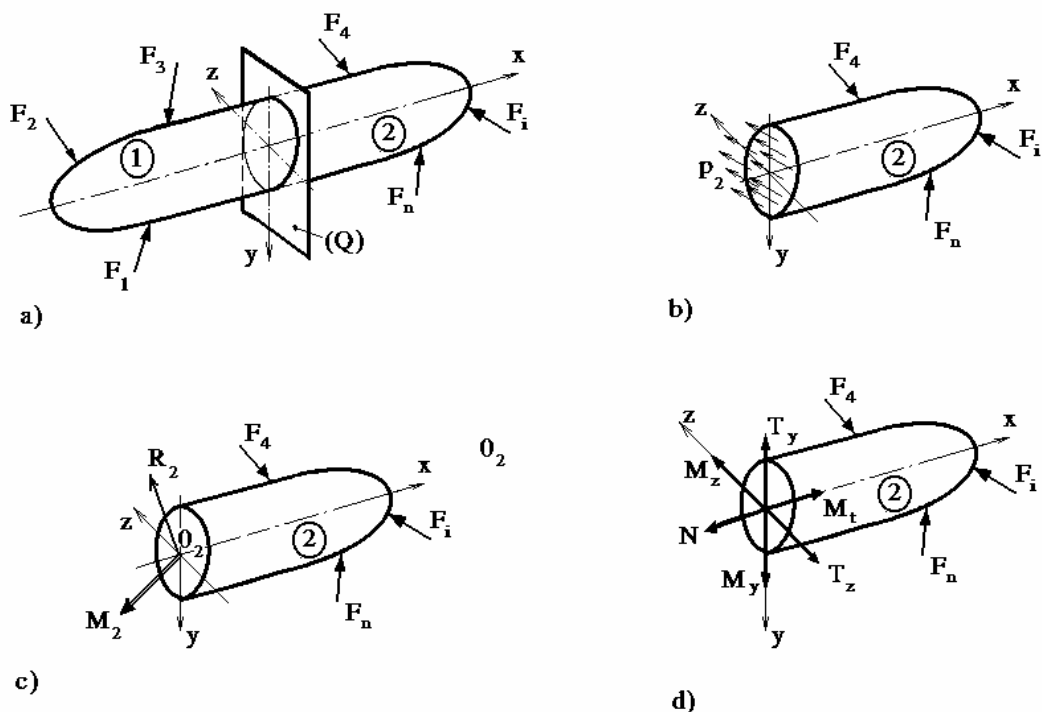


Fig. 2.3

Se consideră o bară oarecare acționată de un sistem de forțe $F_1, F_2 \dots F_n$ (figura 2.3-a), care se secționează cu un **plan imaginari Q , normal pe axa barei**. Prin secționare se obțin două părți: ① și ②. Cele două părți ale barei se echilibrează prin forțele interioare distribuite p , ce se produc pe fețele de separație A (fig.2.3,b). Forțele distribuite pe suprafața A a părții ②, se reduc în centrul de greutate O_2 la o forță rezultantă R_2 și un moment rezultant M_{O_2} . Acestea constituie totodată efectul părții ① asupra părții ②. Deci, forțele p de pe fața A a părții ② sunt echivalente cu **torsorul de reducere în O_2** a forțelor ce acționează asupra părții ① (fig.2.3c).

La fel, dacă se reprezintă partea ①; acțiunea părții ② asupra părții ① este echivalentă, în O_1 , cu rezultanta R_1 și momentul rezultant M_{O_1} .

Acțiunea părții ①, asupra părții ② este egală și de sens contrar cu acțiunea părții ② asupra părții ① (conform principiului acțiunii și reacțiunii) și rezultă:

$$\overline{\mathbf{R}}_1 = \overline{\mathbf{R}}_2 = \overline{\mathbf{R}} \quad \text{și} \quad \overline{\mathbf{M}}_{01} = \overline{\mathbf{M}}_{02} = \overline{\mathbf{M}}_0 .$$

Elementele tursorului de reducere în centrul de greutate a secțiunii al forțelor ce acționează asupra părții din stânga sunt egale și de sens contrar cu elementele tursorului de reducere, în același punct, al forțelor ce acționează asupra părții din dreapta.

Elementele \mathbf{R}_1 , \mathbf{M}_{01} , și respectiv \mathbf{R}_2 , \mathbf{M}_{02} ce asigură echilibrul fiecărei părți se numesc forțe interioare.

Acestea sunt, totodată, rezultantă și respectiv momentul resultant al forțelor interioare elementare ce se produc între particulele celor două părți la acțiunea sarcinilor. Prin separarea, printr-un plan imaginar, a celor două părți forțele interioare au fost transpuse în categoria forțelor exterioare și luate în considerare ca atare.

Proiectând elementele tursorului de reducere în O, pe axele de coordonate, se obțin șase componente: trei forțe: N , T_y , T_z și trei momente: M_x , M_y , M_z (fig.2.3,d). **Componentele N , T_y , T_z , M_x , M_y , M_z se numesc eforturi secționale sau eforturi din secțiune și le vom numi EFORTURI.** Fiecare efort are o **denumire**, îi corespunde o **deplasare** (deformație) și **produce o solicitare simplă** asupra barei.

Forța normală sau forța axială N (fig. 2.3,d), este egală cu suma algebrică, luată cu semn schimbat, a proiecțiilor pe axa x, a tuturor forțelor situate în stânga (sau la dreapta, luate cu același semn) secțiunii considerate:

$$N = -\sum_1 F_x = \sum_2 F_x . \quad (2.1)$$

unde 1 înseamnă că se iau forțele de pe partea stângă, iar 2, forțele de partea dreaptă.

Forța normală se consideră **pozitivă** când produce **solicitarea de întindere**, care **lungeste bara** și **negativă** când produce **solicitarea de compresiune**, care **scurtează bara**.

Forța tăietoare T_y , respectiv T_z , este egală cu suma proiecțiilor pe axele Oy și respectiv Oz , din planul secțiunii, luate cu semn schimbat, a tuturor forțelor situate la stânga (sau la dreapta cu același semn) secțiunii considerate:

$$T_y = -\sum_1 F_y = \sum_2 F_y; \quad T_z = -\sum_1 F_z = \sum_2 F_z. \quad (2.2)$$

Forța tăietoare T_y este **pozitivă** dacă **deplasează secțiunea în sens contrar axei Oy** , în planul xOy , iar T_z în sens contrar axei Oz . **Forțele tăietoare produc solicitarea de forfecare sau tăiere.**

Momentul încovoietor M_z , respectiv M_y , este egal cu suma momentelor în raport cu axa Oz , respectiv Oy , din planul secțiunii, a tuturor cuplurilor de forțe și momentelor forțelor, situate la stânga (sau la dreapta luate cu minus) secțiunii considerate:

$$M_z = \sum_1 M_z = -\sum_2 M_z \quad \text{și} \quad M_y = \sum_1 M_y = -\sum_2 M_y. \quad (2.3)$$

Momentele încovoietoare produc solicitarea de încovoiere. Deformația produsă de momentul încovoietor este de rotire a secțiunii în jurul axei respective: M_z , în jurul axei Oz și respectiv M_y în jurul axei Oy . Momentul M_z se consideră **pozitiv**, când comprimă fibra superioară și întinde pe cea inferioară, iar M_y este pozitiv când comprimă fibra din partea pozitivă a axei Oz și întinde fibra din partea negativă (fig. 2.4).

Momentul de răsucire M_t este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor și a cuplurilor situate la stânga secțiunii (sau la dreapta luate cu semn minus) față de axa Ox :

$$M_t = \sum_1 M_x = -\sum_2 M_x. \quad (2.4)$$

Momentul de torsiune este pozitiv atunci când forțele sau cuplurile din stânga secțiunii rotesc în sens orar, iar cele din dreapta în sens antiorar.

Prezența simultană în secțiunea barei a două sau mai multe eforturi produc, în bară, o solicitare compusă.

În general, se determină eforturile de pe fața din dreapta secțiunii (O_2yz din fig.2.3,d) și în acest caz se reduc forțele din partea stângă a secțiunii. Când este mai simplu să se reducă forțele din partea dreaptă atunci se obțin eforturile de pe fața din stânga, care au însă sensuri opuse față de cele determinate în primul caz. Dacă s-au dedus forțele de pe partea din stânga a secțiunii și trebuie raportate la fața din dreapta atunci acestora li se schimbă semnul.

De reținut că reprezentarea interacțiunii, prin forțe aplicate în O , este o reprezentare convențională simplă a fenomenului complex de interacțiune între cele două părți, (fig.2.3,b).

Observație: Se pot obține, mai simplu, eforturile din secțiune procedând astfel:

a) se analizează în ce parte a secțiunii sunt mai puține forțe și se **ia în considerare numai forțele din acea parte (din stânga sau din dreapta);**

b) se descompune fiecare forță, din acea parte, după direcțiile axelor în secțiune;

c) se reduce fiecare componentă obținută din forțe, în centrul de greutate al secțiunii;

d) se însumează proiecțiile forțelor și ale momentelor corespunzătoare pentru fiecare axă în parte, ținând seama de regula de semne, obținându-se astfel:

- N = suma proiecțiilor forțelor pe axa Ox ;

- T_y = suma proiecțiilor forțelor pe axa Oy ;

- T_z = suma proiecțiilor forțelor pe axa Oz ;

- M_y = suma proiecțiilor momentelor pe axa Oy ;

- M_z = suma proiecțiilor momentelor pe axa Oz ;

- M_t = suma proiecțiilor momentelor pe axa Ox .

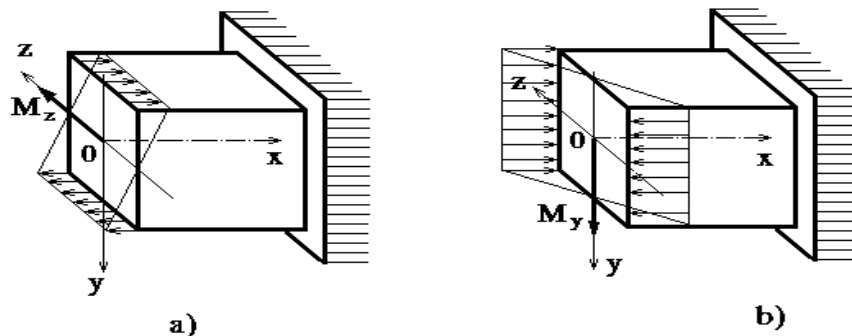


Fig. 2.4

2.4. Funcții de eforturi

Valorile eforturilor din secțiune (N , T_y , T_z , M_y , M_z , M_x) variază în lungul barei, în funcție de modul de încărcare și de forma barei. Una din problemele principale, ale calculului de rezistență, este cunoașterea valorilor eforturilor din fiecare secțiune transversală. Astfel, se exprimă variația fiecărui efort în funcție de coordonatele punctelor axei și se obține câte o **funcție de eforturi**. Pentru o bară dreaptă, ce are axa orientată, după Ox , funcțiile de efort se exprimă în dependență de abscisa x a secțiunii: $N = N(x)$; $T_y = T_y(x)$; ... $M_z = M_z(x)$.

Variația eforturilor în lungul axei barei, sub acțiunea sarcinilor fixe, poate fi

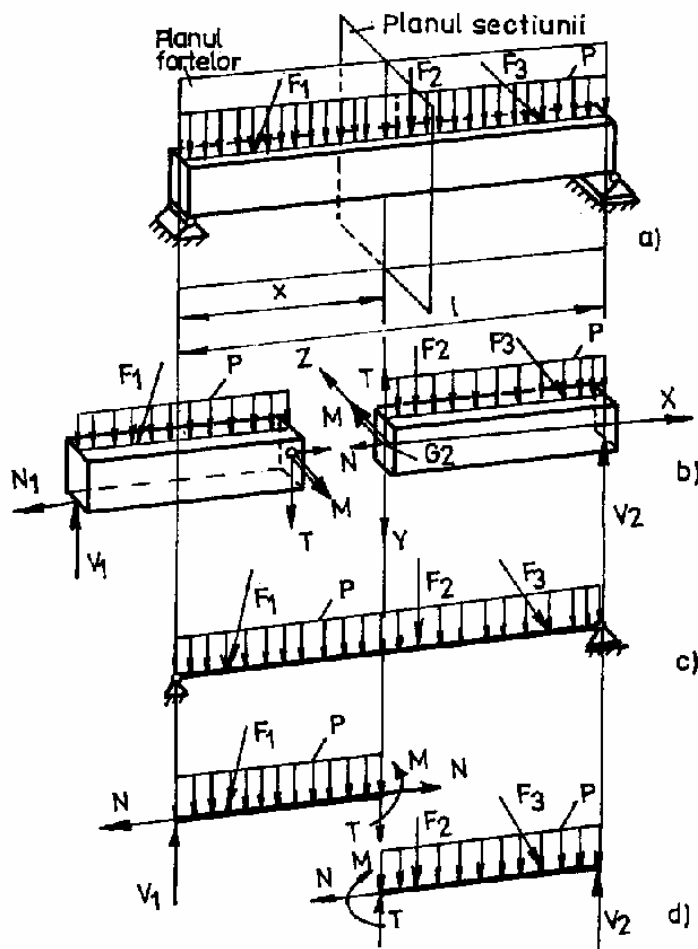


Fig. 2.5

urmărită cel mai bine pe **diagramele de eforturi**. Acestea sunt reprezentări grafice ale funcțiilor de eforturi în funcție de abscisa secțiunii "x" de pe axa barei. **Diagrama de efort se obține prin trasarea unei linii subțiri care să unească punctele ce satisfac ecuația funcției efortului respectiv.** Aceasta se **reprezintă în lungul unei linii de referință, trasată cu linie groasă, paralelă și de lungime egală cu axa barei.** Astfel, pentru fiecare efort se trasează câte o diagramă.

În practică se întâlnesc frecvent bare drepte sau curbe

plane, ce sunt încărcate cu forțe conținute în planul de simetrie longitudinal al barei. În figura (2.5,a), s-a reprezentat o astfel de bară unde s-a notat cu xOy planul forțelor. S-au determinat reacțiunile și apoi eforturile din secțiunea aflată la abscisa “ x ” de reazemul 1. În figura (2.5,b) s-a reprezentat bara respectivă pe care s-au figurat reacțiunile și respectiv eforturile interioare din secțiunea de abscisă “ x ”.

În acest caz particular se pot determina eforturile:

- a) **forța axială**, egală cu suma algebrică a proiecțiilor forțelor exterioare aplicate în stânga (sau în dreapta) secțiunii considerate pe axa barei;
- b) **forța tăietoare**, $T=T_y$, egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa Oy a tuturor forțelor situate la stânga (sau la dreapta) secțiunii considerate;

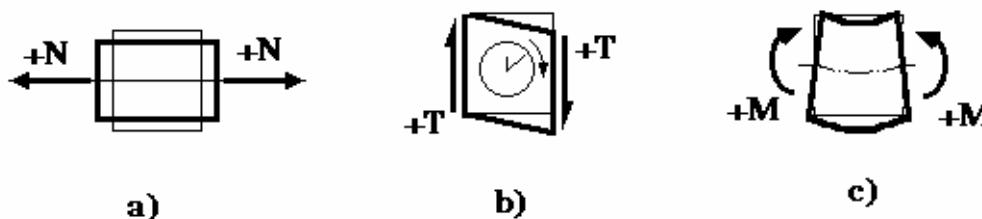


Fig. 2.6

- c) **momentul încovoietor**, $M=M_z$, egal cu suma algebrică a momentelor forțelor în raport cu axa Oz , a tuturor forțelor și momentelor situate în stânga (sau în dreapta) secțiunii considerate.

În mod uzual, pentru trasarea diagramelor de eforturi pentru sarcini conținute într-un singur plan, se folosește schema plană din figura (2.5,d). Eforturile secționale, din stânga respectiv din dreapta secțiunii, se reprezintă ca în figura 2.5,d.

Regula de semne pentru starea plană, este dată în figura 2.6:

- **forța axială N** , este pozitivă când lungeste elementul de bară (fig.2.6,a) și negativă când scurtează elementul de bară.
- **forța tăietoare T** , este pozitivă când are tendința să rotească în sens orar elementul de bară (fig.2.6,b);

- momentul încovoietor M , se consideră pozitiv când rotește cele două fețe laterale, curbând fibrele, astfel ca fibrele superioare să se scurteze iar cele inferioare să se lungească (fig.2.6,c).

2.5. Relații diferențiale între sarcini și eforturi

Trasarea diagramelor de eforturi poate fi mult ușurată dacă se cunosc **atât funcțiile de eforturi cât și relațiile diferențiale între eforturi și diferite sarcini.**

Pentru a stabili relațiile diferențiale dintre sarcini și eforturi se consideră un element de bară curbă plană, asupra căruia acționează un sistem de sarcini conținute în planul axei barei. Elementul de bară, de lungime infinit mică ds , are raza de curbură r , iar unghiul format de cele două secțiuni este $d\alpha$. Lungimea elementului este $ds = r \cdot d\alpha$ (fig.2.7,a).

Asupra elementului ds se consideră că acționează sarcinile:

- q , uniform distribuită pe lungimea ds , a elementului;
- F și M_e , concentrate și acționând în secțiunea ce trece prin punctul O .

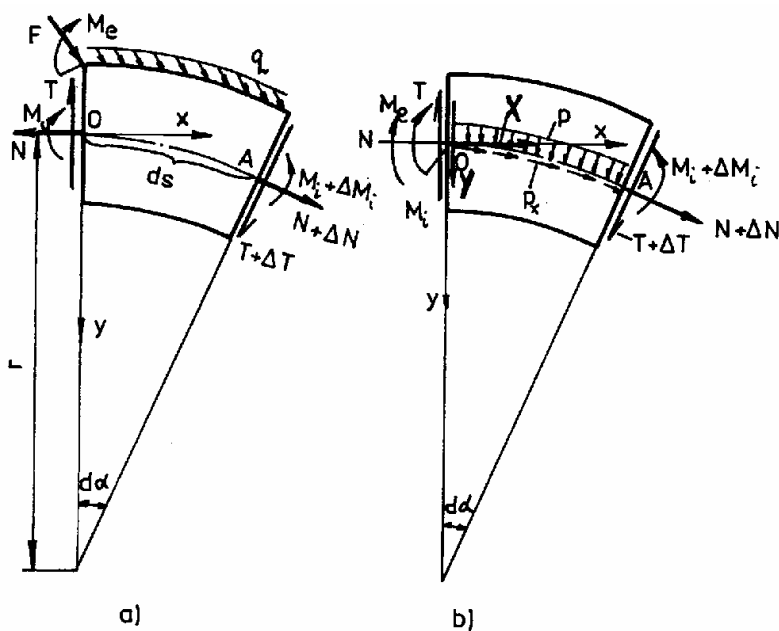


Fig. 2.7

Așa cum s-a arătat și la observațiile de la §2.3, aceste **sarcini trebuie descompuse după direcțiile axelor de coordonate și se consideră că acționează asupra axei barei**. În figura (2.7,b) s-a reprezentat modul de acțiune al sarcinilor. Tot în figura (2.7,b) s-au reprezentat eforturile: **N**, **T**, **M** în secțiunea O și respectiv **N + ΔN**, **T + ΔT** și **M + ΔM** în secțiunea A.

Conform metodei secțiunilor (a lui Cauchy) dacă elementul inițial este în echilibru atunci și porțiunea din element de lungime ds , va trebui să fie în echilibru.

Se pot scrie în acest caz ecuațiile:

$$\begin{aligned}
 \sum X &= 0, \\
 (N + \Delta N) \cdot \cos d\alpha - N - (T + \Delta T) \cdot \sin d\alpha + X + p_x \cdot ds &= 0, \\
 \sum Y &= 0; \\
 (T + \Delta T) \cdot \cos d\alpha - T + (N + \Delta N) \cdot \sin d\alpha + Y + p \cdot ds &= 0; \\
 \sum M_O &= 0; \\
 (M + \Delta M) - M - (N + \Delta N) \cdot r \cdot (1 - \cos d\alpha) - (T + \Delta T) \cdot r \cdot \sin d\alpha - p \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} - M_e &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Întrucât unghiul $d\alpha$ este foarte mic se aproximează:

$$\sin d\alpha \cong d\alpha \text{ și } \cos d\alpha = 1.$$

Dacă se neglijează produsele înfiniților mici relațiile (2.5) devin:

$$\begin{aligned}
 \Delta N - T \cdot d\alpha + X + p_x \cdot ds &= 0; \\
 \Delta T + N \cdot d\alpha + Y + p \cdot ds &= 0; \\
 \Delta M - T \cdot r \cdot d\alpha - M_e &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aceste relații conțin termeni de mărime finită și de mărime infinit mică. Dacă se neglijează termenii înfiniți mici față de termenii finiți se obțin ecuațiile:

$$\Delta N = -X, \quad \Delta T = -Y, \quad \Delta M = M_e \tag{2.7}$$

Neglijarea termenilor infinit mici se poate face (și trebuie să se facă) numai în dreptul sarcinilor concentrate. Din relațiile (2.7) rezultă: **în dreptul unei sarcini concentrate cel puțin un efort are un salt egal cu valoarea componentei sarcinii concentrate pe direcția respectivă**. Spre exemplu, în dreptul unei forțe concentrate

longitudinale X , în diagrama de forțe axiale va apare un salt egal cu valoarea componentei X , în dreptul unei forțe concentrate transversale Y , în diagrama forțelor tăietoare va trebui să existe un salt egal cu valoarea componentei Y , iar în dreptul unui moment concentrat M_e , în diagrama momentelor încovoietoare apare un salt egal cu valoarea momentului M_e .

Dacă, pe elementul ds , **nu sunt aplicate sarcini concentrate** ($X=0$, $Y=0$ și $M_e=0$) atunci relațiile (2.7) trebuie să conțină numai termenii cu infiniți mici. În acest caz și variația eforturilor trebuie să fie infinit mică, așa că se consideră:

$$\Delta N \rightarrow dN, \quad \Delta T \rightarrow dT, \quad \Delta M \rightarrow dM.$$

Ținând seama de aceste relații și că $ds=r \cdot d\alpha$, din (2.6) se obține:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{r} - p_x, \quad \frac{dT}{ds} = -\frac{N}{r} - p, \quad \frac{dM}{ds} = T. \quad (2.8)$$

În cazul barelor drepte ($r = \infty$; rezultă $ds = dx$) și în absența forțelor axiale relațiile (2.8) devin:

$$\frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{dT}{dx} = -p. \quad (2.9)$$

Pe baza acestor relații rezultă:

- **derivând expresia momentului încovoietor în raport cu variabila “x” se obține expresia forței tăietoare;**
- **derivând expresia forței tăietoare în raport cu variabila “x” se obține expresia sarcinii distribuite cu semnul minus.**

Derivând încă o dată prima relație și ținând seama de a doua, se obține:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p. \quad (2.10)$$

Observații:

- a) Relațiile (2.8), (2.9) și (2.10) sunt relații diferențiale ale funcțiilor de eforturi $N(x)$, $T(x)$ și $M(x)$. Diagramele de eforturi reprezintă integralele acestor expresii.

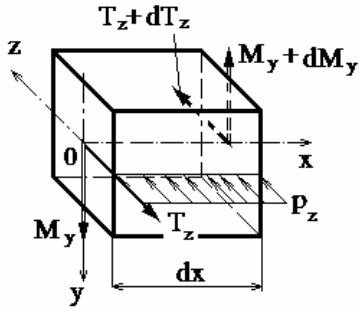


Fig. 2.8

b) Relația (2.10) arată că ecuația forței tăietoare se poate obține, fie din integrarea expresiei sarcinii, fie din derivarea expresiei momentului încovoiator.

c) Dacă sarcinile sunt conținute în planul xOy (fig.2.8) ecuațiile de echilibru sunt:

$$-T_z + p_z \cdot dx + (T_z + dT_z) = 0,$$

$$M_y - T_z \cdot dx + p_z \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M_y - dM_y) = 0$$

astfel se obține:

$$\frac{dM_y}{dx} = T_z, \quad \frac{dT_z}{dx} = -p_z, \quad (2.11,a)$$

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = \frac{T_z}{dx} = -p_z. \quad (2.11,b)$$

2.6. Reguli practice pentru trasarea diagramelor de eforturi

Pentru cazul când forțele transversale sunt nule ($Y=0$; $p=0$), din relațiile (2.10) se obține:

$$T = C_1, \quad M_i = C_1 \cdot x + C_2. \quad (2.12)$$

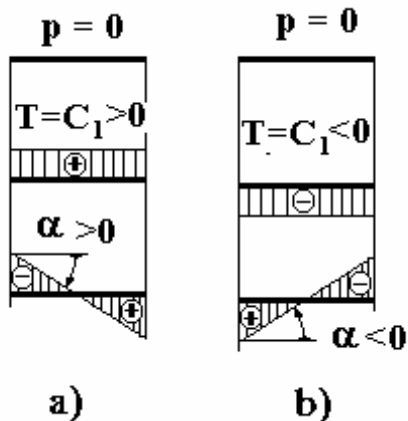


Fig. 2.9

Deci, când forțele transversale sunt nule, forța tăietoare este constantă iar momentul încovoiator variază liniar (fig.2.9,a și b). C_1 și C_2 sunt constante de integrare și reprezintă forța tăietoare, respectiv momentul încovoiator, la limita din stânga sau din dreapta secțiunii considerate.

Dacă pe o porțiune de bară se aplică o forță transversală uniform distribuită ($p = \text{ct.}$) atunci din relațiile (2.10) se obține:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{C}_1 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x} \quad (\text{variație liniară}), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^2 \quad (\text{variație parabolică}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pentru acest caz, s-au reprezentat câteva moduri de variație a forței tăietoare și momentului încovoietor, pentru o porțiune de bară (fig.2.10).

Relația a doua (2.10) arată că **forța tăietoare este egală cu panta la curba momentelor încovoietoare.**

Din figurile 2.9 și 2.10 se observă că pe porțiunea unde:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} > \mathbf{0} &\rightarrow \mathbf{M} \text{ crește,} \\ \mathbf{T} < \mathbf{0} &\rightarrow \mathbf{M} \text{ scade,} \\ \mathbf{T} \text{ trece prin zero} &\rightarrow \mathbf{M}_{\max} \text{ sau } \mathbf{M}_{\min}, \\ \mathbf{T} = \mathbf{0} &\rightarrow \mathbf{M} = \text{ct.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dacă se ține seama de relațiile (2.7), în cazul acțiunii sarcinilor concentrate, rezultă că unei variații bruște a forței tăietoare îi corespunde o schimbare bruscă a pantei momentului încovoietor. Așa că **diagrama de momente are un punct de schimbare a pantei tangentei (se frânge) în dreptul sarcinii transversale concentrate.**

Pe lângă regulile menționate mai sus, pentru trasarea diagramelor de eforturi, este necesar să se respecte următoarele etape:

- a) se eliberează bara de legături, se reprezintă reacțiunile și se determină valoarea acestora din ecuațiile de echilibru ;
- b) se alege un sens de parcurs al barei, adică o origine axei Ox și sensul acesteia, care poate fi de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga, de sus în jos sau de jos în sus etc.;
- c) se stabilesc funcțiile de eforturi, adică expresiile $N(x)$, $T(x)$ și $M(x)$ pentru fiecare tronson de bară;
- d) pentru fiecare efort existent se trasează câte o **linie de referință groasă**, paralelă cu axa barei și de aceeași lungime cu aceasta;

- e) forțele axiale, forțele tăietoare și momentele de răsucire pozitive se reprezintă la scară deasupra liniei de referință; momentele de încovoiere pozitive se reprezintă sub linia de referință;
- f) reprezentarea eforturilor în diagrame se face prin trasarea unor **segmente de dreaptă** perpendiculare pe linia de referință, ce reprezintă la scară, valoarea efortului respectiv.

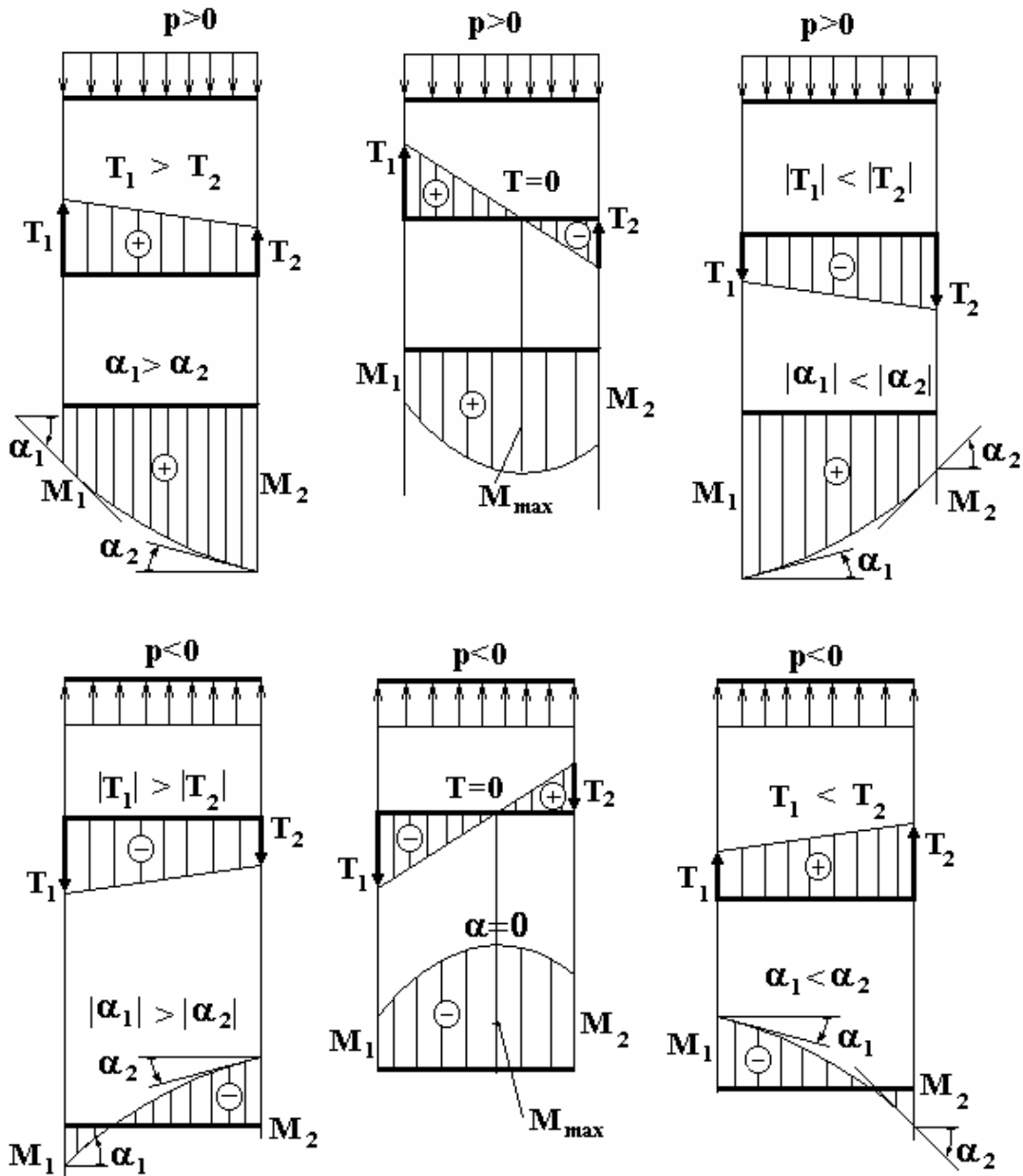


Fig. 2.10

2.7. Diagrame de eforturi

Diagramele de eforturi sunt necesare pentru determinarea secțiunii periculoase și de aceea se trasează întotdeauna pentru toate barele solicitate. Pe diagrame se observă imediat atât **solicitările** cât și **secțiunile cele mai solicitate (periculoase)**, precum și valorile extreme ale eforturilor.

2.7.1. Bare drepte solicitate de forțe axiale

În aceste cazuri forțele exterioare ce acționează în lungul barei se reduc la rezultante a căror suport este chiar axa barei.

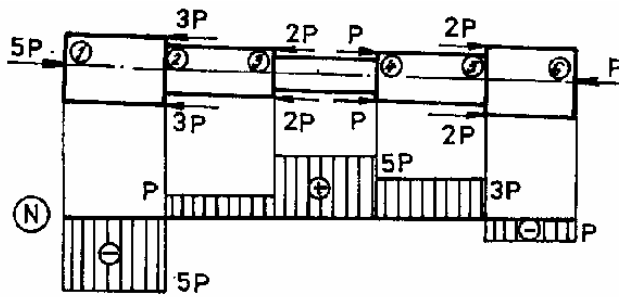


Fig.2.11

Aplicația 2.1. Să se traseze diagrama

de eforturi pentru bara cu încărcarea din figura 2.11.

Eforturile sunt:

$$N_{1s} = 0; \quad N_{1d} = N_{2s} = -5P; \quad N_{2d} = N_{3s} = P;$$

$$N_{3d} = N_{4s} = 5P; \quad N_{4d} = N_{5s} = 3P; \quad N_{5d} = N_{6s} = -P; \quad N_{6d} = 0.$$

Aplicația 2.2. Un stâlp vertical solicitat de sarcina axială $P=500$ kN este format din două tronsoane și se sprijină pe un bloc de beton. Atât stâlpul, pe cele două tronsoane cât și fundația au secțiuni constante și lungimile din figura 2.12. Greutatea distribuită pe lungimea 1-2 este de $q_1=25$ kN/m, pe porțiunea 2-3, $q_2=35$ kN/m, iar a fundației de $q_3=90$ kN/m. Să se traseze daigramele de eforturi.

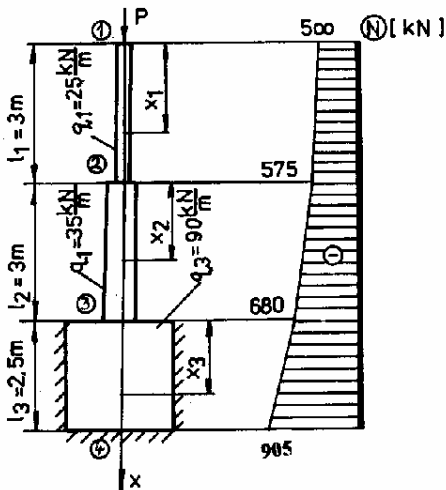


Fig. 2.12

Într-o secțiune oarecare, la abscisa x_1 , forța axială este:

$$N(x_1) = -P - q_1 \cdot x_1,$$

$$N_{x_1} = -500 - 25 \cdot x_1,$$

deci, variază liniar.

Valorile extreme sunt:

$$N_1 = -500 \text{ kN}, \quad N_2 = -500 - 25 \cdot 3 = -575 \text{ kN}.$$

Într-o secțiune oarecare pe tronsonul 2-3 forța axială are expresia:

$$N(x_2) = -P - q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot x_2,$$

iar valorile extreme vor rezulta:

$$N_2 = -500 - 25 \cdot 3 = -575 \text{ kN}, \quad N_3 = -500 - 25 \cdot 3 - 35 \cdot 3 = -680 \text{ kN}$$

Într-o secțiune pe porțiunea fundației forța axială este dată de expresia:

$$N(x_3) = -P - q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot l_2 - q_3 \cdot x_3,$$

iar valorile extreme sunt:

$$N_3 = -500 - 25 \cdot 3 - 35 \cdot 3 = -680 \text{ kN},$$

$$N_4 = -500 - 25 \cdot x_3 - 35 \cdot x_3 - 90 \cdot x_2 = -905 \text{ kN}.$$

Diagrama de variație a eforturilor axiale este redată în dreapta barei.

2.7.2. Bară (grindă) dreaptă solicitată la încovoiere

Pentru început se vor considera barele drepte solicitate de forțe exterioare verticale situate în unul din planele de simetrie longitudinale ale barei. În acest caz în secțiunile transversale ale barei, la acțiunea sarcinilor se produc: forțe axiale, forțe tăietoare și momente de încovoiere.

2.7.2.1. Bara în consolă

La barele în consolă (încastate la un capăt și libere la celălalt) diagramele de eforturi se pot trasa și fără calculul prealabil al reacțiunilor. În acest caz se consideră

originea sistemului de referință în capătul liber, iar reacțiunile vor fi egale cu valorile eforturilor din încastrare.

Aplicația 2.3. Bara încastrată la un capăt și încărcată la celălalt cu o sarcină concentrată (fig.2.13). În figura (2.13,a), bara are capătul liber în dreapta, iar în figura

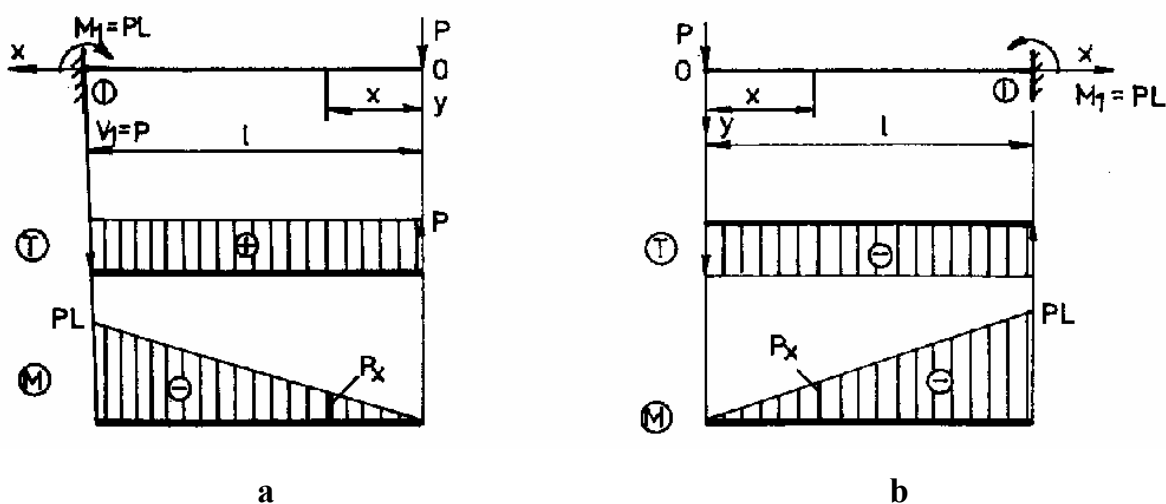


Fig. 2.13

(2.13,b), capătul liber este în stânga.

Pentru bara din figura (2.13,a), funcțiile de eforturi sunt:

$$T_x = P = \text{ct.}$$

$$M_x = -P \cdot x \text{ (variază liniar) și are valorile } M_0 = 0 \text{ și } M_l = -P \cdot l$$

Pentru bara din figura (2.13,b) eforturile sunt:

$$T_x = -P = \text{ct.}$$

$$M_x = -P \cdot x, \quad M_0 = 0 \text{ și } M_l = -P \cdot L.$$

Observație: Forțele tăietoare sunt egale în valoare absolută, dar diferă ca semn.

Aplicația 2.4 Bara în consolă solicitată de o forță transversală uniform distribuită (fig.2.14).

În secțiunea x eforturile sunt:

$$T_x = -p \cdot x \text{ (dreaptă),}$$

$$M_x = -p \cdot x \cdot x/2 = -p \cdot x^2/2 \text{ (parabolă),}$$

iar valorile extreme rezultă:

$$T_0 = 0; \quad T_1 = -p \cdot L; \quad M_0 = 0; \quad M_1 = -p \cdot L^2/2.$$

Reacțiunile din încastrare sunt:

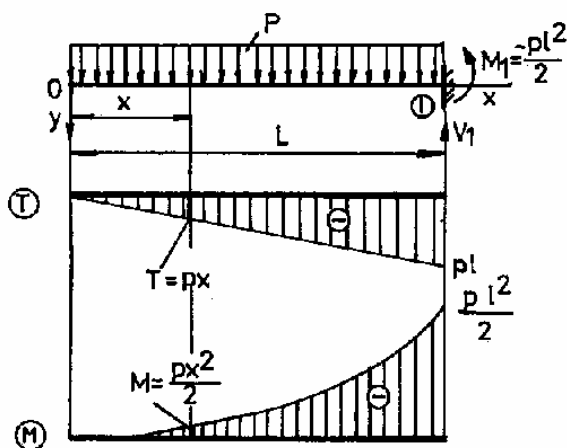


Fig. 2.14

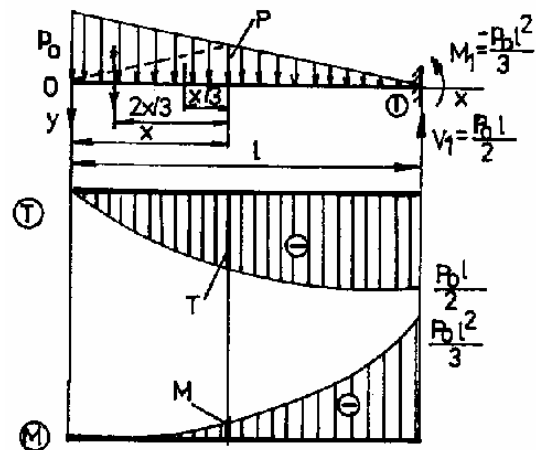


Fig. 2.15

$$V_1 = p \cdot L; \quad M_1 = -p \cdot L^2/2.$$

Aplicația 2.5. Bară în consolă sollicitată de o forță liniar distribuită (fig. 2.15).

Încărcarea este determinată de intensitatea maximă a sarcinii p_0 . Sarcina totală pe bară este de $P = p_0 \cdot l/2$, iar intensitatea sarcinii într-o secțiune oarecare, la distanța x de capăt, este:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Eforturile în secțiunea x sunt:

$$T_x = -(p_0 + p) \cdot \frac{x}{2} = -\frac{p_0 \cdot x}{2} \cdot \left(2 - \frac{x}{L}\right),$$

$$M_x = -p_0 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{3} - p \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{p_0 \cdot x^2}{6} \cdot \left(3 - \frac{x}{L}\right).$$

Se observă că forța tăietoare variază după o parabolă de gradul 2, iar momentul încovoietor după o parabolă de gradul 3. În cele două capete ale barei eforturile vor avea valorile:

$$T_0=0, \quad M_0=0, \quad T_1=-p_0 \cdot L/2, \quad M_1=-p_0 \cdot L/3,$$

iar reacțiunile vor fi:

$$V_1 = p_0 \cdot \frac{L}{2}, \quad M_1 = -\frac{p_0 \cdot L^2}{3}.$$

Observații:

- Forța tăietoare într-o secțiune oarecare x este egală cu suprafața diagramei forțelor distribuite pe lungimea Ox;
- Momentul încovoietor într-o secțiune x este produsul între rezultanta forțelor pe lungimea Ox și distanța de la secțiunea x, la rezultantă.

2.7.2.2. Bara (grinda) simplu rezemată

Bara simplu rezemată are la un capăt un reazem simplu iar la celălalt o articulație. În articulație se vor considera două componente ale reacțiunii și anume V pe verticală și H pe orizontală. În reazemul simplu apare o singură reacțiune și anume o forță normală pe suprafața de rezemare.

Distanța dintre cele două reazeme, este L și se numește **deschiderea barei (grinzii)**.

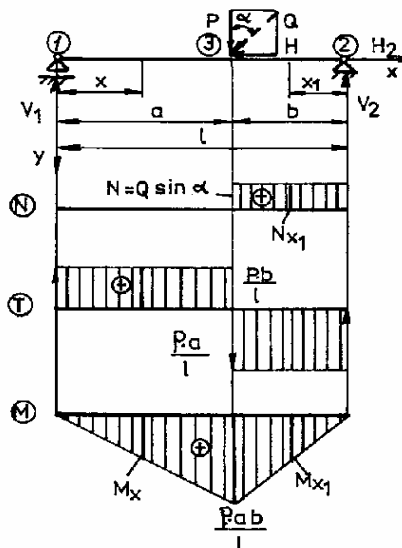


Fig. 2.16

Aplicația 2.6. Bara simplu rezemată

solicitată de o forță concentrată Q ce acționează oblic (fig.2.16).

Se descompune forța Q în componentele:

$$P = Q \cdot \cos \alpha \quad \text{și} \quad H = Q \cdot \sin \alpha.$$

Reacțiunile au valorile:

$$H_2 = H = Q \cdot \sin \alpha; \quad V_1 = P \cdot b/L \quad \text{și} \quad V_2 = P \cdot a/L.$$

Într-o secțiune oarecare x , situată în stânga sarcinii Q eforturile sunt:

$$N_x = 0; T_x = V_1 = P \cdot b/L; M_x = V_1 \cdot x = P \cdot b \cdot x/L.$$

Forța axială și forța tăietoare au valori constante,

$$N_{1d} = 0; T_{1d} = V_1 = P \cdot b/L,$$

$$M_1 = 0; M_{3s} = P \cdot a \cdot b/L.$$

Considerând originea în 2 (pornind din partea dreaptă) se obțin eforturile în secțiunea x_1 :

$$N_{x_1} = H_2 = Q \cdot \sin\alpha; T_{x_1} = -P \cdot a/L,$$

$$M_{x_1} = V_2 \cdot x_1 = P \cdot a \cdot x_1/L.$$

Eforturile în secțiunile 2 și 3 sunt :

$$N_{2s} = N_{3d} = N_{x_1} = Q \cdot \sin\alpha;$$

$$T_{2s} = T_{3d} = V_2 = -P \cdot a/L;$$

$$M_2 = 0; M_{3d} = P \cdot a \cdot b/L.$$

Observații:

- a) Forța axială are valoare constantă și diferită de zero între articulație și punctul de aplicație al forței Q .
- b) Forța tăietoare are valoare constantă, egală cu valoarea reacțiunii V_1 pe porțiunea 1-3, **are un salt egal cu valoarea componentei verticale P în dreptul forței Q** , iar pe porțiunea 3-2 are valoare constantă și egală și de sens opus reacțiunii V_2 .
- c) Momentul încovoietor are variație liniară pe ambele porțiuni (unde forțele tăietoare sunt constante) și este maxim în dreptul forței concentrate (unde forța tăietoare trece prin zero).

Dacă poziția forței este variabilă pe bară, se poate determina poziția pentru care se poate produce cel mai mare moment încovoietor, numit **moment maximorum**. Aceasta se obține înlocuind $b = L - a$, în ecuația momentului maxim, derivând în raport cu a și considerând derivata egală cu zero:

$$\frac{d}{da}(M_{\max}) = \frac{d}{da}\left(P \cdot a \cdot \frac{L-a}{L}\right) = \frac{P}{L}(L - 2 \cdot a) = 0$$

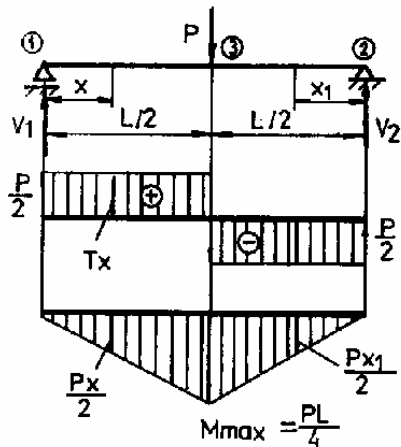


Fig. 2.17

$$M_x = V_1 \cdot x = P \cdot x/2$$

și în secțiunea x_1 (din dreapta):

$$T_{x1} = -V_1 = -P/2,$$

$$M_{x1} = V_2 \cdot x_1 = P \cdot x_1/2.$$

Momentul încovoietor maxim, în secțiunea din dreptul forței este:

$$M_{\max} = \frac{P \cdot L}{4}.$$

Aplicația 2.7. Să se determine poziția a două forțe concentrate $P_1 \geq P_2$, mobile pe o bară simplu rezemată, care produc momentul maxim-maximorum (fig. 2.18).

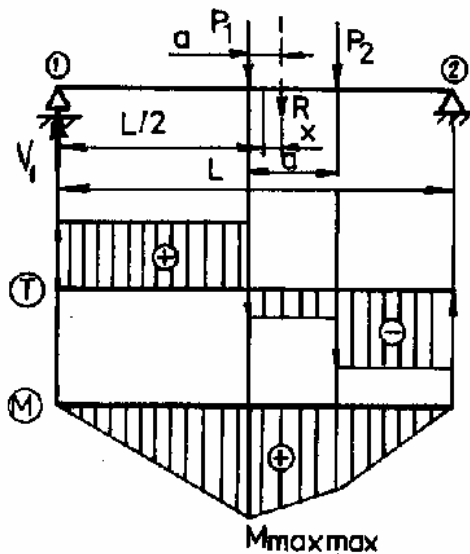


Fig. 2.18

Rezultanta celor două forțe este:

$$R = P_1 + P_2,$$

ce acționează la distanța "x" de mijlocul

deschiderii barei și la distanța "a" de forța cea mai mare, P_1 .

Reacțiunea din reazemul 1 este:

$$V_1 = \frac{R \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)}{L}.$$

Momentul maxim este în dreptul forței P_1 , și are expresia:

$$M_{\max} = V_1 \cdot \left(\frac{L}{2} + x - a\right) = \left(L^2 - 2 \cdot a \cdot L - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot x\right) \cdot \frac{R}{4L}.$$

Momentul maxim-maximorum se obține pentru valoarea lui x ce anulează derivata expresiei momentului încovoietor maxim:

$$\frac{dM_{\max}}{dx} = (-2 \cdot x + a) \cdot \frac{R}{4L} = 0,$$

adică pentru $x = a/2$.

Pentru $x = a/2$ rezultă momentul maxim-maximorum :

$$M_{\max \max} = (P_1 + P_2) \cdot \frac{(L - a)^2}{4L}. \quad (2.15)$$

Observație: Dacă pe o bară se mișcă un convoi de forțe concentrate $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, \dots, P_n$, (fig.2.19) în care P_k este forța ce are valoarea cea mai mare din imediata vecinătate a rezultantei, momentul maxim se va produce în dreptul acesteia. Notând cu x distanța de la mijlocul barei la rezultanta forțelor aflate pe bară și cu “ a ” distanța dintre rezultantă și forța P_k , se poate calcula reacțiunea V_1 și apoi momentul maxim:

$$V_1 = \frac{R \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)}{L},$$

$$M_{\max} = V_1 \cdot \left(\frac{L}{2} + x - a\right) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i = \frac{R}{L} \cdot \left(\frac{L}{4} - \frac{a \cdot L}{2} - a \cdot x - x^2\right) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i.$$

În care s-a notat cu P_i sarcinile aflate la stânga forței P_k , iar cu c_i distanța de la forța P_k la forțele P_i

Prin derivare și anularea derivatei momentului maxim se obține distanța $x = a/2$ pentru care se produce M_{\max} :

$$M_{\max} = \frac{R}{4} \cdot (L - a^2) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i.$$

Aplicația 2.8. Bară simplu rezemată, solicitată de sarcini transversale uniform distribuite (fig.2.20).

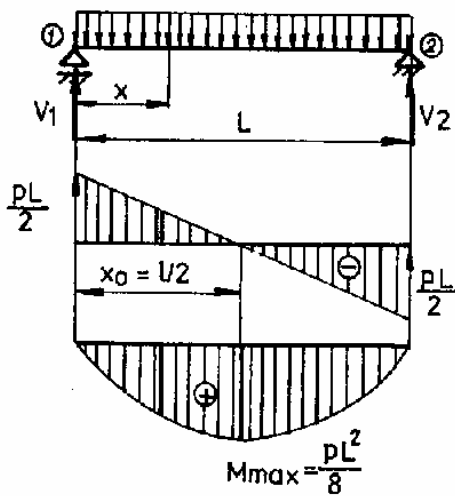


Fig. 2.20

Încărcarea fiind simetrică reacțiunile sunt:

$$V_1 = V_2 = p \cdot L/2.$$

Eforturile într-o secțiune x sunt:

$$T_x = V_1 - p \cdot x = p \cdot (L/2 - x), \text{ (variază liniar);}$$

$$M_x = V_1 \cdot x - p \cdot x \cdot x/2 = p \cdot x \cdot (L - x)/2, \text{ (variază parabolic).}$$

Valorile în punctele de rezemare sunt:

$$T_1 = V_1 = p \cdot L/2, \quad M_1 = 0,$$

$$T_2 = V_2 = -p \cdot L/2, \quad M_2 = 0.$$

La distanța $x_0 = L/2$; $T = 0$ și deci

$$M_{\max} = p \cdot L^2/8.$$

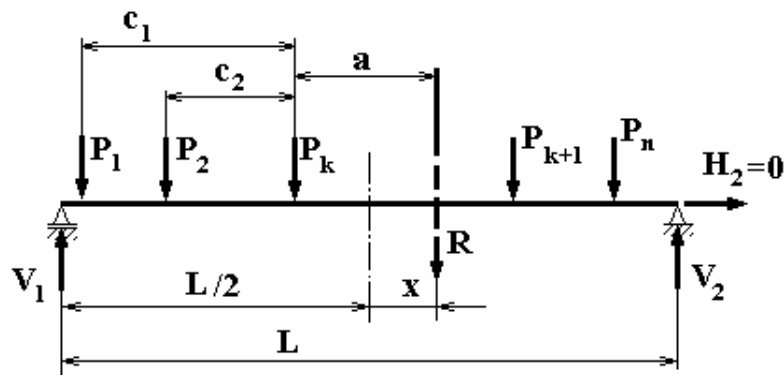


Fig. 2.19

Observație:

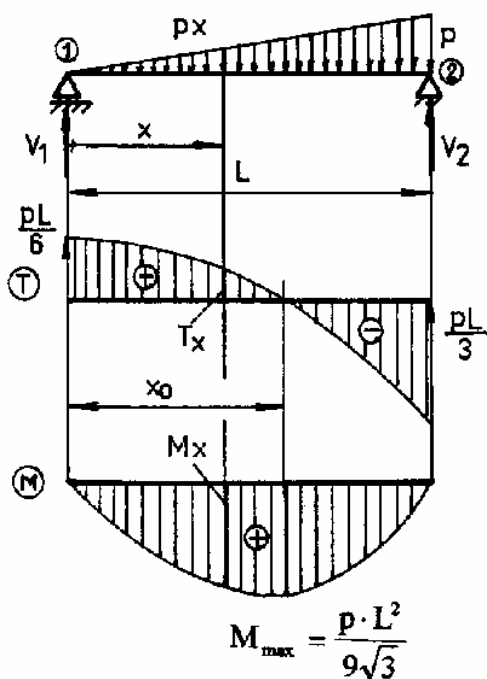


Fig. 2.21

Dacă se notează cu $P = p \cdot L$, sarcina de pe bară, se observă că momentul maxim ($M_{\max} = p \cdot L^2/8$) este jumătate din momentul maxim produs de sarcina concentrată P care ar acționa la mijlocul barei, când $M_{\max} = P \cdot L/4$ (vezi fig.2.17).

Aplicația 2.9. Bară simplu rezemată solicitată de o sarcină transversală ce variază liniar (fig.2.21).

Reacțiunile au valorile:

$$V_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{p \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{3} = \frac{p \cdot L}{6},$$

$$V_2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{p \cdot L}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} = \frac{p \cdot L}{3}.$$

Valoarea sarcinii în secțiunea x

este:

$$p_x = p \cdot \frac{x}{L}.$$

Eforturile în secțiunea x sunt:

$$T_x = V_1 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot p_x = p \cdot \frac{L}{6} - p \cdot \frac{x^2}{2L}, \quad (\text{parabolă de gradul 2}),$$

$$\begin{aligned} M_x &= V_1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot p_x \cdot \frac{x}{3} = \\ &= \frac{p \cdot L}{6} \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{3} = p \cdot \frac{L^2 - x^2}{6L} \cdot x, \end{aligned} \quad (\text{parabolă de gradul 3}).$$

Valorile eforturilor în rezeme sunt:

$$T_{\max} = T_1 = V_1 = p \cdot L/6, \quad M_1 = 0,$$

$$T_{\min} = T_2 = -V_2 = -p \cdot L/3, \quad M_2 = 0.$$

Din condiția:

$$T_x = \frac{p \cdot L}{6} - \frac{p \cdot x_0^2}{2L} = 0,$$

rezultă abscisa secțiunii unde momentul încovoietor are valoarea maximă:

$$x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,5574 \cdot L,$$

iar momentul maxim, rezultă:

$$M_{\max} = p \cdot \frac{L^2 - x_0^2}{6} \cdot x_0 = \frac{p \cdot L^2}{9\sqrt{3}}.$$

Aplicația 2.10. Bară simplu rezemată solicitată de un cuplu M_e , (fig.2.22).

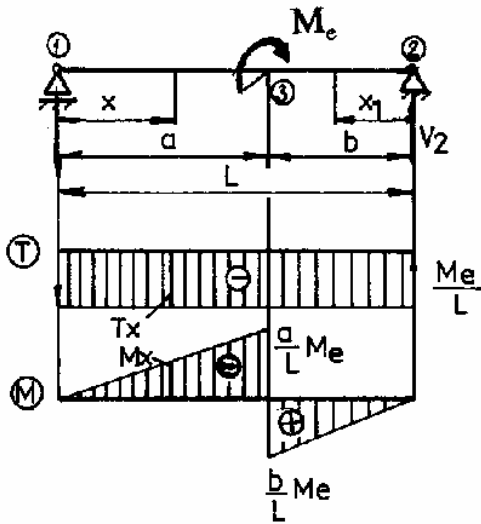


Fig. 2.22

Reacțiunile din reazeme sunt:

$$V_1 = V_2 = \frac{M_e}{L}.$$

Eforturile în secțiunea x respectiv x_1 sunt:

$$T_x = T_{x_1} = V_1 = \frac{M_e}{L}, \quad (\text{constantă}),$$

$$M_x = -V_1 \cdot x = -M_e \cdot \frac{x}{L}, (\text{variație liniară}),$$

$$M_{x_1} = V_2 \cdot x_1 = M_e \cdot \frac{x_1}{L}, (\text{variație liniară}).$$

Momentul încovoietor este zero în reazeme ($x = 0$ și $x_1 = 0$) și are valorile extreme la stânga și respectiv la dreapta secțiunii 3 și sunt:

$$M_{3s} = -V_1 \cdot a = -\frac{a}{L} \cdot M_e, \quad M_{3d} = V_2 \cdot b = \frac{b}{L} \cdot M_e.$$

În dreptul cuplului, diagrama momentelor încovoietoare are un salt egal cu valoarea cuplului M_e : (de la $-\frac{a}{L} \cdot M_e$ la $\frac{b}{L} \cdot M_e$).

Aplicația 2.11. Bară încastrată la un capăt, rezemată la celălalt cu articulație intermediară, solicitată de o forță concentrată (fig. 2.23).

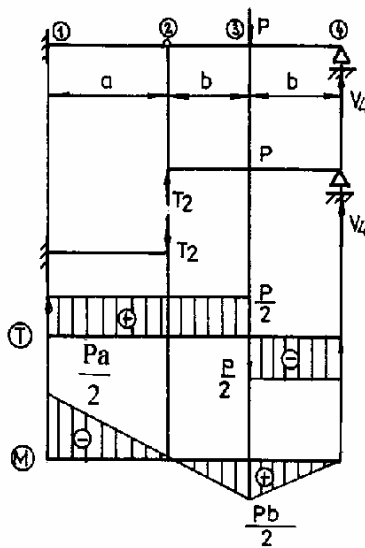


Fig. 2.23

Articulația intermediară transmite numai eforturi tangențiale și normale dar nu transmite momente încovoietoare. Ținând seama de această situație, bara se poate separa, în dreptul articulației, în două grinzi. Reacțiunile intermediare, din articulație, sunt tocmai eforturile din secțiunea respectivă.

Valoarea reacțiunii V_4 este:

$$V_4 = \frac{P \cdot b}{b + b} = \frac{P}{2},$$

iar valoarea reacțiunii din articulația 2, care este tocmai forța tăietoare din secțiune este:

$$T_2 = P - V_4 = P/2$$

Porțiunea 1-2 este o bară în consolă acționată la capătul liber de forța T_2 . În acest caz se obțin eforturile: $T_{4d} = T_{3s} = -V_4 = -\frac{P}{2}$, $T_{3d} = T_{2s} = T_1 = \frac{P}{2}$,

$$M_4 = 0, \quad M_3 = V_4 \cdot b = \frac{P \cdot b}{2}, \quad M_2 = 0, \quad M_1 = -T \cdot a = -\frac{P \cdot a}{2}.$$

Observație: După ce bara se separă în două părți, în dreptul articulației intermediare, problema trasării diagramelor de eforturi se reduce la cazuri cunoscute ale barelor rezultate din separare.

2.7.3. Diagrame de eforturi la arbori

Arborii sunt bare încărcate cu forțe ale căror direcții nu trec prin axa barei, sau asupra lor acționează cupluri de forțe situate în plane perpendiculare pe axa barei. Forțele sau cuplurile de forțe se transmit la arbori prin roți dințate, roți de curea, pârghii, cuplaje, etc.

Valoarea momentului de răsucire se calculează fie în funcție de distanța de la suportul forței la axa arborelui (brațul forței), fie în funcție de puterea și turația ce trebuie transmisă.

Dacă un arbore transmite o putere P^* , dată în kW, la o turație n , în rot/min, atunci momentul de torsiune rezultă din relația:

$$P^* = M_t \cdot \omega = M_t \cdot \frac{\pi \cdot n}{30},$$

astfel că:

$$M_t [\text{kNm}] = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^* [\text{kW}]}{n [\text{rot} / \text{min}]} \quad (2.16)$$

Dacă puterea se dă în W momentul de torsiune rezultă în Nm. Când puterea este dată în CP (cai putere), pentru a obține momentul de torsiune, se utilizează relația:

$$M_t [\text{kNm}] = 7,02 \cdot \frac{P^* [\text{CP}]}{n [\text{rot} / \text{min}]} \quad (2.17)$$

Momentul de torsiune se consideră pozitiv când vectorul moment de răsucire din stânga are sensul axei Ox , sau când rotește secțiunea din stânga față de cea din capătul din dreapta în sensul burghiului drept.

Aplicația 2.12. Să se traseze diagramele de puteri și de momente de torsiune pentru un arbore drept ce primește o putere $P^* = 10$ kW la o turație $n = 125$ rot/min prin roata (3) și o distribuie astfel:

- 25% la roata (1),
- 30% la roata (2),
- și restul la roata (4).

Puterile pe cele trei intervale sunt:

$$P_{1-2}^* = -0,25 \cdot P^* = -2,5 \text{ kW},$$

$$P_{2-3}^* = (-0,25 + 0,3) \cdot P^* = -5,5 \text{ kW},$$

$$P_{3-4}^* = (1 - 0,25 - 0,3) \cdot P^* = 4,5 \text{ kW},$$

Variația puterii este dată în diagrama P^* din figura 2.24.

Valorile momentelor de torsiune pe cele trei intervale sunt:

$$M_{t_{1-2}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{1-2}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{-2,5}{125} = -0,191 \text{ kNm},$$

$$M_{t_{2-3}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{2-3}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{-5,5}{125} = -0,42 \text{ kNm},$$

$$M_{t_{3-4}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{3-4}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{4,5}{125} = 0,344 \text{ kNm}.$$

Diagrama de variație a momentelor de răsucire M_t , este reprezentată în fig. 2.24.

Observație: Preluarea puterii prin roata mediană și transmiterea acesteia la roțile dispuse de o parte și de cealaltă a roții motoare constituie una din cele mai eficiente moduri de încărcare a arborelui. În acest mod puterea se distribuie în mod aproape egal atât în stânga cât și în dreapta roții motoare. Dacă roata motoare se află

la unul din capetele arborelui, în vecinătatea acesteia acționează întreaga putere de 10 kW, respectiv întregul moment de răsucire, $M_t = 0,42 + 0,34 = 0,764 \text{ kNm}$. În acest caz arborele trebuie dimensionat la un moment de răsucire aproape dublu.

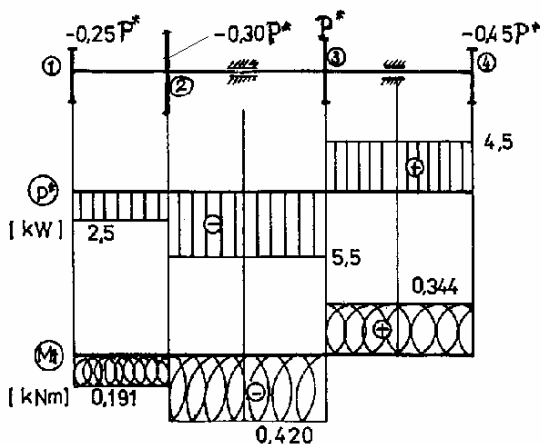


Fig. 2.24

Aplicația 2.13. Să se traseze diagramele de eforturi pentru arborele din fig. 2.25.

Reacțiunile figurate au valorile:

$$V_1 = \frac{a \cdot P}{5 \cdot a} = 0,2 \cdot P,$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot a \cdot P}{5 \cdot a} = 0,8 \cdot P,$$

$$H_6 = \frac{a \cdot P}{1,6 \cdot a} = 0,625 \cdot P,$$

$$H_1 = \frac{4 \cdot a}{5 \cdot a} = 0,625 \cdot P = 0,5 \cdot P,$$

$$H_2 = \frac{a}{5 \cdot a} \cdot 0,625 \cdot P = 0,125 \cdot P.$$

Pentru a scrie funcțiile de eforturi se aleg următoarele sisteme de axe:

1 $x_1y_1z_1$ pentru bara 1-2;

3 $x_2y_2z_2$ pentru bara 3-5;

6 $x_3y_3z_3$ pentru bara 4-6.

Momentul de răsucire, ce acționează pe intervalul 4-3, are valoarea: $M_t = -a \cdot P$.

Forțele tăietoare sunt constante și egale cu valorile reacțiunilor (vezi fig.2.13 și fig.2.17). Momentele încovoietoare au o variație liniară și sunt zero în punctele 1, 2, 5 și 6.

În figura 2.25 s-au arătat sensurile de parcurs prin sistemele de axe alese și s-au trasat diagramele de eforturi.

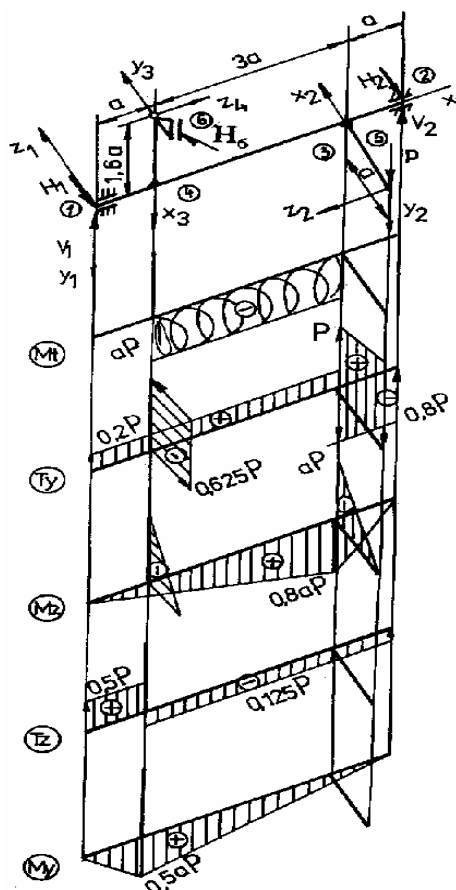


Fig. 2.25

2.7.4. Diagrame de eforturi la bare curbe

În Rezistența materialelor se analizează starea de eforturi în barele curbe plane de curbură constantă. În aceste cazuri bara este un arc de cerc.

Ca și la barele drepte, la cele curbe se alege un sens de parcurs care se marchează printr-un unghior (arc de cerc ce are la un capăt un punct de pornire și la celălalt o săgeată).

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se utilizează relațiile (2.7) și (2.8), iar diagramele se hașurează cu linii normale pe bară. Valorile eforturilor se calculează pentru anumite valori ale unghiului α .

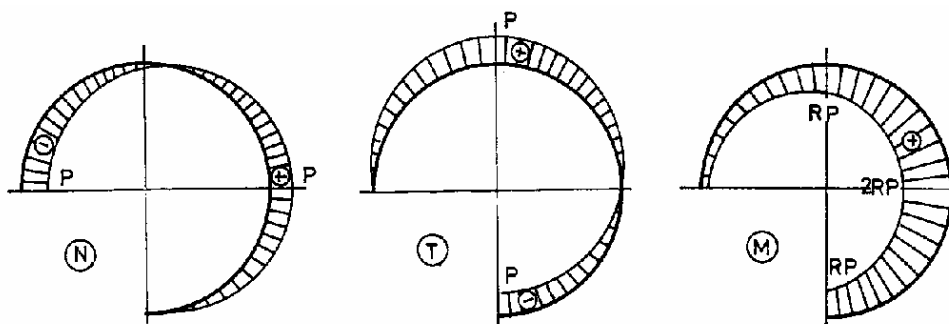


Fig. 2.27

Aplicația 2.14. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 2.26.

Funcțiile de eforturi și valorile acestora în punctele cele mai importante sunt:

α	0°	90°	180°	270°
$N = -P \cdot \cos\alpha$	$-P$	0	P	0

$T = P \cdot \sin\alpha$	0	P	0	$-P$
$M = P \cdot R \cdot (1 - \cos\alpha)$	0	$P \cdot R$	$2 \cdot P \cdot R$	$P \cdot R$

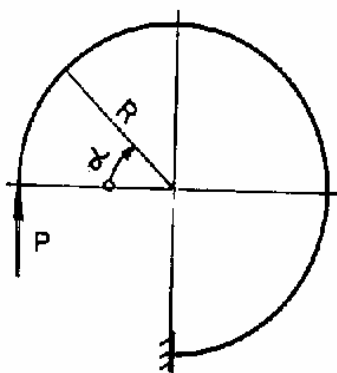


Fig. 2.26

Aplicația 2.15. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 2.28, solicitată de o forță normală pe planul barei.

Funcțiile de eforturi sunt:

$$T = P = \text{ct.},$$

$$M = P \cdot R \cdot \sin \alpha \quad (\text{variație sinusoidală}),$$

$$M_t = P \cdot R \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (\text{variație cosinusoidală}).$$

α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°
$M = -P \cdot R \cdot \sin \alpha$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} P \cdot R$	$-P \cdot R$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} P \cdot R$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} P \cdot R$	$P \cdot R$
$M_t = PR(1 - \cos \alpha)$	0	$(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot P \cdot R$	$P \cdot R$	$(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot P \cdot R$	$2P \cdot R$	$(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot P \cdot R$	$P \cdot R$

Valorile momentelor sunt redate în tabelul de mai jos iar modul de variație în lungul axei barei este reprezentat în diagramele din figura 2.28.

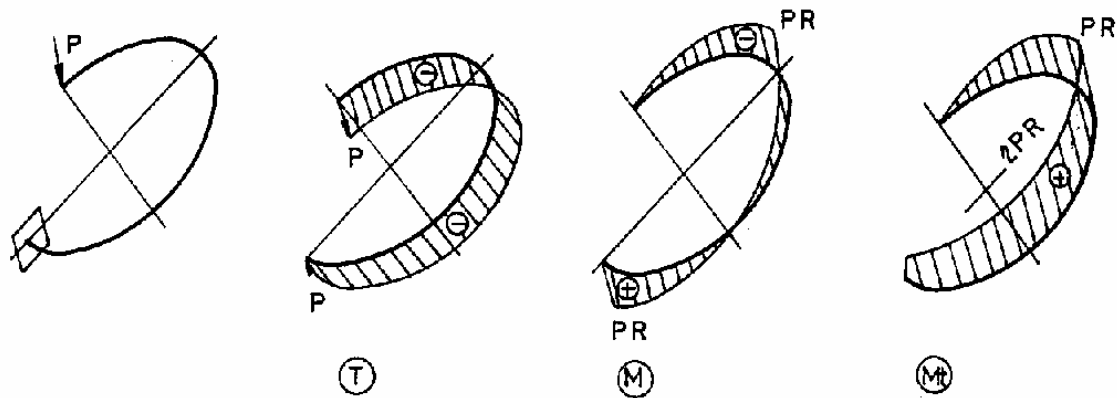


Fig. 2.28