

3. NOȚIUNI GENERALE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

3.1. Introducere

Spre deosebire de Rezistența materialelor, **Teoria elasticității are ca obiect determinarea stării de tensiune și deformație într-un corp cu caracteristici elastice cunoscute dacă se cunosc fie forțele exterioare, fie forma deformată sub acțiunea acestor forțe.** Teoretic, se demonstrează că există soluții pentru toate cazurile, dar în practică s-au găsit soluții, pe baza teoriei elasticității, numai pentru unele cazuri particulare și anume pentru corpuri de formă simplă, anumite bare prismatice, anumite forme de plăci și unele blocuri supuse numai la anumite încărcări.

Rezistența materialelor utilizând, în plus față de Teoria elasticității, ipoteza lui Bernoulli, rezolvă o serie mare de probleme puse de practica inginerescă. Aceste soluții, obținute pe baza unor relații simple, se apropie de realitate și sunt acceptabile pentru construcțiile ingineresti.

Rezistența materialelor utilizează, pe lângă legile și relațiile din mecanica teoretică și o serie de elemente din Teoria elasticității, printre care analiza stării de tensiune și deformație.

3.2. Tensiuni

Dacă un ER este supus acțiunii unor forțe exterioare în interiorul acestuia vor apare forțe de atracție sau de respingere suplimentare care au tendința de a păstra forma sa inițială. Dacă aceste forțe nu ar exista ER nu ar fi capabil să suporte încărcările exterioare.

Să considerăm o bară, în echilibru, acționată de un sistem de forțe exterioare (F_1, F_2, \dots, F_n) (fig. 3.1,a).

Forțele exterioare au tendința de a modifica forma barei iar forțele interioare se opun deformației barei.

Să presupunem că am secționat bara cu un plan Q normal pe axa barei (Ox). Pe fiecare element de suprafață ΔA_x , de pe suprafața de separație, va acționa câte o forță interioară ΔR . Toate forțele ΔR de pe întreaga suprafață de separație, mențin părțile I și II împreună cu planul Q. Forța interioară ΔR poate fi descompusă în trei componente paralele cu axele Ox, Oy și Oz: respectiv ΔN_x , ΔT_y , ΔT_z .

Mărimea forței interioare ΔR poate fi diferită pe suprafață și să depindă de poziția ariei ΔA . Intensitatea forței pe elementul de arie ΔA este egală cu raportul

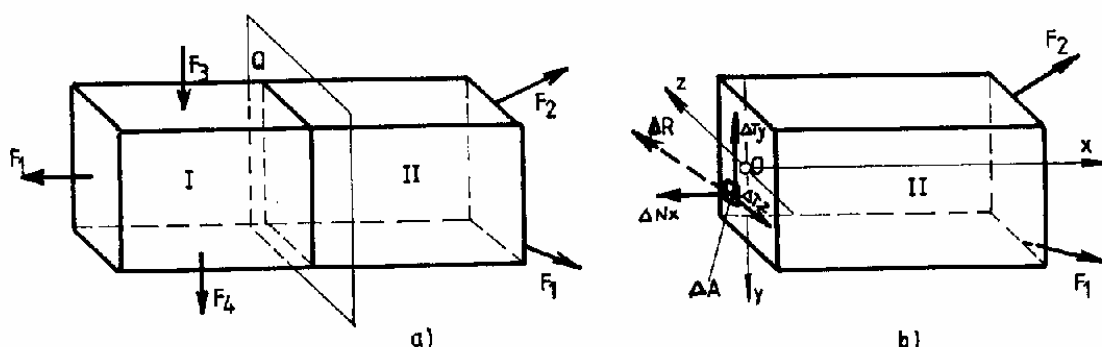


Fig. 3.1

$\frac{\Delta R}{\Delta A}$. Dacă reducem aria finită ΔA la o arie infinitesimală din jurul unui punct, se obține o nouă mărime de intensitate numită **tensiune**. Astfel se obține **tensiunea normală** σ_x :

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N_x}{\Delta A} = \frac{dN_x}{dA}, \quad (3.1,a)$$

și corespunzător **tensiunile tangențiale**:

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T_y}{\Delta A} = \frac{dT_y}{dA}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T_z}{\Delta A} = \frac{dT_z}{dA}. \quad (3.1,b)$$

Tensiunile normale sunt **pozitive**, dacă produc întindere și **negative**, dacă produc compresiune.

Tensiunile tangențiale sunt produse de forțele conținute în planul Q al secțiunii. **Acestea se consideră pozitive când rotesc elementul de volum în sens orar, și respectiv negative când rotesc antiorar.**

Tensiunile se măsoară în unități de forță pe unitate de arie Pa, MPa, GPa, N/mm², kN/mm², etc.

Mărimile σ și τ **nu sunt vectori** (deoarece ele se obțin din raportarea unor forțe elementare la o suprafață elementară), ci sunt **mărimi tensoriale** și ca atare, trebuie avut grijă să li se aplice regulile de operare specifice tensorilor.

Tensiunile normale se notează cu un singur indice - cel al axei normale la secțiune, iar tensiunile tangențiale cu doi indici: primul indice arată axa normală la secțiune iar al doilea, axa paralelă cu tensiunea.

3.3. Tensiuni pe un element de volum

Dacă decupăm din bară (fig.3.1) un element infinitezimal cu ajutorul unor plane imaginare paralele cu planurile zOy, zOx, xOy, ce au distanțele între ele dx, dy, dz, se obține un paralelipiped elementar (fig.3.2,a).

Acesta se consideră că reprezintă un punct din ER. Pe fața din stânga a acestui element vor acționa tensiunile σ_x , τ_{xy} și τ_{yz} determinate cu relațiile (3.1). Forțele elementare de pe această față sunt:

$$dN_x = \sigma_x \cdot dA = \sigma_x \cdot dy \cdot dz,$$

$$dT_y = \tau_{xy} \cdot dA = \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz,$$

$$dT_z = \tau_{xz} \cdot dA = \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz.$$

Pentru analiza stării de tensiune adoptăm ipoteza: **forțele elementare ce acționează pe cele două arii elementare, ale unui element infinit mic, paralele între ele, sunt egale și de sens contrar**, adică dacă pe fața din stânga elementului există forțele elementare $\sigma_x \cdot dA$, $\tau_{xy} \cdot dA$ și $\tau_{xz} \cdot dA$ atunci și pe fața din dreapta elementului, de aceeași arie dA , vor acționa aceleași forțe elementare $\sigma_x \cdot dA$, $\tau_{xy} \cdot dA$ și $\tau_{xz} \cdot dA$ de sens contrar. **Atunci rezultă că pe fețele elementului infinitezimal de volum vor acționa tensiunile ca în figura (3.2,b).**

Cele 9 componente: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$, caracterizează în întregime starea de tensiune în jurul unui punct O. Acestea sunt mărimi tensoriale (diferite de mărimile scalare și vectoriale) și se reprezintă prin **tensorul tensiune**.

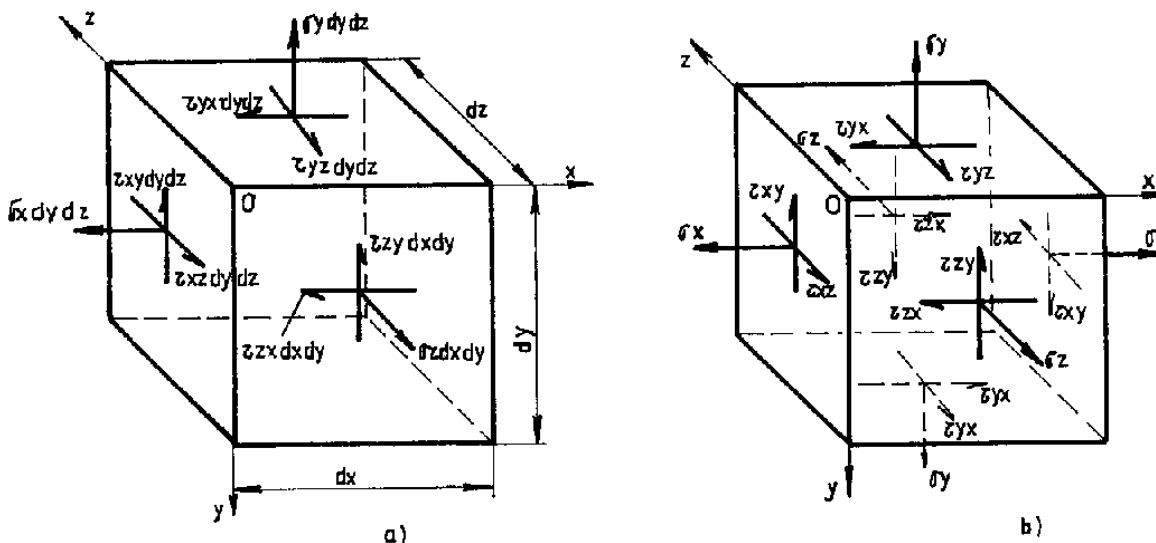


Fig. 3.2

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \quad (3.2)$$

Tensorul tensiune este un tensor de ordinul doi, ce conține, pe cele 6 fețe ale elementului de volum, cele 9 componente menționate mai sus. Pe fiecare față a elementului de volum se află câte o componentă σ , paralelă cu axa normală la față și

câte două componente τ , conținute în planul secțiunii și paralele cu cele două axe ale secțiunii.

Elementul infinitezimal sub acțiunea forțelor elementare este în echilibru și de aceea forțele normale trebuie să fie două câte două coliniare egale în mărime și de sens contrar, iar sistemul de forțe tangențiale trebuie să fie de asemenea în echilibru. Astfel, forțele tangențiale trebuie să fie egale, în mărime și de sens opus, două câte două iar momentul față de centrul elementului să fie nul:

$$2 \cdot \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} - 2 \cdot \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0.$$

Prin simplificare cu $dx \cdot dy \cdot dz$ va rezulta:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} .$$

Dacă punem condiții similare și pentru tensiunile de pe celelalte fețe paralele între ele, din figura (3.2,b) se obțin relațiile:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \text{și} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (3.3)$$

Aceste relații reprezintă **dualitatea tensiunilor tangențiale** și precizează că: **pe fețele perpendiculare ale unui element infinitezimal pot exista simultan tensiunile tangențiale τ_{xy} și τ_{yx} . Acestea sunt conținute în planuri ce corespund fețelor elementului de volum și produc două câte două cupluri egale în mărime și de sens opus. De aceea ele trebuie să fie simetrice față de muchia comună a celor două fețe.** Din relațiile (3.3) rezultă că din cele 9 componente ale tensorului (2.2) numai 6 sunt distincte și deci **tensorul tensiune este simetric față de diagonala principală.**

3.4. Starea plană de tensiune. Variația tensiunilor în jurul unui punct

În multe din problemele ingineresti se întâlnește cazul particular al stării generale de tensiune, când ER este încărcat cu forțe coplanare în echilibru, și în acest caz pe suprafața liberă de sarcini, nu există sarcini normale și paralele cu acestea. De

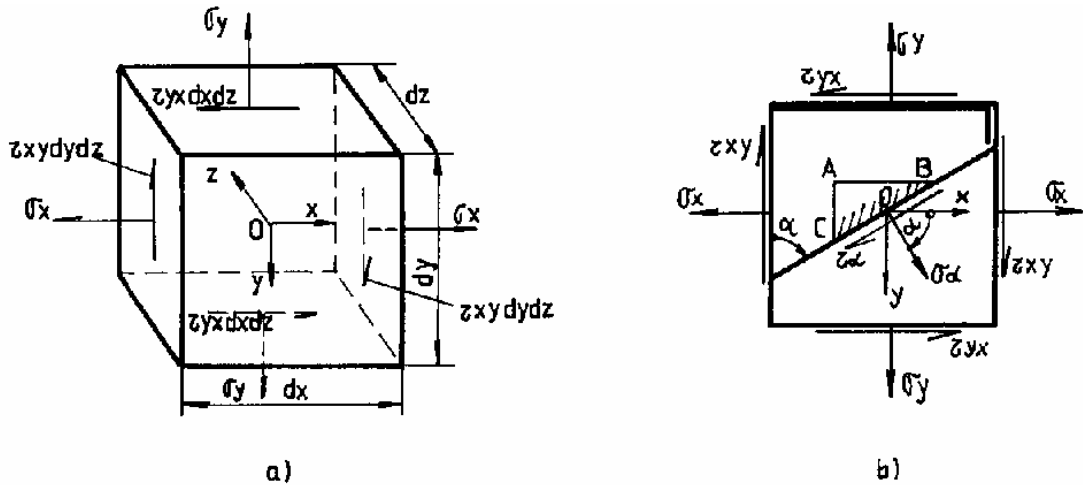


Fig. 3.3

asemenea, ținând seama de condiția de echilibru, pe o față paralelă cu prima și aflată la distanță infinit mică (dz), forțele vor fi nule. În acest caz toate forțele sunt coplanare și starea de tensiune corespunzătoare se numește **stare plană de tensiune** (fig. 3.3,a) și ea poate fi reprezentată simplificat ca în figura (3.3,b)

Considerăm elementul infinit mic din figura 3.4 în formă de prismă triunghiulară, cu baza un triunghi dreptunghic, decupat din elementul de volum din

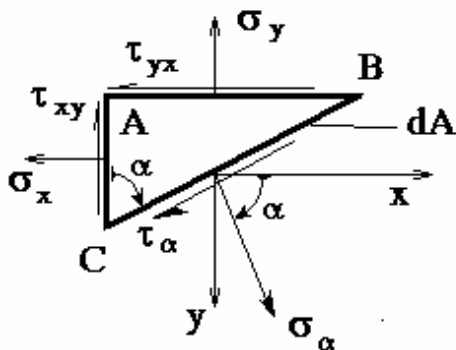


Fig. 3.4

figura (3.3,b) și acționat de componentele σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Pe fața AC, înclinată cu unghiul α , vor apare tensiunile necunoscute σ_α și τ_α .

Fața BC se consideră de arie dA , iar grosimea elementului constantă. În acest caz, aria feței AC este $dA \cdot \cos\alpha$, iar a feței AB este $dA \cdot \sin\alpha$.

Din ecuațiile de proiecții a forțelor elementare pe direcțiile σ_α și τ_α , din condițiile de echilibru ale elementului se obține:

$$\sigma_\alpha \cdot dA - \sigma_x \cdot dA \cdot \cos^2 \alpha - \sigma_y \cdot dA \cdot \sin^2 \alpha - \\ -\tau_{xy} \cdot dA \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \tau_{yx} \cdot dA \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\tau_\alpha \cdot dA + \sigma_x \cdot dA \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - \sigma_y \cdot dA \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \\ -\tau_{xy} \cdot dA \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \cdot dA \cdot \sin^2 \alpha = 0$$

Simplificând cu dA și ținând seama că $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ rezultă:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\tau_\alpha = (-\sigma_x + \sigma_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Ținând seama că:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

expresiile de mai sus devin:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \quad (3.4,a)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (3.4,b)$$

Aceste relații permit determinarea tensiunilor pe o suprafață înclinată cu unghiul α . Normala la această suprafață face cu axa Ox unghiul α . Unghiul α mai poate fi definit și ca unghiul cu care trebuie rotită axa Ox pentru a o suprapune peste normala la suprafața înclinată dată.

Unghiul α este considerat pozitiv când rotește în sens orar axa Ox către normala la suprafața înclinată și negativ când rotește în sens antiorar.

Se observă din relațiile (3.4) că tensiunile σ_α și τ_α sunt funcții circulare de parametru 2α . Întrucât este necesar să se cunoască valorile maxime și minime ale tensiunilor se derivează expresiile (3.4,a) și (3.4,b) în raport cu parametrul 2α . Valorile extreme ale tensiunilor se obțin pentru valoarea parametrului α pentru care derivata se anulează.

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_{1,2} + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha_{1,2} = 0$$

Se observă că derivata lui σ_α este τ_α și deci **pe fețele pe care σ_α ia valori extreme, tensiunile tangențiale sunt nule.**

Planurile pe care tensiunile tangențiale sunt nule se numesc **planuri principale** iar normalele la aceste planuri se numesc **direcții principale.**

Tensiunile normale pe planurile principale se numesc **tensiuni principale** și deci tensiunile principale sunt tensiuni maxime sau minime, pe planurile în care $\tau=0$, adică pentru:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \text{ sau } \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.5)$$

În relațiile de mai sus s-au pus doi indici deoarece funcția tangentă are perioada π și deci pe un cerc întreg vor fi două soluții $2\alpha_1$ și $2\alpha_2$ diferite între ele prin 180° și deci direcțiile α_1 diferă de α_2 cu 90° , adică sunt perpendiculare între ele.

Pentru a obține unghiul α_1 se mai poate utiliza relația (vezi § 3.5):

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}. \quad (3.5,a)$$

Direcția α_1 este a tensiunii maxime σ_1 iar direcția α_2 a tensiunii minime σ_2 .

Dacă ținem seama în formulele (3.5), de relațiile trigonometrice, obținem:

$$\sin 2\alpha_{1,2} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2}}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_{1,2}}} = \frac{\tau_{xy}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}},$$

$$\cos 2\alpha_{1,2} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_{1,2}}} = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}.$$

Înlocuind aceste expresii în expresia (3.4,a) se obțin expresiile celor două tensiuni principale:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.6)$$

Tensiunea maximă, σ_1 se obține când luăm în fața radicalului semnul plus, iar cea minimă σ_2 , semnul minus.

Procedând la fel și cu cea de a doua relație (3.4,b), prin derivare în raport cu parametrul 2α și egalând cu zero, se obțin valorile pentru care tensiunea τ_α devine extremă:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_\alpha}{d(2\alpha)} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha'_{12} - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha'_{12} = 0, \\ \operatorname{tg} 2\alpha'_{12} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2 \cdot \tau_{xy}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Din relația (3.7) rezultă că direcțiile $2\alpha_{1,2}$ și $2\alpha_{\sim 1,2}$ sunt perpendiculare, deci rezultă că: **tensiunile tangențiale extreme se află pe fețele elementului ce diferă cu 45° față de fețele pe care avem tensiunile normale principale.**

Dacă înlocuim parametrul $2\alpha_{\sim 1,2}$ în expresiile (3.4) se obține:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ}}{2} = \text{ct.}, \quad (3.8)$$

$$\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.9)$$

Relația (3.8) ne arată că suma tensiunilor normale pe două fețe perpendiculare este constantă.

Relația (3.9) exprimă egalitatea dintre semidiferența tensiunilor normale principale cu tensiunea tangențială maximă și respectiv cu valoarea de sub radical din relația (3.6) și se poate scrie:

$$\sigma_{1,2} = \sigma_m \pm \tau_1. \quad (3.6,a)$$

Pe fețele înclinate la 45°, față de planele principale, apar tensiuni tangențiale extreme și tensiunile medii normale, egale cu semisuma tensiunilor normale.

Starea plană de tensiune, din figura (3.5,a), este echivalentă cu starea de

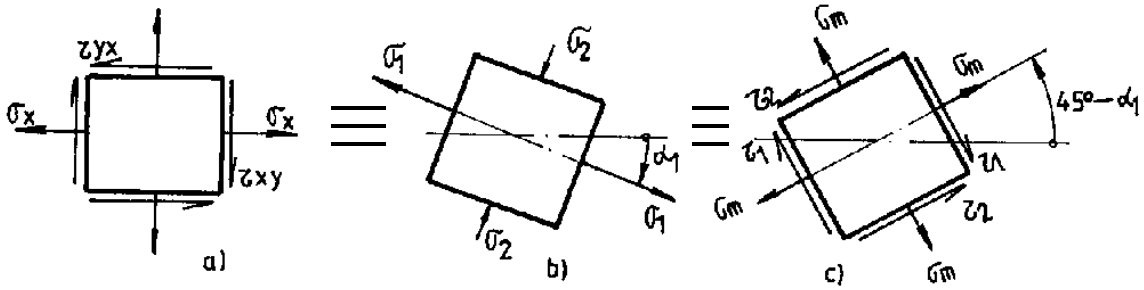


Fig. 3.5

tensiune din figura (3.5,b), (tensiunile principale normale σ_1, σ_2) și cu cea din figura (3.5,c), (tensiunea medie σ_m și tensiunile tangențiale principale τ_1 și τ_2). Aceasta poate fi scrisă și prin expresia tensorială:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & \tau_2 \\ \tau_1 & \sigma_m \end{pmatrix}.$$

3.5. Cercul lui Mohr pentru starea plană de tensiune

Variația tensiunilor în jurul unui punct poate fi analizată mai simplu, prin utilizarea unei reprezentări grafice, ce rezultă din ecuațiile (3.4):

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \right)^2,$$

$$\tau^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right)^2.$$

Adunând cele două ecuații și eliminând parametrul 2α , obținem:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right)^2. \quad (3.10)$$

Această expresie reprezintă ecuația unui cerc, numit **cercul lui Mohr pentru starea plană de tensiune** și are:

- sistemul de axe:

abscisă: $O\sigma$;

ordonată: $O\tau$;

- coordonatele centrului C :

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{și} \quad \tau_c = 0,$$

- raza:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

- parametru în coordonate polare:

2α .

Acesta ne arată că oricărui unghi α de la starea reală de tensiune îi corespunde un unghi la centru (2α), pe cercul lui Mohr.

Construcția acestui cerc se realizează astfel:

- se reprezintă la scară punctele $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ și $B(\sigma_y - \tau_{xy})$ în sistemul de axe de coordonate $\sigma O\tau$;
- se trasează segmentul AB care este diametrul cercului lui Mohr;
- intersecția segmentului AB cu axa $O\sigma$ este centrul cercului lui Mohr, $C(\sigma_m, 0)$;
- se trasează centrul cu raza CA sau CB.

Determinarea tensiunilor principale și a direcțiilor principale se face astfel:

- intersecția cercului cu axa $O\sigma$ la dreapta, este punctul $S_1(\sigma_1, 0)$, iar la stânga $S_2(\sigma_2, 0)$, deci $\sigma_1 = OS_1$ și $\sigma_2 = OS_2$;
- raza CA este **orizontală pe cerc** și unghiul de la orizontala pe cerc (CA) la sensul pozitiv al axei $O\sigma$ este $2\alpha_1$;
- simetricul punctului A față de axa $O\sigma$ este punctul A' care unit cu S_2 ne dă direcția principală (1);

- ordonatele punctelor T_1 și T_2 reprezintă tensiunile tangențiale maximă τ_1 și respectiv minimă τ_2 , egale în modul dar cu semn schimbat;
- direcția (2) este o dreaptă perpendiculară pe direcția (1), iar direcțiile (1') și (2') se află la $\pm 45^\circ$ față de direcția (1) sau (2).

Pe cercul lui Mohr se pot obține și tensiunile ce apar pe o suprafață înclinată cu un unghi oarecare α . **Unghiul α se obține ca fiind unghiul de rotire al axei Ox pentru a o suprapune peste normala la suprafața înclinată dată (fig.2.2,b).**

Pentru a obține aceste tensiuni vom lua un unghi la centru 2α de la orizontala pe cerc (raza CA) în sensul de măsurare a unghiului α . Punctul de pe cerc M va avea coordonatele σ_α și respectiv τ_α . Simetricul punctului M față de centrul cercului va fi N. Coordonatele punctului N ne vor da tensiunile pe suprafața înclinată cu unghiul $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$, respectiv $\sigma_{\alpha+90^\circ}$ și $\tau_{\alpha+90^\circ}$.

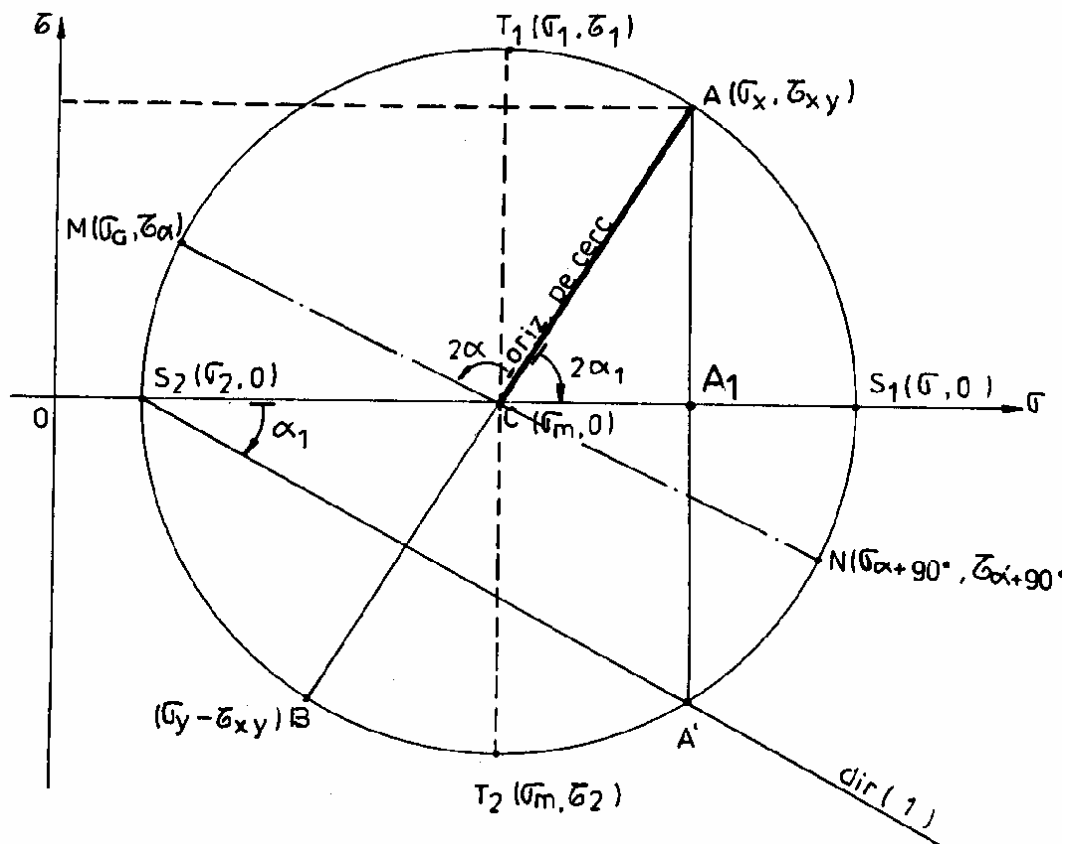


Fig. 3.6

Observație:

Relația (3.5,a) se obține din figura 3.6 astfel:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{A_1 A'}{S_2 A_1} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}.$$

Aplicația: 3.1. Cunoscând starea de tensiune din figura (3.7,a) să se determine:

- tensiunile principale,
- direcțiile principale,
- tensiunile pe fața înclinată,
- să se reprezinte mărimile determinate.

Rezolvare:

I Metoda analitică.

Se recunosc mărimile date, cu semnele lor și anume:

$\sigma_x = 60$ MPa, tensiunea normală paralelă cu axa Ox;

$\sigma_y = 20$ MPa, tensiunea normală paralelă cu axa Oy;

$\tau_{xy} = 50$ MPa, tensiunea tangențială perpendiculară pe axa Ox și paralelă cu axa Oy;

$\alpha = -70^\circ$, unghiul cu care trebuie să rotim sensul pozitiv al axei Ox pentru al suprapune peste normala la suprafața înclinată dată (minus pentru că are sens antiorar).

Cu relația (2.6) se determină tensiunile principale:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{60 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 20}{2}\right)^2 + 50^2} = \\ &= 40 \pm 58,31 \text{ MPa,}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 98,31 \text{ MPa; } \sigma_2 = -18,31 \text{ MPa; } \sigma_m = 40 \text{ MPa; } \tau_{1,2} = \pm 58,31 \text{ MPa.}$$

Din relația (3.5,a) se determină unghiul α_1 care ne dă direcția principală (1):

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2} = \operatorname{arctg} \frac{50}{60 + 18,31} = 32,56^\circ.$$

Utilizând relațiile (3.4) se determină tensiunile pe fața înclinată:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{60 + 20}{2} + \frac{60 - 20}{2} \cdot \cos(-2 \cdot 70^{\circ}) + 50 \cdot \sin(-2 \cdot 70^{\circ}) = -7,46 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = \\ &= -\frac{60 - 20}{2} \cdot \sin(-2 \cdot 70^{\circ}) + 50 \cdot \cos(-2 \cdot 70^{\circ}) = -25,45 \text{ MPa} .\end{aligned}$$

Tensiunile pe fața înclinată cu $\alpha + 90^{\circ}$ se obțin din relația (2.13):

$$\sigma_{\alpha+90^{\circ}} = 2\sigma_m - \sigma_{\alpha} = 20 \cdot 40 + 7,46 = 87,46 \text{ MPa} ;$$

și respectiv din dualitatea tensiunilor tangențiale :

$$\tau_{\alpha+90^{\circ}} = -\tau_{\alpha} = 25,45 \text{ MPa} .$$

La reprezentare se duce o dreaptă înclinată față de orizontală cu α_1 rezultând direcția principală (1), pe care se reprezintă un element de volum. Pe acest element de volum (fig.3.7,b) se reprezintă numai tensiunile normale principale σ_1 și σ_2 (σ_1 paralel cu direcția (1) și σ_2 perpendicular pe direcția (1)) știind că tensiunile tangențiale sunt nule.

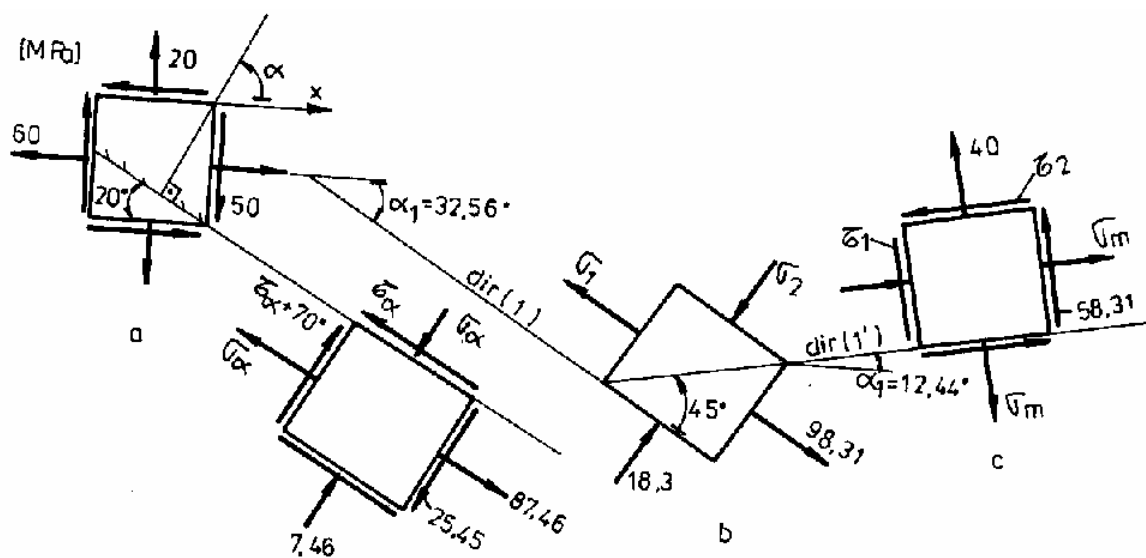


Fig. 3.7

Față de direcția principală (1) se duce o direcție la $\pm 45^\circ$ (în cazul nostru la -45°) care va fi direcția principală (1') sau (2'). Reprezentând un element de volum și pe această direcție (fig.3.7,c), vom reprezenta tensiunea normală medie pe toate laturile precum și tensiunile tangențiale maxime și respectiv minime. Sensul acestor tensiuni tangențiale se obține din proiecția forțelor elementare corespunzătoare unui colț al elementului de volum desenat, după direcția principală (1). Dacă se proiectează forțele corespunzătoare colțului de sus pe direcția dusă la 45° se va obține sensul tensiunii tangențiale de deasupra elementului, iar dacă se proiectează forțele corespunzătoare colțului de jos se obține sensul tensiunii tangențiale de sub elementul construit. Cunoșcând sensul tensiunilor tangențiale se află și ce direcție a fost trasată. Deoarece τ_1 este perpendicular pe direcția dusă, aceasta este direcția (1'). Unghiul α_1 se măsoară de la orizontală la direcția dusă (în cazul nostru $\alpha_1 = \alpha_1 - 45^\circ = 32,65^\circ - 45^\circ = -12,35^\circ$).

Dacă τ_2 era perpendicular pe direcția dusă aceasta ar fi fost direcția (2') și analog se obține atunci unghiul α_2 .

Reprezentarea tensiunilor pe fața înclinată se face pe un element de volum construit pe dreapta în prelungirea acestei suprafețe și se va reprezenta (fig.3.7,d):

σ_α , perpendicular pe suprafața înclinată dată,

$\sigma_{\alpha+90^\circ}$, paralel cu suprafața înclinată dată,

τ_α , paralel cu suprafața înclinată dată și

$\tau_{\alpha+90^\circ}$ conform dualității tensiunilor tangențiale.

II Metoda grafică.

Se reprezintă într-un sistem de coordonate $\sigma\tau$, la scară, punctele $A(\sigma_x, \tau_{xy}) = A(60, 50)$ și $B(\sigma_y, -\tau_{xy}) = B(20, -50)$. Se duce segmentul AB (fig. 3.8) care este diametrul cercului lui Mohr, iar intersecția acestuia cu axa orizontală este centrul cercului $C(\sigma_m, 0)$.

Se trasează cercul cu diametrul AB și se notează punctele $S_1(\sigma_1, 0)$ și

$S_2(\sigma_2, 0)$, intersecția cercului cu axa $O\sigma$ la dreapta și respectiv la stânga. Prin centrul cercului se duce o paralelă la axa $O\tau$ până intersectează cercul în $T_1(\sigma_m, \tau_1)$, spre sensul pozitiv al lui $O\tau$ și $T_2(\sigma_m, \tau_2)$, spre sensul negativ al lui $O\tau$.

Se măsoară lungimile segmentelor (la scara utilizată) obținându-se:

$$\sigma_1 = OS_1 = 98 \text{ MPa};$$

$$\sigma_2 = OS_2 = -18 \text{ MPa};$$

$$\tau_1 = OT_1 = 58 \text{ MPa};$$

$$\tau_2 = OT_2 = -58 \text{ MPa}.$$

Obținerea direcției principale (1): Raza CA este orizontală pe cerc, iar unghiul de la orizontala pe cerc la sensul pozitiv al axei $O\sigma$ este $2\alpha_1$. Se duce simetricul punctului A , corespunzător orizontalei de pe cerc, față de axa $O\sigma$

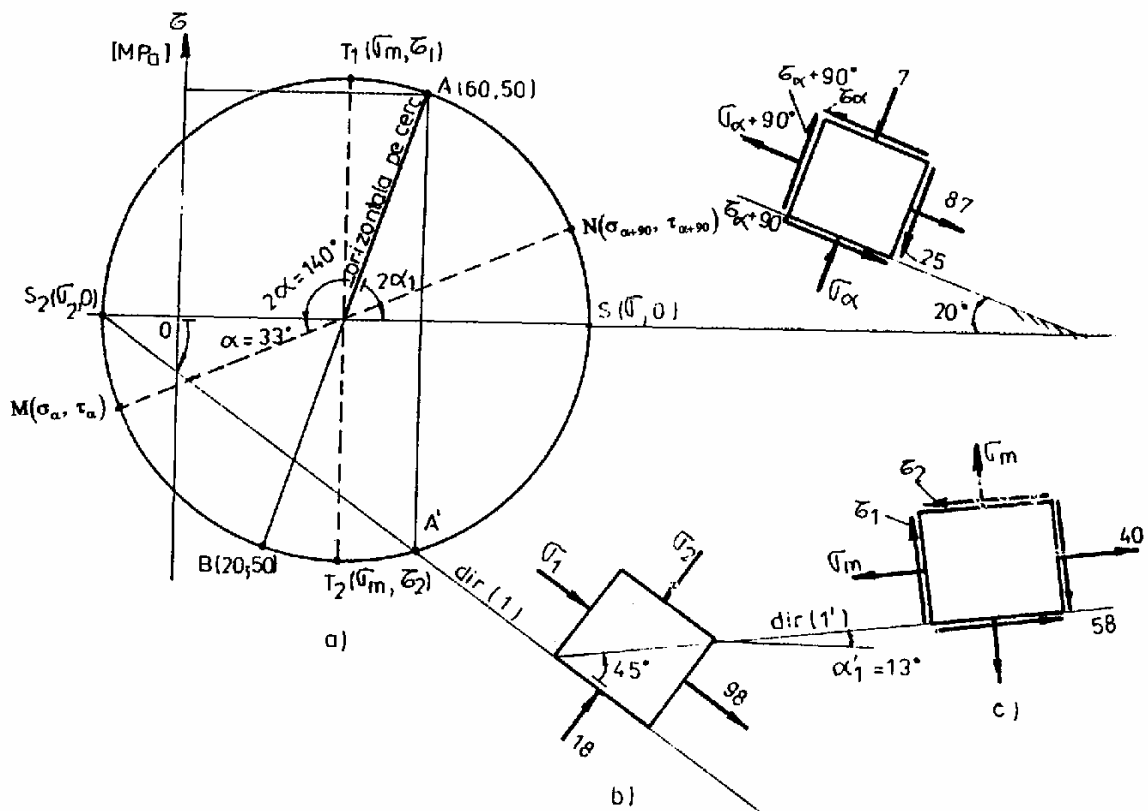


Fig. 3.8

obținându-se punctul A'. Unind S₂ cu A' se obține direcția reală (1), iar unghiul de la axa orizontală la direcția (1) este α₁ și măsurat rezultă: α₁ = 32°.

Reprezentarea tensiunilor principale după direcția (1), (fig.3.8,b) și după direcția (1'), (fig.3.8,c) se face analog ca la metoda analitică.

Tensiunile pe fața înclinată. De la orizontala pe cerc se măsoară un unghi 2α = -2 · 70° (În acest caz în sens antiorar deoarece unghiul α este negativ,) și se obține punctul M(σ_α, τ_α). Simetricul acestui punct față de centrul cercului va fi punctul N(σ_{α+90°}, τ_{α+90°}). Măsurând, la scara la care s-a lucrat, coordonatele acestor puncte, se obțin tensiunile:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= -7 \text{ MPa}; & \tau_{\alpha} &= -25 \text{ MPa}; \\ \sigma_{\alpha+90^{\circ}} &= 87 \text{ MPa}; & \tau_{\alpha+90^{\circ}} &= 25 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Reprezentarea tensiunilor pe fața înclinată se face tot ca la metoda analitică (fig.3.8,a).

Analiza completă și exactă a stării plane de tensiune pe cerc presupune o construcție precisă, la scară, cu rigla și compasul.

3.6. Cazuri particulare ale stării plane de tensiune

3.6.1. Starea liniară de tensiune (σ_x = σ > 0, τ_{xy} = σ_y - σ₂ = 0)

Datorită faptului că σ₂ = 0 va rezulta S₂ = 0 și ca atare cercul trece prin origine. Aceasta este mai simplu și sugestiv de rezolvat grafic. Punctul S₁ = σ₁ este abscisa maximă. Tensiunile tangențiale maxime, aflate la 45° au valorile τ₁ = -τ₂ = $\frac{\sigma}{2}$,

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{2}, \text{ (fig.3.9).}$$

Tensorial această situație se poate exprima astfel:

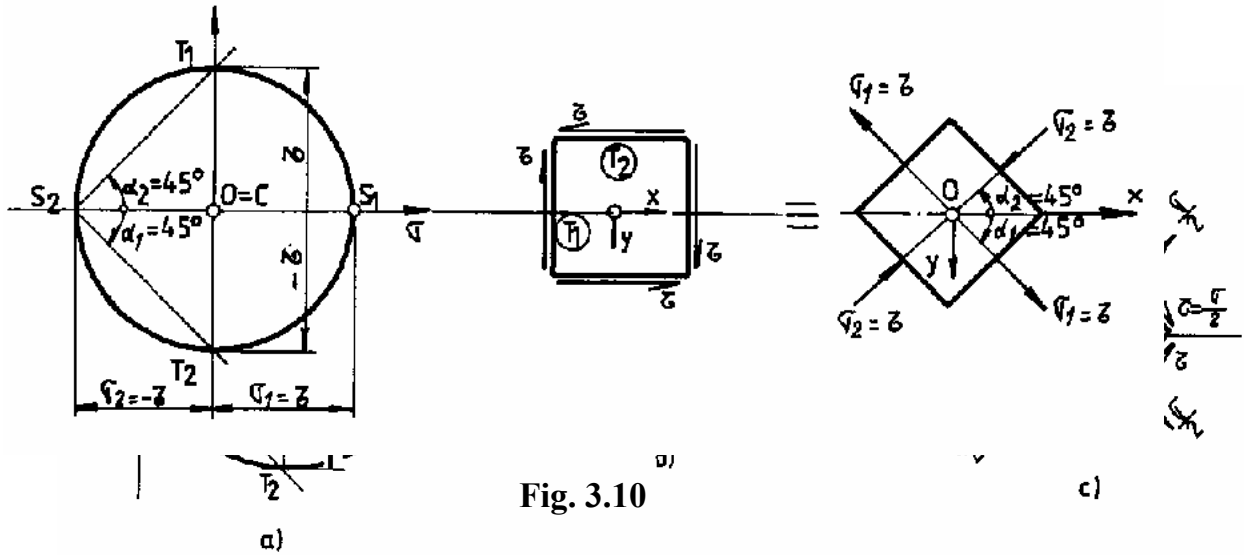


Fig. 3.10

Fig. 3.9

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{2} & -\frac{\sigma}{2} \\ \frac{\sigma}{2} & \frac{\sigma}{2} \end{pmatrix}.$$

3.6.2. Forfecarea pură ($\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau > 0$)

Utilizând și în acest caz metoda grafică, întrucât $\sigma_x = \sigma_y = 0$ cercul lui Mohr are centrul în origine $C \equiv O$ iar tensiunile principale sunt (fig. 3.10):

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau.$$

Tensorul tensiune va avea următoarea formă:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -\tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Direcțiile principale fac unghiurile $\alpha_1 = 45^\circ$ și $\alpha_2 = -45^\circ$.

Forfecare pură este echivalentă cu starea de tensiune plană în care tensiunile σ sunt egale și de sens opus.

3.7. Analiza stării generale de tensiune

Valorile celor nouă componente ale tensorului tensiune (relația 3.2 sau și fig. 3.2,b) sunt funcție de orientarea fețelor elementului infinitezimal considerat. Analiza stării spațiale de tensiune se va face considerând un plan înclinat, a cărui normală are cosinuşii directori l, m, n . Cu acest plan se secționează elementul din figura (3.2,b) obținându-se tetraedrul OABC din figura 3.11.

Dacă fața ABC are aria de mărime dA , atunci cele trei fețe ce sunt paralele cu planurile axelor de coordonate, au ariile:

$$dA_x = l \cdot dA, \quad dA_y = m \cdot dA,$$

$$dA_z = n \cdot dA.$$

Pe cele trei fețe din planele axelor de coordonate se dezvoltă tensiunile: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yz}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$. Corespunzător acestor tensiuni în figura 3.11 s-au reprezentat eforturile elementare. Pe fața înclinată ABC vor acționa componentele dX, dY și dZ ale efortului elementar \overline{dR} , precum și componentele p_x, p_y, p_z ale tensiunii \overline{p} . Expresiile acestor componente sunt:

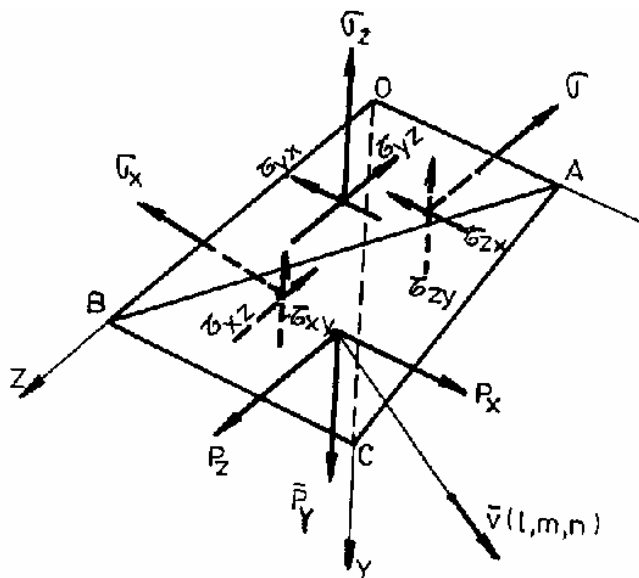


Fig. 3.11

$$dX = (l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{yx} + n \cdot \tau_{zx}) \cdot dA,$$

$$dY = (l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y + n \cdot \tau_{zy}) \cdot dA,$$

$$dZ = (l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot \sigma_z) \cdot dA,$$

(3.11)

$$p_x = \frac{dX}{dA}, \quad p_y = \frac{dY}{dA}, \quad p_z = \frac{dZ}{dA}.$$

Modulul efortului elementar și al tensiunii va fi:

$$d\mathbf{R} = \sqrt{d\mathbf{X}^2 + d\mathbf{Y}^2 + d\mathbf{Z}^2}, \quad \mathbf{p} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}. \quad (3.12)$$

La analiza stării spațiale de tensiune interesează tensiunea normală și cea tangențială de pe fața înclinată dA , ce se obțin cu relațiile (3.1). Pentru analiză trebuie determinate componentele dN (după direcția normalei) și dT (conținută în planul secțiunii dA) ale efortului elementar $d\mathbf{R}$.

Componenta dN va fi:

$$dN = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{X} + \mathbf{m} \cdot d\mathbf{Y} + \mathbf{n} \cdot d\mathbf{Z},$$

iar ținând seama de expresiile 3.11 rezultă:

$$dN = \left[l^2 \cdot \sigma_x + m^2 \cdot \sigma_y + n^2 \cdot \sigma_z + 2 \cdot (\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} \cdot \tau_{xy} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot \tau_{yz} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \tau_{zx}) \right] \cdot dA. \quad (3.13)$$

Forța elementară tangențială va fi:

$$dT = \sqrt{d\mathbf{R}^2 - dN^2}. \quad (3.14)$$

Înlocuind în relația de definiție a tensiunilor (3.1) valorile eforturilor elementare de mai sus (3.13) și (3.14) rezultă relațiile pentru tensiuni de pe fața înclinată:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{dN}{dA} = l^2 \cdot \sigma_x + m^2 \cdot \sigma_y + n^2 \cdot \sigma_z + 2(\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} \cdot \tau_{xy} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot \tau_{yz} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \tau_{zx}) \\ \tau &= \frac{dT}{dA} = \frac{\sqrt{d\mathbf{R}^2 - dN^2}}{dA} = \sqrt{p^2 - \sigma^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerăm un vector $\mathbf{v} = \mathbf{O}'\mathbf{M}$, ce are direcția normalei la suprafața înclinată dA , de modul v și care va avea proiecțiile pe axele de coordonate:

$$x = \mathbf{l} \cdot \mathbf{v}, \quad y = \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}, \quad z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v},$$

iar cosinușii directori ai vectorului $\bar{\mathbf{v}}$ sunt:

$$\mathbf{l} = \frac{x}{v}, \quad \mathbf{m} = \frac{y}{v}, \quad \mathbf{n} = \frac{z}{v}. \quad (3.16)$$

Dacă vom considera că modulul vectorului este invers proporțional cu rădăcina pătrată a tensiunii normale:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{|\sigma|}}, \text{ respectiv } \sigma = \pm \frac{\mathbf{k}^2}{v^2}, \quad (3.17)$$

vârful vectorului \mathbf{v} va descrie o suprafață ce rezultă din prima ecuație (3.15), ținând seama de (3.16) și (3.17):

$$\pm \frac{k^2}{v^2} = \frac{x^2}{v^2} \cdot \sigma_x + \frac{y^2}{v^2} \cdot \sigma_y + \frac{z^2}{v^2} \cdot \sigma_z + 2 \left(\frac{x \cdot y}{v^2} \cdot \tau_{xy} + \frac{y \cdot z}{v^2} \cdot \tau_{yz} + \frac{z \cdot x}{v^2} \cdot \tau_{zx} \right),$$

care după simplificare rezultă:

$$x^2 \cdot \sigma_x + y^2 \cdot \sigma_y + z^2 \cdot \sigma_z + 2(x \cdot y \cdot \tau_{xy} + y \cdot z \cdot \tau_{yz} + z \cdot x \cdot \tau_{zx}) = \pm k^2 \quad (3.18)$$

Ecuația (3.18) arată cum variază tensiunea normală σ și poartă numele de **cuadrice tensiunilor normale** (cuadricele lui Cauchy). Componentele tensorului tensiune sunt coeficienții cuadricele.

Raportând cuadricele la axele sale principale (1, 2, 3) dispar termenii ce conțin produse de coordonate, respectiv ce conțin tensiunile tangențiale. Rezultă că există trei plane perpendiculare între ele pe care tensiunile tangențiale sunt nule. Pe aceste fețe acționează numai tensiuni normale $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, ce se numesc **tensiuni principale**. Direcțiile acestora sunt chiar direcțiile axelor principale.

Determinarea tensiunilor și a axelor principale se face din condiția că pe fața înclinată dA (fig. 3.10), tensiunea tangențială este nulă. Ca urmare, cele trei componente ale efortului de pe suprafața dA sunt:

$$dX = l \cdot \sigma \cdot dA, \quad dY = m \cdot \sigma \cdot dA, \quad dZ = n \cdot \sigma \cdot dA.$$

Înlocuind aceste expresii în relația (3.11) se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} l \cdot (\sigma_x - \sigma) + m \cdot \tau_{yx} + n \cdot \tau_{yz} &= 0 \\ l \cdot \tau_{xy} + m \cdot (\sigma_y - \sigma) + n \cdot \tau_{zy} &= 0 \\ l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot (\sigma_z - \sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pentru ca acest sistem să aibă soluții diferite de soluția banală (egală cu zero) este necesar ca:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul se obține ecuația:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0, \quad (3.20)$$

unde coeficienții lui σ sunt **invarianți** (deoarece oricare ar fi sistemul de axe tensiunile principale sunt aceleași:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

Ecuația (3.20) are trei soluții reale care sunt cele trei tensiuni principale:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Ecuația cuadrice în raport cu axele principale este:

$$x^2 \cdot \sigma_1 + y^2 \cdot \sigma_2 + z^2 \cdot \sigma_3 = \pm k^2. \quad (3.22)$$

Direcțiile principale 1, 2, 3, ce definesc fețele pe care se dezvoltă tensiunile principale, se obțin din sistemul de ecuații (3.19) înlocuind pe rând tensiunea σ cu fiecare valoare a tensiunilor principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, și la care se adaugă condiția:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (3.23)$$

Cele trei direcții principale sunt ortogonale și deci:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_1 = 0. \quad (3.24)$$

Eliminând parametrii l, m, n din ecuația (3.23) pentru direcțiile principale cu valorile acestora din relațiile:

$$p_x = \frac{dX}{dA} = l \cdot \sigma_1, \quad p_y = \frac{dY}{dA} = m \cdot \sigma_2, \quad p_z = \frac{dZ}{dA} = n \cdot \sigma_3,$$

se obține ecuația:

$$\frac{p_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_z^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (3.25)$$

Această ecuație reprezintă ecuația unui elipsoid numit **elipsoidul tensiunilor** sau **elipsoidul lui Lamé** și reprezintă locul geometric al vârfurilor vectorului $\bar{\mathbf{p}} = p_x \cdot \bar{\mathbf{i}} + p_y \cdot \bar{\mathbf{j}} + p_z \cdot \bar{\mathbf{k}}$, cu originea în O' , când planul ABC se rotește.

Dacă se face o secțiune prin elipsoidul tensiunilor cu un plan principal se obține o stare plană de tensiune și respectiv **elipsa tensiunilor** care corespunde unei tensiuni principale care este nulă (ex. $\sigma_3 = 0$). Dacă două din tensiunile principale sunt nule (ex. $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) elipsoidul degenerază într-o dreaptă și corespunde unei stări liniare de tensiune.

3.8. Cercul lui Mohr pentru starea spațială de tensiune

Tensiunile de pe o față înclinată (ABC, fig.3.11) se pot determina și pe cale grafică, cu ajutorul cercului lui Mohr dacă elementul de volum este orientat după direcțiile principale (1), (2), (3), respectiv sunt cunoscute tensiunile principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Pe axa $O\sigma$ se construiesc la scară segmentele OS_1, OS_2 și OS_3 (la abscisele $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) și se trasează semicercurile cu diametrele S_1S_2, S_2S_3 și S_3S_1 .

Triunghiul curbiliniu hașurat reprezintă locul geometric al stărilor de tensiuni $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ când planul înclinat se rotește în jurul punctului considerat.

Considerând unghiurile α, β și γ ca fiind unghiurile pe care le face normala la suprafața înclinată cu σ_1, σ_2 și respectiv σ_3 vom proceda astfel:

- se trasează dreapta S_1P_1 ce face unghiul α de la verticala dusă în S_1 ;
- se trasează dreapta S_3P_3 ce face unghiul γ de la verticala dusă în S_3 ;

Coordonatele punctului M, ce rezultă din intersecția arcelor de cerc trasate cu razele $r_1 = C_1P_1$ și $r_3 = C_3P_3$ reprezintă tensiunile din planul înclinat. Același punct se obține trasând dreapta S_2P_2 ce face unghiul β de la verticala dusă în S_2 și trasând arcul cu rază $r_2 = C_2P_2$.

3.9. Cazuri particulare ale stării spațiale de tensiune

Se consideră că elementul de volum are fețele definite de cele trei direcții principale 1, 2, 3 și deci pe acestea vor acționa numai tensiunile principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

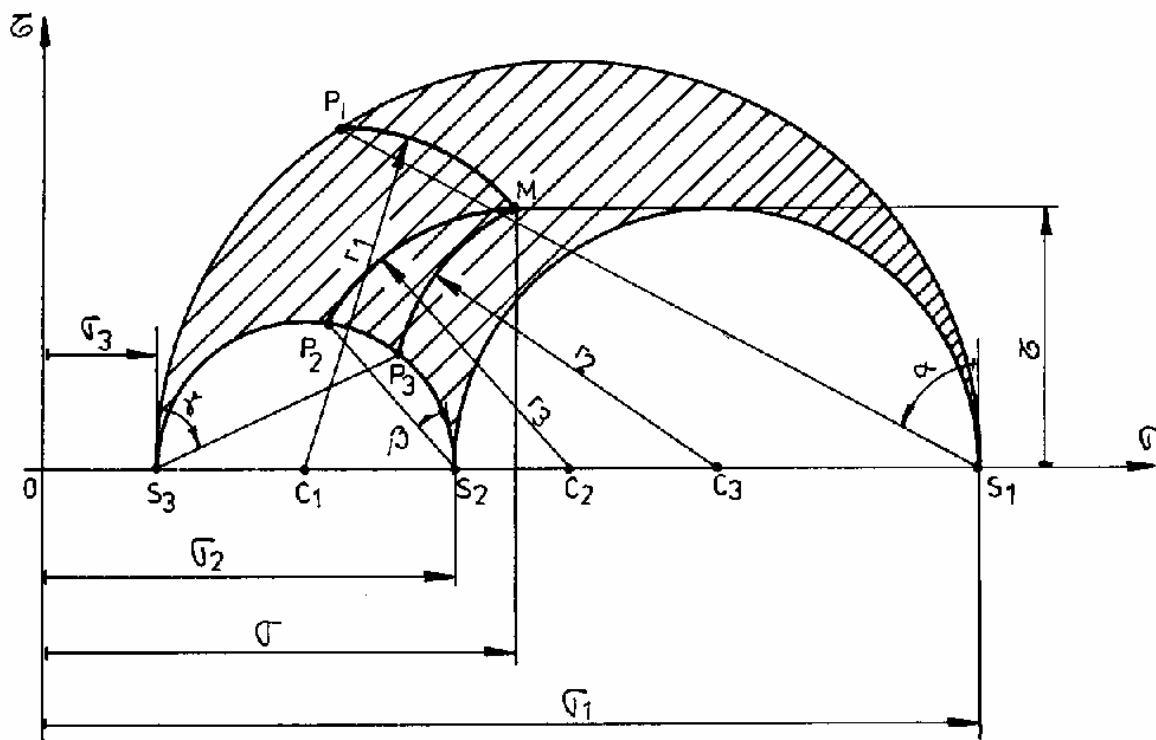


Fig. 3.12

3.9.1 Tensiuni în planuri bisectoare

Secționând elementul de volum pe rând cu cele trei plane bisectoare ale diedrelor principale (fig. 3.13), pe fiecare față din elementul de volum va exista o stare plană de tensiune deoarece a treia tensiune normală este conținută în plan, Întrucât planurile sunt la 45° față de planurile principale, pe acestea vor acționa **tensiuni tangențiale maxime** și tensiuni normale medii.

Tensinile din planurile bisectoare sunt:

- în planul bisector 1:

$$\sigma_{1m} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad \tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad (3.26,a)$$

- în planul bisector 2:

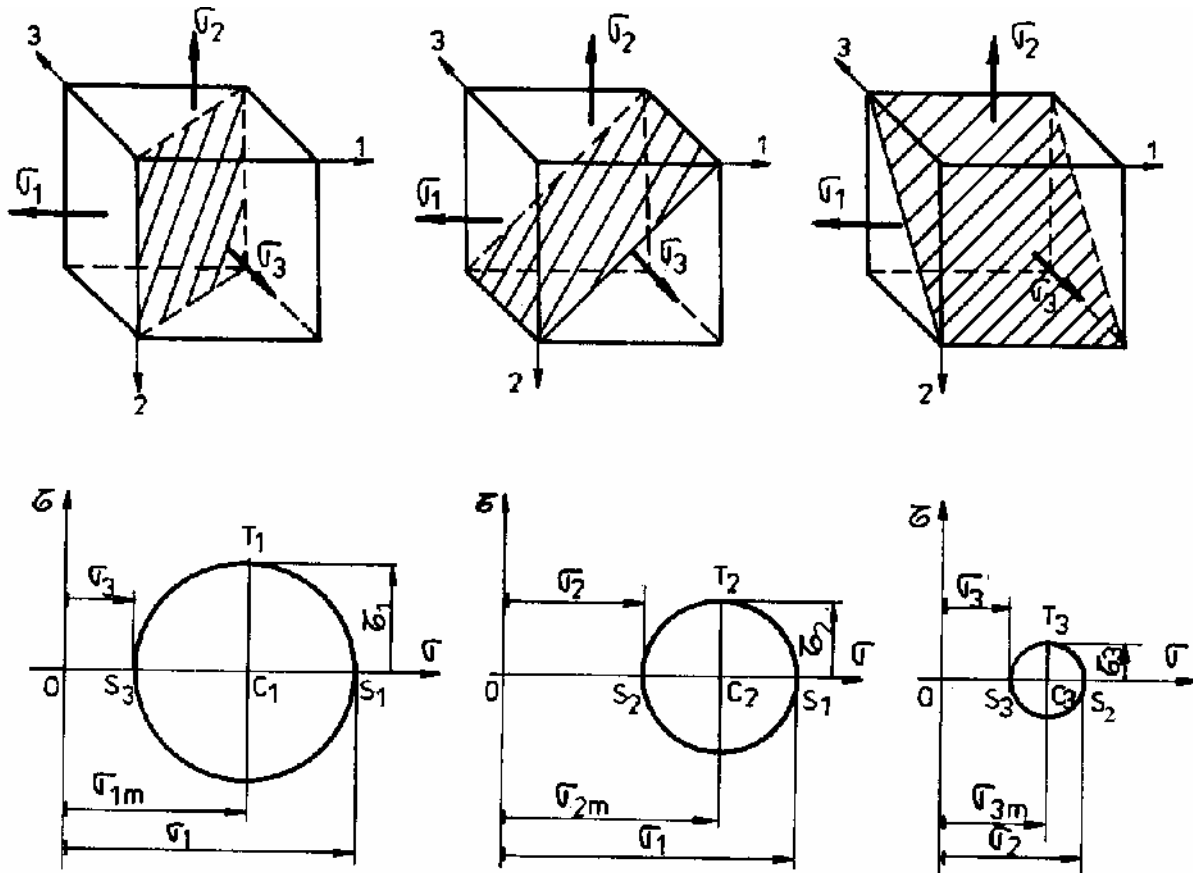


Fig. 3.13

$$\sigma_{2m} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad (3.26,b)$$

- în planul bisector 3:

$$\sigma_{3m} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad (3.26,c)$$

Deci, pe fiecare față a fiecărui plan bisector principal există o stare plană de tensiune cu tensiuni tangențiale maxime. Dintre cele trei plane bisectoare planul bisector 2 conține tensiunea tangențială maximă a stării generale de tensiune.

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.27)$$

3.9.2. Tensiuni octaedrice

Un plan egal înclinat față de direcțiile tensiunilor principale, ceea ce înseamnă $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ reprezintă un **plan octaedric** (fig.3.14). Tensiunile pe un octaedru, obținut prin secționarea elementului de volum cu opt asemenea plane, numite tensiuni octaedrice sunt:

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad (3.28)$$

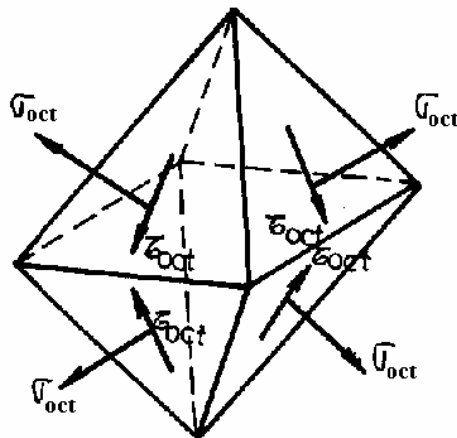


Fig. 3.14

$$\begin{aligned}\tau_{\text{oct}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}\end{aligned}\tag{3.29}$$

Aplicația 3.2 Pentru starea spațială de tensiuni din figura 3.15 să se determine:

- tensiunile principale;
- direcțiile principale;
- tensiunile octoedrice.

I. Recunoașterea mărimilor date:

Ținând seama de valorile date, de semnele convenționale atribuite avem:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 180 \text{ MPa}; & \tau_{xy} &= -60 \text{ MPa}; \\ \sigma_y &= -80 \text{ MPa}; & \tau_{yz} &= 70 \text{ MPa}; \\ \sigma_z &= 100 \text{ MPa}; & \tau_{zx} &= 50 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

a) Cu relațiile (3.21) se calculează invariantii ecuației (3.20):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 180 - 80 + 100 = 200 \text{ MPa};$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= 180 \cdot (-80) + (-80) \cdot 100 + 100 \cdot 80 - 60^2 - 70^2 - 50^2 = -1,54 \cdot 10^4 \text{ MPa}^2;\end{aligned}$$

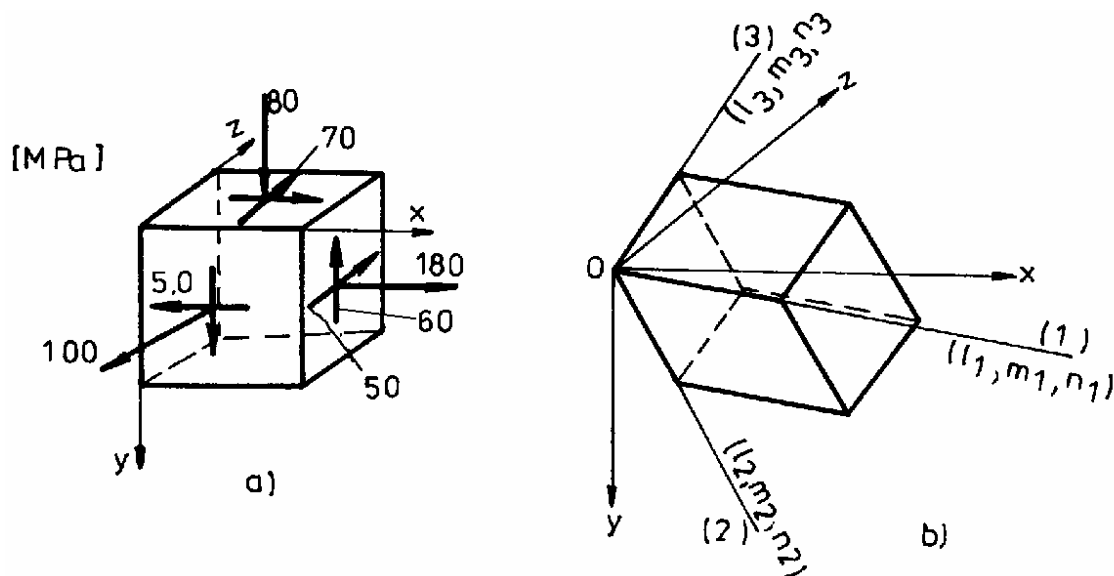


Fig. 3.15

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 180 & -60 & 50 \\ -60 & -80 & 70 \\ 50 & 70 & 100 \end{vmatrix} = -2,209 \cdot 10^{-6} \text{ MPa}^3 .$$

Ecuția (3.20) devine:

$$\sigma^3 - 200\sigma^2 - 1,54 \cdot 10^4 \sigma + 2,902 \cdot 10^6 = 0 ,$$

a cărei soluții sunt:

$$\sigma_1 = 206,53 \text{ MPa} > \sigma_2 = 115,32 \text{ MPa} > \sigma_3 = -121,85 \text{ MPa} .$$

Utilizând relațiile (3.26) rezultă:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{206,53 + 121,85}{2} = 164,2 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{206,53 - 115,53}{2} = 45,61 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{115,53 + 121,85}{2} = 118,6 \text{ MPa} .$$

Verificarea acestor soluții se face recalculând invariantii ecuației (3.21) luând drept axe de referință axele principale:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 206,53 + 115,32 - 121,85 = 200 \text{ MPa} ;$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = \\ = 206,53 \cdot 115,32 - 115,32 \cdot 121,85 - 121,85 \cdot 206,53 = -1,54 \cdot 10^4 \text{ MPa}^2 ;$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 206,53 \cdot 115,32 \cdot (-121,85) = -2,209 \cdot 10^6 \text{ MPa}^3 .$$

b) Direcțiile principale

Înlocuind $\sigma = \sigma_1$ sistemul (2.18) devine:

$$\begin{cases} -26,53 \cdot l_1 - 60 \cdot m_1 + 50 \cdot n_1 = 0; \\ -60 \cdot l_1 + 286,53 \cdot m_1 + 70 \cdot n_1 = 0; \\ 50 \cdot l_1 + 70 \cdot m_1 - 106,53 \cdot n_1 = 0. \end{cases}$$

a cărei soluții sunt: $l_1 = 0,9249$, $m_1 = -0,1055$ și $n_1 = 0,3655$ ceea ce definesc direcția tensiunii principale σ_1 .

Procedând analog pentru ($\sigma = \sigma_2$) obținem valorile $l_2 = -0,297$, $m_2 = 0,4017$ și $n_2 = 0,8663$ care definesc direcția σ_2 .

Dacă în sistemul (3.19) introducem $\sigma = \sigma_3$ rezultă $l_3 = -0,6967$ și $m_3 = -0,9097$ și $n_3 = 0,3405$ care sunt cosinuzii directori ai direcției σ_3

Verificarea soluțiilor obținute se face din condiția de ortogonalitate a direcțiilor s_1 , s_2 și s_3 . Pentru direcțiile (1) și (2) rezultă:

$$\begin{aligned} l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 &= \\ &= -0,9249 \cdot 0,297 - 0,1055 \cdot 0,4017 + 0,3655 \cdot 0,8663 = 0 \end{aligned}$$

Pentru direcțiile (1) și (3):

$$\begin{aligned} l_1 \cdot l_3 + m_1 \cdot m_3 + n_1 \cdot n_3 &= \\ &= -0,9249 \cdot 0,2373 + 0,1055 \cdot 0,9097 + 0,3655 \cdot 0,3405 = 0 \end{aligned}$$

Direcțiile principale sunt reprezentate în figura (3.13,b).

c) Tensiunile octaedrice

Cu relațiile (3.28) și (3.29) se obțin:

$$\sigma_{\text{oct}} = \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{206,53 + 115,3 - 121,85}{3} = 66,66 \text{ MPa},$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(206,53 - 115,3)^2 + (115,3 + 121,85)^2 + (-121,85 - 206,53)^2} = 138,4 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

3.9.3. Tensorul sferic și deviatorul

Când tensiunile principale sunt egale:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m \neq 0 \quad (3.30)$$

tensorul tensiune se numește **tensor sferic**. Această stare de tensiune are ca efect **numai modificarea volumului fără modificarea formei** (sfera se deformează tot în sferă).

Când suma tensiunilor principale este nulă:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0 \quad \text{pentru } \sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0 \quad (3.31)$$

tensorul tensiune se numește **deviator**. Efectul unei asemenea stări de tensiune este **schimbarea formei fără modificarea volumului** (sfera se modifică în elipsoid fără să-și modifice volumul).

Ținând seama de relațiile (3.30) și (3.31) orice caz general de tensiune se poate descompune în două stări:

- una produsă de tensorul sferic
- cealaltă produsă de tensorul deviator.

Se poate astfel exprima starea generală de tensiune:

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_D, \quad (3.32)$$

sau explicit:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Această descompunere poate fi ilustrată prin stările de tensiune din figura 3.16

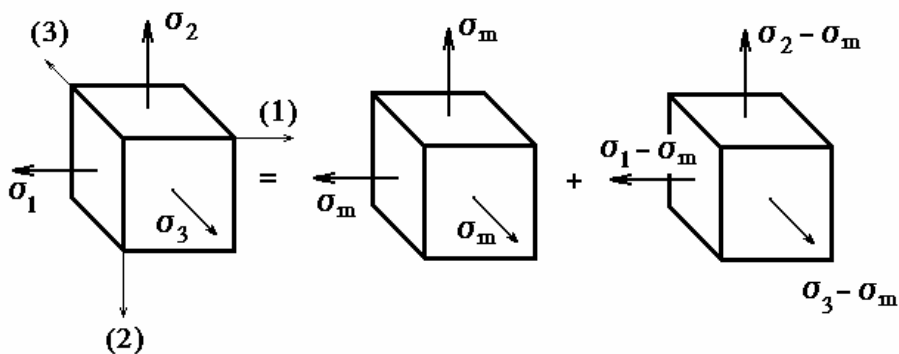


Fig. 3.16

3.10. Variația tensiunilor dintr-un corp. Ecuațiile de echilibru

În analiza stării de tensiune de mai sus s-a făcut ipoteza că tensiunile de pe fețele paralele ale elementului infinit mic sunt egale în mărime și de sens contrar. Această ipoteză este valabilă și trebuie făcută când se analizează variația tensiunilor

în jurul unui punct. La analiza variației tensiunilor într-un corp nu se mai acceptă această ipoteză pentru că se ia în considerare schimbarea intensității tensiunilor normale și tangențiale între două fețe paralele.

Pentru simplificarea demonstrației se consideră un element sollicitat plan (fig. 3.17). Astfel tensiunea normală σ_x de pe fața verticală $\langle A \rangle$ devine $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ pe fața $\langle A' \rangle$ unde $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ este creșterea tensiunii σ_x pe distanța dx în direcția pozitivă a axei Ox . În mod similar, τ_{xy} de pe fața $\langle A \rangle$ devine $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$ pe fața $\langle A' \rangle$. Aceste modificări se produc și pe direcția axei Oy așa cum este prezentat în figura 3.17. Ținând seama și de forțele masice $X \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ și $Y \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ ce acționează în centrul de greutate al elementului considerat, vom avea următoarele ecuații de echilibru:

$$\sigma_x \cdot dy \cdot dz - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz + \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dz \cdot dx - X \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0,$$

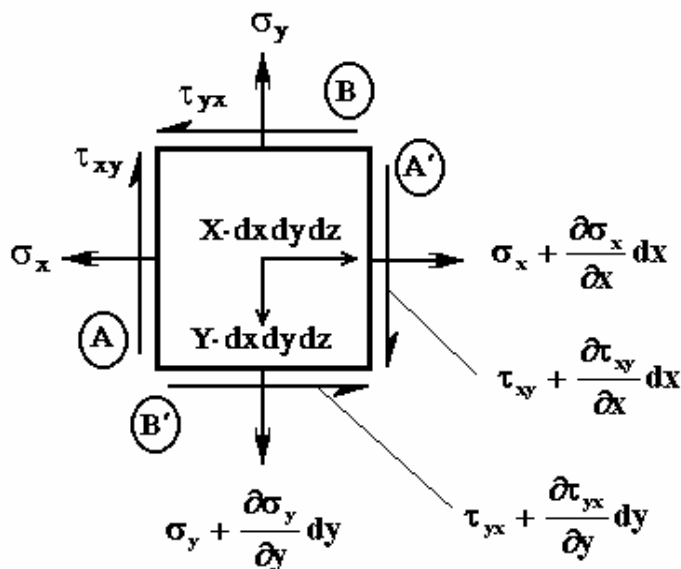


Fig. 3.17

$$\sigma_y \cdot dx \cdot dz - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz + \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz - Y \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0.$$

Reducând termenii asemenea și simplificând cu $dx \cdot dy \cdot dz$ se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Relațiile (3.34) reprezintă **variația tensiunilor într-un corp pentru starea plană de tensiune ținând seama și de forțele masice.**

Dacă forțele masice sunt neglijabile în raport cu celelalte sarcini și nu se iau în considerare, relațiile de mai sus devin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Se constată că **variația tensiunilor normale trebuie să fie întodeauna însoțită și de variația tensiunilor tangențiale și invers.**

Rezultatele obținute mai sus sunt aplicabile în practică fie că se ia elementul din figura 3.3 (dacă se analizează starea de tensiune în jurul unui punct) sau elementul din figura 3.16 (când se analizează variația tensiunilor într-un corp).

Prin extrapolare, din ecuațiile (3.34) se pot obține relațiile ce caracterizează variația tensiunilor într-un corp, dacă se ține seama și de forțele masice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dacă se neglijează forțele masice ecuațiile (3.36) devin:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.37}$$

3.11. Deformații și deplasări

Starea de tensiune s-a analizat ca efect al forțelor interioare și în mod similar se va analiza modificarea dimensiunilor.

Prin **deformație** se înțelege **modificarea dimensiunii ER**. Modificarea lungimii se numește **lungire**, când ER este întins și respectiv **scurtare**, când acesta este comprimat. Lungirile și respectiv scurtările se notează cu Δl , Δx , Δy , Δz , etc.

Prin **deformație unghiulară** se înțelege modificarea unghiurilor (drepte) și se notează cu $\Delta \varphi$; $\Delta \theta$, etc.

Pentru a simplifica și evidenția mai clar studiul deformațiilor, să considerăm un element plan OABC decupat dintr-un ER solicitat plan. Starea plană de tensiune poate fi considerată ca fiind suprapunerea a trei stări de tensiune: două stări de tensiune normală (fig.3.18,b și c) și una de forfecare pură (fig.3.18,d). Fiecare din aceste stări de tensiune produc, deformații caracteristice.

Starea de tensiune din figura (3.18,b) modifică lungimea elementului, astfel că elementul cu dimensiunile inițiale (linie întreruptă) se schimbă și ia forma elementului reprezentat cu linie groasă. Aceste schimbări sunt **deformații liniare**, $\Delta' x$ și $\Delta' y$ - unde $\Delta' x$ este o alungire, iar $\Delta' y$ o contracție. Deformațiile liniare se măsoară în mm sau μm .

Similar se deformează elementul pentru starea de tensiune din figura (3.18,c), cu lungirea $\Delta'' y$ și contracția $\Delta'' x$.

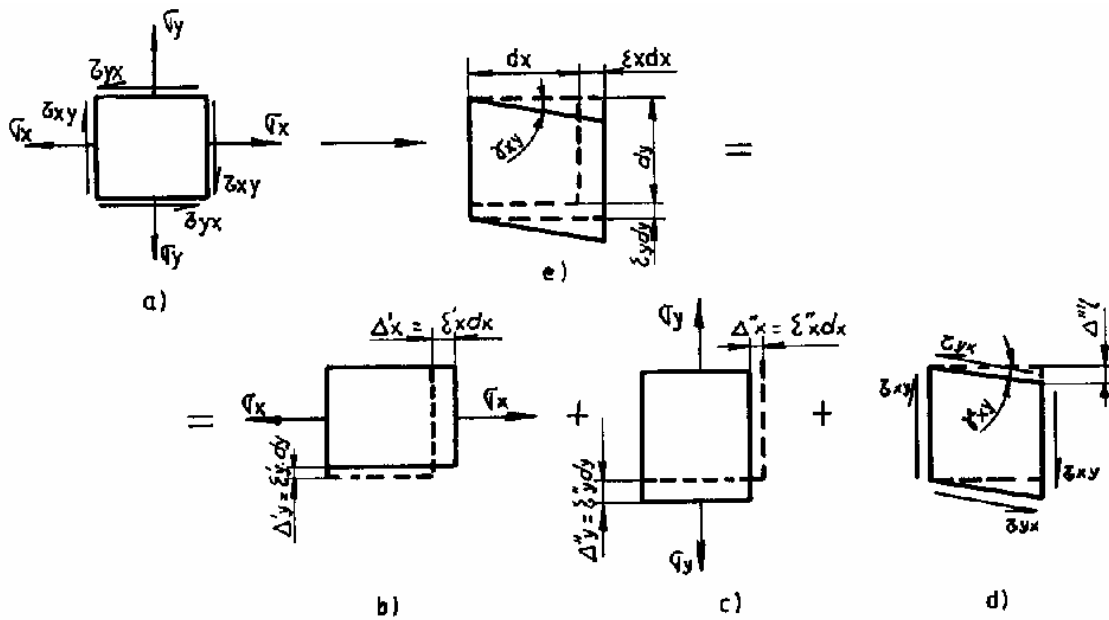


Fig. 3.18

Deoarece deformațiile liniare nu pot caracteriza bine deformațiile unui ER, pentru că depind de dimensiunile acestuia se utilizează noțiunile de **deformații specifice**.

Se definește **deformație specifică liniară** pe o direcție raportul dintre alungirea (scurtarea) elementului și lungimea inițială a acestuia pe direcția respectivă. Pentru elementele din figura (3.18,b,c) se obțin următoarele **alungiri specifice**:

$$\epsilon'_x = \frac{\Delta'_x}{dx} \quad \text{și} \quad \epsilon'_y = \frac{\Delta'_y}{dy}, \quad (3.38,a)$$

și **scurtări (contractii) specifice**:

$$\epsilon''_y = \frac{\Delta''_y}{dy} \quad \text{și} \quad \epsilon''_x = \frac{\Delta''_x}{dx} \quad (3.38,b)$$

Tensiunile tangențiale deformează elementul ca în figura (3.18,c). Sub acțiunea tensiunilor tangențiale elementul își modifică numai unghiul drept dar **lungimile laturilor rămân aceleași**. Modificarea unghiului drept se notează cu γ_{xy} .

Deoarece unghiul γ_{xy} , este foarte mic, **deformația specifică unghiulară**, se poate defini astfel:

$$\gamma_{xy} \approx \operatorname{tg} \gamma_{xy} = \frac{\Delta l}{dx}, \quad (3.38)$$

și se numește **lunecare specifică**.

Deformațiile specifice liniare și cele unghiulare sunt adimensionale. În lucrările tehnice de specialitate lungirile specifice se dau în $\mu\text{m}/\text{m}$ sau în %, iar lunecările specifice pot fi exprimate în $\mu\text{m}/\text{m}$ sau în radiani.

Deformațiile specifice sunt tensori ca și tensiunile.

Drumul parcurs de un punct al ER de la poziția sa inițială corespunzătoare unui ER neîncărcat la poziția finală, după solicitare se numește deplasare. Deplasările sunt mărimi vectoriale.

Deplasarea, în mod uzual, poate rezulta din următoarele patru tipuri generale:

- a) translația întregului ER;
- b) rotația întregului ER;
- c) schimbarea dimensiunilor ER;
- d) modificarea unghiurilor ER.

Primele două deplasări sunt deplasări ale rigidului, iar ultimele două tipuri sunt cauzate de deformația ER. Deplasările rigidului s-au studiat la cinematică. În Rezistența materialelor se vor studia numai deplasările produse prin deformarea ER.

3.12. Analiza stării plane de deformație

Dacă suprapunem toate deformațiile din figurile (3.18,b,c,d) produse de tensiunile normale și de tensiunile tangențiale se obține **starea plană de deformație** (fig.3.18,e).

Elementul infinit mic din figura 3.19 **poate fi considerat că reprezintă un punct din ER.** Laturile elementului se iau paralele cu axele alese. Deformațiile specifice ϵ_x , ϵ_y și γ_{xy} asociate sistemului de axe Oxy sunt reprezentate în figura (3.11,c).

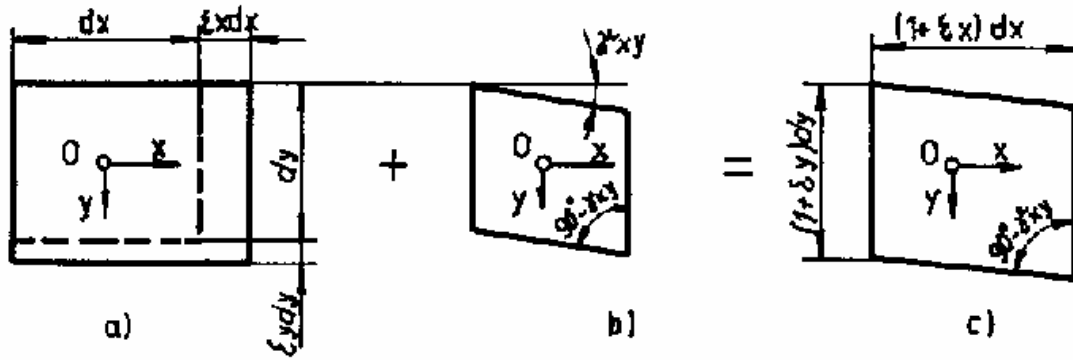


Fig. 3.19

În multe probleme ingierești se cere determinarea deformațiilor într-un sistem particular de axe de coordonate Osn rotit cu unghiul α față de sistemul inițial.

În acest scop se consideră elementul $OASB$, a cărui diagonală OS face unghiul α față de sistemul inițial Oxy , (fig. 3.20,b). Diagonala OS este latura elementului din figura (3.20,a). Starea plană de deformație conduce la deformațiile liniare $\epsilon_x \cdot dx$, $\epsilon_y \cdot dy$ și la deformația unghiulară $(1 + \epsilon_x) \cdot \gamma_{xy}$. Din cauza acestor deformații punctul S se va deplasa în S_2 efectuând o rotație $SS_1 = \Delta ds_n$ și o translație paralelă cu OS : $S_1S_2 = \Delta ds$.

Deplasările punctului S rezulă din însumarea corespunzătoare a catetelor

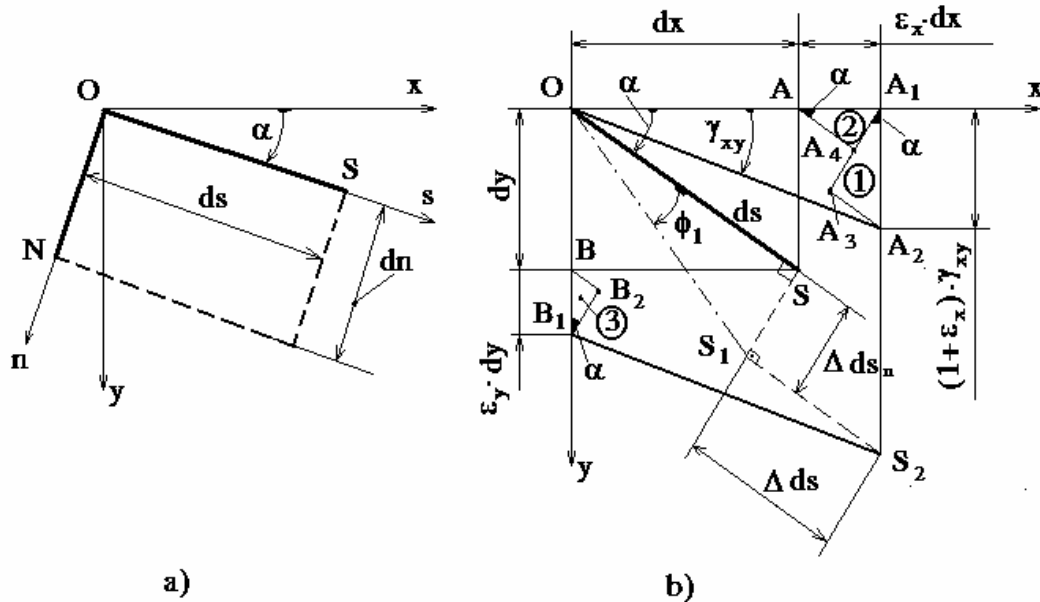


Fig. 3.20

triunghiurilor dreptunghice $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle$ ce au ipotenuzele $\varepsilon_x \cdot dx, \varepsilon_y \cdot dy$, $(1 + \varepsilon_{xy}) \cdot \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy}$ și au câte o catetă paralelă cu $ds = OS$. Astfel se obține:

$$\begin{aligned} \Delta ds &= S_1 S_2 = AA_4 + BB_2 + A_3 A_2 = \\ &= \varepsilon_x \cdot dx \cdot \cos \alpha + \varepsilon_y \cdot dy \cdot \sin \alpha + (1 + \varepsilon_x) \cdot \gamma_{xy} \cdot dx \cdot \sin \alpha, \\ \Delta ds_n &= SS_1 = A_4 A_3 + B_2 B_1 = A_1 A_3 - A_1 A_4 + B_2 B_1 = \\ &= (1 + \varepsilon_x) \cdot \gamma_{xy} \cdot dx \cdot \cos \alpha - \varepsilon_x \cdot dx \cdot \sin \alpha + \varepsilon_y \cdot dy \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Prin împărțirea cu ds rezultă:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon_x \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \cos \alpha + \varepsilon_y \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \sin \alpha + (1 + \varepsilon_x) \cdot \gamma_{xy} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \sin \alpha, \\ \Phi_1 &= \frac{\Delta ds_n}{ds} = -\varepsilon_x \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \sin \alpha + \varepsilon_y \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \cos \alpha + (1 + \varepsilon_x) \cdot \gamma_{xy} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Având în vedere figura 3.20 și ținând seama că:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

și că în paranteză ε_x este foarte mic în raport cu 1 și se poate neglija, se obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \varepsilon_x \cdot \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \\ \Phi_1 &= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \gamma_{xy} \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Înlocuind în prima relație (3.40):

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

se obține alungirea specifică liniară pe direcția α :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha \tag{3.41,a}$$

Unghiul Φ_1 reprezintă rotirea laturii OS . Prin deformarea ER se rotește și latura ON , perpendiculară pe OS . Din figura (3.21,a) se observă că unghiul drept NOS , se micșorează prin deformare și va deveni:

$$N_2 OS_2 = 90^\circ - \Phi_1 + \Phi_2 = 90^\circ - (\Phi_1 - \Phi_2)$$

Modificarea unghiului drept va fi: $\gamma_{xy} = \Phi_1 - \Phi_2$.

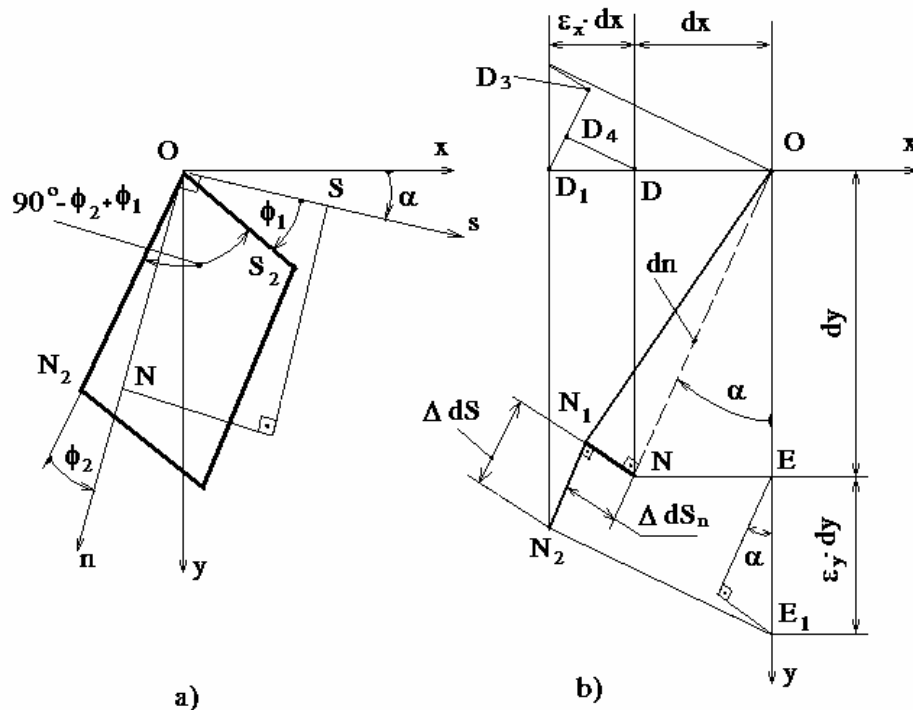


Fig. 3.21

Această mărime numită **lunecare specifică**, se poate determina dacă se cunoaște și unghiul Φ_2 .

Din figura (3.21,b) se determină:

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{dS_n}{dn} = \frac{NN_1}{ON} = \frac{DD_4 + D_3D_2 - E_1E_2}{ON} = \\ &= \epsilon_x \cdot \frac{dx}{dn} \cdot \cos \alpha + (1 + \epsilon_x) \cdot \gamma_{xy} \cdot \frac{dx}{dn} \cdot \sin \alpha - \epsilon_y \cdot \frac{dy}{dn} \cdot \sin \alpha . \end{aligned}$$

Ținând seama că:

$$\frac{dx}{dn} = \sin \alpha, \quad \frac{dy}{dn} = \cos \alpha .$$

și în paranteză neglijând pe ϵ_x față de 1, se obține:

$$\Phi_2 = (\epsilon_x - \epsilon_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \gamma_{xy} \cdot \sin^2 \alpha$$

Prin urmare lunecarea specifică rezultă:

$$\gamma_{xy} = \Phi_1 - \Phi_2 = -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \gamma_{xy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha),$$

și ținând seama de expresiile funcțiilor trigonometrice ale unghiului dublu:

$$\gamma_{xy} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \quad (3.41,b)$$

Relațiile (3.4) exprimă deformațiile specifice în sistemul de axe Osn, rotit cu unghiul α față de sistemul inițial Oxy, în care se cunosc deformațiile specifice: ε_x , ε_y și γ_{xy} . Aceste relații permit analiza stării plane de deformație.

Se observă că relația (3.41,a) are structură identică cu relația (3.4,a), iar (3.41,b) cu (3.4,b). Dacă face înlocuirea:

$$\sigma \leftrightarrow \varepsilon \text{ și } \tau \leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \quad (3.42)$$

se pot deduce unele relații din celelalte. Acest fapt este normal dacă se are în vedere că atât tensiunile cât și deformațiile specifice sunt mărimi tensoriale și ca atare respectă aceleași reguli.

Dacă se ia în considerare **relația de similitudine** (3.42) se poate scrie, fără demonstrație, relațiile care dau direcțiile principale:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} &= \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}, \text{ sau} \\ \alpha_{1,2} &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dacă se urmărește obținerea unghiului α_1 se utilizează relația :

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_{xy}}{2 \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_2)}, \quad (3.44)$$

precum și deformațiile specifice principale:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \quad (3.45)$$

Deformația specifică medie este:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\alpha+90^\circ}}{2} = \text{ct.} \quad (3.46)$$

Lunecarea specifică maximă respectiv minimă:

$$\gamma_{1,2} = \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \quad (3.47)$$

Direcțiile pe care se află lunecările specifice maxime:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2}}, \quad (3.48)$$

de unde rezultă:

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2} \pm \frac{\pi}{4}. \quad (3.48,a)$$

3.13. Cercul lui Mohr pentru starea plană de deformație

Ținând seama de relația de similitudine (3.42) rezultă că analiza stării plane de deformație (variația deformațiilor în jurul unui punct), poate fi analizată pe cale grafică, utilizând cercul lui Mohr. Relația (3.10), ținând seama de (3.42) devine:

$$\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma \right)^2 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \right]^2. \quad (3.49)$$

Cercul lui Mohr pentru starea de deformație (fig. 3.22) are:

- sistemul de axe: abscisa ε ;
ordonata $\gamma/2$.

- coordonatele centrului C:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad \gamma=0$$

- raza OS_1 :

$$\frac{1}{2} \gamma_{\max} = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2},$$

- parametru în coordonate polare:

$$2\alpha$$

- fiecărui punct de pe cercul lui Mohr îi corespunde, ca abscisă -deformația specifică liniară (ε) și ca ordonată -jumătate din lunecarea specifică ($\gamma/2$),

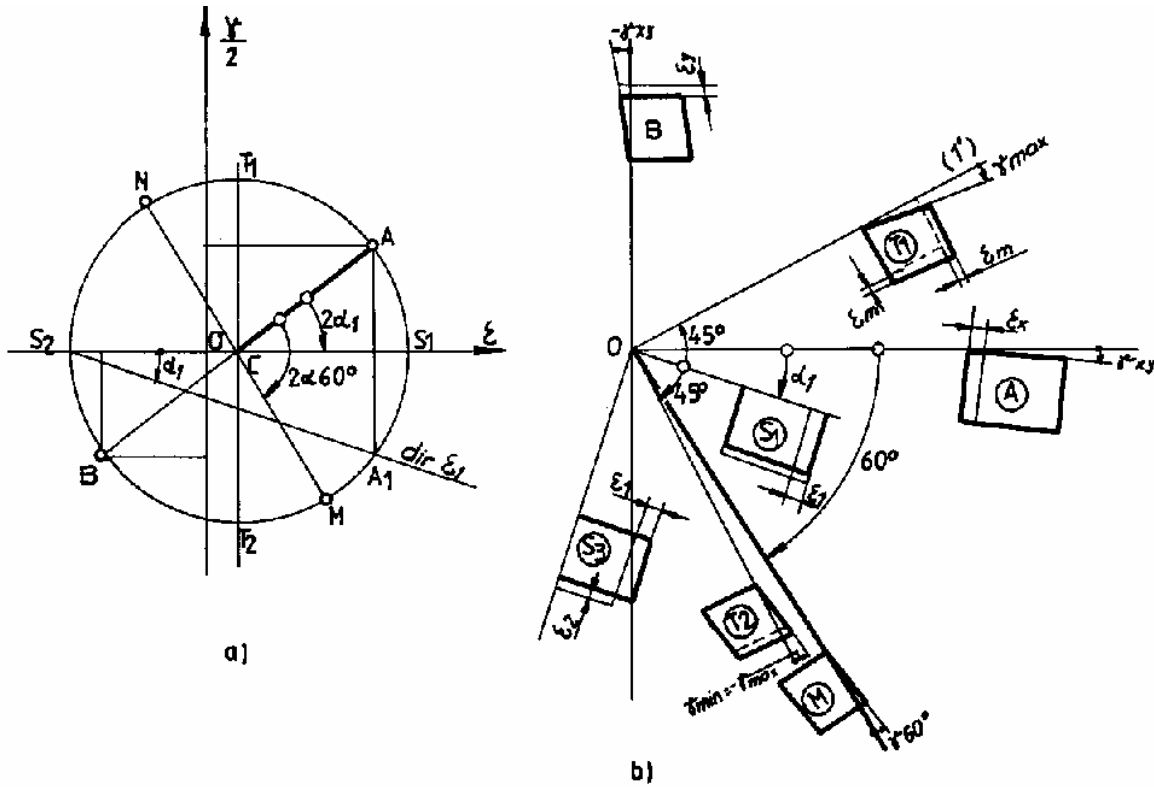


Fig. 3.22

-deformațiilor specifice liniare extreme ϵ_1 și ϵ_2 pentru care $\gamma = 0$, le corespund punctele S_1 și S_2 de pe axa $O\epsilon$.

Aplicația 3.2 Pentru starea plană de deformare caracterizată prin $\epsilon_x = 500 \mu\text{m} / \text{m}$, $\epsilon_y = 300 \mu\text{m} / \text{m}$, $\gamma_{xy} = -600 \mu\text{m} / \text{m}$, să se determine prin metoda analitică și grafică:

- a) deformațiile specifice principale;
- b) direcțiile principale;
- c) să se reprezinte aceste mărimi.

I Metoda analitică:

a) Utilizând relația (3.45) se obține:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1,2} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2} = \\ &= \frac{500 - 300}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(500 + 300)^2 + 600^2} = 100 \pm 500 \mu\text{m} / \text{m}. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = 600 \text{ } \mu\text{m/m}, \quad \varepsilon_2 = -400 \text{ } \mu\text{m/m}, \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = 100 \text{ } \mu\text{m/m},$$

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}} = \pm 1000 \text{ } \mu\text{m/m}.$$

b) Direcția principală (1) cu relația (3.44):

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\gamma_{xy}}{2(\varepsilon_x - \varepsilon_2)} = -18,43^\circ.$$

c) Reprezentarea se face ducând direcția principală (1) față de orizontală și se ia un element pe această direcție ale cărei laturi le modificăm cu ε_1 latura paralelă cu direcția (1) și cu ε_2 , latura perpendiculară pe direcția (1), obținându-se elementul deformat după direcția (1) (fig.3.22,a). Față de direcția (1) se duce o direcție la $\pm 45^\circ$ (în figură, la $+45^\circ$) pe care se ia un element de volum la care-i modificăm laturile cu ε_m . Ținând seama că ε_1 este efectul lui σ_1 și ε_2 al lui σ_2 se obține sensul tensiunilor tangențiale τ (fig.3.22,a).

Se micșorează unghiul drept din colțul săgeților lui τ . Unghiul drept se modifică cu valoarea γ_1 sau γ_2 (pe desen γ_1 deoarece micșorează unghiul drept în sens orar, fig.3.22,b). Direcția dusă este direcția (2^a) (τ_1 este paralel cu această direcție) iar unghiul este $\alpha_2 = 26,57^\circ$ și este măsurat de la orizontală la direcția dusă.

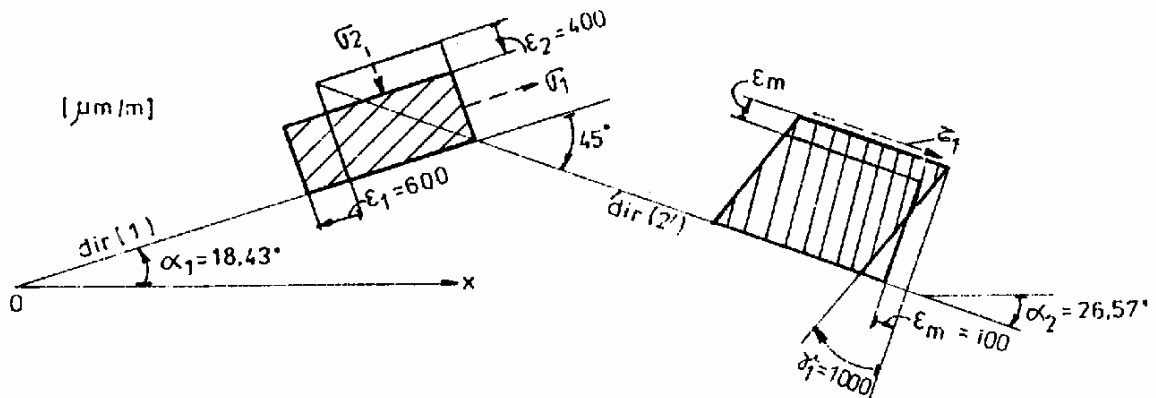


Fig. 3.23

II Metoda grafică

În sistemul de axe $\varepsilon O \frac{\gamma}{2}$, se reprezintă la scară punctele $A\left(\varepsilon_x; \frac{1}{2}\gamma_{xy}\right) = A(500, 300)$ și $B\left(\varepsilon_y; -\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right) = B(-300, -300)$, segmentul AB este diametrul cercului lui Mohr, iar intersecția acestuia cu axa $O\varepsilon$ este centrul cercului $C(\varepsilon_m, 0)$ (fig.3.23). Intersecția cercului cu axa $O\varepsilon$ ne dă punctele $S_1(\varepsilon_1, 0)$, la dreapta și $S_2(\varepsilon_2, 0)$ la stânga.

a) Deformațiile specifice principale se obțin ca fiind măsura segmentelor:

$$\varepsilon_1 = OS_1 = 600 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$\varepsilon_2 = OS_2 = -400 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$\varepsilon_m = OC = 100 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$\gamma_1 = S_2S_1 = 1000 \mu\text{m} / \text{m};$$

b) **Direcția principală (1):** Raza CA este orizontală pe cerc. Unghiul de la CA la sensul pozitiv al axei $O\varepsilon$ este $2\alpha_1$. Simetricul orizontalei de pe cerc față de axa $O\varepsilon$ (punctul A') unit cu S_2 ne dă direcția principală (1). Unghiul de la axa $O\varepsilon$ la direcția

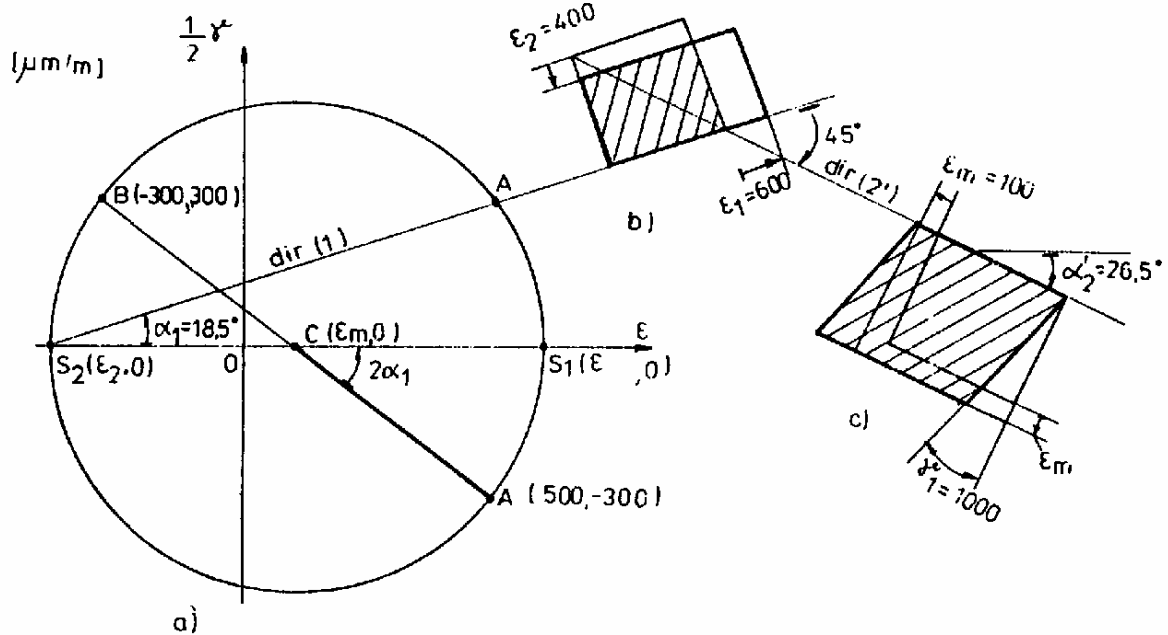


Fig. 3.24

(1) este α_1 , ($\alpha_1 = -18,5^\circ$).

c) Cunoscând direcția principală (1), precum și deformațiile specifice principale, reprezentarea acestora se face ca la metoda analitică (fig. 3.23,b și c).

3.14. Măsurarea deformațiilor

Tensiunile și deformațiile specifice sunt mărimi abstracte și ca atare este imposibil, din punct de vedere fizic, să fie măsurate. Se pot, însă, măsura deformații finite.

Deformațiile finite se pot măsura pentru **lungimi finite** de pe suprafața (ER). Dacă deformația se măsoară pe o lungime relativ mică, se poate evalua o deformație medie pe unitatea de lungime care poate fi luată ca **o valoare aproximativă a deformației specifice într-un punct de măsură**. Pe această bază **lungirea specifică poate fi aproximată cu raportul dintre lungirea (scurtarea) măsurată pe o mică lungime la lungimea respectivă**.

Deformațiile unghiulare sunt mult mai dificil de măsurat; acestea au valori foarte mici și trebuie măsurate pe un element cât mai mic de pe suprafața ER.

Pentru măsurarea lungirilor specifice există mai multe metode (mecanice, optice, electrice).

În problemele de Rezistența materialelor se cer determinarea deformațiilor specifice după direcțiile principale. La piesele simple și supuse la solicitări simple se cunosc direcțiile principale și în astfel de cazuri se măsoară deformațiile specifice după aceste direcții.

Sunt însă foarte multe cazuri în care nu se cunosc nici direcțiile principale și nici deformațiile specifice principale. Pentru aceste cazuri se măsoară lungirile (scurtările) după trei direcții ceea ce conduce la eliminarea măsurării lunecării specifice, γ_{xy} , care este mai dificil de măsurat.

La început s-au măsurat lungirile cu ajutorul extensometrelor mecanice, apoi s-a utilizat amplificarea optică pentru a se ușura citirea cu ochiul liber a deformațiilor mici. În prezent se folosesc traductoare, care utilizează pentru măsurarea deformației variația rezistenței, a inductanței, a capacității, a efectului piezoelectric, etc.

Pentru măsurarea deformației specifice pe trei direcții într-un punct se utilizează un grup de traductoare montate pe același suport. Cele mai larg răspândite sunt cele la care unghiurile α' , β' și γ' (fig. 3.24,a și b) sunt multiplu de 15° și ele pot fi aranjate în **rozete delta** (fig. 3.24,b) cu $\alpha'=\beta'=\gamma'=60^\circ$ sau **rozete în evantai** (fig. 3.24,a) cu $\alpha'=\beta'=\gamma'=120^\circ$. De asemenea se utilizează și rozeta în evantai cu $\alpha'=\beta'=135^\circ$ și $\gamma'=90^\circ$.

Analiza stării de deformație, pe baza deformațiilor determinate cu ajutorul unei rozete se poate face pe cale analitică sau grafică.

Pentru a rezolva pe cale analitică, cunoscând deformațiile specifice după cele trei direcții, adică ε_a , ε_b și ε_c , și unghiurile α , β și γ (fig. 3.26), din relația (3.25,a) se pot scrie următoarele trei ecuații:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha, \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\beta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\beta, \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\gamma + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\gamma.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Rezolvând aceste ecuații se obțin valorile pentru ε_x , ε_y și ε_{xy} și cu aceste valori se pot determina deformațiile specifice principale, direcțiile principale cu ajutorul relațiilor (3.45) și (3.44).

Se mai pot determina deformațiile specifice medii și lunecarea specifică maximă cu relațiile (3.46) și (3.47), etc.

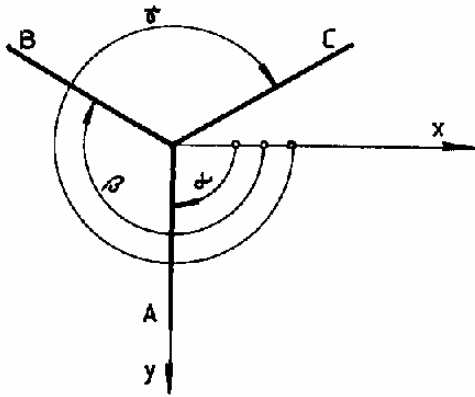


Fig. 3.26

3.15. Utilizarea cercului lui Mohr pentru analiza deformațiilor

Metoda analitică de scriere a celor trei ecuații pentru cele trei brațe ale rozetei, rezolvarea sistemului și apoi obținerea deformațiilor specifice principale este o cale destul de laborioasă. Metoda grafică pentru rezolvarea stării plane de deformație este mai operativă și aceasta se exemplifică prin următoarea aplicație.

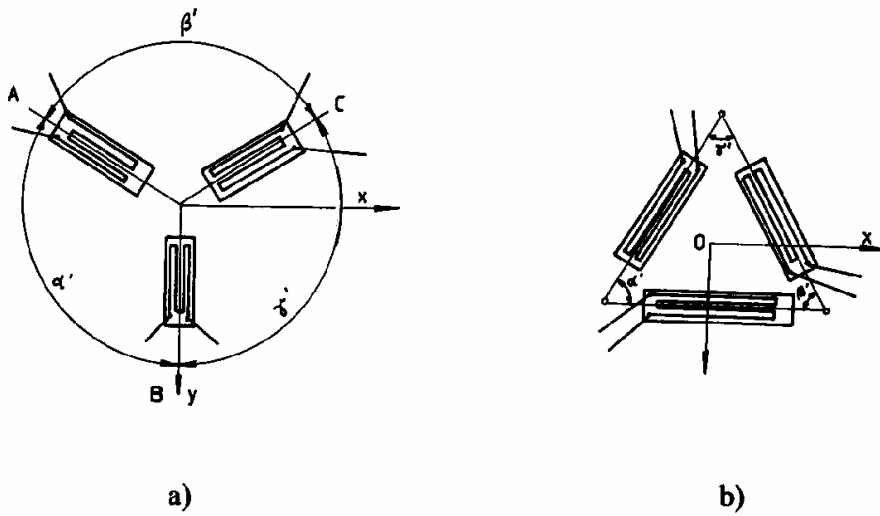


Fig. 3.25

Aplicația 3.3. Deformațiile specifice ale unei plăci solicitate în planul ei sunt cele din figura 3.27 (valorile sunt date în $\mu\text{m}/\text{m}$). Să se determine prin metoda analitică și grafică:

- deformațiile specifice principale;
- direcțiile principale;
- să se reprezinte elementele rotite și deformată după direcțiile principale.

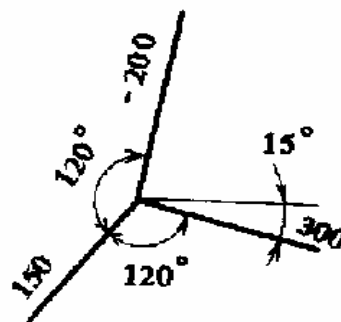


Fig. 3.27

I Metoda analitică

Se notează direcțiile de măsurare în sens orar de la orizontală până la ε_a , ε_b și ε_d cu respectiv α , β , și γ (fig. 3.27,a).

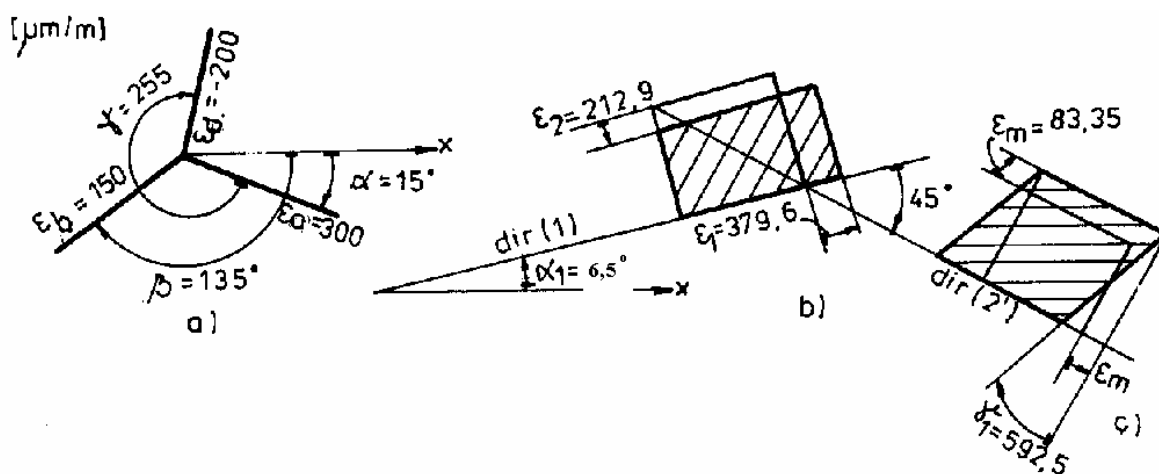


Fig. 3.27

a) Înlocuind în sistemul de ecuații (3.50) se obține sistemul:

$$300 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2 \cdot 15^\circ + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot \sin 2 \cdot 15^\circ;$$

$$150 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2 \cdot 135^\circ + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot \sin 2 \cdot 135^\circ;$$

$$-200 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2 \cdot 255^\circ + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cdot \sin 2 \cdot 255^\circ,$$

care prin rezolvare conduce la:

$$\varepsilon_x = 372,0 \mu\text{m} / \text{m}; \quad \varepsilon_y = -205,3 \mu\text{m} / \text{m}; \quad \gamma_{xy} = -133,3 \mu\text{m} / \text{m}.$$

Cu aceste valori înlocuite în relația (3.45) se obțin:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{372 - 205,4}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(372 + 205,4)^2 + 133,3^2} = 83,35 \pm 296,25 \mu\text{m} / \text{m};$$

de unde rezultă: $\varepsilon_1 = 379,6 \mu\text{m} / \text{m};$

$\varepsilon_2 = -212,9 \mu\text{m} / \text{m}; \quad \gamma_1 = 592,5 \mu\text{m} / \text{m};$

$\varepsilon_m = 83,35 \mu\text{m} / \text{m}.$

b) Direcția principală (1) se obține cu relația (3.44,a')

$$\alpha_1 = \text{arctg} \frac{-133,3}{2 \cdot (372 + 212,9)} = -6,5^\circ.$$

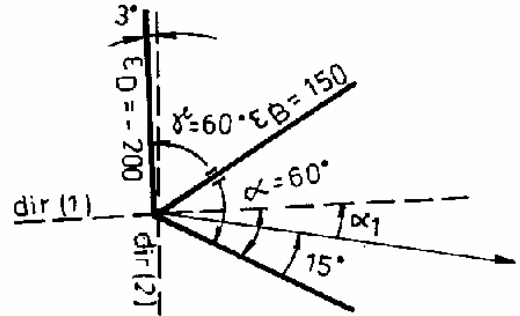


Fig. 3.28

c) Procedând analog ca la problema 3.2 se obțin elementele rotite și deformate după direcția (1) (fig.3.27,b) și după direcția (2') (fig.3.27,c)

II Metoda grafică

Se rearanjează rozeta prin translația unui braț astfel încât să avem valoarea intermediară (150) între valoarea maximă (300) și cea minimă (-200). Se va avea în

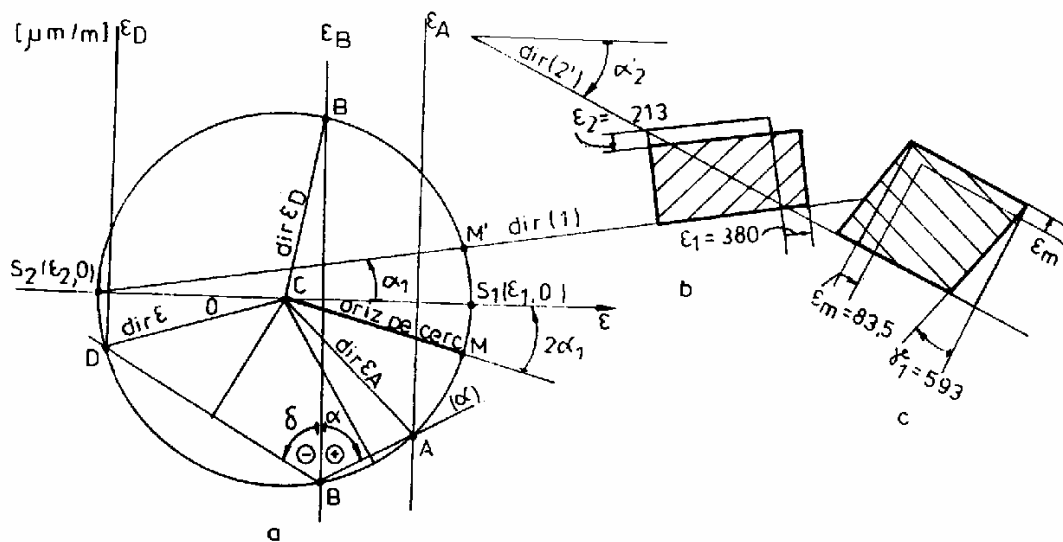


Fig. 3.29

vedere ca unghiul peste brațele unde sunt valorile extreme ale deformațiilor specifice de la rozeta rearanjată să fie mai mic de 180° . Mărimile corespunzătoare rozetei să fie notate $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_D, \alpha, \delta$. Se notează întotdeauna cu ε_B valoarea intermediară și unghiurile α și δ de la ε_B la brațele ε_A respectiv ε_D (fig.3.28). Se alege axa $\gamma / 2$ orientată în jos și se iau trei axe paralele cu axa $\gamma / 2$ la abscisele $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ și ε_D (la scară). De la direcția ε_B se măsoară unghiurile α și δ în sensurile lor, obținându-se direcțiile (α) și (δ) conform figurii 3.29.

La intersecția direcției (α) cu direcția (ε_A) se obține punctul A, iar la intersecția direcției (δ) cu (ε_D) se obține punctul D. Ducând mediatoarele segmentelor $B'A$ și $B'D$, la intersecția lor se obține punctul C care este centrul cercului lui Mohr. Se trasează cercul cu centrul în C și cu razele CA, CB' și CD. Prin C se duce axa orizontală care este axa $O\varepsilon$. La intersecțiile cercului cu axa $O\varepsilon$ rezultă punctele $S_1(\varepsilon_1, 0)$ la dreapta și $S_2(\varepsilon_2, 0)$ la stânga. Simetricul punctului B' de pe cerc față de axa $O\varepsilon$ este punctul B. Segmentele CA, CB și CD sunt direcțiile lui $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ și ε_D pe cerc față de axa $O\varepsilon$.

Observație: O primă verificare se face prin măsurarea unghiurilor la centru BCA și BCD care trebuie să fie 2α și respectiv 2δ .

Se determină valorile deformațiilor specifice principale ca fiind mărimea segmentelor (măsurate la scara utilizată):

$$\varepsilon_1 = OS_1 = 380 \mu\text{m} / \text{m}; \quad \varepsilon_2 = OS_2 = -213 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$\gamma_1 = S_1S_2 = 593 \mu\text{m} / \text{m}; \quad \varepsilon_m = OC = 83,5 \mu\text{m} / \text{m}.$$

1. **Direcția principală (1).** De pe rozeta reorientată, se observă că pentru a obține orizontala trebuie să rotim brațul (ε_A), în sens antiorar, cu 15° . Pentru a obține orizontala pe cerc vom roti direcția lui ε_A (care este raza CA) în sens antiorar cu $2 \cdot 15^\circ$, obținând orizontala pe cerc. Unghiul de la orizontala pe cerc la sensul pozitiv al axei $O\varepsilon$ este $2\alpha_1$. Unind simetricul orizontalei de pe cerc față de axa $O\varepsilon$ (punctul M') cu S_2 se obține direcția (1). Unghiul de la axa $O\varepsilon$ la direcția (1) este α_1 .

Reprezentarea se face analog ca la metoda analitică obținând elementele deformate după direcția (1), figura (3.9,b) și după direcția (2'), figura (3.29,c).

Verificarea mărimilor deformațiilor specifice principale se face astfel:

$$\varepsilon_1 \geq \max\{\varepsilon_A; \varepsilon_B; \varepsilon_D\};$$

$$\varepsilon_2 \leq \min\{\varepsilon_A; \varepsilon_B; \varepsilon_D\}.$$

Verificarea direcțiilor principale se face ducând direcția (1) și respectiv (2) pe rozeta rearanjată (fig.3.28) și trebuie să avem direcția (1) mai aproape de valoarea deformației specifice maxime date (unghiul de 27° între direcția (1) și ε_A este mai mic decât unghiul de 33° dintre direcția (1) și ε_B), iar direcția (2) mai aproape de valoarea minimă dată ε_D (unghiul de 3°).

3.16. Analiza stării spațiale de deformație

Deformația specifică liniară după un versor $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{j}} + \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{k}}$, se obține din (3.16) și este:

$$\varepsilon_v = \mathbf{l}^2 \cdot \varepsilon_x + \mathbf{m}^2 \cdot \varepsilon_y + \mathbf{n}^2 \cdot \varepsilon_z + \mathbf{lm} \cdot \gamma_{xy} + \mathbf{mn} \cdot \gamma_{yz} + \mathbf{lm} \cdot \gamma_{zx} \quad (3.51)$$

Deformațiile specifice principale $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ și ε_3 se obțin din ecuația:

$$\varepsilon^3 - \mathbf{I}_1 \cdot \varepsilon^2 + \mathbf{I}_2 \cdot \varepsilon - \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}, \quad (3.52)$$

unde:

$$\mathbf{I}_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$\mathbf{I}_2 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2),$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (3.53)$$

Direcțiile principale se determină în mod identic ca la variația tensiunilor. Se precizează că deformațiile specifice principale coincid cu direcțiile principale ale tensiunilor.

Lunecările specifice principale se dezvoltă în planele bisectoare ale planelor de deformație și au valorile:

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \gamma_{13} \ ; \\ \gamma_1 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \gamma_{23} \ ; \\ \gamma_3 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \gamma_{12} \ .\end{aligned}\tag{3.54}$$

Aplicația 3.4. Tensorul deformațiilor specifice într-un punct al unui corp sollicitat în spațiu are componentele:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} 1600 & 200 & -300 \\ 200 & 800 & 400 \\ -300 & 400 & -1200 \end{vmatrix},$$

Să se determine :

- deformațiile specifice principale;
- direcțiile principale.

Rezolvare:

Se calculează cu relațiile (3.53) invarianții:

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1600 + 800 - 1200 = 1200 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x - \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 \cdot \gamma_{yz}^2 \cdot \gamma_{zx}^2) = 1600 \cdot 800 - \\ &- 800 \cdot 1200 - 1200 \cdot 1600 - \frac{1}{2}(200^2 + 300^2 + 400^2) = -1,89 \cdot 10^6 (\mu\text{m} / \text{m})^2;\end{aligned}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1600 & 200 & -300 \\ 200 & 800 & 400 \\ -300 & 400 & -1200 \end{vmatrix} = -1,864 \cdot 10^9 (\mu\text{m} / \text{m})^3,$$

obținându-se ecuația:

$$\varepsilon^3 - 1200 \cdot \varepsilon^2 - 1,89 \cdot 10^9 = 0.$$

Prin rezolvare se obțin:

$$\varepsilon_1 = 1662 \mu\text{m} / \text{m}; \quad \varepsilon_2 = 852,7 \mu\text{m} / \text{m}; \quad \varepsilon_3 = 1315 \mu\text{m} / \text{m}.$$

Verificarea se face prin recalcularea invariantilor, pentru ε_1 , ε_2 și ε_3 :

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 1662 + 852,7 - 1315 \cong 1200 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$I_2 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1 = -1,89 \cdot 10^6 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$I_3 = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = -1,864 \cdot 10^9 \mu\text{m} / \text{m},.$$

Direcțiile principale se obțin prin introducerea pe rând a lui și $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ și respectiv ε_3 în sistemul de ecuații (3.19), scrise pentru deformațiile specifice, și se obțin:

$$-62,4 \cdot l_1 + 200 \cdot m_1 - 300 \cdot n_1 = 0;$$

$$200 \cdot l_1 - 862,4 \cdot m_1 + 400 \cdot n_1 = 0;$$

$$-300 \cdot l_1 + 400 \cdot m_1 - 2862 \cdot n_1 = 0,$$

din care rezultă soluțiile:

$$l_1 = 0,9515; m_1 = 0,1866; n_1 = 0,0737.$$

Analog:

- pentru ε_2 :

$$l_2 = -0,172; m_1 = 0,9618; n_1 = 0,2126;$$

- și pentru ε_3 :

$$l_3 = 0,1136; m_1 = -0,1948; n_1 = 0,9742.$$

Pentru verificarea acestor soluții se folosește condiția de ortogonalitate dintre aceste direcții. Pentru ε_1 și ε_2 și se obține:

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0,9515 \cdot 0,172 + 0,1866 \cdot 0,9618 - 0,0737 \cdot 0,2126 = 0.$$

Pentru ε_1 și ε_3 :

$$l_1 \cdot l_3 + m_1 \cdot m_3 + n_1 \cdot n_3 = 0,9515 \cdot 0,1136 - 0,1866 \cdot 0,1948 - 0,0737 \cdot 0,9742 = 0.$$

Cele trei direcții obținute sunt perpendiculare între ele.

Lunecările specifice maxime sunt:

$$\gamma_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 1662 + 1315 = 2977 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$\gamma_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 852,7 + 1315 = 2167,7 \mu\text{m} / \text{m};$$

$$\gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1662 - 852,7 = 809,3 \mu\text{m} / \text{m}.$$

3.17. Deplasări

Fie un paralelipiped OABCDEMF, care face parte dintr-un ER, din care se consideră segmentul OM. Dacă asupra ER acționează un sistem de forțe exterioare segmentul se deplasează într-o nouă poziție O'M' și se deformează (fig.3.30).

Drumul parcurs de un punct al ER de la poziția sa în ER neîncărcat la poziția finală, după solicitare, se numește deplasare.

Deplasarea, în mod uzual, poate rezulta din următoarele situații:

- translația întregului ER,
- rotația întregului ER,
- schimbări de lungime în ER,
- modificări de unghiuri în ER.

Primele două tipuri de deplasări sunt deplasări de corp rigid, în timp ce ultimile două sunt cauzate de deformația ER. În cele ce urmează se vor studia numai

deplasările ce sunt produse de deformația ER.

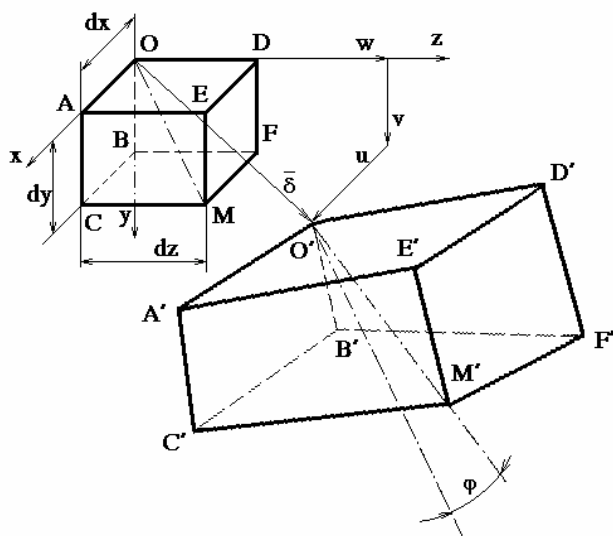


Fig. 3.30

Se consideră că punctul O se deplasează în O' prin deformare. Vectorul $\bar{\delta} = \overline{OO'}$ se numește **deplasare totală** a punctului O. Proiecțiile acestuia sunt: u pe axa Ox, v pe axa Oy și w pe axa Oz. În acest caz **vectorul deplasare totală** se exprimă prin:

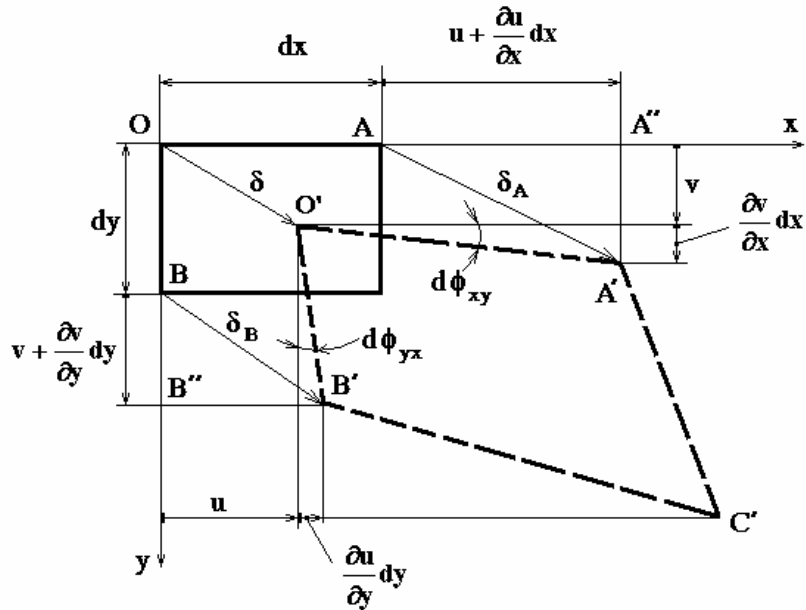


Fig. 3.31

$$\bar{\delta} = u \cdot \bar{i} + v \cdot \bar{j} + w \cdot \bar{k}, \text{ iar modulul s\u0103u este } \delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3.51)$$

Dar segmentul de dreapt\u0103 OM se rote\u0219te cu unghiul φ din pozi\u021bia ini\u021bial\u0103 \u00een pozi\u021bia $O'M'$, datorit\u0103 deform\u0103rii ER (fig. 3.31). Acest unghi se poate determina fie din expresiile cosinusurilor directe a noii direc\u021bii, fie utiliz\u00e2nd unghiurile lui Euler. Ambele c\u0103i sunt laborioase \u0219i se utilizeaz\u0103 mai pu\u021bin.

Deplas\u0103rile sunt func\u021bii de pozi\u021bia punctului. Astfel, deplas\u0103rile unui punct M ce se g\u0103se\u0219te \u00een vecin\u0103tatea punctului O (fig. 3.31) se deduc din deplas\u0103rile u, v, w ale punctului O. Pentru a eviden\u021bia cele ar\u0103tate \u0219i a simplifica analiza se consider\u0103 un element plan OABC. Acest element \u00een urma solicit\u0103rii se deformeaz\u0103 \u00een elementul $O'A'B'C'$ cunform figurii 3.32.

Admi\u021b\u00e2nd ipoteza micilor deforma\u021bii, se poate considera c\u0103 deplas\u0103rile punctelor vecine punctului O pot fi descrise de primii doi termeni ai seriei Taylor, func\u021bie de componentele u \u0219i v ale deplas\u0103rii δ . \u00cN acest caz deplas\u0103rile punctului A sunt date de expresiile:

$$u_A = AA' = u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx, \quad v_A = A''A' = v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx.$$

În mod similar pentru punctul B se obține:

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{B}'\mathbf{B}' = \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{d}\mathbf{y}, \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{d}\mathbf{y}.$$

Ținând seama de relațiile de mai sus, deplasările liniare ale punctelor O, A, B sunt:

$$\begin{aligned} \delta &= \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{i}} + \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{j}}, \\ \delta_A &= \left(\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{d}\mathbf{x} \right) \cdot \bar{\mathbf{i}} + \left(\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{d}\mathbf{x} \right) \cdot \bar{\mathbf{j}}, \\ \delta_B &= \left(\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{d}\mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{i}} + \left(\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{d}\mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Simultan cu deplasarea liniară $\bar{\delta}$ se produce deplasarea unghiulară $\bar{\varphi}$. Din figura 3.32 se observă că latura O'A' este rotită față de poziția inițială OA cu unghiul $d\Phi_{xy}$. Întrucât unghiurile sunt foarte mici se poate considera că $\text{tg}(d\Phi_{xy}) \cong d\Phi_{xy}$.

Deci, deplasările unghiulare sunt:

$$d\Phi_{xy} - \frac{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{d}\mathbf{x}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}, \quad d\Phi_{yx} - \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{d}\mathbf{y}}{\mathbf{d}\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}}. \quad (3.53)$$

Deplasările liniare ale punctelor O, A, B, C ale paralelipipedului din figura 3.31, se pot scrie ținând seama de relațiile (3.52) și de faptul că, pentru acest caz, trebuie să se ia în considerare și deplasarea după axa Oz.

Deplasările unghiulare ale segmentului O'M' (fig.3.30) se obțin din compunerea deplasărilor similare din planurile yOx, date de relațiile (3.52) și din deplasările similare din planurile yOx și zOx.

3.18. Relații între deplasări și deformații

Paralelipipedul elementar se deformează, laturile lui se lungesc și se înclină (fig.3.31) în funcție de starea de tensiune din punctul considerat și de poziția punctului în ER.

Deformarea paralelipipedului elementar este complet determinată dacă se cunosc deplasările celor opt colțuri ale sale.

Alungirile specifice, după axele x, y și z rezultă:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) - w}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

În cazul stării plane (fig.3.32) lunecarea specifică este egală cu modificarea unghiului drept, dintre axele x și y , adică

$$\gamma_{xy} = d\Phi_{xy} + d\Phi_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

În cazul general (fig.3.31) se produc trei lunecări specifice, câte una pentru fiecare plan ortogonal. Similar cu relația de mai sus, se obțin relații identice ale lunecărilor specifice în celelalte planuri ortogonale:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\tag{3.55}$$

Mărimile $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ sunt mărimi tensoriale similare tensiunilor și ca atare se pot reprezenta sub aceeași formă.

Tensorul deformațiilor specifice este:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

3.19. Ecuatiile de continuitate a deformațiilor

Derivând de două ori prima relație (3.54) în raport cu y , a doua în raport cu x , prima relație (3.34) în raport cu x și apoi cu y , rezultă trei expresii. Eliminându-se deplasările între derivatele obținute se obține:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.57)$$

Procedând în mod similar cu celelalte relații rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Acestea sunt ecuațiile de compatibilitate sau de continuitate a deformațiilor, care exprimă fizic menținerea continuității corpului după deformație.