5. MĂRIMI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR

5.1. Noțiuni generale

În calculul de rezistență se utilizează **mărimi ce depind de forma şi mărimea secțiunii transversale a barei**. Acestea se numesc **mărimi sau caracteristici geometrice ale secțiunilor** şi sunt: aria, momentele statice, momentele de inerție, modulele de rezistență şi razele de inerție.

Pentru studiul acestor mărimi se **secționează imaginar bara cu un plan normal pe axă** (secțiune transversală) şi se utilizează **un sistem de axe triortogonal drept, cu axa Ox în lungul barei, cu originea în centrul de greutate al secțiunii şi cu axele Oy şi Oz în planul secțiunii** (fig.5.1). Întrucât originea sistemului este în centrul de greutate a secțiunii **axele Oy şi Oz se numesc axe centrale.**

În anexa 4 se dau relațiile de calcul pentru mărimile geometrice ale unor secțiuni frecvent utilizate în calculele de rezistență.

5.2. Aria secțiunii

În jurul unui punct din planul secțiunii se poate lua un element de arie $dA = dy \cdot dz$. Dar, în cele ce urmează se vor folosi pentru elementul de arie şi alte formule: $dA=b\cdot dy$, respectiv $dA=h\cdot dz$ pentru dreptunghi, sau $dA = 2\pi\cdot r\cdot dr$ pentru cerc, etc. Aria secțiunii se va obține din relația:

$$\mathbf{A} = \int_{\mathbf{A}} \mathbf{dA}\,. \qquad \mathbf{(5.1)}$$

Ariile secțiunilor barelor (profilelor) standardizate sunt date în tabele din anexe. Formula (5.1) se va utiliza pentru determinarea ariilor secțiunilor oarecare.

5.3. Momente statice

În rezistența materialelor se folosesc momente statice ale suprafețelor față de axele z şi y, definite de expresiile:

$$\mathbf{S_Z = \int_{A_1} y \cdot dA, \quad S_y = \int_{A_2} z \cdot dA}, \tag{5.2}$$

în care A_1 şi A_2 sunt părți ale ariei A. Momentele statice, ale întregii secțiuni față de axele y_1 şi z_1, paralele cu axele centrale y şi z, sunt:

$$\mathbf{S_{z_1} = \int_A y_1 \cdot dA, \quad S_{y_1} = \int_A z_1 \cdot dA},$$

în care $\mathbf{y_1 = y_0 + y, z_1 = z_0 + z}$ (fig. 5.1,b).

Prin aplicarea teoremei momentului static (a lui Varignon),

$$\mathbf{\int_A y_1 \cdot dA = y_0 \cdot \int_A dA, \quad \int_A z_1 \cdot dA = z_0 \cdot \int_A dA,} \tag{5.3,a}$$

se obțin formulele ce definesc poziția centrului de greutate față de sistemul de axe $O_1y_1z_1$, ales inițial:

$$\mathbf{y_0 = \frac{\int_A y_1 \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i}, \qquad z_0 = \frac{\int_A z_1 \cdot dA}{\int_A dA} = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i}} \tag{5.3}$$

Față de axele centrale momentele statice ale întregii secțiuni sunt nule:

$$\mathbf{S_Z = \int_A y \cdot dA = 0, \quad S_y = \int_A z \cdot dA = 0}. \tag{5.4}$$

Datorită faptului că axele de simetrie sunt şi axe centrale, momentele statice ale întregii secțiuni față de aceste axe sunt nule. Evident că, **momentul static pentru o parte din secțiune, față de axele de simetrie, nu este nul.**

Momentele statice se măsoară în mm^3, cm^3, m^3.

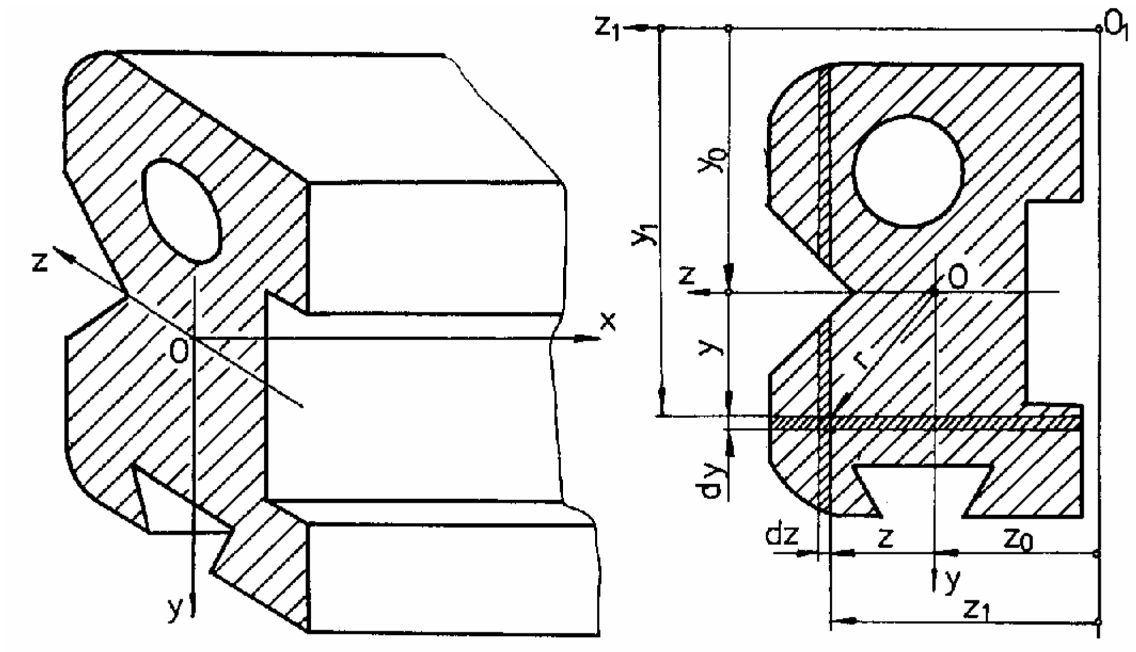

Fig. 5.1

5.4. Momente de inerție

5.4.1. Relații de definiție

Se definesc următoarele momente de inerție geometrice:

a) axiale față de axa Oz, şi respectiv Oy (fig. 5.1,b):

$$\mathbf{I_Z = \int_A y^2 \cdot dA, \quad I_Y = \int_A z^2 \cdot dA},, \qquad \mathbf{(5.5)}$$

b) centrifugale (în planul Ozy):

$$\mathbf{I_{zy} = \int_A y \cdot z \cdot dA}, \qquad \mathbf{(5.6)}$$

c) polare (față de centrul de greutate O):

$$\mathbf{I_o = I_P = \int_A r^2 \cdot dA. = I_z + I_y}. \qquad \mathbf{(5.7)}$$

Întrucât $r^2 = y^2 + z^2$, din (5.7) rezultă:

$$\mathbf{I_P = \int_A \left(y^2 + z^2\right) \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + \int_A z^2 \cdot dA = I_z + I_y}$$

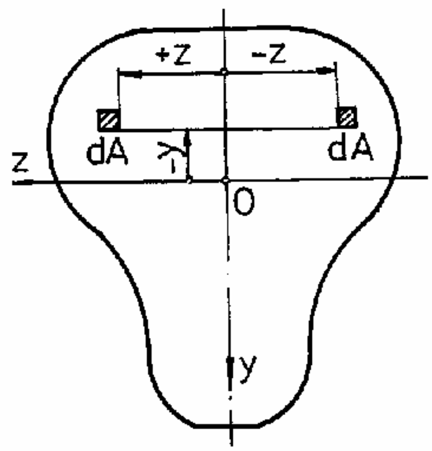

Fig. 5.2

Deci, **momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale, în raport cu axele ortogonale ce trec prin polul considerat.**

Întrucât elementul de arie este o mărime pozitivă, iar z^2, y^2 şi r^2 sunt mărimi pozitive, rezultă că **momentele de inerție axiale şi polare sunt mărimi strict pozitive.**

Momentul de inerție centrifugal, ce este produsul dintre elementul de arie dA şi două coordonate (y, z) şi ca atare poate fi pozitiv, negativ sau egal cu zero. Pentru secțiunile ce au cel puțin o axă de simetrie (axa Oy în figura 5.2) există totdeauna, la ordonata y, două elemente de arie aflate simetric față de axa de simetrie (Oy): unul de abscisă pozitivă (+z) şi altul negativă (-z) astfel că, pentru toată aria secțiunii, se obține:

$$\mathbf{I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA = 0}. \qquad \mathbf{(5.8)}$$

Deci, **momentul de inerție centrifugal față de un sistem de axe din care cel puțin una este axa de simetrie este nul.**

Momentele de inerție se măsoară în mm^4, cm^4, m^4.

5.4.2. Variația momentelor de inerție față de axe paralele

Pentru secțiunea din figura (5.1,b) se consideră cunoscute momentele de inerție axiale $\mathbf{I_z}$, $\mathbf{I_y}$ şi centrifugale $\mathbf{I_{zy}}$ față de sistemul de axe central Ozy .

Elementul de arie dA, în sistemul de axe $O_1z_1y_1$, paralele față de Ozy (fig.5.1,b), are coordonatele:

$$y_1 = y_0 + y, \qquad z_1 = z_0 + z.$$

În raport cu sistemul de axe $O_1\, y_1\, z_1$ momentele de inerție au expresiile:

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y + y_0)^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot dA + y_0^2 \int_A dA + 2 \cdot y_0 \cdot \int_A y \cdot dA,$$

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 \cdot dA = \int_A (z + z_0)^2 \cdot dA = \int_A z^2 \cdot dA + z_0^2 \int_A dA + 2 \cdot z_0 \cdot \int_A z \cdot dA,$$

$$I_{z_1y_1} = \int_A y_1 \cdot z_1 \cdot dA = \int_A (y + y_0) \cdot (z + z_0) dA =$$

$$= \int_A y \cdot z \cdot dA + y_0 \cdot z_0 \cdot \int_A dA + y_0 \cdot \int_A z \cdot dA + z_0 \cdot \int_A y \cdot dA.$$

Efectuând integralele şi ținând seama de relațiile (5.1), (5.4), (5.5) şi (5.6) se obține:

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= I_z + y_0^2 \cdot A, \\ I_{y_1} &= I_y + z_0^2 \cdot A, \\ I_{z_1 y_1} &= I_z + z_0 \cdot y_0 \cdot A . \end{aligned} \qquad (5.9)$$

Deci, **momentul de inerție în raport cu o axă paralelă este egal cu suma dintre momentul față de axa centrală paralelă şi produsul dintre aria suprafeței cu pătratul distanței dintre axe.**

Momentul de inerție centrifugal față de axele paralele este egal cu suma dintre momentul de inerție față de axele centrale proprii şi produsul dintre arie cu coordonatele centrului de greutate al ariei în noul sistem. Deci, valoarea şi semnul momentului de inerție centrifugal este hotărâtă de **semnul produsului coordonatelor centrului de greutate a secțiunii în noul sistem.**

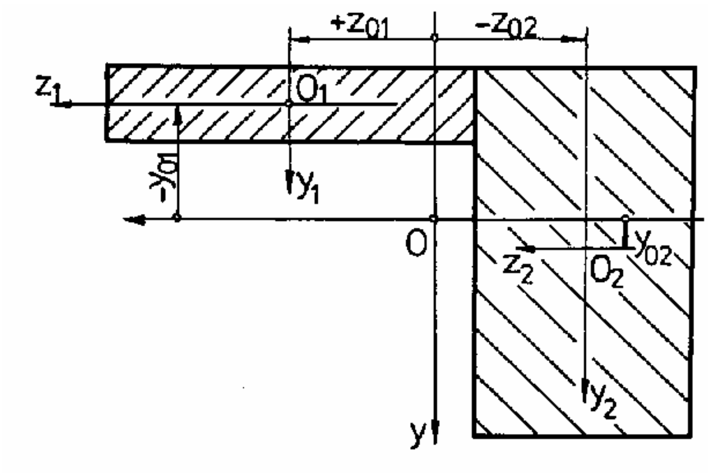

Fig. 5.3

De aceea, la determinarea momentelor de inerție centrifugale trebuie să acordăm atenția cuvenită **semnelor coordonatelor** centrelor de greutate a secțiunilor componente. Pentru a ilustra acest fapt s-a considerat secțiunea compusă din figura 5.3. Întrucât axele centrale ale celor două dreptunghiuri sunt axe de simetrie, momentele de inerție centrifugale față de axele proprii, ale fiecărui dreptunghi, sunt nule. Față de sistemul de axe central, Ozy , se determină momentul de inerție prin însumarea prduselor $\mathbf{z}_{oi} \cdot \mathbf{y}_{oi} \cdot A_i$ corespunzătoare. Ținând seama de semnele coordonatelor centrelor de greutate ale fiecărei figuri, în sistemul de axe Ozy rezultă:

$$\mathbf{A_1(-y_{01}\ ,\ +z_{01});} \qquad \mathbf{I_{y_1z_1} < 0,}$$
$$\mathbf{A_2(+y_{02}\ ,\ -z_{02});} \qquad \mathbf{I_{y_2z_2} < 0}$$

Deci, în acest caz, momentul centrifugal al secțiunii (descompusă în două dreptunghiuri (fig.5.3), are semnul minus.

Momentele de inerție ale unei secțiuni compuse din n secțiuni simple de arii A_i (sau A descompusă în n secțiuni simple A_i), f**ață de sistemul de axe Oyz** (de regulă sistem de axe centrale), se calculează cu relațiile:

$$\mathbf{I_z = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{zi} + A_i \cdot y_{0i}^2\right),}$$
$$\mathbf{I_y = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{yi} + A_i \cdot z_{0i}^2\right),} \qquad \mathbf{(5.10)}$$
$$\mathbf{I_{zy} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{z_iy_i} + A_i \cdot y_{0i} \cdot z_{0i}\right).}$$

unde $\mathbf{I_{z_i}}$, $\mathbf{I_{y_i}}$, $\mathbf{I_{z_iy_i}}$ sunt momentele de inerție axiale, respectiv centrifugale ale fiecărei secțiuni de arie A_i față de axele centrale proprii ($O_{i1}z_{i1}y_{i1}$), paralele cu axele Ozy iar z_{oi}, y_{oi}, sunt coordonatele centrelor de greutate O_i în sistemul de Ozy.

5.4.3. Momentele de inerție față de axele rotite

Se consideră o secțiune oarecare şi sistemul de axe centrale ortogonale Ozy. Se ia un al doilea sistem de axe centrale ortogonale Ouv, rotit cu unghiul α, în sens orar, față de primul sistem (fig. 5.4).

Coordonatele unei arii elementare dA, în al doilea sistem Ouv funcție de coordonatele x, y şi unghiul α, sunt:

$$\mathbf{u = OD = OC + CD = OC + AE = y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha},$$

$$\mathbf{v = DM = EM - ED = EM - AC = z \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha}.$$

Înlocuind coordonatele de mai sus în relațiile de definiție (5.5), (5.6) şi dezvoltând se obține:

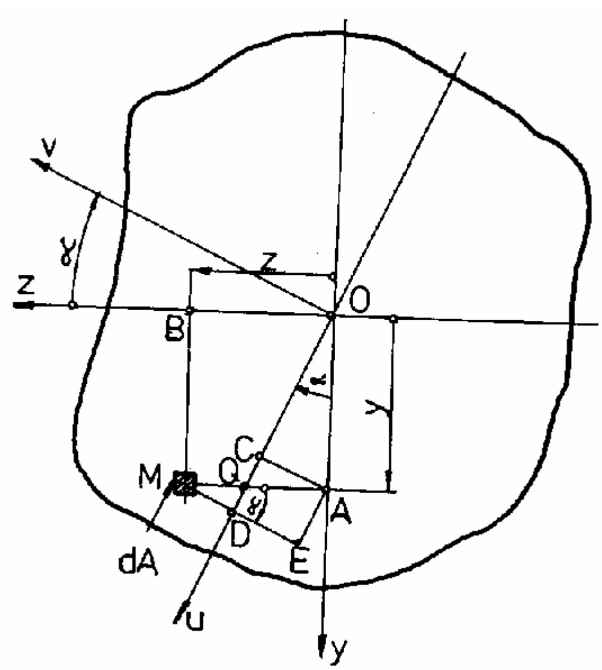

Fig. 5.4

$$I_v = \int_A u^2 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha)^2 \cdot dA =$$

$$= \cos^2\alpha \cdot \int_A y^2 \cdot dA + \sin^2\alpha \cdot \int_A z^2 \cdot dA + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA,$$

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (z \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha)^2 \cdot dA =$$

$$= \cos^2\alpha \cdot \int_A z^2 \cdot dA + \sin^2\alpha \cdot \int_A y^2 \cdot dA - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA,$$

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha) \cdot (z \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha) \cdot dA =$$

$$= -\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \left(\int_A y^2 \cdot dA - \int_A z^2 \cdot dA \right) + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \cdot \int_A y \cdot z \cdot dA.$$

Înlocuind: $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ şi $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$,

din relațiile de mai sus se deduce:

$$I_v = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$I_u = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha, \tag{5.11}$$

$$I_{uv} = -\frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{zy} \cdot \cos 2\alpha$$

Comparând relațiile 1 şi 3 din (5.11) cu relațiile (3.4) se observă structura lor identică. Dacă se face înlocuirea:

$$\sigma_x \leftrightarrow I_z \ , \quad \sigma_y \leftrightarrow I_y \ \text{ şi } \ \tau_{xy} \leftrightarrow I_{zy} \tag{5.12}$$

se poate deduce o relație din alta. Acest fapt este normal dacă se are în vedere că **atât tensiunile cât şi momentele de inerție sunt mărimi tensoriale.** Deci, **sunt guvernate de aceleaşi reguli şi sunt exprimate prin formule similare** (vezi § 3.4).

Ținând seama de relația de similitudine (5.12) şi de relațiile (3.6), (3.5), (3.5,a) demonstrate în § 3.4, se pot transcrie următoarele relații şi observații pentru momentele de inerție:

a) momentele de inerție principale

$$\mathbf{I_{1,2}} = \frac{\mathbf{I_z + I_y}}{\mathbf{2}} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{I_z - I_y}}{\mathbf{2}}\right)^2 + \mathbf{I_{zy}^2}}\ , \tag{5.13}$$

b) direcțiile axelor principale (față de care $I_{zy} = 0$, $I_1 = I_{max}$ şi $I_2 = I_{min}$):

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\,\mathbf{arctg}\frac{\mathbf{2I_{zy}}}{\mathbf{I_z - I_y}} \tag{5.14,a}$$

sau, din figura 5.5:

$$\alpha_1 = \mathbf{arctg}\frac{\mathbf{I_{zy}}}{\mathbf{I_z - I_2}}\,. \tag{5.14,b}$$

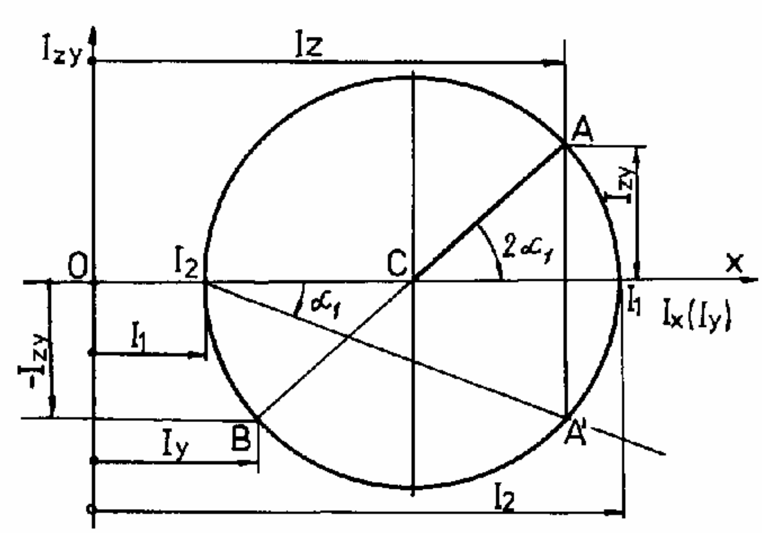

Fig. 5.5

c) tensorul momentelor de inerție:

$$\mathbf{T_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I_z} & \mathbf{I_{yz}} \\ \mathbf{I_{zy}} & \mathbf{I_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I_2} \end{pmatrix};$$

d) momentul de inerție polar:

$$\mathbf{I_P = I_z + I_y = I_1 + I_2;}$$

e) metoda grafică, a cercului lui Mohr, se poate utiliza şi pentru determinarea mărimilor: I_u, I_v, I_{uv} (de parametru 2α), I_1, I_2, α_1 etc. dacă se procedează analog ca în § 3.5, respectiv cum este arătat în figura 5.5.

f) ținând seama că momentul de inerție centrifugal față de un sistem de axe ce conține o axă de simetrie este nul, rezultă că **axa de simetrie este o axă principală iar a doua axă principală este perpendiculară pe axa de simetrie în centrul de greutate.**

5.5 Aplicații

5.5.1 Momentele de inerție centrale ale unui dreptunghi (fig.5.6)

Axele Ozy sunt axe centrale principale de inerție (axe de simetrie). Se alege elementul de arie dA = b·dy, la ordonata y. Înlocuind în prima relație (5.5) se obține:

$$\mathbf{I_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b}{3} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b \cdot h^3}{12}}.$$

Procedând în mod similar față de axa Oy se obțin formulele:

$$\mathbf{I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad , \quad I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad , \quad I_{zy} = 0.} \qquad \mathbf{(5.17)}$$

Momentul de inerție centrifugal este nul deoarece axele z şi y sunt axe de simetrie (vezi § 5.4.1).

5.5.2. Momentele de inerție centrale ale secțiunii circulare (fig. 5.7)

Se alege sistemul de axe centrale principale cu originea în centrul cercului şi elementul de arie dA =2π· r·dr.

Aplicând relația (5.7), se obține momentul de inerție polar:

$$\mathbf{I_p = I_0 = \int_A r^2 \cdot dA = 2\pi \cdot \int_0^{d/2} r^3 \cdot dr = \frac{2\pi}{4} \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^4} \text{ deci,}$$

$$\mathbf{I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}}. \qquad \mathbf{(5.18)}$$

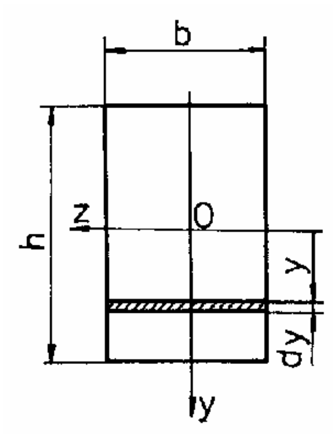

Fig. 5.6

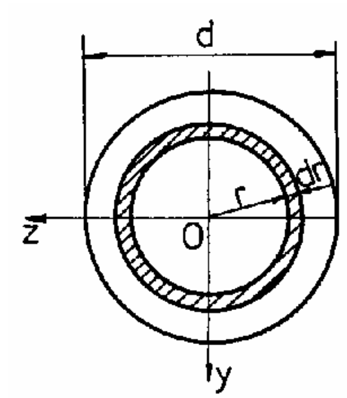

Fig. 5.7

Întrucât axele z şi y sunt axe diametrale (ecuatoriale) ale cercului, există egalitatea $I_z = I_y$ şi din (5.18) se obține:

$$\mathbf{I_z = I_y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi d^4}{64}}, \qquad \mathbf{I_{zy} = 0}. \qquad \textbf{(5.19)}$$

5.5.3. Secțiunea inelară sau coroană circulară (fig. 5.8)

Considerând că această secțiune este compusă dintr-un cerc de diametru D, din care se scade alt cerc de diametru d, momentul de inerție polar se obține:

$$\mathbf{I_P = \frac{D^4}{32} - \frac{d^4}{32} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]} \qquad \textbf{(5.20)}$$

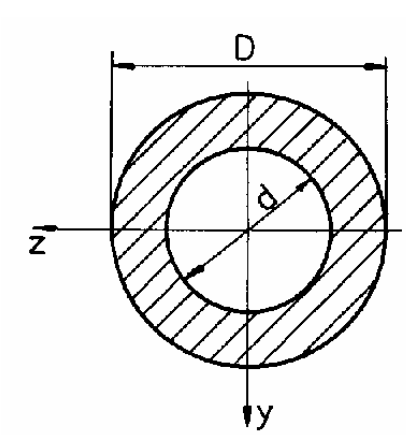

Fig. 5.8

În mod similar pentru momentele de inerție axiale, se obține:

$$\mathbf{I_z = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]} \qquad \textbf{(5.21)}$$

Raportul $\mathbf{k = \frac{d}{D}}$ este un factor constructiv al secțiunii inelare, astfel că momentele de inerție polare, respectiv axiale sunt funcție numai de diametrul exterior D şi se poate scrie:

$$\mathbf{I_z = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot \left(1 - k^4\right)} \text{ şi } \mathbf{I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left(1 - k^4\right)}. \qquad \textbf{(5.21,a)}$$

5.5.4. Secţiunea compusă din două dreptunghiuri având axa Oy axă de simetrie (fig.5.9)

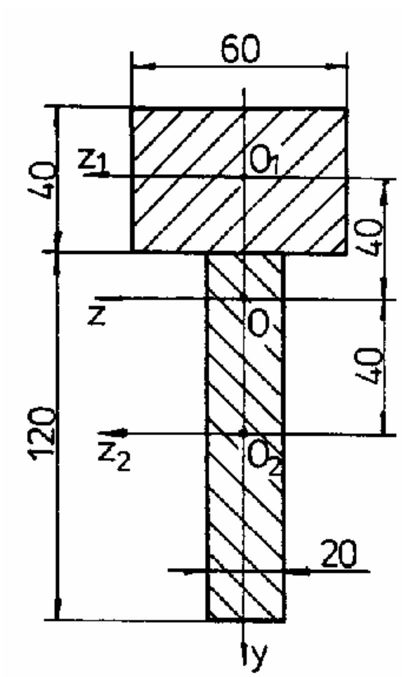

Fig. 5.9

a) Poziţia centrului de greutate în sistemul de axe $O_1z_1y_1$ rezultă:

$z_G = 0$,

$$y_G = \frac{6 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 12 \cdot 8}{6 \cdot 4 + 2 \cdot 12} = 4 \text{ cm}.$$

În figura 5.9 s-au trasat axele principale Ozy şi s-au cotat poziţiile centrelor de greutate ale secţiunilor simple.

b) Momentele de inerţie faţă de axele centrale sunt:

I_{zy}= 0 (există o axă de simetrie),

$$I_y = \left(I_{zi} + A_i \cdot z_{oi}^2\right) = \frac{6^3 \cdot 4}{12} + 6 \cdot 4 \cdot 0^2 + \frac{2^3 \cdot 12}{12} + 2 \cdot 12 \cdot 0 = 80 \text{ cm}^4,$$

$$I_z = \left(I_{yi} + A_i \cdot y_{oi}^2\right) = \frac{6 \cdot 4^3}{12} + 24 \cdot 4^2 + \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 24 \cdot 4^3 = 1088 \text{ cm}^4.$$

5.5.5. Momentele de inerție principale pentru o secțiune compusă oarecare

Se consideră secțiunea formată dintr-un dreptunghi şi un cornier cu aripi egale (fig.5.10).

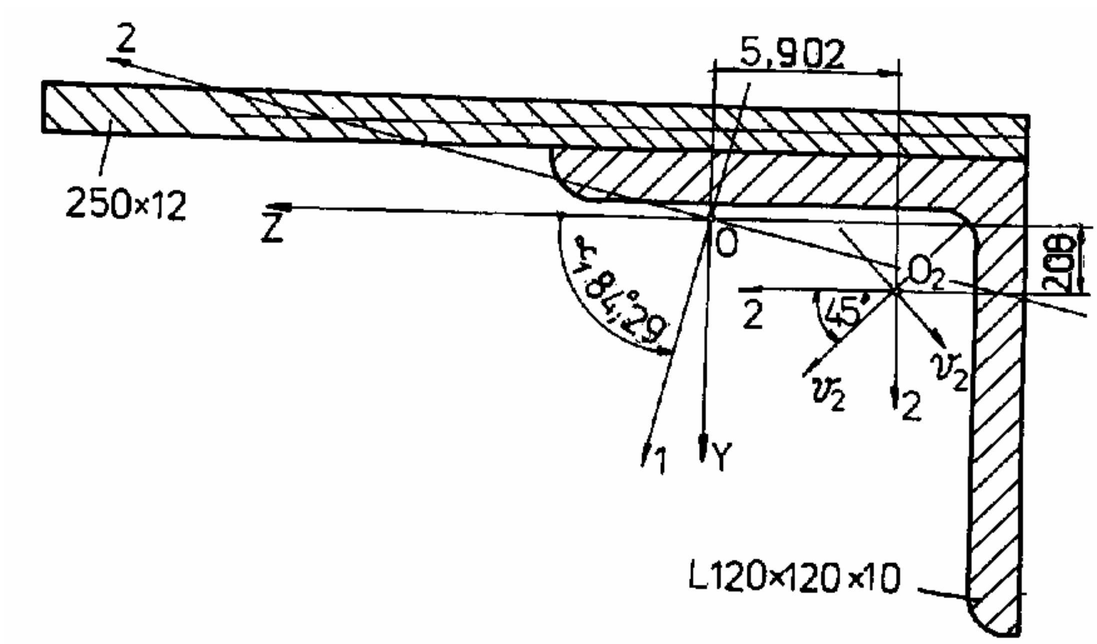

Fig. 5.10

a) din anexa 7, pentru cornierul L 120×120×10, se iau valorile: A_2= 19,2 cm^2, $I_{z_2} = I_{z_2} = \mathbf{174}\,\text{cm}^{\mathbf{4}}$, I_u= 280 cm^4, I_v= 72,9 cm^4, e = 2,82 cm.

b) Întrucât axele z_2, y_2 nu sunt axe principale, față de aceste axe va exista un moment de inerție, centrifugal, ce se poate calcula cu a treia relație (5.11), în funcție de momentele de inerție principale ale cornierului (I_u şi I_v) şi de unghiul α_2=45° (unghiul dintre axa z_2 şi axa u2):

$$I_{z_2,y_2} = -\frac{I_u - I_v}{2} \cdot \sin 2 \cdot 45^\circ = -\frac{280 - 72{,}9}{2} = -103{,}6\ \text{cm}^4 .$$

c) **Centrul de greutate, în sistemul de axe $O_2\, z_2\, y_2$, are coordonatele**:

$$y_0 = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{25 \cdot 1{,}2 \cdot (-2{,}82 - 0{,}6)}{25 \cdot 1{,}2 + 19{,}2} = -2{,}085\ \text{cm},$$

$$z_0=\frac{\sum A_i\cdot z_i}{\sum A_i}=\frac{25\cdot 1{,}2\cdot\left(\frac{25}{2}-2{,}82\right)}{25\cdot 1{,}2+19{,}2}=5{,}902\ \text{cm}.$$

În figura 5.8 s-au cotat pozițiile centrelor de greutate: O_1 şi O_2, față de sistemul de axe central Ozy.

d) **Momentele de inerție față de axele centrale** se obțin prin aplicarea formulelor (5.10):

$$I_z=\sum\left(I_{zi}+A_i\cdot y_{oi}^2\right)=\frac{25\cdot 1{,}2^3}{12}+25\cdot 1{,}2\cdot(3{,}42-2{,}085)^2+174+19{,}2\cdot 2{,}085^3=314{,}5\ \text{cm}^4$$

$$I_y=\sum\left(I_{yi}+A_i\cdot z_{oi}^2\right)=\frac{1{,}2\cdot 25^3}{12}+25\cdot 1{,}2\cdot(9{,}68-5{,}902)^2+174+19{,}2\cdot 5{,}902^3=2834\ \text{cm}^4$$

$$I_{zy}=\sum\left(I_{zi,yi}+A_i\cdot z_{oi}\cdot y_{oi}\right)=0+25\cdot 1{,}2\cdot 3{,}778\cdot(-1{,}335)+(-103{,}6)=-254{,}9\ \text{cm}^4$$

e) **Momentele de inerție principale** rezultă prin înlocuirea valorilor momentelor față de axele centrale în relațiile (5.13):

$$I_1,I_2=\frac{I_z+I_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_z-I_y}{2}\right)^2+I_{zy}^2}=$$

$$=\frac{314{,}5+2834}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{314{,}5-2834}{2}\right)^2+254{,}9^2}=1574\pm 1285$$

deci,

I_1= 2859 cm^4, I_2= 289 cm^4.

f) **Direcția axei principale 1**, se obține din a doua relație (5.14,b):

$$\alpha_1=\text{arctg}\frac{I_{zy}}{I_z-I_2}=\text{arctg}\frac{-254{,}9}{314{,}5-289}=-84.29^\circ.$$

În figura 5.10 s-au trasat cele două axe principale 1 şi 2. Se observă că extremitățile secțiunii au distanțele cele mai mari față de axa 1.

Observație: Pentru obținerea momentelor de inerție trebuie parcurse etapele de mai jos:

a) se completează valorile necesare calculului: din tabele sau prin calcul;

b) se calculează poziția centrului de greutate, se trasează axele centrale şi se cotează poziția centrelor de greutate ale figurilor componente față de axele centrale;

c) se determină momentele de inerție față de axele centrale (Ozy);

d) se calculează momentele de inerție principale;

e) se determină poziția axelor principale şi se trasează axele pe figură;

e) se verifică dacă valorile determinate respectiv axele trasate nu sunt greşite ($I_1 = I_{max}$, $I_2 = I_{min}$ etc.).

5.6. Raze de inerție

Prin definiție, mărimile geometrice

$$\mathbf{i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}} \quad \text{şi} \quad \mathbf{i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}}, \qquad \textbf{(5.22)}$$

se numesc **raze de inerție (girație).**

Relațiile de definiție (5.22) se pot aplica oricăror momente de inerție axiale: I_z, I_y, I_u, I_v, I_1, I_2 etc.

Momentul de inerție față de axa rotită u, dacă $I_z = I_1$ şi $I_y = I_2$, ținând seama de prima relație (5.11), are expresia:

$$\mathbf{I_u = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\alpha = I_1 \cos^2\alpha + I_2 \sin^2\alpha},$$

din care, înlocuind expresiile (5.22), se obține:

$$\mathbf{i_u^2 = i_1^2 \cdot \cos^2\alpha + i_2^2 \sin^2\alpha} \qquad \textbf{(5.23,a)}$$

Alegând pe raza u un punct Q (fig.5.4) de coordonate:

$$\mathbf{y = OQ \cdot \cos\alpha + \frac{i_1 \cdot i_2}{i_u} \cdot \cos\alpha}, \qquad \mathbf{z = OQ \cdot \sin\alpha = \frac{i_1 \cdot i_2}{i_u} \cdot \sin\alpha},$$

şi înlocuind în relația (5.23,a) se obține ecuația unei elipse

$$\frac{z^2}{i_1^2}+\frac{y^2}{i_1^2}=1, \tag{5.23}$$

numită **elipsă de inerție. Semiaxele acesteia sunt razele de inerție principale**.

Pentru trasarea elipsei de inerție, se marchează valorile calculate cu formulele (5.22) ale mărimilor i_1 şi i_2 astfel: **i_1 pe axa 2 şi i_2 pe axa 1**; astfel că după trasare elipsa are o formă alungită, ca şi a secțiunii.

Pentru secțiunea dreptunghiulară, prin aplicarea relației (5.22) rezultă relații pentru razele de inerție:

$$\begin{aligned} i_z &= \sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{b\cdot h^3}{12b\cdot h}}=\frac{h}{\sqrt{12}},\\ i_y &= \sqrt{\frac{I_y}{A}}=\sqrt{\frac{b^3\cdot h}{12b\cdot h}}=\frac{b}{\sqrt{12}}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

În cazul secțiunii circulare se obține:

$$i_z=i_y=\sqrt{\frac{I_z}{A}}=\sqrt{\frac{\pi\cdot d^4}{64}\cdot\frac{4}{\pi\cdot d^2}}=\frac{d}{4} \tag{5.25}$$

iar pentru secțiunea inelară rezultă:

$$i_z=i_y=\sqrt{\frac{\pi}{64}\cdot\frac{D^4-d^4}{D^2-d^2}\cdot\frac{4}{\pi}}=\frac{\sqrt{D^2-d^2}}{4}=\frac{D}{4}\cdot\sqrt{1-k^2}\,. \tag{5.26}$$

Razele de girație se exprimă în unități de lungime (m, cm, mm).

5.7. Module de rezistență

La calculul modulelor de rezistență se consideră că axele Oz şi Oy sunt axe centrale principale.

Mărimile geometrice:

$$W_z=\frac{I_z}{|y_{max}|}\ \text{şi}\ W_y=\frac{I_y}{|z_{max}|}, \tag{5.27}$$

se numesc module de rezistență față de axa Oz, respectiv Oy. În relațiile de mai sus y_{max}, respectiv z_{max} este: distanța celui mai îndepărtat punct al secțiunii față de axa Oz, respectiv față de axa Oy.

Mărimea,

$$\mathbf{W_P = \frac{I_P}{R_{max}}}, \tag{5.28}$$

se numeşte **modul de rezistență polar**. R_{max} este distanța între centrul de greutate (polul secțiunii) şi cel mai îndepărtat punct față de pol.

În cazul secțiunilor dreptunghiulare, modulele de rezistență axiale rezultă:

$$\begin{aligned} \mathbf{W_z} &= \mathbf{\frac{I_z}{|y_{max}|} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}}, \\ \mathbf{W_y} &= \mathbf{\frac{I_y}{|z_{max}|} = \frac{b^3 \cdot h}{12} \cdot \frac{2}{b} = \frac{b^2 \cdot h}{6}}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Pentru secțiunea circulară, modulele de rezistență axiale sunt:

$$\mathbf{W_z = W_y = \frac{I_z}{|y_{max}|} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}}, \tag{5.30}$$

iar modulul de rezistență polar va fi:

$$\mathbf{W_P = \frac{I_P}{R} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}}. \tag{5.31}$$

În cazul secțiunii inelare (fig. 5.8) se obțin formulele:

$$\begin{aligned} \mathbf{W_z = W_y} &= \mathbf{\frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)\right]^4 = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot \left(1 - k^4\right)}, \\ \mathbf{W_p} &= \mathbf{\frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)\right]^4 = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left(1 - k^4\right)}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Din analiza formulelor (5.32), în comparație cu (5.20) şi (5.21), trebuie remarcat şi reținut faptul că **modulele de rezistență ale secțiunilor compuse nu se pot obține prin însumarea modulelor de rezistență ale figurilor componente, ci numai prin aplicarea relațiilor (5.27) şi (5.28)**.