

## 8. RĂSUCIREA BARELOR DREPTE

### 8.1. Generalități

O bară este solicitată la răsucire când efortul din orice secțiune transversală a barei este un **moment de torsiune** (răsucire).

Momentul de răsucire dintr-o secțiune oarecare, este egal cu suma tuturor momentelor forțelor situate la stânga sau la dreapta secțiunii considerate.

$$M_t = \sum (P_i \cdot R_i + M_{xi}) \quad (8.1)$$

În care,  $P_i$  sunt forțele exterioare normale pe axa barei,  $R_i$  distanțele de la axă la suportii forțelor, și  $M_{xi}$  sunt momentele exterioare orientate după direcția axei  $Ox$ .

Dacă bara transmite o putere  $P^*$ , în kW, la turația  $n$ , în rotații pe minut, atunci valoarea momentului de torsiune este:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^*[\text{kW}]}{n[\text{rot} / \text{min}]} \quad (8.2)$$

Când valoarea momentului de torsiune variază în lungul barei, pentru calculul de rezistență, se recomandă trasarea diagramelor de momente de torsiune și precizarea secțiunii (sau secțiunilor) periculoase.

În domeniul de activitate al inginerului mecanic se întâlnesc foarte frecvent aplicații ale răsucirii barelor drepte ca de exemplu: arbori, osii motoare, șuruburi, etc.

### 8.2 Tensiuni și deformații la răsucirea barelor drepte de secțiune circulară și inelară

Se considera o bară dreaptă de secțiune circulară și constantă în lungul ei realizată dintr-un material continuu, omogen, izotrop și care satisface legea lui Hooke. Pe suprafața barei se trasează cercuri și generatoare, care formează o rețea de dreptunghiuri curbilinii, dintre care se consideră dreptunghiul elementar ABCD. Considerăm secțiunea (1) situată la distanța  $dx$  de secțiunea (2), (fig.8.1,a).

După aplicarea momentului de răsucire, bara se deformează după cum este reprezentată în figura (8.1,b). Analizând deformația barei se constată că:

- cercurile aflate în plane transversale rămân tot cercuri conținute în aceleași plane transversale, iar distanța dintre acestea nu se modifică semnificativ (se confirmă ipoteza lui Bernoulli, pentru punctele de pe suprafața exterioară și se extinde și la punctele de la interiorul barei);
- elementele dreptunghiulare de pe suprafața laterală se transformă în paralelamente ale căror laturi își păstrează lungimea;
- cele două generatoare (fibre) rămân paralele una față de alta, dar se modifică în elici;

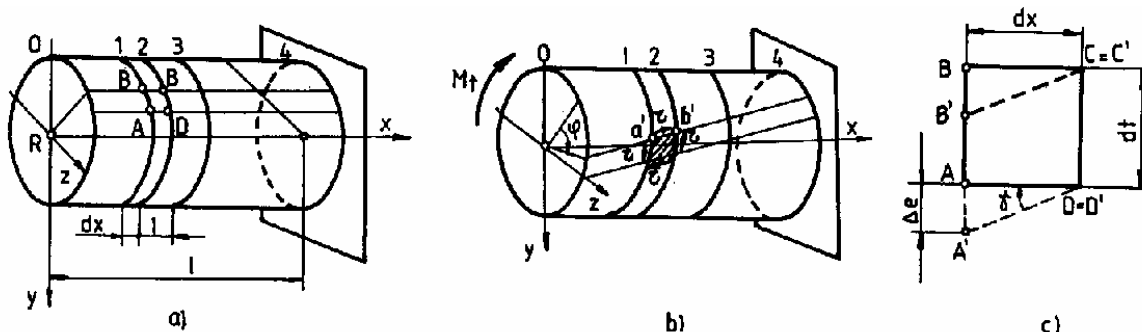


Fig. 8.1

Astfel că, orice element dreptunghiular de pe suprafața barei se deformează prin lunecare pură într-un paralelogram (fig.8.1,c). **Unghiul drept se modifică cu lunecarea specifică maximă**, definită de relația (3.38):

$$\gamma_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta x} = \frac{de}{dx}.$$

Arcul  $\Delta e$ , este deplasarea prin lunecare a oricărui punct A sau B în Aă și respectiv în Bă. Astfel, cercul (1) se rotește cu arcul  $\Delta e = AAă = BBă$ , față de cercul (2). Unghiul cu care se rotește secțiunea (1) față de secțiunea (2), care se află la distanța dx de secțiunea (1), se numește **deformație unghiulară sau rotire relativă** și se notează cu  $d\varphi$  (fig. 8.2). Se poate scrie:

$$\Delta e = AA' = BB' = R \cdot d\varphi = \gamma_0 \cdot dx.$$

rezultă:

$$\gamma_0 = R \cdot \frac{d\varphi}{dx} = R \cdot \theta,$$

în care mărimea :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx}, \quad (8.3)$$

se numește **rotire specifică**.

În mod similar, pentru arcul  $MM'$ , aflat la distanța  $r$  față de axa barei, se obține:

$$MM' = r \cdot d\varphi = \gamma \cdot dx,$$

din care se deduce lunecarea specifică la raza  $r$

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} = r \cdot \theta. \quad (8.4)$$

Întrucât materialul barei se consideră continuu, omogen, izotrop și elastic, rotirea elementară  $d\varphi$  are aceeași valoare pentru toate punctele unei secțiuni. Deci  $d\varphi$ ,

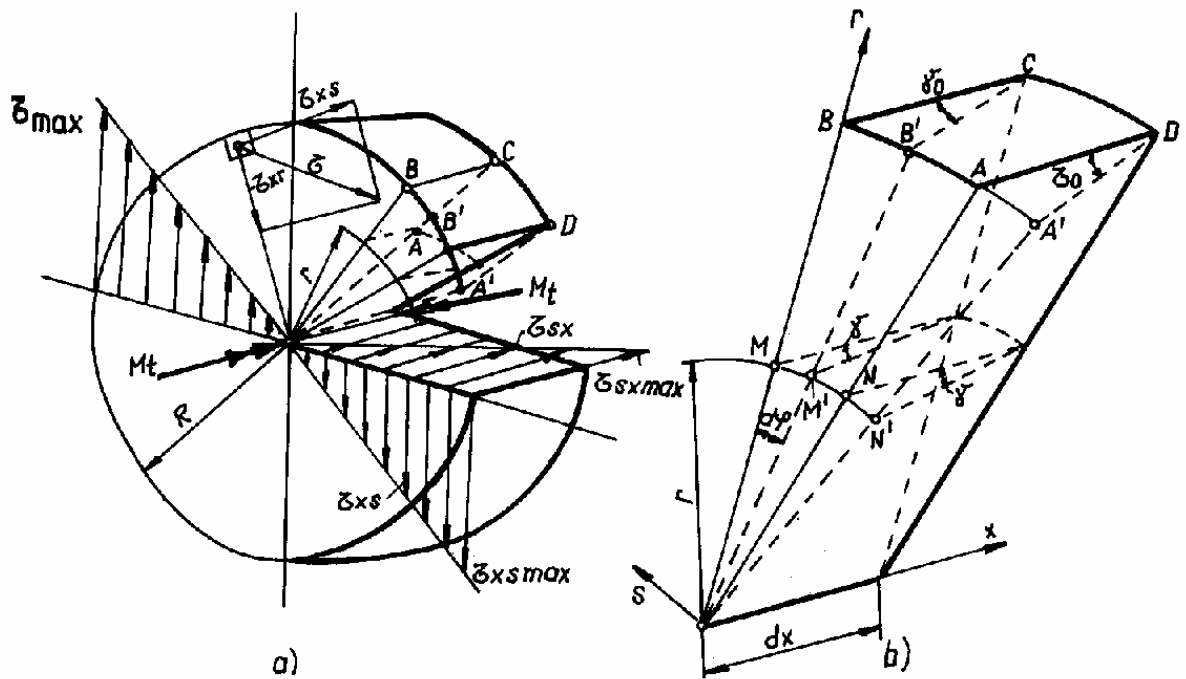


Fig. 8.2

fiind constantă pe toată secțiunea transversală și rotirea specifică  $\theta$  rămâne constantă

pe toată lungimea cercului de rază  $R$ . Astfel din relația (8.4) rezultă că **lunecarea specifică variază liniar în funcție de  $r$** . Are valoare nulă pe axa barei și maximă ( $\gamma_0 = R \cdot \theta$ ) pe conturul exterior. Datorită deformațiilor de lunecare în bară se produc tensiuni tangențiale, care se pot determina, pentru solicitări în domeniul liniar-elastic, cu ajutorul legii lui Hooke:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \theta. \quad (8.5)$$

Considerăm un element de arie  $dA$  aflat la distanța  $R = d/2$  (deci pe conturul exterior al barei, (fig 8.2,a) și pe aceasta o tensiune tangențială  $\tau$  având o direcție oarecare. Aceasta are componentele  $\tau_{xs}$ - tangență la contur și  $\tau_{sx}$  radială. Conform dualității tensiunilor tangențiale unei tensiuni  $\tau_{xs}$  îi va corespunde o tensiune  $\tau_{sx}$  pe suprafața exterioară a barei. Deoarece nu s-au luat în considerare forțe de frecare axiale, pe suprafața exterioară a barei, care să producă tensiunea  $\tau_{sx}$ , aceasta este nulă.

Deci, **tensiunile tangențiale conținute în secțiunea transversală sunt perpendiculare pe rază și variază proporțional cu aceasta**. Conform legii dualității tensiunilor tangențiale, perechea tensiunii  $\tau_{xs}$  este tensiunea  $\tau_{sx}$  și este conținută în planul axial (fig.8.2,a), adică:

$$\tau = \tau_{xs} = \tau_{sx} = \theta \cdot G \cdot r. \quad (8.5, a)$$

Scriind ecuația de echivalență dintre efortul  $M_t$  și tensiunile din planul secțiunii transversale vom obține:

$$M_t = \int_A r \cdot (\tau \cdot dA)$$

și înlocuind pe  $\tau$  din expresia (8.5) se obține:

$$M_t = \theta \cdot G \cdot \int_A r^2 \cdot dA = \theta \cdot G \cdot I_p. \quad (8.6)$$

În relația de mai sus s-a ținut seama că:

$$\int_A r^2 \cdot dA = I_p,$$

este momentul de inerție polar (vezi § 5.4)

Înlocuind mărimile  $\theta \cdot G$  din (8.6) cu expresia rezultată din (8.5) se obține formula tensiunii tangențiale la răsucirea barelor de secțiune circulară:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r, \quad (8.7)$$

din care se poate constata că tensiunea tangențială variază liniar în funcție de rază.

Din relația (8.7), ce este reprezentată grafic în figura (8.2,a), rezultă că tensiunile tangențiale sunt maxime pe conturul exterior al barei:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot R = \frac{M_t}{W_p}, \quad (8.8)$$

în care  $W_p$  este **modulul de rezistență polar** și este dat de relația (vezi § 5.7):

$$W_p = \frac{I_p}{R_{\max}}. \quad (8.9)$$

Formula pentru rotirea specifică rezultă din expresia (8.6) și este:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_p}. \quad (8.10)$$

**Deci, rotirea specifică este direct proporțională cu momentul de răsucire și invers proporțională cu produsul  $G \cdot I_p$  și care se numește rigiditatea la răsucire a barelor de secțiune circulară și inelară.** Rotirea specifică se măsoară în rad/m, sau grade/m. Deformația unghiulară a barei de lungime  $L$  sau rotirea relativă a barei, notată cu  $\Delta\varphi$ , ce reprezintă unghiul cu care se rotește secțiunea finală față de cea inițială, se obține din relația (8.3) și (8.10), astfel:

$$\Delta\varphi = \int_L d\varphi = \int_L \theta \cdot dx = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_p}. \quad (8.11)$$

Dacă bara este omogenă, de secțiune constantă și efortul  $M_t$  este constant pe toată lungimea  $L$ , prin integrarea relației (8.11), se obține:

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p} \quad (8.11,a)$$

iar dacă valorile mărimilor de sub integrala (8.11) sunt constante pe porțiuni din lungimea barei, atunci relația (8.11) devine:

$$\Delta\varphi = \sum \frac{M_{ti} \cdot l_i}{G \cdot I_{pi}}. \quad (8.11, b)$$

Deși relațiile (8.7), (8.8), (8.10) și (8.11) au fost deduse pentru secțiunea circulară se pot demonstra la fel și pentru secțiunea inelară.

În formulele (8.6)...(8.11), sunt menționate mărimile  $I_p$  și  $W_p$  care au expresiile:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \quad (8.12, a)$$

pentru secțiunea circulară și:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - k^4), \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - k^4) \quad (8.12, b)$$

pentru secțiunea inelară, unde  $k = \frac{d}{D}$ .

### **8.3. Calculul de rezistență la răsucire al barelor de secțiune circulară**

Calculul de rezistență la răsucire presupune rezolvarea problemelor de verificare, sarcină capabilă și de dimensionare. Acest calcul are la bază formula tradițională consacrată a condiției de rezistență:

$$\tau_{\max} \leq \tau_a, \quad (8.13)$$

cât și cea de rigiditate:

$$\theta_{\max} \leq \theta_a \text{ sau } \Delta\varphi_{\max} \leq \Delta\varphi, \quad (8.14)$$

în care  $\tau_{\max}$  se obține din formula (8.8),  $\theta_{\max}$  cu formula (8.10) și  $\Delta\varphi$  cu una din formulele (8.11).

Valorile rezistenței admisibile la răsucire  $\tau_a$ , respectiv  $\theta_a$  sau  $\Delta\varphi_a$  se stabilesc pentru fiecare ER în funcție de material, condiții de exploatare, rol funcțional, mod de apreciere al forțelor, etc.

**1. Problema de verificare** se rezolvă folosind formulele:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_a \quad (8.15, a)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \theta_a \quad \text{sau} \quad \Delta\varphi_{\max} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \leq \Delta\varphi_a \quad (8.15, b)$$

În funcție de rezultatele obținute se vor da verdictele;

a) BARA REZISTĂ, dacă toate valorile calculate ( $\tau$ ,  $\theta$ , sau  $\Delta\varphi$ ) sunt inferioare celor admisibile și cel puțin una este mai mare decât 0,8 din cea admisibilă;

b) BARA NU REZISTĂ, dacă cel puțin o valoare este mai mare cu mai mult de 5% din cea admisibilă;

c) BARA ESTE SUPRADIMENSIONATĂ, dacă toate valorile determinate sunt inferioare valorii de 0,8% din cea admisibilă.

În cazurile b, c se calculează sarcina capabilă.

**2. Problemele de capacitate de încărcare** se rezolvă cu relațiile:

$$M_{t,\text{cap}} = W_p \cdot \tau_a \quad (8.16, a)$$

$$M_{t,\text{cap}} = G \cdot I_p \cdot \theta_a \quad \text{sau} \quad M_{t,\text{cap}} = \frac{G \cdot I_p \cdot \Delta\varphi_a}{L} \quad (8.16, b)$$

Dintre valorile obținute se ia în considerare valoarea cea mai mică; aceasta se va utiliza în continuare pentru adoptarea unei valori rotunjite, întregi care să satisfacă condiția:

$$0,8 \cdot M_{t,\text{cap}} < M_t < 1,05 \cdot M_{t,\text{cap}} \quad .$$

**3. Rezolvarea problemelor de dimensionare**, implică mai întâi determinarea momentului  $M_{t\max}$  (din diagrama de momente), apoi se alege materialul și se adoptă,  $\tau_a$  respectiv  $\theta_a$  sau  $\Delta\varphi_a$  și pentru secțiunea circulară din relațiile (8.8) și (8.12,a) se obține formula :

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t\text{max}}}{\pi \cdot \tau_a}}, \quad (8.17, a)$$

iar din formulele (8.10), (8.11), (8.12,a), pentru condiția de rigiditate se obțin formulele:

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{t\text{max}}}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} \quad \text{sau} \quad d_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_t \cdot L}{\pi \cdot G \cdot \Delta\varphi_a}}. \quad (8.17, b)$$

Pentru barele de secțiune inelară se adoptă raportul  $k = D/d$  și din relațiile (8.8), (8.10), (8.11), (8.12,b), se obține:

$$D_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{16M_{t\text{max}}}{\pi \cdot \tau_a \cdot (1 - k^4)}}, \quad (8.18, a)$$

și respectiv:

$$D_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{t\text{max}}}{\pi \cdot G \cdot \theta_a \cdot (1 - k^4)}} \quad \text{sau} \quad D_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32M_{t\text{max}} \cdot L}{\pi \cdot G \cdot \Delta\varphi_a \cdot (1 - k^4)}}. \quad (8.18, b)$$

Când se iau în considerare atât condiția de rezistență cât și cea de rigiditate, rezultă două valori pentru diametrul ER. Se adoptă valoarea cea mai mare prin rotunjire.

**Aplicația 8.1.** Să se dimensioneze un arbore din oțel ( $G = 8,1 \cdot 10^3$  MPa,  $\tau_a = 80$  MPa,  $\theta_a = 1$  grad/m) care transmite o putere de  $P^* = 30$  kW la o turație de  $n = 200$  rot/min. Arborele se va calcula în cele două cazuri:

- secțiune circulară
- secțiune inelară  $k = D/d = 0,8$ .

Rezolvare:

Momentul de torsiune se determină ca fiind:

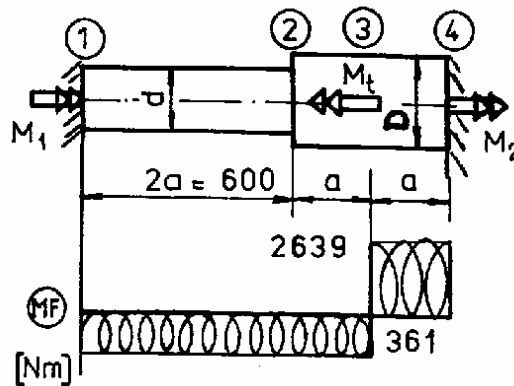
$$M_t = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^*}{n} = \frac{30 \cdot 30}{\pi \cdot 200} = 1,432 \text{ kNm}$$

- Secțiunea circulară:



$$d' = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1432 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80}} = 45,01$$

$$d''_{nec} = \sqrt[3]{\frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1432 \cdot 10^3 \cdot 1}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3}} = 2639$$



**Fig. 8.3**

Se adoptă  $d = 60$  mm.

Observație: Nu se poate adopta o valoare mai mică ( $d=55$  mm) decât cea calculată pentru că la verificarea, în condiția de rigiditate se obține:

$$\theta_{max} = \frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot D^4} = \frac{32 \cdot 1,432 \cdot 10^6}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 55^4} \cdot \frac{180 \cdot 10^3}{\pi} = 1,128^\circ / m > 1,05 \cdot \theta_a.$$

b). Secțiunea inelară:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi \cdot \tau_a \cdot (1 - k^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,432 \cdot 10^6}{\pi \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 80}} = 53,65 \text{ mm}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a \cdot (1 - k^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,432 \cdot 10^6}{\pi \cdot (1 - 0,8^4) \cdot 81 \cdot 10^3} \cdot \frac{10^3 \cdot 180}{3 \cdot \pi}} = 64,66 \text{ mm}$$

Se adoptă:  $D = 65$  mm,  $d = 52$  mm.

Economia de material, prin utilizarea acestei secțiuni inelare este de:

$$\frac{A_I - A_{II}}{A_I} \cdot 100 = \frac{60^2 - (65^2 - 52^2)}{60^2} \cdot 100 = 57,75\%.$$

**Aplicația 8.2** Să se dimensioneze arborele din figura 8.3 încastrat la capete și solicitat de un moment de torsiune  $M_0=3$  kNm. Tensiunea admisibilă este de  $\tau_a = 110$  MPa, iar  $d = 0,75D$ .

Rezolvare:

Aspectul static este:

$$M_{t1} + M_{t2} = M_t,$$

iar aspectul geometric se scrie:

$$\Delta\varphi_{1-2} + \Delta\varphi_{2-3} + \Delta\varphi_{3-4} = 0$$

din care rezultă aspectul fizic:

$$\frac{M_{t1} \cdot 2a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{t1} \cdot a}{G \cdot I_{p2}} + \frac{(M_{t1} - M_t) \cdot a}{G \cdot I_{p2}} = 0.$$

Simplificând termenii asemenea și înlocuind  $d = 0,75D$ , rezultă:

$$M_{t1} = \frac{M_t}{\frac{2}{0,75^4} + 1 + 1} = \frac{0,75^4 \times 3000}{2 \cdot (1 + 0,75)} = 361 \text{ Nm},$$

$$M_{t2} = M_t - M_{t1} = 3000 - 360,5 = 2639 \text{ Nm}$$

Diametrele necesare pentru arbore sunt :

$$d_{\text{nec1-2}} = \sqrt[3]{\frac{16M_{t1-2}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 361 \cdot 10^3}{\pi \cdot 110}} = 25,57 \text{ mm},$$

și rezultă:  $D_{1-2} = \frac{d_{1-2}}{0,75} = 34,04 \text{ mm}.$

$$D_{\text{nec 2-4}} = \sqrt[3]{\frac{16M_{t3-4}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2639 \cdot 10^3}{\pi \cdot 110}} = 49,62 \text{ mm}.$$

Se adoptă valorile: **D = 50 mm, d = 37,5 mm.**

#### **8.4. Energia de deformație la răsucirea barelor de secțiune circulară și inelară**

Considerând un volum elementar din bară, datorită acțiunii tensiunilor tangențiale  $\tau$  și a alunecării specifice elementare  $\gamma$ , se produce lucrul mecanic elementar specific (fig. 8.4):  $dL_1 = \tau \cdot d\gamma$

Solicitarea fiind în domeniul liniar elastic  $\tau = G \cdot \gamma$ , astfel că  $d\gamma = \frac{d\tau}{G}$ , iar lucrul mecanic elementar va fi egal cu energia de deformație, conform ipotezei că în

domeniul elastic întreg lucrul mecanic efectuat prin încărcarea barei se acumulează în volumul acesteia sub formă de energie de deformație:

$$dL_1 = dU_1 = \tau \cdot d\gamma = \frac{\tau}{G} \cdot d\tau.$$

Grafic acest lucru mecanic, respectiv energia de deformație elementară sunt reprezentate prin trapezul hașurat din figura 8.4.

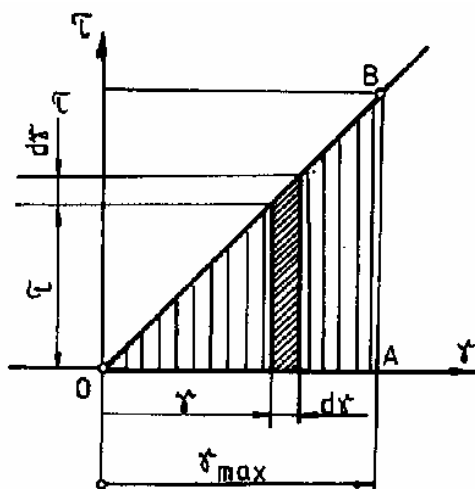


Fig. 8.4

Energia specifică de deformație înmagazinată în elementul de volum unitar când tensiunea crește lent de la 0 la  $\tau$  va avea forma următoare:

$$U_1 = \int_0^\tau dU_1 = \int_0^\tau \tau \cdot \frac{d\tau}{G} = \frac{\tau^2}{2G} \quad (8.19)$$

iar cea acumulată în volumul elementar este:

$$dU = U_1 \cdot dV = \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV.$$

Pentru bara dreaptă de secțiune circulară:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r, \quad I_p = \int_A r^2 \cdot dA = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \quad dV = dA \cdot dx,$$

asa că energia de deformație acumulată în bara de secțiune circulară, de lungime  $L$ , sollicitată la răsucire va avea valoarea:

$$U = \int_V dU = \int_V \frac{\tau^2}{2G} \cdot dV = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p^2} \int_A r^2 \cdot dA = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p}. \quad (8.20)$$

Dacă bara este omogenă, de secțiune circulară constantă și sollicitată pe toată lungimea de același  $M_t$ , atunci energia de deformație acumulată va avea valoarea:

$$U = \frac{M_t^2 \cdot L}{2G \cdot I_p} = \frac{16 \cdot M_t^2 \cdot L}{G \cdot d^4}. \quad (8.21)$$

Dacă bara este de secțiune inelară cu factorul dimensional  $k = \frac{d}{D}$ , energia de deformație va avea expresia:

$$U = \frac{16M_t^2 \cdot L}{\pi \cdot G \cdot D^4 \cdot (1 - k^4)}. \quad (8.21,a)$$

### 8.5. Calculul arcurilor elicoidale cu pas mic

Arcul elicoidal se confecționează dintr-o sârmă de oțel avînd diametrul  $d$  care se înfășoară pe un cilindru sub forma unei spirale. Distanța  $D/2$  de la axa cilindrului la axa sârmei înfășurate, se numește **rază de înfășurare**. Asupra arcului acționează o forță  $P$  de-a lungul axei cilindrului. Dacă forța se va reduce în centrul de greutate al unei spire se va obține o forță  $P$  și un moment  $M = P \cdot R$ .

Descompunînd forța  $P$  și momentul  $M$  după axa spirei și perpendicular pe aceasta se obțin eforturile:

$$N = P \cdot \sin\alpha ;$$

$$T = P \cdot \cos\alpha ;$$

$$M_t = P \cdot R_t \cdot \cos\alpha ;$$

$$M_i = P \cdot R \cdot \sin\alpha.$$

La arcurile elicoidale cu pas mic unghiul de înfășurare al spirei are valori mici, astfel că se poate face aproximarea:

$$\sin\alpha \approx 0 ; \cos\alpha \approx 1$$

În acest caz eforturile din orice secțiune a arcului sunt:

$$M_t = P \cdot R = P \cdot \frac{D}{2} \text{ și } T = P. \quad (8.22)$$

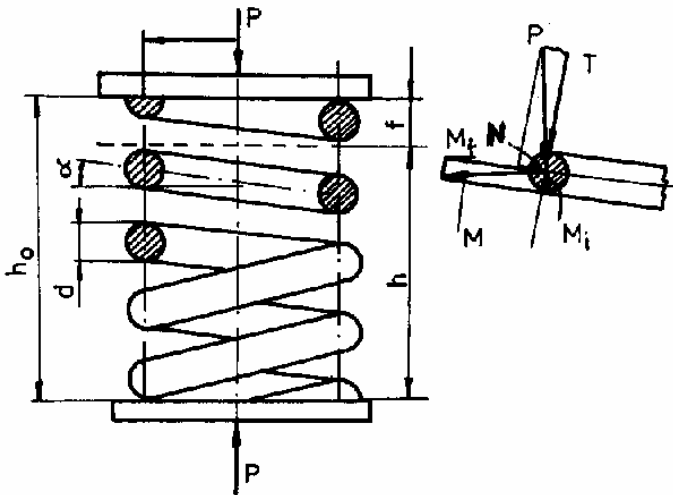


Fig. 8.5

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16P \cdot D}{2\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3}. \quad (8.23)$$

Relația (8.23) se utilizează în calculul de rezistență pentru:

verificare, capacitate de încărcare, dimensionare,

Din această relație se obține diametrul spirei:

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot P \cdot D}{\tau_a \cdot \pi}} \quad (8.24)$$

Rezistența admisibilă a oțelurilor pentru arcuri (OLC55A, OLC65A, OLC75A, OLC85A, 51SI17A, 60SI15A, 51CR11A), se ia:  $\tau_a = 400..800$  MPa.

**Deformația arcului** se definește ca fiind scurtarea sau lungirea acestuia sub acțiunea unei solicitări (fig.8.5) și se numește **săgeată**.

Relația de determinare a săgeții se obține considerând egalitatea dintre lucrul mecanic al forțelor exterioare aplicate și energia potențială de deformație acumulată

în volumul arcului. Ținând seama că  $L = \frac{P \cdot f}{2}$ , iar energia de deformație este dată de

relația (8.20), în care se fac substituirile:

$$M_t = \frac{P \cdot D}{2}; \quad L = \pi \cdot D \cdot n,$$

egalitatea  $L = U$  devine :

Tensiunea tangențială produsă de forța tăietoare este foarte mică în comparație cu cea produsă de momentul de torsiune, astfel că se va lua în calcul numai efectul momentului de torsiune. Va rezulta :

$$\frac{P \cdot f}{2} = \int_L \frac{M_t^2 \cdot dx}{2G \cdot I_p},$$

respectiv:

$$\frac{P \cdot f}{2} = \frac{16 \cdot \pi \cdot D \cdot n \cdot \left(\frac{P \cdot D}{2}\right)^2}{\pi \cdot G \cdot d^4},$$

din care rezulta formula pentru săgeată:

$$f = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}. \quad (8.25)$$

**Aplicația 8.3** Să se verifice arcurile suspensiei din figura 8.6, solicate de o forță  $P = 3,2 \text{ kN}$ , dacă elementele arcurilor sunt  $D_1 = 64 \text{ mm}$ ,  $d_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $n_1 = 10$  spire,  $D_2 = 80 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ mm}$ ,  $n_2 = 8$  spire.

Rezolvare:

a) Aspectul static:

$$P_1 + P_2 = P,$$

b) Aspectul geometric:

$$f_1 = f_2,$$

c) Aspectul fizic:

$$\frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1^3 \cdot n_1}{G \cdot d_1^4} = \frac{8 \cdot (P - P_1) \cdot D_2^3 \cdot n_2}{G \cdot d_2^4},$$

din care rezultă:

$$P_1 = \frac{P}{1 + \frac{d_2^4}{d_1^4} \cdot \frac{D_1^3 \cdot n_1}{D_2^3 \cdot n_2}} = \frac{3200}{1 + \frac{10^4}{8^4} \cdot \frac{64^3 \cdot 10}{80^3 \cdot 8}} = 1294 \text{ N},$$

$$P_2 = P - P_1 = 3200 - 1294 = 1951 \text{ N}.$$

Tensiunile tangențiale în cele două spire rezultă:

$$\tau_{1\max} = \frac{8 \cdot P_1 \cdot D_1}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{8 \cdot 1294 \cdot 64}{\pi \cdot 8^3} = 397,77 \text{ MPa} < \tau_a,$$

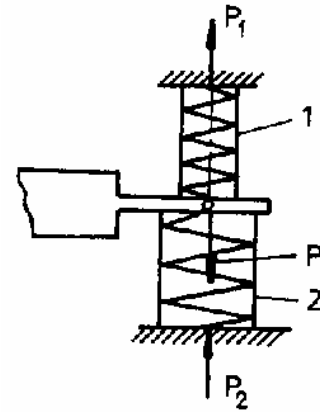


Fig. 8.6

$$\tau_{2\max} = \frac{8 \cdot P_2 \cdot D_2}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{8 \cdot 1951 \cdot 80}{\pi \cdot 10^3} = 397,65 \text{ MPa} < \tau_a.$$

Deci, SUSPENSIA REZISTĂ.

Observație: Deoarece tensiunile maxime din arcuri sunt apropiate de valoarea admisibilă se poate spune că această suspensie a fost proiectată economic.

## 8.6. Răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară

Teoria generală a răsucirii barelor de secțiune oarecare a fost elaborată de Barré de Saint-Venant și are la bază o demonstrație complicată. Ipoteza secțiunilor plane, verificată și utilizată pentru secțiunile circulare și inelare nu mai corespunde la barele de secțiune oarecare. Acestea se deplanează prin răsucire.

Pe suprafața unei bare de secțiune dreptunghiulară, în stare nesolicitată (fig.8.7,a), se trasează linii drepte echidistante, paralele și perpendiculare pe axa barei. Se obține o rețea de dreptunghiuri.

După solicitarea la răsucire, bara se deformează ca în fig.8.7,b, la care se

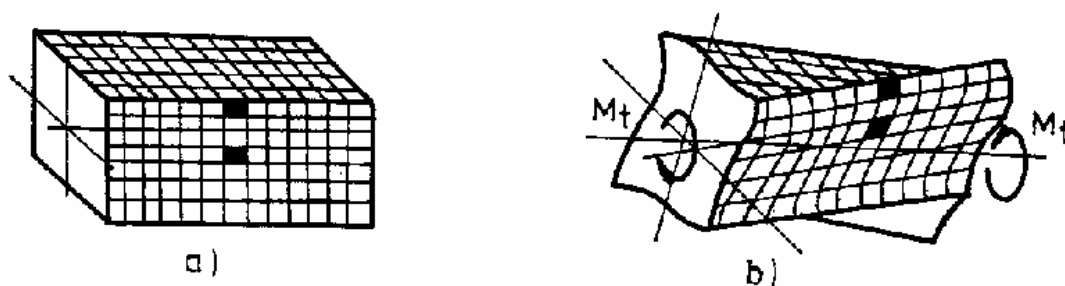


Fig. 8.7

observă că:

a) dreptunghiurile din imediata vecinătate a muchiiilor barei își păstrează forma, deci în aceste puncte deformațiile și tensiunile sunt nule;

b) dreptunghiurile aflate în imediata vecinătate a mijlocului fețelor își schimbă cel mai mult forma, devenind paralelograme. Deci, în apropierea mijlocului laturilor luncările vor fi maxime și ca atare aici se vor produce tensiunile maxime.

Distribuția tensiunilor tangențiale, determinată de Saint-Venant, este prezentată în figura 8.8.

Variația tensiunilor tangențiale nu este liniară pe nici o direcție. În colțurile dreptunghiului și în axa de simetrie Ox, tensiunile tangențiale sunt nule.

Pentru secțiunile dreptunghiulare cu raportul h/b mic se poate considera că tensiunile tangențiale de pe contur variază parabolic. Dacă h/b este mare (profile subțiri) se poate considera că  $\tau$  este constant pe latura mare și variază liniar pe grosime.

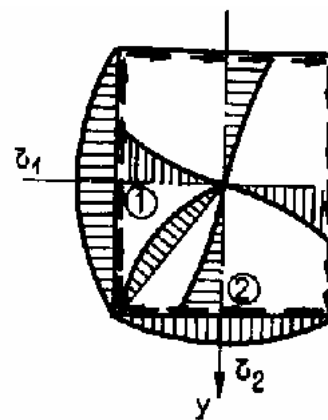


Fig. 8.8

Relațiile de calcul deduse de Barré de Saint-Venant, sunt:

- Pentru tensiunea tangențială maximă ce se produce pe mijlocul laturii mari a dreptunghiului:

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_t}{k_1 \cdot h \cdot b^2}, \quad (8.26)$$

- Pentru tensiunea tangențială la mijlocul laturii mici este:

$$\tau_2 = k_3 \cdot \tau_{\max}, \quad (8.27)$$

- Pentru rotirea specifică, a barelor de secțiune dreptunghiulară:

$$\theta = \frac{M_t}{k_2 \cdot G \cdot h \cdot b^3} \quad (8.28)$$

În relația de mai sus s-a notat cu b latura mai mică a secțiunii dreptunghiulare iar  $k_1, k_2, k_3$ , depind de raportul h/b al laturilor. Valorile acestor coeficienți sunt date în tabelul (8.1).



**Tabelul 8.1**

h/b	1	1,20	1,50	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0
k <sub>1</sub>	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307
k <sub>2</sub>	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,294	0,299	0,307
k <sub>3</sub>	1,000	0,93	0,86	0,82	0,795	0,766	0,753	0,754	0,744	0,743	0,742

Pentru valori mari ale raportului h/b ( $h/b \geq 10$ ) se poate lua:  $k_1 = k_2 = 1/3$ , iar relațiile (8.17) și (8.19) devin:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t}{h \cdot b^2} ; \theta = \frac{3M_t}{G \cdot h \cdot b^3}. \quad (8.29)$$

Dacă vom nota cu :

$$W_t = k_1 \cdot h \cdot b^2, \quad (8.30, a)$$

și pe care o numim, caracteristica geometrică de rezistență la răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară și cu:

$$I_t = k_2 \cdot h \cdot b^3, \quad (8.30, b)$$

numită caracteristica geometrică de rigiditate la răsucirea barelor de secțiune dreptunghiulară, relațiile (8.26) și (8.28) devin:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}, \quad (8.26, a)$$

și

$$\theta_{\max} = \frac{M_t}{G \cdot I_t}, \quad (8.28, a)$$

ceea ce permite generalizarea calculului și pentru alte forme de secțiuni.

Expresiile caracteristicilor geometrice de rezistență  $W_t$  și de rigiditate  $I_t$ , pentru alte forme de secțiuni, sunt date în Anexa nr.6.

Calculul rotirii relative  $\Delta\varphi$  se va face cu relațiile:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t} \text{ sau } \Delta\varphi = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{ti}}$$

**Aplicația. 8.4.** Bara de secțiune dreptunghiulară din figura 8.9 este confecționată din oțel ( $G = 81\text{GPa}$ ). Să se determine tensiunea maximă și rotirea relativă totală dacă este solicitată de un moment de torsiune  $M_t = 20\text{ kNm}$ .

Rezolvare: Tensiunea maximă se produce la mijlocul laturii mari a dreptunghiului și este egală cu:

$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{M_t}{k_1 \cdot h \cdot b^2} = \frac{10 \cdot 10^6}{0,231 \cdot 150 \cdot 100^2} = 57,72\text{ MPa};$$

iar tensiunea tangențială la mijlocul laturii mici este:

$$\tau_2 = k_3 \cdot \tau_1 = 0,86 \cdot 57,72 = 49,64\text{ MPa}.$$

În relațiile de mai sus s-au înlocuit  $k_1 = 0,231$  și  $k_3 = 0,86$  pentru  $h/b = 1,5$ , (Anexa 6).

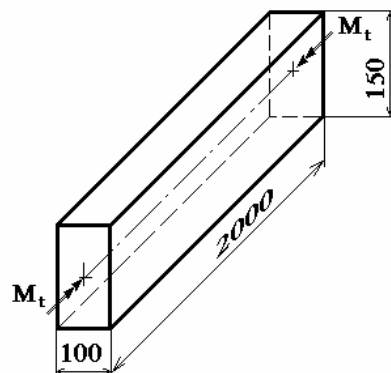
Rotirea relativă totală va fi

$$\Delta\varphi = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_t} = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot k_2 \cdot h \cdot b^3} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 2000}{0,196 \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 150 \cdot 100^3} = 1,680 \cdot 10^{-2}\text{ rad} = 0,9624^\circ,$$

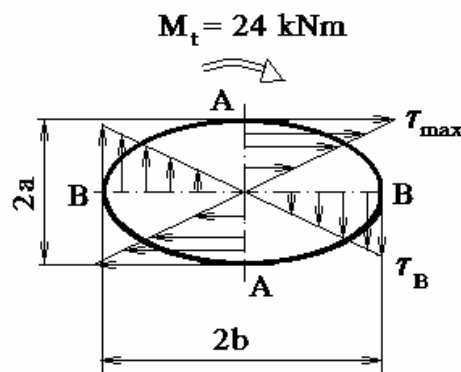
unde,  $k_2 = 0,196$  tot pentru  $h/b = 1,5$ , (Anexa 6).

**Aplicația 8.5.** Bara cu secțiune eliptică având raportul semiaxelor  $b/a = 2$  este confecționată din oțel cu  $G = 81\text{ GPa}$ ,  $\tau_a = 80\text{ MPa}$  și  $\theta_a = 2^\circ/\text{m}$  (fig.8.10) și se cere:

- dimensionarea barei și variația tensiunilor pe secțiune;
- tensiunile efective în cazul unei bare circulare de aceeași arie cu cea eliptică;
- economia de material dacă se adoptă bară de secțiune circulară.



**Fig. 8.9**



**Fig.8.10**

Rezolvare:

a) Din anexa 6 se obține:

$$W_t = \frac{\pi \cdot b \cdot a^2}{2} \quad \text{și} \quad I_t = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2},$$

iar din relația de dimensionare va fi:

- din condiția de rezistență:

$$W_{t_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a},$$

se obține:

$$a_{nec} = \sqrt[4]{\frac{M_t}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[4]{\frac{24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}} = 45,71 \text{ mm.}$$

- din condiția de rigiditate:

$$I_{t_{nec}} = \frac{M_t}{G \cdot \theta_a},$$

sau

$$a_{nec} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot M_t}{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 24 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 10^3}{8 \cdot \pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 2\pi}} = 36,05 \text{ mm.}$$

Se adoptă  $a = 46 \text{ mm}$  și  $b = 92 \text{ mm}$ .

Vor rezulta următoarele tensiuni:

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot b \cdot a^2} = \frac{24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 92 \cdot 46^2} = 78,49 \text{ MPa};$$

$$\tau_B = \frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot b^2 \cdot a} = \frac{24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 92^2 \cdot 46} = 39,24 \text{ MPa},$$

iar reprezentarea este dată în figura 8.10.

b) Din egalitatea ariilor rezultă:

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} = \pi \cdot a \cdot b;$$

$$d = \sqrt{4 \cdot a \cdot b} = \sqrt{4 \cdot 92 \cdot 46} = 130,1 \text{ mm.}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 130,1^3} = 55,63 \text{ MPa.}$$

c) Dimensionarea barei de secțiune circulară:

- din condiția de rezistență:

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 24 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}} = 115,2 \text{ mm.}$$

- din condiția de rigiditate:

$$d_{\text{nec}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_a}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 24 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 10^3}{\pi \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \pi}} = 96,43 \text{ mm.}$$

Se adoptă  $d = 115 \text{ mm}$ .

Economia de material în (%) va fi:

$$n = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \cdot 100 = \frac{\pi \cdot 92 \cdot 46 - \frac{\pi \cdot 115^2}{4}}{\pi \cdot 92 \cdot 46} \cdot 100 = 21,86\%.$$

deci rezultă o economie de 21,86 % în cazul utilizării secțiunii circulare în locul celei eliptice.

**Aplicația 8.6.** Să se determine forța capabilă și săgeata corespunzătoare acesteia la un arc elicoidal confecționat din sârmă pătrată de latură  $a = 8 \text{ mm}$ ,  $n = 8$  spire și  $D = 60 \text{ mm}$ , dacă  $\tau_a = 230 \text{ MPa}$  și  $G = 81 \text{ GPa}$ .

Rezolvare:

$$W_t = k_1 \cdot b \cdot t^2 = 0,208 \cdot 8^3 = 106,5 \text{ mm}^3,$$

$$I_t = k_2 \cdot b \cdot t^3 = 0,141 \cdot 8^4 = 557,5 \text{ mm}^4.$$

Aplicând relațiile (8.30) și (8.21) obținem:

$$P_{\text{cap}} = \frac{\tau_a \cdot W_t}{R} = \frac{230 \cdot 106,5}{30} = 816,5 \text{ N} ; P = 800 \text{ N}$$

Considerând egalitatea  $L = U$  (vezi § 8.4) în cazul secțiunii dreptunghiulare se obține:

$$f = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot n}{4G \cdot I_t} = \frac{\pi \cdot 0,8 \cdot 60^3 \cdot 8}{4 \cdot 81 \cdot 577,5} = 23,21 \text{ mm} .$$

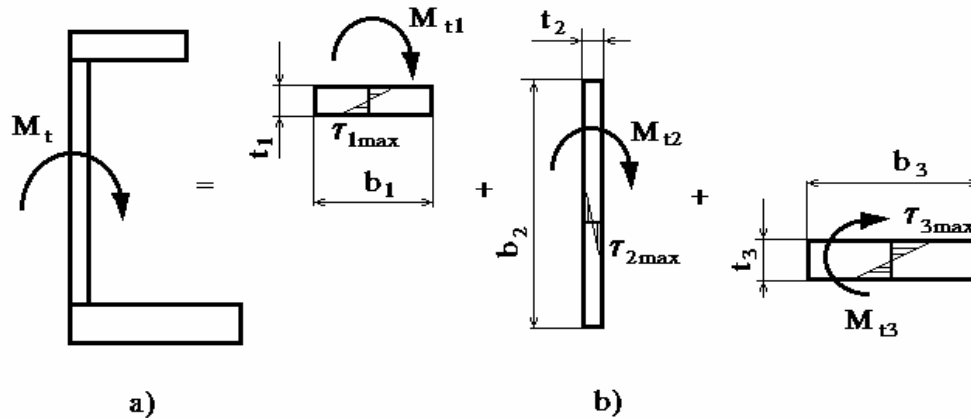


Fig. 8.11

### 8.7. Răsucirea barelor cu pereți subțiri, deschise

Prin bare cu pereți subțiri deschise se înțeleg profilele laminare sub formă L, T, U, I, sau alte forme obținute prin laminare sau prin îndoire și/sau sudare din benzi de tablă laminată. În această categorie intră profilele ce au elemente de grosime mică ( $h \geq 10 \cdot b$ ) și nu închid goluri (secțiunea este simplu conexă) sau dacă închid un gol au cel puțin o generatoare nesudată.

Se consideră bara din figura 8.11 sollicitată la răsucire. Elementele ce compun bara sunt cele două tălpi și inima.

Problema se tratează descompunând bara în trei dreptunghiuri componente și din cele trei aspecte rezultă:

a) - Din **aspectul static**:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} + M_{t3} = \sum M_{t_i},$$

b) - Din **aspectul geometric**:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta$$

c) - Din **aspectul fizic**:

$$\frac{M_{t_1}}{G \cdot I_{t_1}} = \frac{M_{t_2}}{G \cdot I_{t_2}} = \frac{M_{t_3}}{G \cdot I_{t_3}} = \frac{M_{t_3} + M_{t_2} + M_{t_1}}{G \cdot (I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3})} = \frac{M_t}{G \cdot I_{t_d}}$$

Din această relație rezultă **caracteristica geometrică de rigiditate la răsucirea barelor cu pereți subțiri, profil deschis**:

$$I_{t_d} = I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3} = \sum I_{t_i} = \frac{1}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3 . \quad (8.31)$$

În cazul profilelor subțiri laminate se ia:

$$I_{t_d} = (I_{t_1} + I_{t_2} + I_{t_3}) = \sum I_{t_i} = \frac{\alpha}{3} \sum b_i \cdot t_i^3 ,$$

în care  $\alpha = 1$  la profilele cornier,  $\alpha = 1,1 \dots 1,2$  la profilele U iar  $\alpha = 1,3$  la profilele I.

Din relația aspectului fizic se obține:

$$M_{t_i} = M_t \frac{I_{t_i}}{I_{t_d}} ,$$

astfel că tensiunea maximă pe conturul elementului  $i$  rezultă:

$$\tau_{i_{\max}} = \frac{M_{t_i}}{W_{t_i}} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} b_i \cdot t_i^2} \cdot \frac{\frac{1}{3} b_i \cdot t_i^3}{I_{t_d}} = \frac{M_t}{I_{t_d}} \cdot t_i .$$

Deci, tensiunea maximă este funcție de grosimea  $t_i$  a profilului. Rezultă că tensiunea cea mai mare (dintre  $\tau_i$ ) va exista în elementul de grosimea cea mai mare ( $t_{\max}$ ):

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_{t_d}} \cdot t_{\max} = \frac{M_t}{W_{t_d}} . \quad (8.32)$$

Mărimea

$$W_{t_d} = \frac{I_t}{t_{\max}} = \frac{\alpha}{3 t_{\max}} \sum b_i \cdot t_i^3 , \quad (8.33)$$

se numește **caracteristică geometrică de rezistență la răsucire a profilului cu pereți subțiri, profil deschis** și este similară modulului de rezistență polar de la secțiunea circulară.

Din aspectul fizic se poate scrie:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_{td}}, \quad (8.34)$$

și respectiv:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_{td}} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{td}}. \quad (8.35)$$

**Aplicația 8.7.** Să se calculeze momentul de răsucire capabil să-l suporte secțiunea din figura 8.12 și corespunzător acestuia, rotirea specifică (secțiunea se compune din două profile U 20 fără să fie sudate între ele). Se cunoaște:  $\tau_a = 210$  MPa.

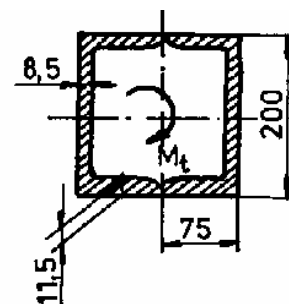


Fig. 8.12

Rezolvare :

Caracteristicile geometrice ale secțiunii sunt:

$$I_{td} = \frac{1}{3} \sum b_i \cdot t_i^3 = 2 \cdot \frac{1,15}{3} \cdot [2 \cdot 0,85^3 + (2 \cdot 7,5 - 0,85) \cdot 1,15^3] = 17,44 \text{ cm}^4,$$

$$W_{td} = \frac{I_{td}}{b_{\max}} = \frac{17,44}{1,15} = 15,166 \text{ cm}^3.$$

Momentul de torsiune capabil rezultă:

$$M_{t\text{cap}} = \tau_a \cdot W_{td} = 15,166 \cdot 120 \cdot 10^{-3} = 1,8199 \text{ Nm}.$$

Se adoptă:  $M_t = 1800$  Nm.

Rotirea specifică corespunzătoare este:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_{td}} = \frac{1800 \cdot 10^3}{81 \cdot 10^3 \cdot 17,44 \cdot 10^4} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 10^3 = 7,3 \text{ } ^\circ/\text{m}.$$

## 8.8 . Răsucirea barelor cu pereți subțiri închise

Considerăm o bară tubulară cu pereți subțiri, ce are secțiunea transversală de formă oarecare, dar constantă în lungul barei (fig.8.13,a). Notăm cu  $\Omega$  aria închisă de fibra medie a profilului secțiunii, cu  $s$  lungimea fibrei medii și cu  $t$  grosimea peretelui. Sub acțiunea momentului de torsiune, în secțiune se produc tensiuni tangențiale paralele la linia medie a profilului. Se admite că la grosimi mici ale peretelui aceste tensiuni **sunt repartizate uniform pe toată grosimea peretelui**. Această ipoteză concordă cu atât mai bine cu realitatea cu cât grosimea peretelui este mai mică.

Izolăm din bară un element de lungime  $dx$  (fig. 8.13,b). Din aceasta detașăm o fâșie longitudinală cuprinsă între generatoarele  $\langle 1 \rangle$  și  $\langle 2 \rangle$ . Pe fețele fâșiei apar tensiuni tangențiale care satisfac **legea dualității tensiunilor tangențiale** (fig. 8.13,b). Din condiția de echilibru a forțelor elementare se obține:

$$\tau_1 \cdot t_1 \cdot dx = \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx ,$$

din care rezultă că în orice punct al secțiunii transversale produsul  $\tau \cdot t$  este constant:

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau_i \cdot t_i = ct. \quad (8.36)$$



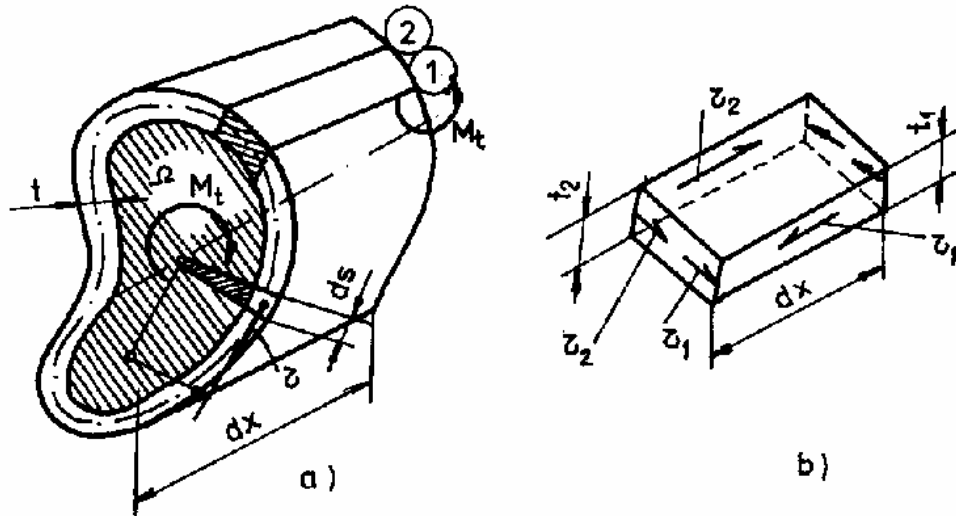


Fig. 8.13

Acest produs se numește **flux al tensiunilor tangențiale**. Deci valoarea tensiunilor tangențiale este maximă unde grosimea peretelui este minimă și are valoarea minimă unde grosimea peretelui este maximă.

Din relația de echilibru a elementului obținem:

$$M_t = \int_A r \cdot \tau \cdot dA = \oint_s \tau \cdot r \cdot t \cdot ds,$$

unde s-a notat cu  $r$  brațul efortului tangențial  $dT = \tau \cdot dA$ , de la acesta la centrul de răsucire  $O$  și  $dA = t \cdot ds$ .

Din figură se observă că  $d\Omega = \frac{r \cdot ds}{2}$ , adică aria triunghiului elementar corespunzător lungimii de arc  $ds$  pe fibra medie. Cu această notație momentul de răsucire rezultă :

$$M_t = \tau \cdot t \cdot \oint_s r \cdot ds = 2\tau \cdot t \cdot \Omega,$$

iar expresia tensiunii tangențiale este:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot t \cdot \Omega}. \quad (8.37,a)$$

Tensiunea maximă care se produce în dreptul grosimii celei mai mici, este:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 \cdot t_{\min} \cdot \Omega} = \frac{M_t}{W_{tf}} \quad (8.37)$$

în care,

$$W_{tf} = 2 \cdot t_{\min} \cdot \Omega, \quad (8.38)$$

este **caracteristica geometrică de rezistență la răsucire a barelor cu pereți subțiri profil închis.**

Pentru determinarea rotirii specifice se scrie egalitatea dintre lucrul mecanic exterior, produs prin aplicarea momentului de răsucire, pe un element de lungime  $dx = 1$ , cu energia de deformare potențială acumulată în element .

$$\frac{M_t \cdot \theta}{2} = \int \frac{\tau^2}{2G} dV .$$

Înlocuind pe  $\tau$  din relația (8.37,a) și pe  $dV = 1 \cdot t \cdot ds$ , se obține:

$$\theta = \frac{M_t}{4G \cdot \Omega^2} \oint \frac{ds}{t} = \frac{M_t}{G \cdot I_{ti}}, \quad (8.39)$$

în care mărimea:

$$I_{ti} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s}{t}} \quad (8.40)$$

este **caracteristica geometrică de rigiditate la răsucire a barelor cu pereți subțiri profil închis.**

Relațiile (8.34) și (8.35) sunt **formulele lui R. Bredt.**

Dacă grosimea peretelui este constantă în lungul fibrei medii atunci se obține:

$$\theta = \frac{M_t \cdot s}{4 \cdot G \cdot t \cdot \Omega^2}. \quad (8.41)$$

Analog ca la celelalte structuri rotirea relativă se determină cu relația:

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_{ti}} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_{ti}}. \quad (8.42)$$

**Aplicație 8.8.** Pentru bara din oțel ( $G = 81 \text{ GPa}$ , și  $\tau_a = 90 \text{ MPa}$ ) cu secțiunea din figura 8.14 se cer:

- caracteristicile geometrice la răsucire, profil deschis și profil închis;
- momentul de torsiune capabil;
- rotirile specifice maxime corespunzătoare momentelor de torsiune calculate;
- tensiunile tangențiale și diagramele de variație pe secțiune.

Rezolvare:

- caracteristici geometrice:

**- profil deschis:**

Secțiunea dată se descompune în dreptunghiuri subțiri. La arce de cerc lungimea dreptunghiului este egală cu desfășurata pe fibra medie.

$$I_{td} = \frac{\alpha}{3} \cdot \sum b_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 8 \cdot 0,6^3 + \pi \cdot 5,3 \cdot 0,6^3 + 13 \cdot 1,2^3) = 9,839 \text{ cm}^4$$

$$W_{td} = \frac{I_{td}}{t_{\max}} = \frac{9,839}{1,2} = 8,2 \text{ cm}^3.$$

**- profil închis:**

Se duce fibra medie și se calculează aria închisă de aceasta:

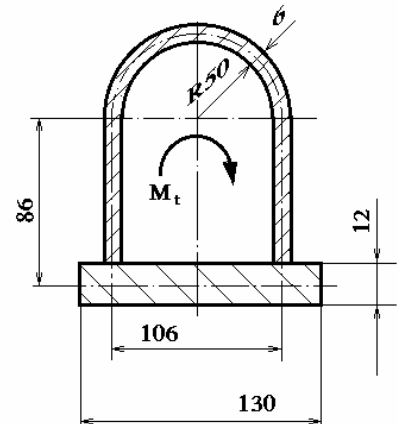
$$\Omega = 10,6 \cdot 8,6 + \frac{\pi \cdot 5,3^2}{2} = 135,2 \text{ cm}^2,$$

$$W_{ti} = 2 \cdot \Omega \cdot t_{\min} = 2 \cdot 135,2 \cdot 0,6 = 162,3 \text{ cm}^3,$$

$$I_{ti} = \frac{4 \cdot \Omega^2}{\sum \frac{s}{t}} = \frac{4 \cdot 135,2^2}{\frac{10,6}{1,2} + \frac{2 \cdot 8,6}{0,6} + \frac{\pi \cdot 5,3}{0,6}} = 1122 \text{ cm}^4.$$

În ultima relație s înseamnă lungimea fibrei medii:

- Momentele de torsiune capabile:



**Fig. 8.14**

$$M_{\text{tcap,d}} = \tau_a \cdot W_{\text{td}} = 90 \cdot 8,2 \cdot 10^{-3} = 0,738 \text{ kNm},$$

$$M_{\text{tcap,i}} = \tau_a \cdot W_{\text{ti}} = 90 \cdot 162,3 \cdot 10^{-3} = 14,61 \text{ kNm}.$$

Se adoptă:

$$M_{\text{td}} = 0,75 \text{ kNm};$$

$$M_{\text{ti}} = 14,5 \text{ kNm}.$$

c) Rotirile specifice maxime se determină cu relațiile (8.34) și (8.40) și se obține:

$$\theta_{\text{max,d}} = \frac{M_{\text{t}}}{G \cdot I_{\text{td}}} = \frac{0,75 \times 10^6}{81 \cdot 10^3 \cdot 9,839 \cdot 10^4} = 9,411 \cdot 10^{-5} \text{ rad / mm} = 5,392^\circ / \text{m},$$

$$\theta_{\text{max,i}} = \frac{M_{\text{ti}}}{G \cdot I_{\text{ti}}} = \frac{14,5 \times 10^6}{81 \cdot 10^3 \cdot 1122 \cdot 10^4} = 1,595 \cdot 10^{-5} \text{ rad / mm} = 0,9141^\circ / \text{m}.$$

d) Se determină tensiunile tangențiale cu relațiile (8.32) și respectiv (8.37):

**- profil deschis:**

$$\tau_{\text{td,max}} = \frac{M_{\text{td}}}{W_{\text{td}}} = \frac{0,75 \cdot 10^6}{8,2 \cdot 10^3} = 91,46 \text{ MPa},$$

$$\tau_{\text{td,i}} = \frac{M_{\text{td}}}{I_{\text{td}}} \cdot t_i = \frac{0,75 \cdot 10^6}{9,839 \cdot 10^4} \cdot 6 = 45,73 \text{ MPa}$$

**- profil închis:**

$$\tau_{\text{ti,max}} = \frac{M_{\text{ti}}}{W_{\text{ti}}} = \frac{14,5 \cdot 10^6}{162,3 \cdot 10^3} = 89,3 \text{ MPa},$$

$$\tau_{\text{ti,t}} = \frac{M_{\text{ti}}}{2 \cdot \Omega \cdot t_t} = \frac{14,5 \cdot 10^6}{2 \cdot 135,2 \cdot 10^2 \cdot 12} = 44,67 \text{ MPa}.$$

**Observație:** Comparând momentele de torsiune capabile se observă că la același consum de material profilul închis rezistă de 19,8 ori ( $14,62/0,738$ ) mai mult decât profilul deschis, iar dacă se compară rotirile specifice se observă că bara realizată din profil deschis este mult mai elastică, de 5,9 ori. Adoptarea uneia sau alteia din soluții se va face în funcție de scopul urmărit și anume:

- pentru structuri rigide se adoptă profilul închis;

- pentru structuri elastice se adoptă profilul deschis, care admite deformații mari fără a se depăși tensiunea tangențială admisibilă.

## 8.9. Generalizarea relațiilor de calcul la răsucire

Analizând forma identică a relațiilor (8.8), (8.26,a), (8.32) și (8.37) pentru calculul tensiunilor tangențiale maxime la răsucirea barelor drepte, a relațiilor (8.10), (8.28,a), (8.34) și (8.39) pentru determinarea rotirilor specifice și respectiv (8.11), (8.30), (8.35) și (8.42) se pot scrie relații unice și anume:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\max}}{W_t} \leq \tau_a, \quad (8.43)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{t\max}}{G \cdot I_t} \leq \theta_a, \quad (8.44)$$

$$\Delta\varphi = \int_L \frac{M_t \cdot dx}{G \cdot I_t} = \sum \frac{M_{ti} \cdot L_i}{G \cdot I_t} \leq \Delta\varphi_a. \quad (8.45)$$

Dacă în aceste relații se înlocuiesc  $W_t$  și  $I_t$  cu caracteristicile geometrice la răsucire corespunzătoare fiecărei forme de secțiune și anume:

- la secțiunea circulară:

$$W_t \rightarrow W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16},$$

$$I_t \rightarrow I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

- la secțiunea inelară cu factorul dimensional  $k = d/D$ :

$$W_t \rightarrow W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - k^4),$$

$$I_t \rightarrow I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - k^4).$$

- la secțiunea dreptunghiulară ( $h > b$ );

$$W_t \rightarrow W_t = k_1 \cdot h \cdot b^2,$$

$$I_t \rightarrow I_t = k_2 \cdot h \cdot b^3,$$

- la bare cu pereți subțiri, profil deschis ( $b \gg t$ ):

$$W_t \rightarrow W_{td} = \frac{I_t}{t_{\max}},$$

$$I_t \rightarrow I_{td} = \frac{\alpha}{3} \sum b \cdot t^3,$$

unde:  $\alpha = 1$  pentru toate secțiunile cu excepția profilelor standardizate pentru care avem,  $\alpha = 1,1..1,2$  pentru profilul U,  $\alpha = 1,3$  pentru profilul I.

- la barele cu perete subțire profil închis:

$$W_t \rightarrow W_{if} = 2 \cdot \Omega \cdot t_{\min},$$

$$I_t \rightarrow I_{if} = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s}{t}},$$

în care  $\Omega$  este aria închisă de fibra medie iar  $s$  este lungimea fibrei medii.

## 8.10. Răsucirea barelor cu pereți subțiri cu secțiuni dublu conexe

Modul de rezolvare a unor astfel de probleme va fi exemplificat prin aplicația următoare.

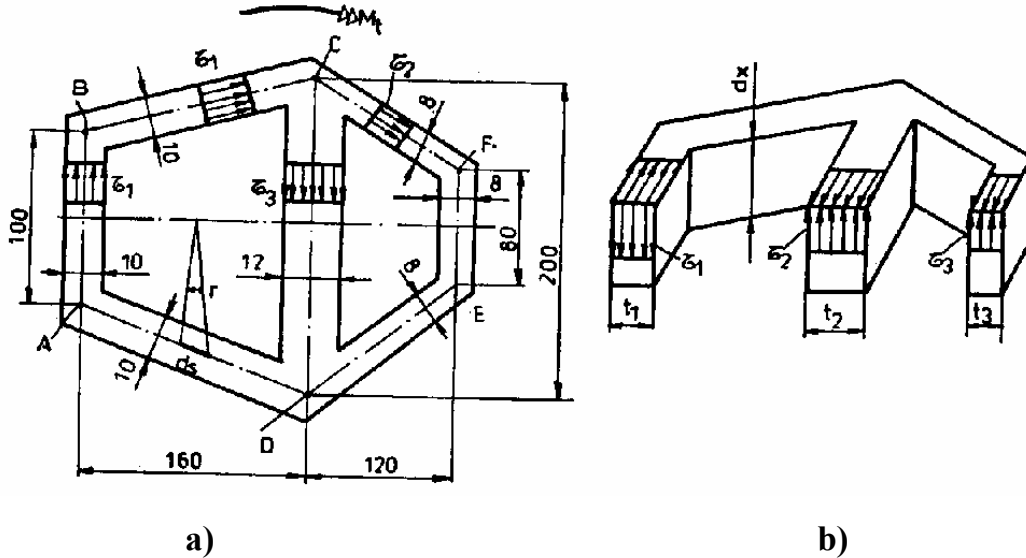
**Aplicația 8.9.** Pentru bara cu secțiunea din figura 8.15 să se determine momentul de torsiune capabil și corespunzător acestuia rotirea specifică ( $G = 81 \text{ GPa}$ ,  $\tau_a = 90 \text{ MPa}$ ).

Rezolvare: Izolăm un element longitudinal (fig.8.15,b), din ecuația de echilibru în lungul axei Ox:

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 + \tau_3 \cdot t_3, \quad (a)$$

și din ecuația de echivalență rezultă:

$$M_t = \int_S (\tau \cdot t) \cdot r \cdot ds = 2 \cdot (\tau_1 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + \tau_2 \cdot t_2 \cdot \Omega_2). \quad (b)$$



**Fig. 8.15**

Aspectul geometric se poate scrie ținând seama că secțiunea transversală este indeformabilă în planul ei:

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3. \quad (c)$$

Scriind condițiile de rigiditate pe cele două contururi obținem:

$$\begin{aligned} (ABCD) \quad \tau_1 \cdot t_1 + \tau_3 \cdot t_3 &= 2 \cdot G \cdot \theta \cdot \Omega_1, \\ (CDEF) \quad \tau_2 \cdot t_2 - \tau_3 \cdot t_3 &= 2 \cdot G \cdot \theta \cdot \Omega_2. \end{aligned} \quad (d)$$

Rezolvând sistemul de ecuații (a și d) se obține:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= 1,111 \cdot \tau_1; \\ \tau_3 &= 0,09263 \cdot \tau_1. \end{aligned}$$

care înlocuite în relația b):

$$M_t = 2 \cdot (\tau_1 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + \tau_2 \cdot t_2 \cdot \Omega_2) = \tau_1 \cdot (2 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + 2,222 \cdot t_2 \cdot \Omega_2).$$

De pe desen se obține:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{20 + 10}{2} \cdot 16 = 240 \text{ cm}^2, \\ \Omega_2 &= \frac{80 + 20}{2} \cdot 12 = 168 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

și cu aceste valori și pentru  $\tau_1 = \tau_a$  momentul de torsiune va fi:

$$M_t = 90 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 240 \cdot 10^2 + 2,222 \cdot 8 \cdot 168 \cdot 10^2) \cdot 10^{-6} = 70,08 \text{ kNm}.$$

Se adoptă:  $M_t = 70 \text{ kNm}$ .

Rotirea specifică:

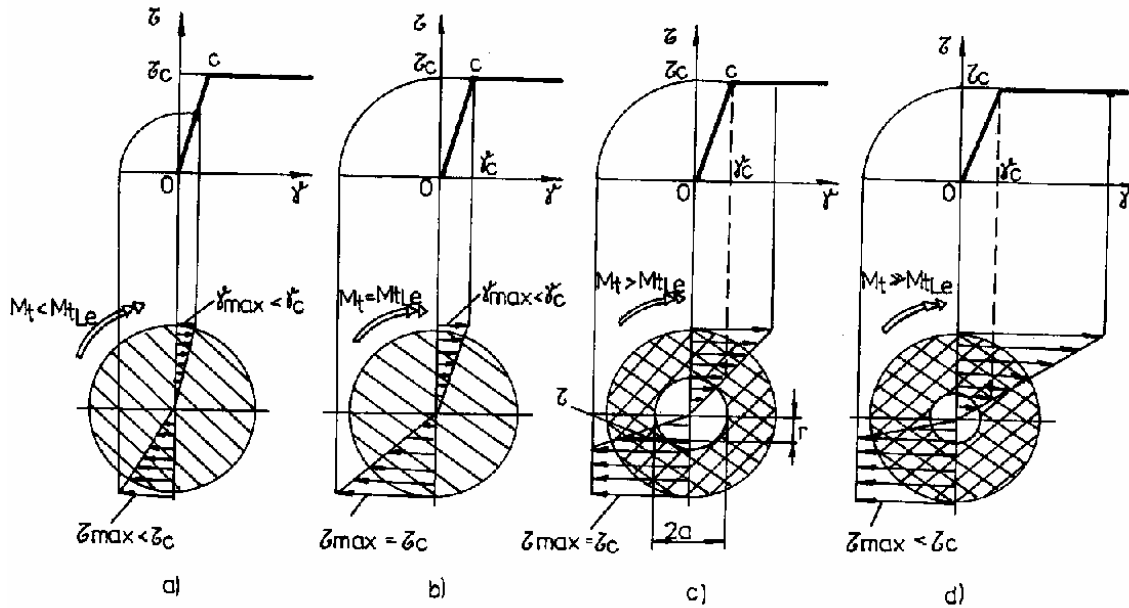
$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\tau_1 \cdot t_1 + \tau_3 \cdot t_3}{2 \cdot G \cdot \Omega_1} = \frac{\tau_1 \cdot (t_1 + 0,09263 \cdot t_2)}{2 \cdot G \cdot \Omega_1} = \frac{M_t \cdot (t_1 + 0,09263 \cdot t_2)}{2 \cdot G \cdot \Omega_1 \cdot (2 \cdot t_1 \cdot \Omega_1 + 2,222 \cdot t_2 \cdot \Omega_2)} = \\ &= \frac{70 \cdot 10^6 \cdot (10 + 0,09263 \cdot 8)}{2 \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 240 \cdot 10^2 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 240 \cdot 10^2 + 2,222 \cdot 0,8 \cdot 168 \cdot 10^2)} = \\ &= 3,793 \cdot 10^{-7} \text{ rad} / \text{mm} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ } ^\circ / \text{m}.\end{aligned}$$

### 8.11. Bare de secțiune circulară solicitate elasto –plastic

Considerăm o bară de secțiune circulară cu diametrul  $d$  solicitată la răsucire de momentul  $M_t$ . Dacă solicitarea este elastică tensiunile tangențiale variază liniar, de la valoarea maximă pe contur până la zero pe axa barei (fig.8.16,a). Distribuția tensiunilor nu se modifică până la  $M_t = M_{tLe} = \tau_c \cdot W_p$  (fig. 8.16,a) unde s-a notat cu  $M_{tLe}$  - momentul maxim până la care secțiunea este solicitată în întregime în domeniul elastic.

Când momentul de răsucire crește peste valoarea  $M_{tLe}$  atunci numai o parte din secțiune se va deforma elastic (cea cuprinsă în distanța  $r \leq a$ ) iar coroana va avea deformări elasto-plastice.





**Fig. 8.16**

Dacă bara este realizată din oțel de rezistență mică și mijlocie ce are palier de curgere lung, atunci curba caracteristică ( $\tau = f(\gamma)$ ), se poate schematiza printr-o diagramă de tip Prandtl pentru material ideal elasto-plastic (fig.8.17). Pentru aceste materiale curba caracteristică are o porțiune liniară ( $\tau = G \cdot \gamma$ , pentru  $\gamma \leq \gamma_c$ ) și un palier de curgere ( $\tau = \tau_c$  pentru  $\gamma > \gamma_c$ ). În acest caz, când  $M_t > M_{tLe}$ , tensiunile tangențiale se distribuie în secțiune așa cum sunt arătate în figura (8.16,c,d).

Pentru a stabili limita dintre zona solicitată elastic și cea solicitată în domeniul plastic, fiecărei secțiuni i s-a atașat o curbă caracteristică schematizată pentru materialul ideal elasto-plastic (conform ipotezei făcute). Punctul de pe fiecare caracteristică reprezintă starea de solicitare-deformare. Lunecarea specifică  $\gamma_c$ , corespunzătoare începutului palierului de curgere va preciza mărimea “a” a razei maxime a zonei solicitate elastic.

Lunecarea specifică are o distribuție liniară de la zero pe axa barei la  $\gamma_{max}$  pe conturul exterior. Tensiunea tangențială nu poate depăși limita de curgere  $\tau_c$ , fiind constantă pe zonele solicitate plastic ( $\tau = \tau_c$ ) și variază liniar de la 0 la  $\tau_c$  pe zonele solicitate în domeniul elastic (zero pe axa barei).

Ecuatia echivalentă dintre momentul de răsucire și tensiunile din secțiune, considerând  $dA = 2\pi \cdot r \cdot dr$ ,

$$M_t = \int r \cdot (\tau \cdot dA) = \int_0^a r \cdot \frac{r}{a} \cdot \tau_c \cdot (2\pi \cdot r \cdot dr) + \int_a^{d/2} r \cdot \tau_c \cdot (2\pi \cdot r \cdot dr) = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \cdot \left(1 - \frac{2a^3}{d^3}\right) \cdot \tau_c \quad (8.46)$$

unde:

- $\tau = \tau_c$  pe zona sollicitată în domeniul plastic  $r \in \left[ a, \frac{d}{2} \right]$
- $\tau = \frac{r}{a} \cdot \tau_c$  pentru zona sollicitată în domeniul elastic  $r \in [0, a]$ .

Momentul de răsucire are două limite:

$$M_{te} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot \tau_c = W_p \cdot \tau_c \quad (8.47)$$

pentru  $a = d/2$  (vezi relația 8.15) și momentul de torsiune limită:

$$M_{tl} = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \cdot \tau_c = \tau_c \cdot S_p \quad (8.48)$$

când întreaga secțiune este sollicitată în domeniul plastic (fig. 8.16,a) și unde s-a notat cu:

$$S_p = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \quad (8.49)$$

**caracteristica geometrică de rezistență la răsucire în domeniul plastic a barelor de secțiune circulară.**

Raportul dintre momentul de torsiune limită în domeniul elastic ( $M_{te}$ ) și momentul limită ( $M_{tl}$ ) al barelor de secțiune circulară este:

$$\frac{M_{tl}}{M_{te}} = \frac{\tau_c \cdot S_p}{\tau_c \cdot W_p} = \frac{\pi \cdot d^3}{12} \cdot \frac{16}{\pi \cdot d^3} = 1,333.$$

Deci, bara de secțiune circulară are rezerve de rezistență de 33,3 % ce se pun în evidență prin calculul la rezistența la starea limită.

**Aplicația 8.10.** Să se dimensioneze o bară de secțiune circulară încastrată la ambele capete (fig. 8.18) solicitată de un moment  $M_t = 31,4$  kNm, prin metoda stării limită, cunoscând  $\tau_c = 180$  MPa și coeficientul de siguranță impus  $c_0 = 3$ .

Rezolvare: Dacă  $M_t$  aplicat, crește atunci deformațiile plastice apar mai întâi în zona mai scurtă a barei. Bara mai poate suporta o creștere de moment de răsucire până când ambele regiuni devin solicitate plastic.

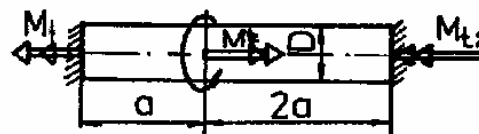


Fig. 8.18

În această stare, din condiția de echilibru la starea limită va avea:

$$M_{t1} = M_{t2} = \frac{1}{2} M_{tl} = \tau_c \frac{\pi d^3}{12} ;$$

Dar:

$$M_t = \frac{M_{tl}}{c} = 2 \cdot \frac{\tau_c}{c} \cdot \frac{\pi d^3}{12} ,$$

din care rezultă:

$$d_{nec} = \sqrt[3]{\frac{6M_{tc} \cdot c}{\pi \cdot \tau_c}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 31,4 \cdot 10^6 \cdot 3}{\pi \cdot 180}} = 99,98 \text{ mm.}$$

Se adoptă:  $d = 100$  mm.

**Aplicația 8.8.** O bară de secțiune inelară (fig. 8.19) este solicitată la torsiune de un moment  $M = 9$  KNm. Limita de curgere a materialului  $\tau_c = 180$  MPa,  $d = 0,8 D$  și se admite un coeficient de siguranță  $c = 2,5$ . Să se dimensioneze bara.

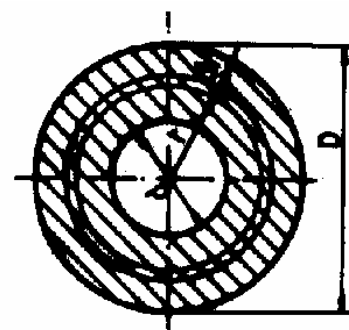


Fig. 8.19

**Rezolvare.** Din relația de echivalență rezultă:

$$M_{tl} = \int_{d/2}^{D/2} r \cdot (\tau \cdot dA) = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} r \cdot \tau_c \cdot (2\pi \cdot r \cdot dA) = 2\pi \cdot \tau_c \cdot \left( \frac{D^3}{24} - \frac{d^3}{24} \right) =$$

$$= \tau_c \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{12} \cdot (1 - k^3),$$

unde  $k = d/D$ .

Știind că

$$M_{tcp} = \frac{M_{tl}}{c} = \frac{\tau_c}{c} \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{12} \cdot (1 - k^3) = \frac{\tau_c}{c} \cdot S_p,$$

în care s-a notat:

$$S_p = \frac{\pi \cdot D^3}{12} \cdot (1 - k^3), \quad (8.50)$$

**caracteristica geometrică la răsucire în domeniul plastic al barelor de secțiune inelară, se obține:**

$$D_{nec} = \sqrt[3]{\frac{12M_t \cdot c}{\pi \cdot \tau_c \cdot (1 - k^3)}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 2,5}{\pi \cdot 180 \cdot (1 - 0,8^3)}} = 93,17 \text{ mm}.$$

Se adoptă:  $D=100 \text{ mm}$  și  $d= 80 \text{ mm}$ .