

## 9. ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE ȘI CURBE

### 9.1. Introducere

O bară este solicitată la încovoiere, când în secțiunile acesteia există numai momente încovoietoare. În majoritatea cazurilor, solicitarea la încovoiere este produsă de forțe transversale (care acționează pe axa barei). În aceste cazuri în secțiunile transversale se produc atât momente încovoietoare cât și forțe tăietoare, iar solicitarea se numește încovoiere simplă.

În cadrul acestui capitol se admite că fiecare forță trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale și nu produce o solicitare suplimentară de torsiune.

Momentul încovoiător solicită bara astfel încât întinde fibrele dintr-o parte și le comprimă pe cele de pe partea opusă, producând în secțiune tensiuni normale. Forța tăietoare solicită bara la forfecare, producând în secțiune tensiuni tangențiale.

În funcție de **natura eforturilor interioare** ce apar în bară, solicitarea poate fi:

- **încovoiere pură**, când în secțiunea transversală a barei există numai momente încovoietoare:

- **încovoiere simplă**, când în secțiunea transversală a barei există atât momente încovoietoare cât și forțe tăietoare.

După **poziția în spațiu a forțelor transversale**, solicitarea la încovoiere poate fi:

- **încovoiere plană**, când toate forțele sunt într-un singur plan central principal de inerție:

- **încovoiere oblică**, când toate forțele aplicate aparțin unui singur plan central longitudinal, diferit de planele principale centrale de inerție:

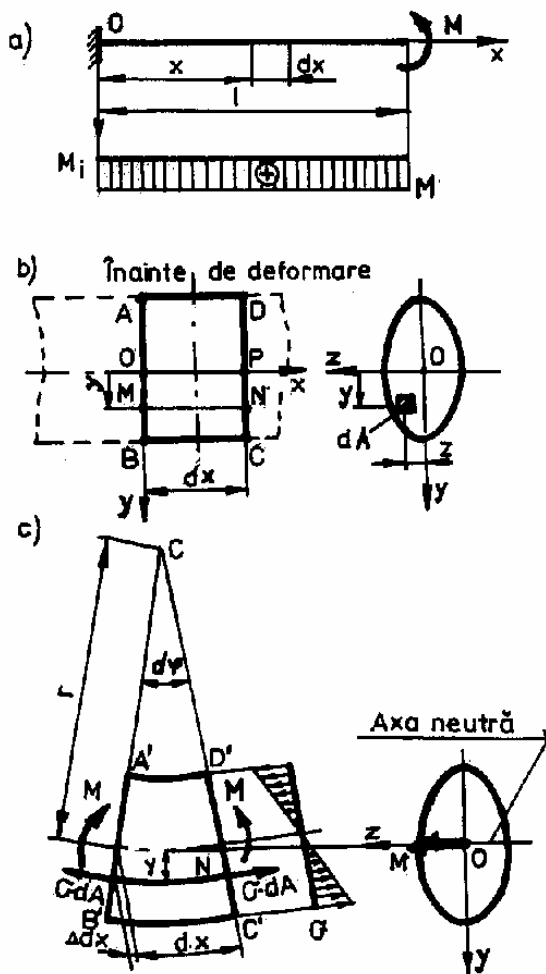
- **încovoiere strâmbă**, când forțele aplicate sunt dispuse în două sau mai multe plane centrale.

Solicitarea de încovoiere simplă este cea mai întâlnită în aplicațiile ingineresti.

## 9.2. Tensiuni și deformații în bare drepte solicitate la încovoiere pură plană

Se consideră o bară dreaptă a cărei secțiune transversală este simetrică în raport cu planul vertical  $xOy$ , solicitată la încovoiere pură, de un moment de încovoiere dirijat după axa  $Oz$  (fig.9.1,a).

Bara este confecționată din material continuu omogen și izotrop, având caracteristica liniar-elastică (deformațiile sunt elastice și proporționale cu tensiunile). Prin deformare, după aplicarea momentului încovoiator, ipoteza secțiunilor plane verificată experimental pentru punctele de pe contur se extinde la toate punctele din secțiune (secțiunile plane și normale pe axa barei înainte de deformare, vor fi plane și



normale pe axa barei și după deformare). De asemenea se admite că toate sarcinile aplicate sunt conținute într-un plan principal central de inerție (planul  $xOy$ ).

Din bara considerată se detașează un element de lungime  $dx$  (fig.9.1b). Înainte de aplicarea momentului încovoiator, fibrele elementului  $AD$ ,  $BC$ ,  $MN$ , sunt drepte și paralele cu axa barei  $Ox$ . Secțiunile de la capetele elementului ( $AB$ ,  $CD$ ), sunt plane și perpendiculare pe axa barei. După solicitare (se aplică momentul încovoiator  $M$ ), bara se va deforma (fig.9.1.c), astfel încât fibrele elementului devin curbe, iar secțiunile

Fig. 9.1

AB și CD se vor roti una față de cealaltă cu unghiul  $d\varphi$ . În urma deformării numai unele fibre își vor păstra lungimea inițială. Aceste fibre poartă denumirea de **fibre neutre** și formează o **suprafață neutră**. Suprafața se consideră plană și se numește **plan neutru**. Când  $M > 0$ , fibrele superioare ale planului se scurtează, iar cele inferioare planului se lungesc. Linia de intersecție a planului neutru cu un plan longitudinal vertical ( $xOy$ ), ce conține axa barei, poartă numele de **fibră neutră**, **axa neutră**, sau **fibra medie**.

O fibră oarecare, MN, situată la ordonata  $y$  de planul neutru, are înainte de deformare lungimea  $dx = MN = OP = r \cdot d\varphi$ .

Din această relație se definește rotirea secțiunii:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{r}.$$

După deformarea barei, fibra  $MN = dx$ , va avea lungimea :

$$dx + \Delta dx = M'N' = (r+y) \cdot d\varphi, \text{ iar alungirea va fi: } \Delta dx = y \cdot d\varphi.$$

Lungirea specifică rezultă :

$$\varepsilon = \frac{\Delta \cdot ds}{ds} = \frac{M'N' - MN}{MN} = \frac{(r+y) \cdot d\varphi - r \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{y}{r}. \quad (9.1)$$

Tensiunea normală  $\sigma$ , care ia naștere în secțiune, la ordonata  $y$ , (în dreptul fibrei MN), conform legii lui Hooke, va fi:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{y}{r}. \quad (9.2)$$

Pentru a obține relația dintre momentul încovoietor și tensiunile produse pe suprafața secțiunii transversale se scriu **ecuațiile de echivalență**. În acest caz particular, când toate forțele elementare  $\sigma \cdot dA$  sunt paralele între ele și normale pe suprafața secțiunii transversale, aceste ecuații sunt :

$$\int_{(A)} \sigma \cdot dA = 0, \quad \int_{(A)} \sigma \cdot z \cdot dA = 0, \quad \int_{(A)} \sigma \cdot y \cdot dA = M. \quad (9.3)$$

Dacă se ține seama de expresia (9.2) acestea devin :

$$\int_{(A)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \int_{(A)} \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \frac{E}{r} \cdot \int_{(A)} \mathbf{y}^2 \cdot d\mathbf{A} = M. \quad (9.4)$$

Din relațiile obținute se constată următoarele :

- întrucât:

$$\int_{(A)} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii transversale, deoarece numai față de o axă centrală momentul static al unei suprafețe este egal cu zero. Deci, originea sistemului de referință coincide cu centrul de greutate al secțiunii transversale:

Din:

$$\int_{(A)} \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

rezultă că axele Oy și Oz trebuie să fie axe principale de inerție ale secțiunii transversale:

De la § 5.4:

$$\int_{(A)} \mathbf{y}^2 \cdot d\mathbf{A} = I_z,$$

este momentul de inerție axial față de axa neutră Oz, a întregii secțiuni transversale.

Axele secțiunii (Oy și Oz) trecând prin centrul de greutate și Oy fiind axă de simetrie, sunt axe centrale principale de inerție. Dacă se intersectează suprafața neutră cu un plan normal se obține **axa de încovoiere a secțiunii** (axa Oz) .

Ținând seama de cele deduse mai sus, rotirea secțiunii este definită de relația :

$$\omega = \frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I_z}. \quad (9.5)$$

Deci, rotirea secțiunii este egală cu **curbura**  $\left(\frac{1}{r}\right)$  și este direct proporțională cu momentul încovoiator și invers proporțională cu **rigiditatea la încovoiere**  $(E \cdot I_z)$ .

Dacă în relația (9.5) se ține seama de relația (9.2), expresia tensiunii normale devine :

$$\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y. \quad (9.6)$$

Aceasta este formula lui L. M. H. Navier și arată că **valoarea tensiunii normale la încovoiere este o funcție liniară față de ordonata punctului, raportată la axa neutră**. Relația lui Navier exprimă o distribuție liniară a tensiunilor: zero în axa neutră și valori maxime și minime în fibrele extreme (fig. 9.1,c). Tensiunea maximă din secțiune este :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} \cdot y_{\max} = \frac{M}{W_z}. \quad (9.7)$$

În formula (9.7) s-a introdus mărimea geometrică (vezi § 5.7):

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, \quad (9.8)$$

care se numește **modul de rezistență axial**.

Deși relația lui Navier a fost dedusă și corespunde solicitării la încovoiere pură, se utilizează și la calculul tensiunilor normale la barele solicitate la încovoiere simplă.

Dacă axa de încovoiere nu este axă de simetrie, atunci se determină atât tensiunea maximă de întindere cât și cea maximă de compresiune,

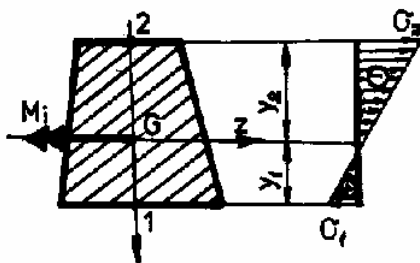


Fig. 9.2

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_{z1}} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = \frac{-M}{W_{z2}} \quad (9.9,a)$$

În relațiile de mai sus  $W_{z1}$  și  $W_{z2}$  sunt modulele de rezistență definite de relațiile (9.9,b), (fig.9.2).

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1} \quad \text{și} \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} \quad (9.9,b)$$

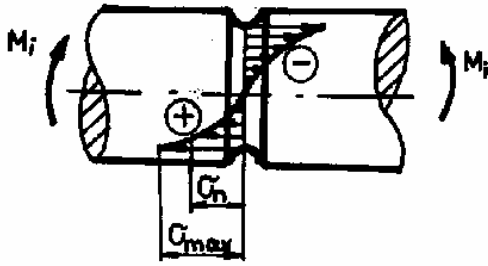


Fig. 9.3

### 9.3. Calculul de rezistență la încovoiere

Relațiile deduse mai sus se utilizează pentru rezolvarea problemelor de rezistența materialelor: de verificare, de calculul

capacității de încărcare și de dimensionare. Rezolvarea acestor probleme se face respectând condiția de rezistență

$\sigma_{\max} \leq \sigma_a$ . Relațiile pentru calculul de rezistență la încovoiere se deduc din relația (9.8) și sunt :

- de verificare :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{i\max}}{W_z} \leq \sigma_a, \quad (9.10)$$

- de calculul capacității de încărcare :

$$M_{icap} = W_{zef} \cdot \sigma_a, \quad (9.11)$$

- de dimensionare :

$$W_{znec} = \frac{M_{i\max}}{\sigma_a}. \quad (9.12)$$

Relațiile (9.10), (9.11) și (9.12) se aplică pentru secțiunea cea mai solicitată (secțiunea periculoasă). În cazul barelor (grinzilor) de secțiune constantă, aceasta corespunde cu secțiunea în care **momentul încovoiator este maxim în valoare absolută**. La barele (grinzile) cu variație de secțiune în trepte, se determină pe baza diagramei de momente încovoiatoare, pentru fiecare segment, câte o secțiune periculoasă pentru care se face apoi calculul de rezistență.

În secțiunea transversală a barei pot exista concentratori de tensiune, care modifică distribuția liniară a tensiunilor după cum este prezentat în figura 9.3.

În aceste cazuri relația (9.8) dă numai valoarea **tensiunii nominale**  $\sigma_n$ , iar valoarea tensiunii maxime este funcție și de un coeficient de concentrare a tensiunilor  $\alpha_k$  și se calculează cu relația:

$$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n = \alpha_k \cdot \frac{M_i}{I_z} \cdot y_{\max} \quad (9.13)$$

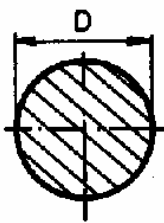

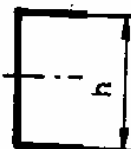
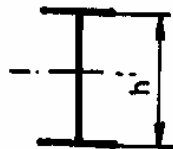
Valorile coeficienților de concentrare a tensiunilor sunt date în manualele ingineresti. Valorile acestor coeficienți sunt cu atât mai mari cu cât discontinuitățile geometrice sunt mai pronunțate. De efectul concentrării tensiunilor trebuie ținut seama cu precădere în cazul materialelor fragile.

#### 9.4. Forme raționale de secțiuni pentru încovoiere

O bară (grindă) rezistă cu atât mai bine, la solicitarea de încovoiere cu cât modulul de rezistență axial  $W_z$  este mai mare. Valoarea modulului de rezistență axial depinde nu numai de mărimea secțiunii ci și de forma ei. Forma secțiunii este cu atât mai rațională cu cât modulul de rezistență are o valoare mai mare pentru un consum de material cât mai mic.

Altfel spus, o secțiune este cu atât mai rațională cu cât raportul dintre modulul de rezistență axial și aria secțiunii este mai mare. În tab. 9.1 se dau valori ale acestui raport pentru câteva forme uzuale de secțiuni.

**Tabelul 9.1**

Forma secțiunii				
$W_z/A$	0,125 D	0,167 h	$\approx 0,26 h$	$\approx 0,3 h$

Din acest tabel rezultă că secțiunile profilelor laminate I și U, utilizate foarte mult la construcțiile metalice, sunt mult mai raționale decât secțiunile circulare și dreptunghiulare. În cazul acestor profile secțiunea este rațional utilizată întrucât majoritatea materialului se află acolo unde tensiunile au valori mari (fig. 9.4).

Aceste profile trebuiesc **solicitate de momente încovoietoare ce au direcția axei principale**, adică au  $M = M_z$  și  $I_z = I_1$  (fig. 9.4). În caz contrar (când momentul acționează după axa  $Oy$ ), întrucât momentul de inerție  $I_y = I_2 = (1/20..1/30) \cdot I_z$ , capacitatea de rezistență la încovoiere a profilului este minimă.

Secțiunile circulare și pătrate au module de rezistență axiale mai mici, deoarece se află mult material dispus în apropierea axei neutre, unde tensiunile normale sunt mici. Secțiunea circulară prezintă avantajul de a rezista la fel de bine în raport cu

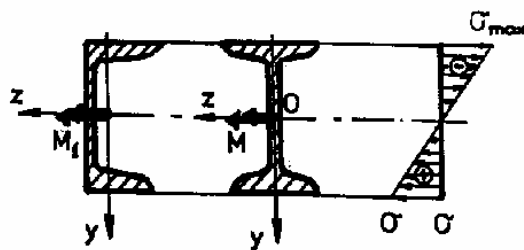


Fig. 9.4

orice axă centrală și de aceea **este utilizată în special la arbori de mașini**. În acest caz forțele își mențin poziția în spațiu, în schimb se rotește arborele, care trebuie să reziste la fel în orice poziție.

În cazul materialelor care rezistă mai bine la compresiune decât la întindere (ex. fonta) sunt mai raționale acele secțiuni care nu prezintă simetrie față de axa de încovoiere (exemplu secțiunea T, secțiunea trapezoidală fig. 9.5).

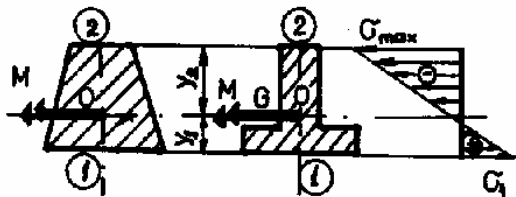


Fig. 9.5

Bara confecționată din materiale fragile trebuie astfel așezată încât tensiunile cele mai mari trebuie să fie la compresiune și nu la tracțiune. În acest caz trebuie îndeplinite atât condițiile de rezistență la tracțiune cât și cele la compresiune.



$$\sigma_1 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_1 \leq \sigma_{at}; \quad \sigma_2 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_2 \leq \sigma_{ac}. \quad (9.14)$$

Făcând raportul acestor două relații se obțin dimensiunile optime ale secțiunii:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ac}}. \quad (9.15)$$

**Aplicația 9.1** Pentru bara din figura 9.6, care poate fi realizată în 3 variante constructive, toate de aceeași greutate, se cere să se determine sarcina capabilă ce o poate suporta fiecare variantă, dacă tensiunea admisibilă este  $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$  și  $a = 40 \text{ mm}$ .

Pentru cele trei cazuri ariile secțiunilor sunt egale, iar modulele de rezistență axiale au valorile:

$$W_{z1} = \frac{a^3}{6}, \quad W_{z2} = \frac{a^3}{3},$$

$$W_{z3} = \frac{4}{5a} \cdot \left[ \frac{a}{12} \cdot \left( \frac{5a}{2} \right)^3 - \frac{3a}{4} \cdot \frac{(2a)^3}{12} \right] = \frac{77}{120} \cdot a^3.$$

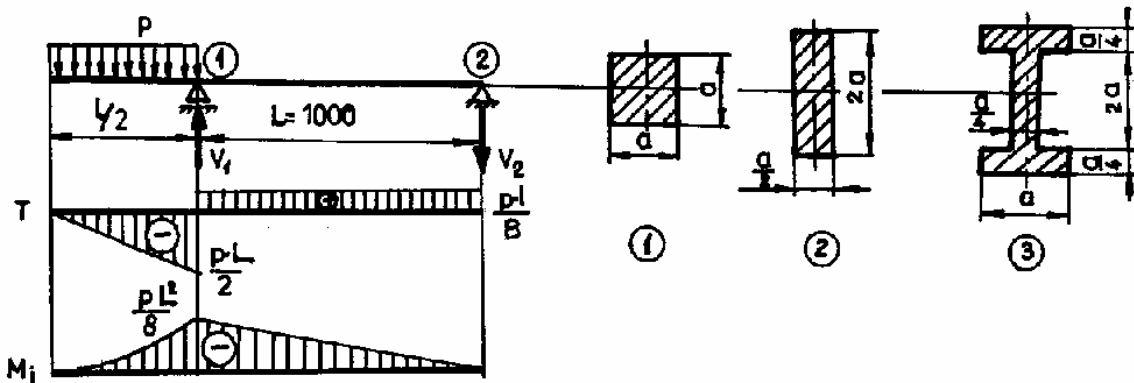


Fig. 9.6

Din condiția de rezistență:

$$M_{i\max} = \frac{p \cdot L^2}{8} = W_z \cdot \sigma_a,$$

rezultă valoarea forței pentru cele trei variante constructive:

$$p_{1\text{cap}} = \frac{8 \cdot a^3}{6L^2} \cdot \sigma_a = \frac{8 \cdot 40^3 \cdot 150}{6 \cdot 1000^2} = 12,8 \text{ N / mm} = 12,8 \text{ kN / m},$$

$$P_{2\text{cap}} = \frac{8a^3}{3L^2} \cdot \sigma_a = \frac{8 \cdot 40^3 \cdot 150}{3 \cdot 1000^2} = 25,6 \text{ N / mm} = 25,6 \text{ kN / m},$$

$$P_{3\text{cap}} = \frac{8 \cdot 77 \cdot a^3}{120 \cdot L^2} \cdot \sigma_a = \frac{8 \cdot 77 \cdot 40^3 \cdot 150}{120 \cdot 1000^2} = 49,28 \text{ N / mm} = 49,28 \text{ kN / m}.$$

Secțiunea corespunzătoare variantei a treia rezistă cel mai bine la solicitarea de încovoiere, varianta este de 3,85 ori mai rezistentă decât varianta întâi. Deci **alegând judicios forma secțiunii se pot obține reduceri importante de material.**

**Aplicația 9.2** Să se dimensioneze o bară din fontă cu  $\sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$  și  $\sigma_{ac} = 90 \text{ MPa}$ , de lungime  $l = 1300 \text{ mm}$  și având secțiunea în formă de T, cu  $t = \frac{b}{9}$ , solicitată de o forță  $P=24 \text{ kN}$ , (fig.9.7).

Rezolvare: În punctele 1 și respectiv 2 ale secțiunii tensiunea maximă va trebui să fie cel mult egală cu tensiunea admisibilă de întindere și respectiv cea de compresiune.

$$\sigma_1 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_1 \leq \sigma_{at}, \quad \sigma_2 = \frac{M_i}{I_z} \cdot y_2 \leq \sigma_{ac}.$$

Ordonatele  $y_1$  și  $y_2$  măsurate de la axa neutră (axa care trece prin centrul de greutate) rezultă din expresiile:

$$y_1 = \frac{b \cdot t \cdot \frac{t}{2} + h \cdot t \cdot \left(t + \frac{h}{2}\right)}{(b+h) \cdot t} = \frac{b \cdot t + 2h \cdot t + h^2}{a \cdot (b+h)} = \frac{b^2 + 2b \cdot h + 9h^2}{18 \cdot (b+h)},$$

$$y_2 = \frac{h \cdot t \cdot \frac{h}{2} + b \cdot t \cdot \left(h + \frac{t}{2}\right)}{(b+h) \cdot t} = \frac{h^2 + 2b \cdot h}{a \cdot (b+h)}$$

Din relația 9.15 se obține:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ac}} = \frac{y_1}{y_2} \quad \text{sau}$$

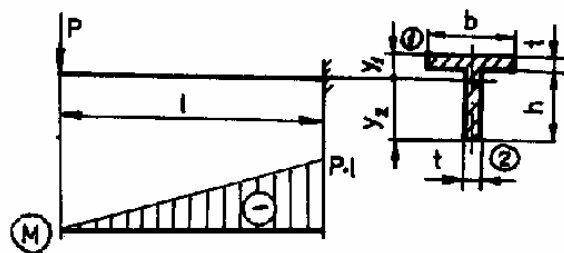


Fig. 9.7

$$\frac{b^2 + 2b \cdot h + 9h^2}{b^2 + 18b \cdot h + 9h^2} = \frac{1}{3}$$

Din această relație rezultă:

$$b^2 - 6bh + 9h^2 = 0, \text{ cu soluția}$$

compatibilă cu problema:  $b = 3h$ .

Cu această soluție

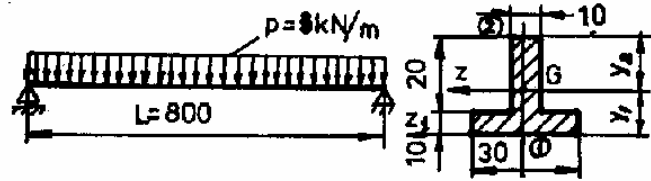


Fig. 9.8

dimensiunile secțiunii, exprimate în funcție de grosimea  $t$ , sunt următoarele:

$$b = 9t: \quad h = 3t: \quad y_1 = t: \quad y_2 = 3t.$$

Momentul de inerție al secțiunii este:

$$I_z = \frac{t \cdot (3t)^3}{12} + t \cdot (3t) \cdot \left(\frac{3t}{2}\right)^2 + \frac{(9t) \cdot t^3}{12} + t \cdot (9t) \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 12t^4$$

iar modulele de rezistență axiale sunt:

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1} = \frac{12 \cdot t^4}{t} = 12 \cdot t^3 \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} = \frac{12 \cdot t^4}{3t} = 4 \cdot t^3$$

Din condiția de rezistență la încovoiere  $M_{\max} = W_z \cdot \sigma_a$ , se obține grosimea:

$$t_{\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{12 \cdot \sigma_{\text{at}}}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 10^3 \cdot 1300}{12 \cdot 30}} = 44,25 \text{ mm}$$

Se adoptă:  $t = 45 \text{ mm}$ :  $b = 405 \text{ mm}$ :  $h = 135 \text{ mm}$ .

**Aplicația 9.3** Să se verifice bara din figura 9.8, confecționată din fontă, cu rezistența admisibilă la tracțiune  $\sigma_{\text{at}} = 75 \text{ MPa}$  și rezistența admisibilă la compresiune  $\sigma_{\text{ac}} = 140 \text{ MPa}$ . Poziția axei neutre față de baza inferioară este:

$$y_1 = y_g = \frac{300 \cdot 5 + 200 \cdot 20}{300 + 200} = 11 \text{ mm}, \quad \text{iar: } y_2 = 30 - 11 = 19 \text{ mm}.$$

Momentul de inerție axial rezultă:

$$I_z = \frac{3^4 - 2^4}{12} + 9 \cdot (1,5 - 1,1)^2 - 4 \cdot (1,9 - 1)^2 = 3,617 \text{ cm}^4,$$

iar modulele de rezistență axială sunt:

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_1} = \frac{3,617}{1,1} = 3,288 \text{ cm}^4, \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_2} = \frac{3,617}{1,9} = 1,904 \text{ cm}^4.$$

Prin calculul de verificare (comparare a tensiunilor extreme din punctele (1) și (2) cu ale tensiunilor admisibile), se obține:

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z1}} = \frac{p \cdot l^2}{8W_{z1}} = \frac{1 \cdot 800^2}{8 \cdot 3,288 \cdot 10^3} = 24,33 \text{ MPa} < \sigma_{at},$$

$$\sigma_{2\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z2}} = \frac{p \cdot l^2}{8W_{z2}} = \frac{1 \cdot 800^2}{8 \cdot 1,904 \cdot 10^3} = 42,02 \text{ MPa} < \sigma_{ac}.$$

Deci **bara rezistă**.

## 9.5. Tensiuni tangențiale în secțiunile (grinzilor) solicitate la încovoiere simplă

În secțiunea transversală a unei bare (grindă), solicitată la încovoiere simplă acționează eforturile: moment încovoiător și forță tăietoare. Bara simplu rezemată, încărcată cu forța transversală  $P$ , (fig. 9.9,a), este solicitată la încovoiere simplă. Din această bară se izolează un element de lungime  $dx$  (fig.9.9,b). În secțiunile transversale iau naștere eforturile  $T$ ,  $M$  și respectiv  $T$  și  $M+dM$ .

Se admite că secțiunea barei este simetrică față de axa  $Oy$  (fig. 9.9c) și constantă pe toată lungimea  $L$ . Bara este confecționată dintr-un material omogen și izotrop care satisface legea lui Hooke. Forța tăietoare este dirijată în lungul axei  $Oy$ .

Momentele încovoiătoare  $M$  și  $M + dM$  vor produce în cele două secțiuni tensiunile normale  $\sigma$ , respectiv  $\sigma + d\sigma$ , distribuția acestora pe secțiune este dată de relația lui Navier:

$$\sigma = \frac{M_i}{I_z} \cdot y, \text{ respectiv } \sigma + d\sigma = \frac{M_i + dM_i}{I_z} \cdot y, \quad (9.16)$$

și este prezentată în figura (9.9,d).

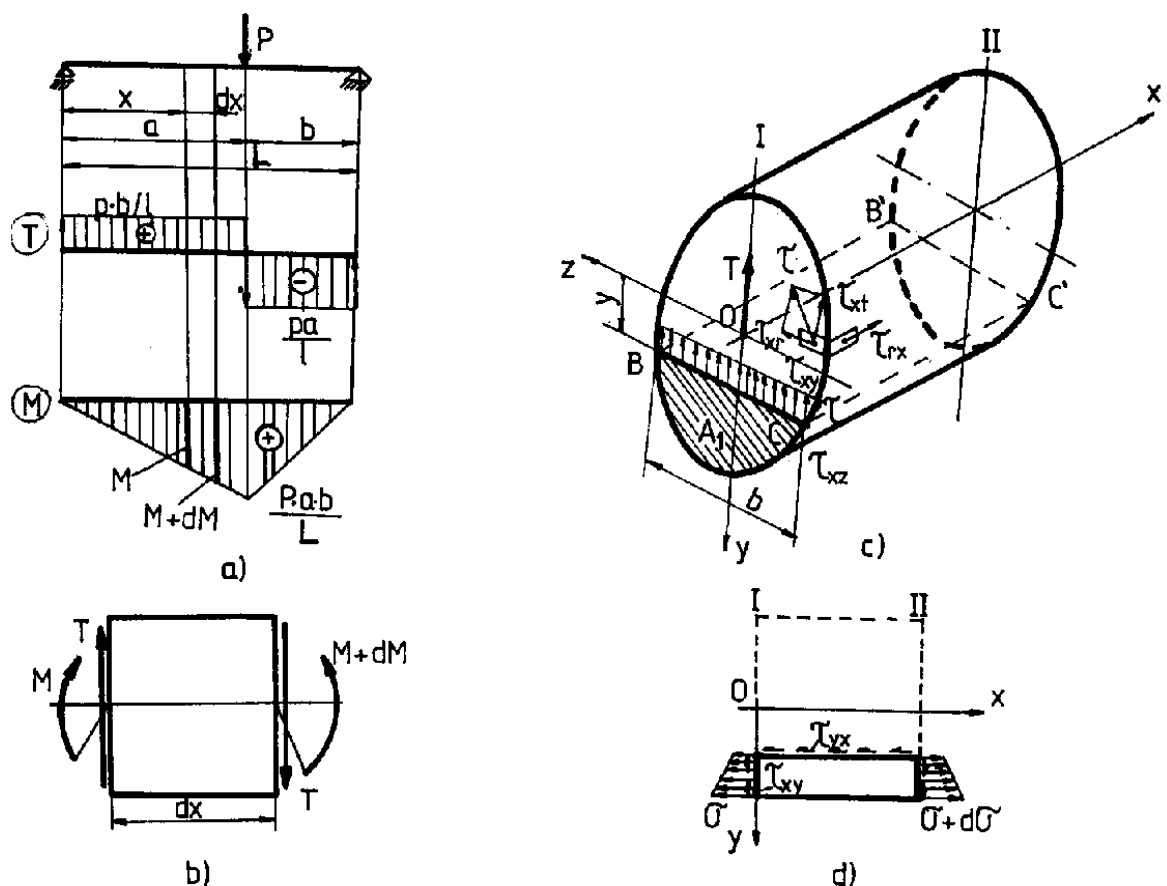


Fig. 9.9

Forța tăietoare  $T$  produce tensiuni tangențiale. Repartizarea acestora în secțiune nu se cunoaște încă. **Tensiunea tangențială, în dreptul punctelor de pe contur trebuie să fie tangentă la contur.** Dacă într-un punct de pe contur tensiunea tangențială  $\tau$  ar avea o direcție oarecare (fig. 9.9c), atunci acesta s-ar descompune în două componente: una  $\tau_{xt}$  tangentă la contur și alta  $\tau_{xr}$  normală la contur. Componentei  $\tau_{xr}$  ar trebui să-i corespundă, conform principiului dualității tensiunilor tangențiale, o tensiune  $\tau_{rx}$  situată pe suprafața exterioară a barei și orientată în lungul barei. Întrucât bara este solicitată la încovoiere simplă și nu se aplică barei astfel de forțe de frecare, longitudinale, rezultă că cele două componente  $\tau_{rx}$  și  $\tau_{xr}$  (de pe suprafața exterioară și din secțiunea transversală) sunt nule. Rezultă că tensiunea tangențială  $\tau$  este egală cu componenta  $\tau_{xt}$  ( $\tau = \tau_{nt}$ ), ceea ce înseamnă că în punctele din vecinătatea conturului există numai tensiuni tangențiale tangente la contur.

Considerăm o linie BC paralelă cu axa de încovoiere Oz (situată la ordonata y de aceasta). Notăm cu  $A_1$  aria secțiunii transversale de sub linia BC. Lungimea segmentului BC se notează cu b. În punctele B și C tensiunile tangențiale  $\tau$  sunt tangente la contur și pot fi descompuse într-o componentă  $\tau_{xy}$  perpendiculară pe axa de încovoiere Oz și o componentă  $\tau_{xz}$  paralelă cu axa de încovoiere. Conform **ipotezei lui D.I. Juravski se admite că valorile componentei  $\tau_{xy}$  sunt egale în dreptul tuturor punctelor de pe linia BC.**

Se consideră un plan paralel cu axa barei, care conține segmentul  $BC = b$ . Acest plan (BCC'B') intersectează elementul  $dx$  după o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile  $b$  și  $dx$ . Pe partea de sub planul considerat ( sub ordonata y ) acționează atât tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$  cauzate de acțiunea forței tăietoare T, cât și tensiunile normale  $\sigma$  și  $\sigma+d\sigma$  cauzate de acțiunea momentului încovoiitor  $M$  în stânga și  $M+dM$  în dreapta.

Ecuatia de proiecții a eforturilor de pe elementul de sub planul BCC'B' pe axa Ox, este:

$$\int_{A_1} (\sigma + d\sigma) \cdot dA - \int_{A_1} \sigma \cdot dA - \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0$$

și ținând seama de relațiile (9.16), ecuația devine:

$$\int_{A_1} \frac{M_i + dM_i}{I_z} \cdot y \cdot dA - \int_{A_1} \frac{M_i}{I_z} \cdot y \cdot dA + \tau_{xy} \cdot b \cdot dx = 0,$$

valoarea tensiunii tangențiale este:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b \cdot I_z} \cdot \frac{dM_i}{dx} \cdot \int_{A_1} y \cdot dA.$$

Ținând seama că  $\frac{dM}{dx} = T$  este forța tăietoare din secțiune și  $\int_{A_1} y \cdot dA = S_z$  este

**momentul static al suprafeței  $A_1$ , ( de sub linia BC) față de axa Oz, se obține:**

$$\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z}, \quad (9.17)$$

relație cunoscută sub numele de **formula lui Juravski.**

Din formula lui Juravski rezultă că, valoarea tensiunii tangențiale dintr-o anumită secțiune transversală depinde de valoarea raportului  $S_z/b$ , ceea ce înseamnă că  $\tau_{xy}$  este o funcție de ordonata  $y$ . Pe marginea inferioară și superioară a secțiunii aceste tensiuni sunt nule pentru că  $A_1 = 0$ .

## 9.6. Variația tensiunilor tangențiale la diferite secțiuni

### a) Secțiunea dreptunghiulară.

În acest caz lățimea  $b$  este constantă pe înălțimea secțiunii. Mărimile din formula lui Juravski au valorile:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad A_1 = \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b;$$

$$e = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y\right);$$

$$S_z = A_1 \cdot e = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad (9.18)$$

Înlocuind aceste mărimi în relația (9.17), se obține:

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot I_z} = \frac{T \cdot \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{b \cdot h} \cdot \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{A} \cdot \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right) \quad (9.19)$$

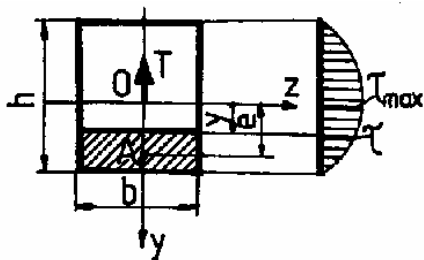


Fig. 9.10

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{2A}. \quad (9.20)$$

unde s-a notat cu  $A = b \cdot h$  aria secțiunii transversale.

Relația (9.19) arată că tensiunile tangențiale variază parabolic pe înălțimea secțiunii. Tensiunea tangențială maximă rezultă în dreptul axei neutre, pentru  $y = 0$  și are valoarea:

Deci, valoarea maximă a tensiunii tangențiale, în cazul forfecării barelor de secțiune dreptunghiulară, este cu 50% mai mare decât valoarea obținută prin calcul convențional la forfecare. (vezi § 7).

### b) Secțiune circulară.

Se consideră o secțiune circulară de diametru  $d$  (fig 9.11). Pentru calculul momentului static, se consideră un element de arie  $dA$ , de lățime  $b$  și înălțimea  $dy$ , aflat la ordonata  $y$ .

Lățimea BC a secțiunii  $A_1$  este:

$$b = 2 \frac{d}{2} \cdot \sin \alpha = d \cdot \sin \alpha,$$

iar ordonata  $y = \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha,$

astfel că

$$dy = -\frac{d}{2} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Aria elementară rezultă:

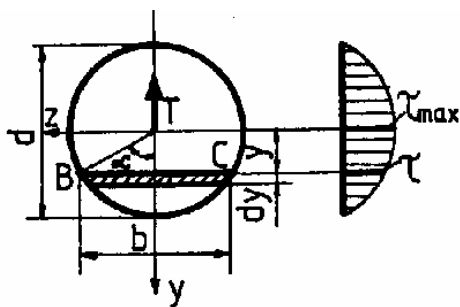


Fig. 9.11

$$dA = b \cdot dy = -\frac{d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha.$$

Momentul static al secțiunii  $A_1$ , de sub ordonata  $y$  va fi :

$$S_z = \int_{A_1} y \cdot dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha \cdot \left(-\frac{d^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha\right) \cdot d\alpha = \frac{d^3}{12} \cdot \text{si}$$

Ținând seama că:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}; \quad I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}; \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4 \cdot y^2}{d^2},$$

rezultă valoarea tensiunii tangențiale:



$$\tau = \frac{T \cdot \frac{d^3}{3} \cdot \sin^3 \alpha}{d \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d^4}{64}} = \frac{16 \sin^2 \alpha}{3d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right). \quad (9.21)$$

Valoarea tensiunii tangențiale maxime se obține ca și pentru secțiunea dreptunghiulară pentru  $y = 0$  și are valoarea:

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{A}. \quad (9.22)$$

Relația (9.21) ne arată că tensiunile tangențiale variază tot parabolic ca în cazul secțiunii dreptunghiulare.

### 9.7. Distribuția tensiunilor tangențiale $\tau_{xz}$

Așa cum s-a văzut la punctul 9.5 tensiunea  $\tau$  poate avea două componente:  $\tau_{xy}$  și  $\tau_{xz}$ . Variația tensiunilor tangențiale  $\tau_{xy}$  s-a analizat, iar pentru câteva secțiuni uzuale s-a stabilit și distribuția acestora în cadrul § 9.6.

Pentru studiul componentei  $\tau_{xz}$  se i-a elementul de bară de lungime  $dx$ , cu secțiunea din figura (9.12,a), ce este izolat într-o bară sollicitată la încovoiere simplă. Prin secțiunea longitudinală 1-1 figura (9.12,a), se separă elementul  $11'2'2'$  de lungime  $dx$ , figura (9.12,b), din talpa inferioară, sollicitată la încovoiere simplă:  $T$  și  $M$  fiind pozitive.

Pe fața 1-2, de dimensiuni  $t$  și  $z$ , rezultanta tensiunilor normale  $\sigma = \frac{M}{I_z} \cdot y$  va

$$\text{fi: } \mathbf{X} = \int \sigma \cdot d\mathbf{A} = \frac{M}{I_z} \cdot \int y \cdot d\mathbf{A} = \frac{M}{I_z} \cdot S'_z, \quad (9.23)$$

unde  $S'_z$ , reprezintă momentul static al ariei hașurate, ( fig. 9.12a) față de axa de încovoiere și are expresia :

**Fig. 9.12**

$$S'_z = t \cdot z \cdot \frac{h_m}{2} = \frac{t \cdot h_m}{2} \cdot z. \quad (9.24)$$

Pe fața 1'2', conform celor precizate la demonstrarea relației lui Juravski, se obține :

$$\mathbf{X} + d\mathbf{X} = \int_{A_1} \frac{M + dM}{I_z} \cdot y \cdot d\mathbf{A} = \frac{M}{I_z} \cdot S'_z + \frac{dM}{I_z} \cdot S'_z. \quad (9.25)$$

Pe fața 1221 acționează tensiunile tangențiale  $\tau_{xz}$  considerate constante la aceeași coordonată  $z$ , pe grosimea  $t$ . Conform dualității tensiunilor tangențiale pe fața 111'1' vor acționa tensiunile tangențiale  $\tau_{zx}$ , constante pe întreaga suprafață  $t \cdot dx$  (fig.9.12,b). Din ecuația de echilibru a acestui element față de axa Ox rezultă:

$$\mathbf{X} + \tau_{zx} \cdot t \cdot dx - (\mathbf{X} + d\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

și ținând seama de relațiile (9.23) și (9.25) se obține relația lui Juravski pentru tensiunile  $\tau_{xz}$ :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}'_z}{t \cdot \mathbf{I}_z} \quad (9.26)$$

Dacă în relația (9.26) se introduce expresia momentului static al unei porțiuni din talpă de lățime  $z$ , dată de relația (9.24), rezultă expresia:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{h}_m}{2\mathbf{I}_z} \cdot z, \quad (9.27)$$

valabil pentru  $z \in [0, b]$ , care arată că tensiunile  $\tau_{xz}$  variază liniar. Sensul acestor tensiuni este cel indicat în figura (9.12,a), unde semnul (+) s-a adoptat pentru  $\tau_{xz}$  orientat în sensul axei Oz. Pentru stabilirea semnelor trebuie reținută regula că sensul lui  $\tau_{xz}$  și  $\tau_{xy}$  este cel al curgerii unui fluid printr-o conductă. Cum sensul lui  $\tau_{xz}$  pe inimă coincide cu sensul lui  $\mathbf{T}_z$ , sensurile tensiunilor  $\tau_{xz}$  converg către inimă pe una din talpi (cea inferioară) și diverg pe cealaltă (cea superioară).

Valoarea cea mai mare,

$$\tau_{xz}^{\max} = \frac{\mathbf{T}^z \cdot \mathbf{h}_1 \cdot b}{2\mathbf{I}_z} \quad (9.28)$$

se obține la marginea inimii (pe linia 33 în figura 9.12,a).

**Remarcă.** Pe grosimea inimii nu pot să apară tensiuni  $\tau_{xz}$ , deoarece pe elementul  $d\mathbf{x}$  având una din fețe formată dintr-o secțiune longitudinală pe toată înălțimea profilului, rezultanta eforturilor normale  $\mathbf{Y}$  este nulă și deci nu există tensiuni de alunecare  $\tau_{zx}$ .

## 9.8. Distribuția tensiunilor $\tau$ la un profil cu o singura axa de simetrie.

### Centrul de încovoiere-torsiune

Pentru exemplificare se prezintă profilul din figura (9.13,a). În mod similar ca la profilul **I**, distribuția tensiunilor  $\tau_{xy}$  se considera numai pe inima și are aliura din figura (9.13,b). Valorile determinate cu relația (9.17) sunt:

$$\tau_{xy}^{Bt} = \tau_{xy}^{Ct} = \frac{T \cdot S_z^B}{b_t \cdot I_z} = \frac{T \cdot S_z^B}{B \cdot I_z}, \quad (9.29)$$

$$\tau_{xy}^{Bi} = \tau_{xy}^{Ci} = \frac{T \cdot S_z^B}{b_i \cdot I_z} = \frac{T \cdot S_z^B}{g \cdot I_z}, \quad (9.30)$$

$$\tau_{xy}^{\max} = \tau_{xy}^G = \frac{T \cdot S_z^G}{b_t \cdot I_z} = \frac{T \cdot S_z^G}{g \cdot I_z}. \quad (9.31)$$

Tensiunile  $\tau_{xz}$  apar numai pe tălpi, până la contactul acestora cu inima profilului și au variații liniare. Valoarea maximă a acestora determinată cu relația (9.26) și va fi:

$$\tau_{xz}^{\max} = \frac{T \cdot S_z'}{t \cdot I_z}. \quad (9.32)$$

Sensurile tensiunilor  $\tau_{xy}$  și  $\tau_{xz}$  sunt arătate în figura (9.13,a). Rezultanta forțelor elementare date de tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$  se aplică pe linia mediană a inimii profilului, iar rezultantele forțelor elementare date de tensiunile tangențiale  $\tau_{xz}$  se reduc la două forțe **H**, egale și de sens contrar, ce formează un cuplu, aplicate pe liniile mediane ale tălpilor (fig.9.13,c).

Cele trei forțe se află în același plan și au o rezultantă **R<sub>T</sub>**, al cărui punct de aplicație **I**, se află pe axa de simetrie Oz. Distanța dintre **I** și rezultanta tensiunilor tangențiale  $\tau_{xy}$ , pe linia mediană a inimii, care determină poziția **centrului de încovoiere sau a centrului de încovoiere-răsucire I**. Se notează cu “a” distanța de la centrul de încovoiere-răsucire I și marginea profilului (figura 9.13) și se determină

din ecuația de momente față de I. Scriind momentele forțelor  $R_T$  și  $H$  față de centrul de încovoiere-răsucire I, care trebuie să fie nule :

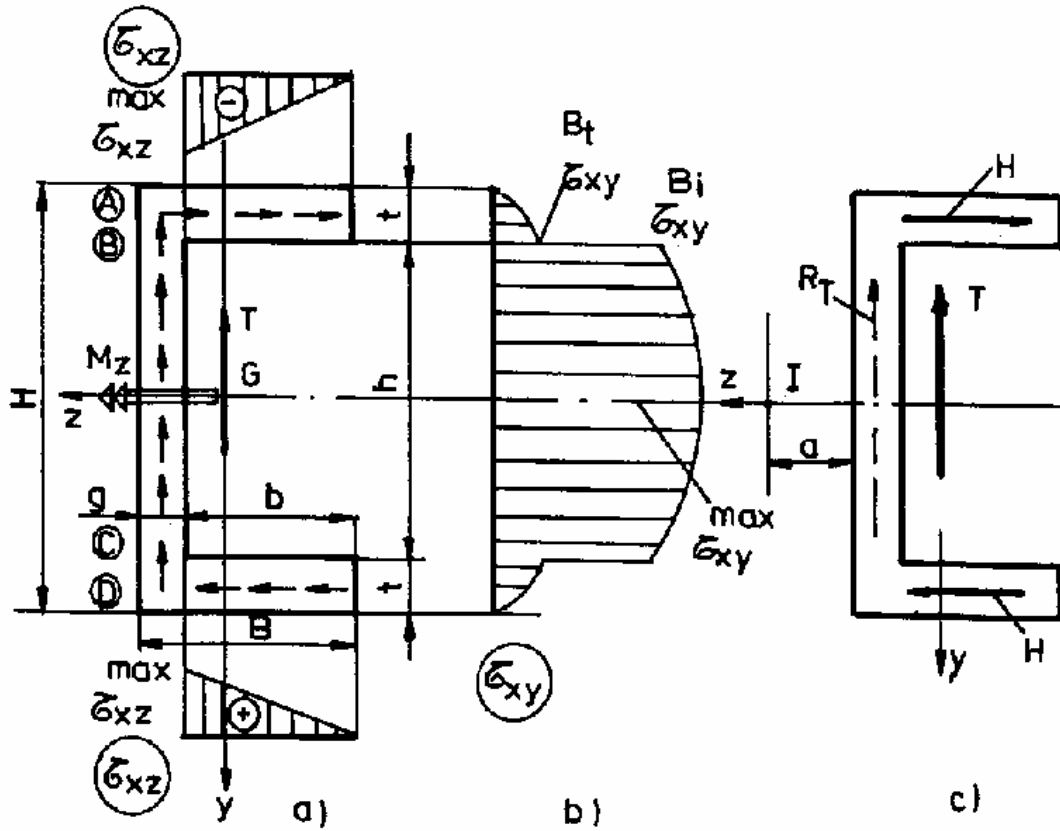


Fig. 9.13

$$T \cdot \left( a + \frac{g}{2} \right) = H \cdot h_m, \quad (9.33)$$

obținem distanța pînă la centrul de încovoiere I:

$$a = \frac{H}{T} \cdot h_m - \frac{g}{2}. \quad (9.34)$$

Folosind relația (9.26) și introducând valoarea rezultantei H:

$$H = \frac{\tau_{xz}^{max}}{2} \cdot b \cdot t, \quad (9.35)$$

se obține poziția centrului de încovoiere-răsucire :

$$a = \frac{\tau_{xz}^{\max} \cdot t \cdot b}{2 \cdot T} - \frac{g}{2}. \quad (9.36)$$

Punctul **I** din planul secțiunii transversale în care se aplică rezultanta forțelor elementare tangențiale **T** din secțiune este denumit **centrul de încovoiere-răsucire** sau **centrul de încovoiere**.

Se observă că atunci când forțele exterioare **F** trec prin centrul de greutate al secțiunii,  $R_T$  nu are același suport cu **T** și deci secțiunea este sollicitată suplimentar și la răsucire, de momentul dat de  $R_T$  față de centrul de greutate **G**.

Pentru ca secțiunea să fie sollicitată numai la încovoiere, trebuie ca forțele exterioare **F** să se găsească într-un plan longitudinal care să conțină și punctul **I** (centrul de încovoiere-răsucire). În acest caz  $R_T$  și **T** sunt echilibrate deoarece au același suport și sunt egale. Denumirea de centru de încovoiere-răsucire urmărește să sugereze fie numai prezența încovoierii, fie absența răsucirii.

Un profil cornier cu aripi egale (fig.9.14,a) pentru a fi sollicitat numai la încovoiere, după axa  $Oz$ , trebuie ca forțele să fie paralele cu  $Oy$  și să treacă prin centrul de încovoiere-răsucire **I** care se afla la intersecția liniilor mediane ale tălpilor (tensiunile tangențiale  $\tau$  sunt paralele cu conturul și se reduc la două forțe care sunt

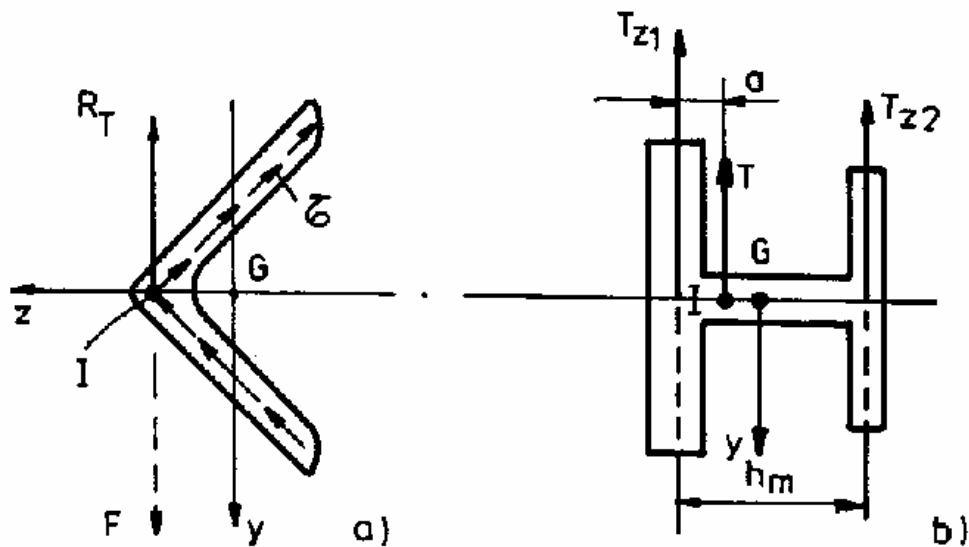


Fig.9.14

concurrente în **I**).

La profilul din figura (9.14,b), având axa de simetrie Oz, pentru a nu fi supus și la torsiune datorită eforturilor  $\tau$  produse de **T**, trebuie ca planul forțelor să conțină centrul de încovoiere-răsucire **I**. Deoarece tensiunile  $\tau_{xz}$  ce se dezvoltă pe înălțimea profilului se pot neglija, forțele tăietoare preluate de elementele **1** și **2** satisfac relația:

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}.$$

Pentru a determina valorile acestora se folosește condiția:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}_2},$$

care ține seama de relația (9.5) și care conduce la:

$$\frac{\mathbf{T}_1}{\mathbf{T}_2} = \frac{\mathbf{I}_{z1}}{\mathbf{I}_{z2}}.$$

Din cele două relații se stabilesc valorile **T**<sub>1</sub> și **T**<sub>2</sub> precum și punctul de aplicație al rezultantei lor care este centrul de încovoiere-răsucire **I** a cărei poziție este dată de relația:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{I}_{z2}}{\mathbf{I}_z} \cdot \mathbf{h}_m. \quad (9.37)$$

**Aplicația 9.4** Să se traseze diagramele de variație a tensiunilor tangențiale pentru secțiunea din figura 9.15.

Mărimile geometrice ale secțiunii necesare sunt :

$$\mathbf{I}_z = \frac{11 \cdot 16^3 - 10 \cdot 12^3}{12} = 2315 \text{ cm}^3,$$

$$\mathbf{S}_z^A = \mathbf{S}_z^D = 0,$$

$$\mathbf{S}_z^B = \mathbf{S}_z^C = 11 \cdot 2 \cdot 7 = 154 \text{ cm}^3,$$

$$\mathbf{S}_z^G = \mathbf{S}_z^B + 6 \cdot 1 \cdot 3 = 172 \text{ cm}^3.$$

Momentele statice ale tălpilor libere vor fi (cu indice s pentru talpa din stânga: cu indice d pentru talpa din dreapta):

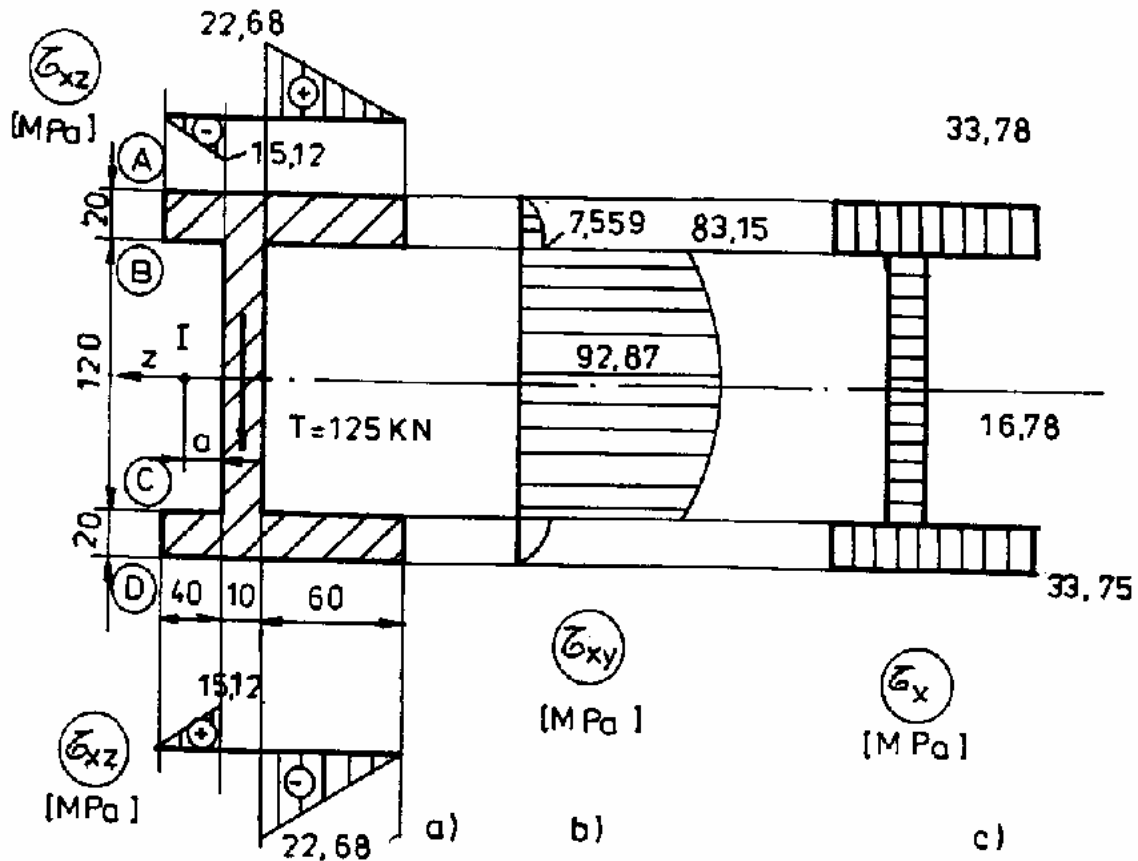


Fig. 9.15

$$S'_{zs} = 4 \cdot 2 \cdot 7 = 56 \text{ cm}^3,$$

$$S'_{zd} = 6 \cdot 2 \cdot 7 = 64 \text{ cm}^3.$$

Pentru solicitarea de răsucire, deoarece forța  $T$  nu trece prin centrul de încovoiere-răsucire  $I$ , folosind relațiile pentru caracteristicile geometrice de la profile cu pereți subțiri deschise se obține:

$$I_t^d = \frac{1}{3} \cdot \sum b \cdot t^3 = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 11 \cdot 2^3 + 12 \cdot 1^3) = 62,67 \text{ cm}^4,$$

$$W_t^d = \frac{I_t^d}{t_{\max}} = \frac{62,67}{2} = 31,33 \text{ cm}^3,$$

$$W_t^{di} = \frac{I_t^d}{t_i} = \frac{62,67}{1} = 62,67 \text{ cm}^3.$$

Utilizând relația (9.17) se determină tensiunile tangențiale  $\tau_{xy}$ :

$$\tau_{xy}^A = \tau_{xy}^D = 0,$$



$$\tau_{xy}^{Bt} = \tau_{xy}^{Ct} = \frac{T \cdot S_z^B}{b_i \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 154 \cdot 10^3}{110 \cdot 2315 \cdot 10^4} = 7,559 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy}^{Bi} = \tau_{xy}^{Ci} = \frac{T \cdot S_z^B}{b_i \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 154 \cdot 10^3}{10 \cdot 2315 \cdot 10^4} = 83,15 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy}^G = \frac{T \cdot S_z^G}{b_i \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 172 \cdot 10^3}{10 \cdot 2315 \cdot 10^4} = 92,87 \text{ MPa}.$$

Reprezentarea acestor tensiuni este dată în fig. 9.15,b.

Tensiunile tangențiale  $\tau_{xz}$  se determină cu relația (9.26) și vor fi :

$$\tau_{xz}^{\max s} = \frac{T \cdot S'_{zs}}{t \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 56 \cdot 10^3}{20 \cdot 2315 \cdot 10^4} = 15,12 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xz}^{\max d} = \frac{T \cdot S'_{z,d}}{t \cdot I_z} = \frac{125 \cdot 10^3 \cdot 84 \cdot 10^3}{20 \cdot 2315 \cdot 10^4} = 22,68 \text{ MPa}.$$

Variația acestei tensiuni precum și semnele lor convenționale sunt prezentate în figura (9.15,a).

Aceste tensiuni tangențiale se reduc în tălpile libere la forțele  $H_s$  și  $H_d$  care au valorile:

$$H_s = \frac{1}{2} \cdot \tau_{xz}^{\max s} \cdot A_{t,s} = \frac{1}{2} \cdot 15,12 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 10^3 = 6,048 \text{ kN},$$

$$H_d = \frac{1}{2} \cdot \tau_{xz}^{\max d} \cdot A_{t,s} = \frac{1}{2} \cdot 22,68 \cdot 20 \cdot 60 \cdot 10^3 = 13,61 \text{ kN}.$$

Din ecuația de momente față de centrul de încovoiere-răsucire  $I$  rezultă poziția acesteia:

$$T \cdot \left( a + \frac{g}{2} \right) = (H_d - H_s) \cdot h_m,$$

$$a = \frac{H_d - H_s}{T} \cdot h_m - \frac{g}{2} = \frac{13,61 - 6,048}{125} \cdot 140 - 5 = 3,47 \text{ mm}.$$

Momentul de torsiune ce soliciță secțiunea, din cauza forței tăietoare  $T$  care nu acționează în centrul de încovoiere-răsucire  $I$ , va fi:

$$M_t = T \cdot \left( a + \frac{b}{2} \right) = (H_d - H_s) \cdot h_m = 125 \cdot (3,47 + 5) \cdot 10^3 = 1,059 \text{ kNm},$$

iar tensiunile tangențiale produse de acest moment sunt:

$$\tau_t^{\max} = \frac{M_t}{W_t^d} = \frac{1,09 \cdot 10^3}{31,33 \cdot 10^3} = 33,78 \text{ MPa},$$

$$\tau_t^i = \frac{M_t}{W_t^d} = \frac{1,09 \cdot 10^3}{62,67 \cdot 10^3} = 16,89 \text{ MPa}.$$

Diagramele acestor tensiuni sunt redată în figura (9.15,c).

### 9.9. Lunecarea longitudinală și împiedicarea ei

Se consideră două bare identice suprapuse care au secțiunea transversală dreptunghiulară (fig 9.16,a). Ansamblul format din cele două bare simplu rezemate la

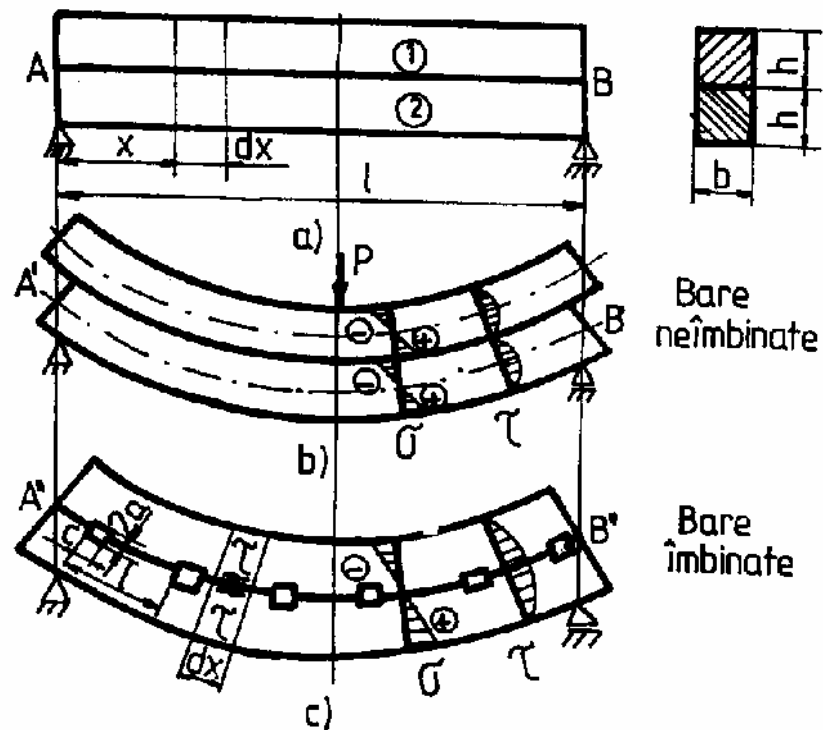


Fig. 9.16

capete se încarcă cu o forță transversală **P**. După cum barele sunt îmbinate sau nu (prin pene, nituri, șuruburi, etc) pot să apară două stări distincte de tensiune:

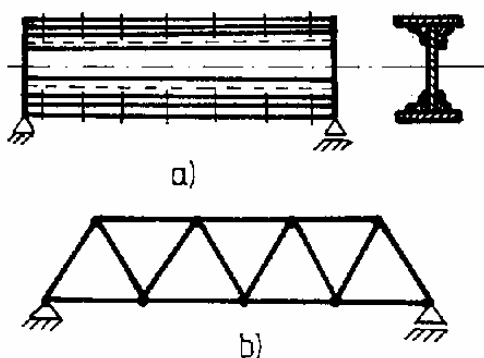
**a) Barele nu sunt îmbinate**, astfel că ele se deformează independent una față de cealaltă. Dacă forța de frecare, dintre cele două bare, este mică și se poate neglija, atunci cele două suprafețe în contact alunecă una față de cealaltă. Fenomenul se numește **lunecare longitudinală** și este cauzat de alungirea, prin încovoiere, a fibrelor de jos ale barei superioare 1 și scurtarea fibrelor de sus ale barei inferioare 2. Considerând că cele două bare se deformează identic, momentul încovoiator capabil al sistemelor de bare neîmbinate este:

$$M_{\text{cap}} = 2 \cdot \sigma_a \cdot W_z = \frac{b \cdot h^2}{3}.$$

**b) Barele sunt îmbinate**, astfel că ele lucrează ca o singură bară compusă solicitată la încovoiere. În acest caz îmbinările împiedică lunecarea longitudinală (fig .9.16,c). Bara compusă rigidizată este mai rezistentă decât ansamblul celor două bare nerigidizate și în acest caz momentul încovoiator capabil este:

$$M_{\text{cap}} = \sigma_a \cdot W_z = \sigma_a \cdot \frac{b \cdot (2h)^2}{6} = \sigma_a \frac{2b \cdot h^2}{3}.$$

Rezultă că, prin utilizarea barelor suprapuse, se evită lunecarea longitudinală împiedicată, se obțin bare mai rezistente. În tehnică se utilizează frecvent bare



**Fig. 9.17**

compuse (cu inima plină, realizate prin sudură, nituire, etc.). În funcție de mărimea momentului încovoiator, pentru construcțiile metalice se adoptă, de obicei, următoarele soluții:

- se utilizează profile laminate pentru momente încovoiatoare relativ mici (I sau [ ]):

- se utilizează bare compuse din platbenzi și profile laminate pentru valori intermediare ale momentului încovoiator (fig.9.17,a):

- se utilizează grinzi cu zăbrele pentru momente încovoietoare foarte mari (fig.9.17,b).

Calculul barelor cu secțiuni transversale compuse presupune rezolvarea a două probleme de rezistență:

a) Dimensionarea secțiunii barei numai la încovoiere pură, astfel ca bara compusă să reziste la momentul încovoiător maxim (de obicei se adoptă forma și dimensiunile secțiunii transversale și apoi se verifică).

b) Dimensionarea îmbinării dintre elementele compuse, astfel încât să se asigure rezistența îmbinărilor la lunecare longitudinală. Pentru a face calculul de rezistență al elementelor de îmbinare se consideră bara compusă din două elemente identice (fig.9.16). Lunecarea relativă a celor două elemente suprapuse, în planul AB, este datorată tensiunilor tangențiale, ce apar în acest plan. Forța produsă de tensiunile tangențiale  $\tau_{yx}$ , pe o distanță elementară  $dx$ , numită **forța de lunecare elementară** este:

$$dN_L = \tau_{yx} \cdot b \cdot dx,$$

unde:

$\tau_{yx}$  rezultă din relația lui Juravski (9.17), iar  $b$  este lățimea barei în planul de lunecare. Înlocuind valoarea lui  $\tau_{yx}$  se obține:

$$dN_L = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \cdot b \cdot dx = \frac{T \cdot S_z}{I_z} \cdot dx.$$

Pe o lungime L de bară, forța de lunecare este:

$$N_L = \int_L dN_L = \int_L \frac{T \cdot S_z}{I_z} \cdot dx. \quad (9.38)$$

Dacă bara are secțiunea constantă:

$$N_L = \frac{S_z}{I_z} \cdot \int_L T \cdot dx = \frac{S_z}{I_z} \cdot \Omega_T,$$

unde:

$$\Omega = \int_L T \cdot dx, \text{ este suprafața diagramei forței tăietoare de pe lungimea L.}$$

Pentru orice secțiune compusă din mai multe elemente se pune totdeauna problema luncării longitudinale și a împiedicării ei. La barele din lemn împiedicarea luncării longitudinale se poate realiza prin pene transversale (fig.9.16,c) sau prin încheiere. La barele metalice se pot realiza secțiuni compuse împiedicând luncarea

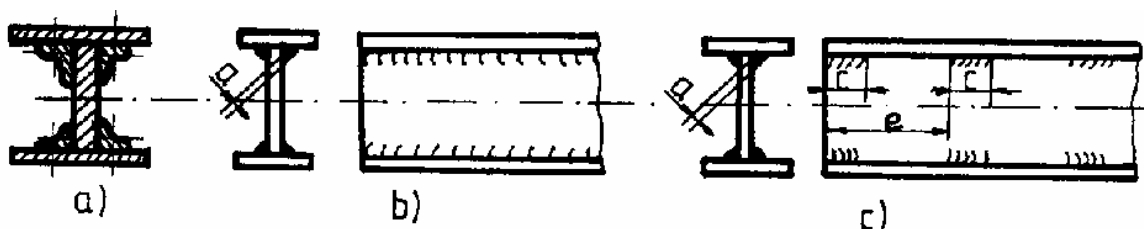


Fig. 9.18

longitudinală prin nituire, sudură sau prin șuruburi (fig. 9.18).

**Calculul de rezistență al îmbinărilor**, se face din condiția ca rezistența elementelor de îmbinare să fie mai mare sau cel mult egală cu forța de luncare longitudinală  $R_l \geq N_L$ , astfel:

a) Pentru îmbinări cu pene transversale (fig.9.16,c):

$$\tau_a \cdot b \cdot c \geq N_{Le}, \quad (9.39)$$

unde s-a notat cu:

- $\tau_a$  tensiunea admisibilă pentru materialul penelor:
- $c$  lățimea penelor utilizate la îmbinarea barelor:
- $b$  lățimea barei în secțiunea de luncare:
- $N_{Le}$  forța de luncare longitudinală corespunzătoare distanței  $e$  dintre două pene.

Din relația de sus se calculează pasul  $e$ , la care se vor monta penele (dacă au fost alese în prealabil dimensiunile acestora, sau lățimea penelor dacă s-a ales pasul  $e$ , în prealabil, cu ajutorul relației:

$$\tau_a \cdot b \cdot e \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int T \cdot dx. \quad (9.40)$$

b) Pentru cazul îmbinărilor cu șuruburi sau nituri (fig.9.17,a) relația (9.37) devine:

$$n \cdot \tau_a \cdot i \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int_L T \cdot dx, \quad (9.41)$$

relație din care se obține diametrul  $d$  (diametrul interior al șuruburilor sau diametrul niturilor dacă s-a ales pasul) sau se obține pasul la care se vor monta șuruburile, respectiv niturile dacă se alege în prealabil diametrul ( $n$ , este numărul de nituri din secțiunea considerată, iar  $i$  este numărul de planuri de forfecare pentru nituri sau șuruburi).

c) Pentru îmbinări sudate, relația de calcul este:

$$\tau_a \cdot i \cdot a \cdot L \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int_L T \cdot dx, \quad (9.42)$$

unde:

- $a$  este grosimea sudurii:
- $\tau_{as}$  este tensiunea admisibilă pentru cordonul de sudură:
- $i$  numărul de cordoane de sudură din secțiunea considerată.

Grosimea cordonului de sudură va fi:

$$a \geq \frac{S_z}{2\tau_{as} \cdot I_z \cdot L} \int_L T \cdot dx. \quad (9.43)$$

Pentru cazul în care grosimea cordonului de sudură rezultă mult mai mic decât grosimea sudurii standardizate (care este în funcție de grosimea minimă a platbandelor de sudat) se adoptă sudura pe porțiuni (fig.9.18.c) și relația (9.37)

devine: 
$$2\tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int_e T \cdot dx.$$

În această relație se înlocuiește  $a$  cu grosimea sudurii standardizate și se obține lungimea sudurii necesare  $L_{s nec}$ . Pasul  $e$  la care se execută: la lungimea sudurii calculată  $L_{s nec}$ , se adaugă de două ori grosimea sudurii, deoarece începutul și sfârșitul sudurii nu au aceleași caracteristici mecanice ca cele teoretice luate în calcul.

$$L_s = L_{s,nec} + 2a . \quad (9.45)$$

**Aplicația 9.15.** Să se determine sarcina maximă care poate să o suporte bara din fig.9.19, ținând seama numai de solicitarea de încovoiere dacă  $\sigma_a = 150$  MPa și să se dimensioneze sudura dacă  $\tau_{as} = 100$  MPa.

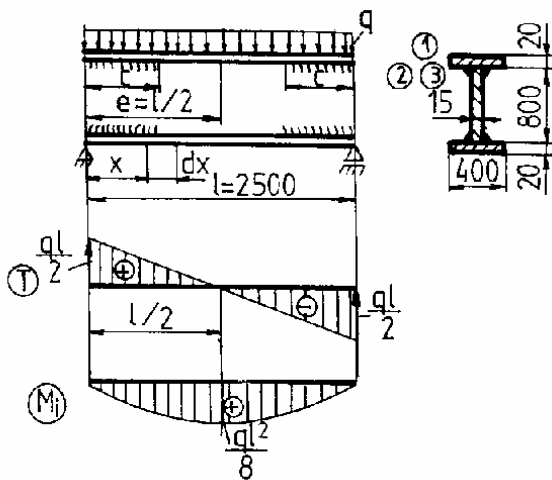
Momentul de inerție axial este:

$$I_z = \frac{40 \cdot 84^3}{12} - \frac{37,5 \cdot 80^3}{12} = 375680 \text{ cm}^4 \text{ iar modulul de rezistență axial:}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{375680}{42} = 8945 \text{ cm}^3 ,$$

Momentul static al unei tălpi care poate luneca va fi:

$$S_z = 40 \cdot 2 \cdot 41 = 3280 \text{ cm}^3 .$$



**Fig. 9.19**

Sarcina capabilă este:

$$q_{cap} = \frac{8W_z \cdot \sigma_a}{L^2} = \frac{8 \cdot 8945 \cdot 10^3 \cdot 150}{2500^2} = 1717 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Se adoptă:  $q = 1700$  kN/m.

Pentru calculul îmbinării sudate se aplică relația (9.37) și se obține:

$$a \geq \frac{S_z}{2I_z \cdot \pi \cdot \tau_{as} \cdot L} \cdot \int_L T_L \cdot dx = 2 \cdot \frac{S_z}{2I_z \cdot \tau_{as}} \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} q \cdot \left( \frac{L}{2} - \right.$$

$$= \frac{3280 \cdot 10^3 \cdot 1700 \cdot 2500}{275680 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 8} = 6,32 \text{ mm};$$

Deoarece grosimea cusăturii  $a$ , reieșită din calcul este mult mai mică decât cea corespunzătoare din STAS ( $a = 10$  mm) se adoptă  $a = 10$  mm și pasul  $e = 1250$  mm și se face calculul pentru sudura pe porțiuni (relația 9.30):

$$2\tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \int_e T \cdot dx,$$

$$2\tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_z}{I_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2},$$

iar lungimea sudurii va fi:

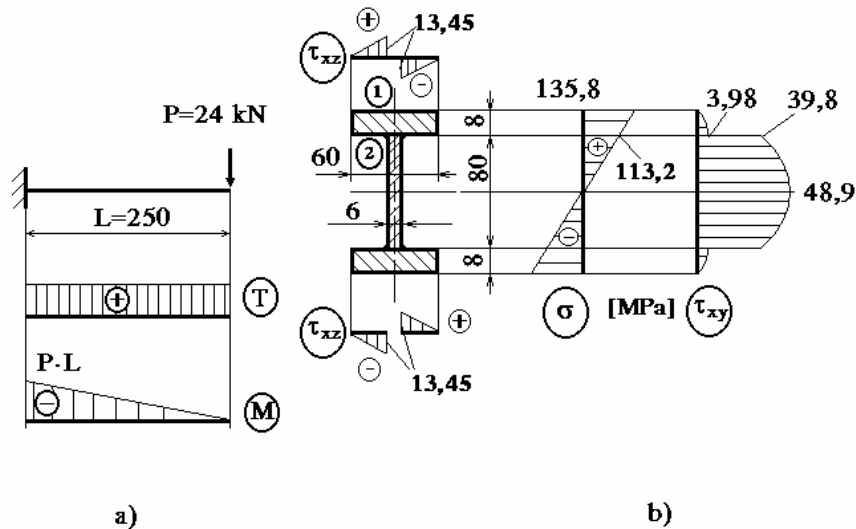
$$L_{s nec} \geq \frac{S_z}{2 \cdot \tau_{as} \cdot I_z} \cdot q \cdot \frac{L^2}{8} = \frac{3280 \cdot 10^3 \cdot 1700 \cdot 2500^2}{16 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 375680 \cdot 10^{49}} = 579,8 \text{ mm}.$$

Se adoptă sudura pe porțiuni cu pasul  $e = 1250 \text{ mm}$  și lungimea cusăturii  $L_s = L_{s nec} + 2a = 600 \text{ mm}$  (fig.9.19).

**Aplicația 9.6** Să se traseze diagramele de variație a tensiunilor în secțiunea periculoasă pentru bara din figura 9.20 și să se dimensioneze sudura știind că  $\tau_{as} = 80 \text{ MPa}$ .

Marimile geometrice ale secțiunii sunt:

$$I_z = \frac{6 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{5,4 \cdot 8^3}{12} = 212 \text{ cm}^4,$$



**Fig. 9.20**

$$W_z = \frac{I_z}{|y_{max}|} = \frac{212}{4,8} = 44,17 \text{ cm}^3,$$

$$S_{z1} = 0,$$



$$S_{z2} = S_{z3} = 6 \cdot 0,8 \cdot 4,4 = 21,12 \text{ cm}^3,$$

$$S_{zG} = S_{z3} + 4 \cdot 0,6 \cdot 2 = 25,92 \text{ cm}^3,$$

$$S'_z = 2,7 \cdot 0,8 \cdot 4,4 = 9,504 \text{ cm}^3.$$

Tensiunile pentru secțiunea din încastrare sunt:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{i,\max}}{W_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 250}{44,17 \cdot 10^3} = 135,8 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{M_{i,\max}}{I_z} \cdot y^2 = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 250}{212 \cdot 10^4} \cdot 40 = 113,2 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy1} = 0;$$

$$\tau_{2xy} = \frac{T \cdot S_{z2}}{b_2 \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 21,12 \cdot 10^3}{60 \cdot 212 \cdot 10^4} = 3,985 \text{ MPa};$$

$$\tau_{3xy} = \frac{T \cdot S_{z3}}{b_3 \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 21,12 \cdot 10^3}{6 \cdot 212 \cdot 10^4} = 39,85 \text{ MPa},$$

$$\tau_{Gxy} = \frac{T \cdot S_{zG}}{b \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 25,92 \cdot 10^3}{6 \cdot 212 \cdot 10^4} = 48,91 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy\max} = \frac{T \cdot S'_z}{b \cdot I_z} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 9,504 \cdot 10^3}{8 \cdot 212 \cdot 10^4} = 13,45 \text{ MPa}.$$

iar variația lor este redată în figura (9.20,b).

Dimensionarea sudurii se face cu relația (9.37) și se obține:

$$a \geq \frac{S_z}{2 \cdot I_z \cdot \tau_{as}} \cdot \int_1 T \cdot dx = \frac{T \cdot S_z}{2 \cdot I_z \cdot \tau_{as}} = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 21,12}{2 \cdot 212 \cdot 10^4 \cdot 80} = 1,494 \text{ mm}.$$

Deoarece grosimea sudurii este mult mai mică decât cea standardizată ( $a = 6 \text{ mm}$ ), se dimensionează sudura pe porțiuni alegând pasul  $e = L/2 = 125 \text{ mm}$ , cu relația (9.30):

$$2 \cdot \tau_{as} \cdot a \cdot L_s \geq \frac{S_{z2}}{I_z} \cdot \int_e T \cdot dx$$

sau

$$L_{\text{s nec}} \geq \frac{S_z \cdot \Omega_{T_c}}{2 \cdot \tau_{\text{as}} \cdot a \cdot I_z} = \frac{2,12 \cdot 10^3 \cdot 24 \cdot 10^3 \cdot 125}{2 \cdot 6 \cdot 80 \cdot 212 \cdot 10^4} = 31,13 \text{ mm}$$

Se adoptă  $L_s = L_{\text{s nec}} + 2a = 43 \text{ mm}$ .

Deci, pentru bara dată se fac două cusături la capete de  $L_s = 43 \text{ mm}$ .

## 9.10 Bare de egală rezistență solicitate la încovoiere simplă

În general barele se dimensionează la încovoiere pe baza momentului încovoiator maxim, utilizându-se bare prismatice (de secțiune constantă pe toată lungimea barei). Folosirea barelor prismatice (de secțiune constantă pe toată lungimea barei), se recomandă pentru încărcări complicate, cu multe sarcini pentru care rezultă o diagramă de momente cu mai multe valori extreme ce nu diferă mult între ele.

Dimensionarea rațională a barelor solicitate la încovoiere se face astfel ca tensiunea maximă din orice secțiune a barei să fie egală cu rezistența admisibilă. Astfel de bare poartă denumirea de **bare de egală rezistență la încovoiere**. Mai jos se analizează două exemple de asemenea bare.

### 9.10.1. Bare cu secțiunea circulară

Se consideră o bară simplu rezemată solicitată de o forță concentrată  $P$  (fig.9.21,a). Momentul încovoiator variază liniar având valoarea maximă în dreptul forței concentrate (fig.9.21,b), iar într-o secțiune oarecare este dat de relația:

$$M = \frac{P \cdot b}{L} \cdot x.$$

Din condiția de egală rezistență la încovoiere:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \sigma_a,$$

rezultă:

$$W_{z\text{ nec}} = \frac{M_i}{\sigma_a},$$

sau ținând seama de secțiunea circulară și de expresia momentului:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot P \cdot b \cdot x}{\pi \cdot \sigma_a \cdot L}}, \quad (9.46)$$

ceea ce ne dă legea de variație a diametrului în lungul barei, care este o variație după o curbă de gradul trei (fig.9.21.c) și care are diametrul maxim:

$$d_{\max} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot P \cdot a \cdot b}{\pi \cdot \sigma_a \cdot L}}. \quad (9.47)$$

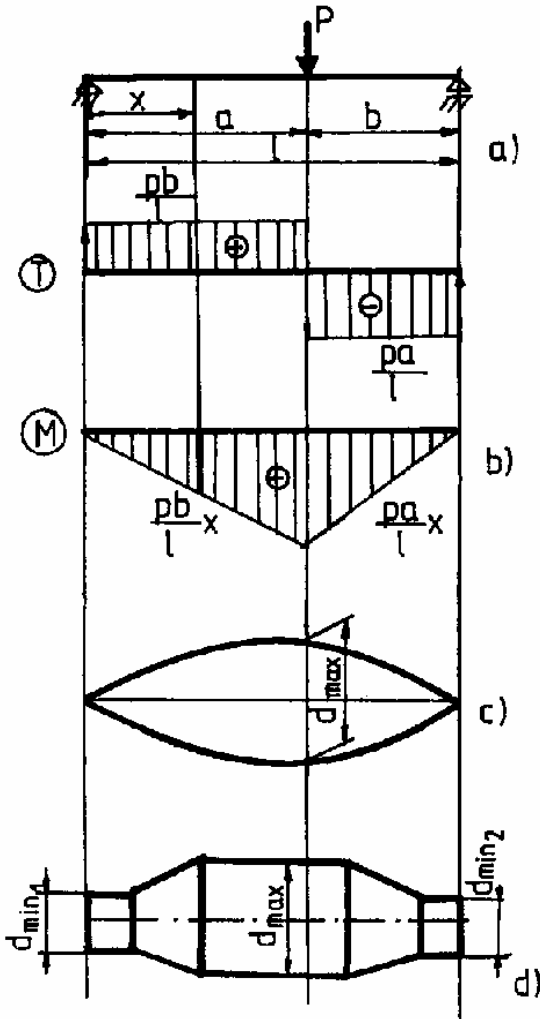


Fig. 9.21

În practică nu pot fi realizate astfel de bare (arbori) în condiții de eficiență și ca

atare se adoptă soluția barei cu mai multe tronsoane, de diametre diferite (fig.9.21,d).

Pentru calculul diametrelor minime necesare la capetele barei (care din legea de variație ar fi zero), se dimensionează la forfecare:

$$A_{\text{ nec}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{T}{\tau_a},$$

de unde rezultă:

$$d_{1\text{ nec}} = \sqrt{\frac{16 \cdot P \cdot b}{3\pi \cdot \tau_a \cdot L}}, \quad (9.48,a)$$

$$\text{și } d_{2\text{nec}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot P \cdot a}{3\pi \cdot \tau_a \cdot L}} \quad (9.48,b)$$

Pentru alte moduri de încărcare, legea de variație a diametrului barei este dată de relația:

$$\frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{M_i}{\sigma_a},$$

sau:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_i}{\pi \cdot \sigma_a}} \quad (9.49)$$

### 9.10.2. Bare de secțiune dreptunghiulară

Barele de secțiune dreptunghiulară de egală rezistență la încovoiere se execută menținând constantă una din dimensiunile secțiunii:

Se consideră o bară în consolă încărcată cu o sarcină P (fig.9.22,a). Momentul încovoiător într-o secțiune oarecare la abscisa x este:  $M = -P \cdot x$ . Modulul de

rezistență al secțiunii dreptunghiulare este:

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Punând condiția de egală rezistență pentru orice secțiune x:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_z} = \sigma_a,$$

se obține:  $\frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{M_i}{\sigma_a}$ .

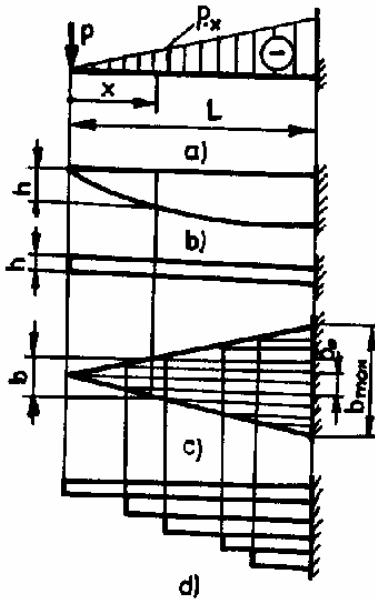


Fig. 9.22

Dacă se menține constantă lățimea  $b$ , atunci înălțimea  $h$ , a secțiunii rezultă din relația:

$$h = \sqrt{\frac{P \cdot x}{b \cdot \sigma_a}} \quad (9.50)$$

Deci, în acest caz bara trebuie să aibă înălțimea după o variație parabolică (fig.9.22.b).

Dacă se menține constantă înălțimea  $h$ , rezultă:

$$b = \frac{6 \cdot P \cdot x}{h^2 \cdot \sigma_a}, \quad (9.51)$$

iar bara trebuie să aibă lățimea variabilă liniar (formă triunghiulară, fig.9.22,c). În practică, o astfel de bară se realizează din fâșii de lățime  $b_0$  care se pun una peste alta, rezultând bara cunoscută sub numele de arcul în foi.

Lățimea  $b_0$  se calculează din condiția de rezistență la forfecare a capătului barei:

$$A_{nec} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{\tau_a} \quad \text{sau} \quad b_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{\tau_a \cdot h}$$

## 9.11. Încovoierea oblică

Solicitarea produsă de forțe care se află într-un plan longitudinal central, dar nu principal de inerție, se numește încovoiere oblică (fig.9.23).

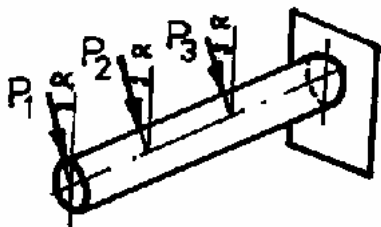


Fig. 9.23

Se consideră o secțiune transversală oarecare dintr-o bară (grindă) solicitată la încovoiere oblică și se raportează la axele ei principale de inerție  $Oy$  și  $Oz$  (fig.9.24). Momentul încovoiator poate fi reprezentat printr-un vector înclinat cu unghiul  $\alpha$  față de una din axele principale de inerție a secțiunii transversale.

În cazul încovoierii oblice este recomandabil să se traseze o singură diagramă de momente încovoietoare, cea corespunzătoare forțelor aplicate. Momentul încovoietor calculat formează același unghi  $\alpha$  cu o axa principală ca și planul forțelor cu cealaltă axă principală centrală de inerție.

Relația lui Navier nu poate fi aplicată direct deoarece momentul încovoietor este dirijat după o direcție oarecare și nu se realizează cea de a doua ecuație de echivalență (9.3). Ca urmare este necesară descompunerea momentului încovoietor în componente orientate în lungul axelor principale centrale de inerție.

$$M_z = M \cdot \cos \alpha \quad \text{și} \quad M_y = M \cdot \sin \alpha.$$

Relația lui Navier este aplicabilă față de aceste componente și în dreptul unui punct oarecare  $M$ , de coordonate  $y$  și  $z$ , de pe suprafața transversală a secțiunii, fiecare componentă a momentului încovoietor produce câte o tensiune normală:  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$ . Pentru momentul încovoietor admis în primul cadran al secțiunii transversale tensiunile sunt de semne contrare și anume:

$$\sigma' = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad \sigma'' = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z.$$

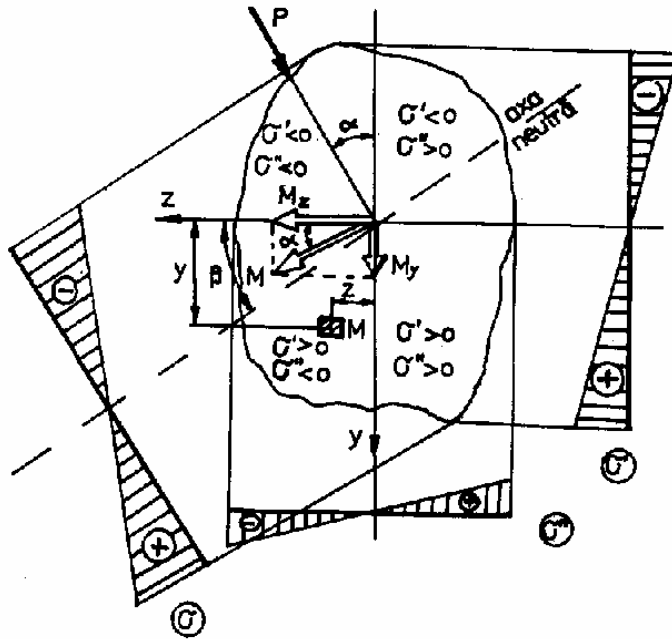


Fig. 9.24

În figura 9.24 se arată modul de distribuție al acestor tensiuni și se observă că în două cadrane tensiunile  $\sigma'$  și  $\sigma''$  au același semn, iar în celelalte două au semne contrare. Tensiunea totală din dreptul unui punct oarecare  $M$  se obține prin însumarea algebrică a tensiunilor:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

(9.52)

În funcție de semnul coordonatelor punctului M, componentele tensiunilor  $\sigma'$  și  $\sigma''$  vor rezulta pozitive sau negative. Punctul cel mai sollicitat se află în cadranul în care cele două componente au același semn. Prin anularea expresiei de sus se obține ecuația axei neutre:

$$\frac{M_z}{I_z} \cdot y - \frac{M_y}{I_y} \cdot z = 0. \quad (9.53)$$

Se observă că axa neutră este o dreaptă centrală înclinată față de axa Oz cu un unghi  $\beta$  dat de relația:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.54)$$

Axa neutră este o dreaptă ce este înclinată cu unghiul  $\beta$  față de axa Oz și de obicei nu coincide cu suportul vectorului moment. În caz particular, când  $I_z = I_y$ , atunci rezultă  $\beta = \alpha$  și deci axa neutră coincide cu suportul vectorului moment.

**Aplicația 9.7** Să se determine sarcina capabilă să o suporte o bară simplu rezemată, confecționată dintr-un profil I 20 (fig.9.25) dacă rezistența admisibilă a materialului este  $\sigma_a = 150$  MPa.

Rezolvare: Profilul este sollicitat la încovoiere oblică de un moment

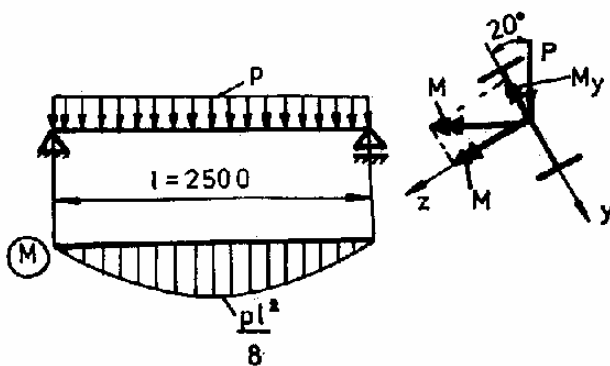


Fig. 9.25

încovoietor maxim  $M_{\max} = \frac{p \cdot L^2}{8}$ , ce

se descompune în lungul axelor centrale principale de inerție ale secțiunii în:

$$M_z = M_i \cdot \cos \alpha = \frac{p \cdot L^2}{8} \cdot \cos 20^\circ \quad \text{și}$$

$$M_y = M_i \cdot \sin \alpha = \frac{p \cdot L^2}{8} \cdot \sin 20^\circ.$$

Profilul rezistă dacă este îndeplinită condiția:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_a.$$

Înlocuind valorile momentelor cu expresiile de mai sus se obține:

$$\begin{aligned} p_{\text{cap}} &= \frac{8 \cdot \sigma_a \cdot W_z \cdot W_y}{L^2 \cdot (W_z \cdot \cos 20^\circ + W_y \cdot \sin 20^\circ)} = \\ &= \frac{8 \cdot 15 \cdot 214 \cdot 26 \cdot 10^6}{2500^2 \cdot (26 \cdot \cos 20^\circ + 214 \cdot \sin 20^\circ) \cdot 10^3} = 10,94 \text{ kN / m}, \end{aligned}$$

unde s-a înlocuit:  $W_z = 214 \text{ cm}^3$  și  $W_y = 26 \text{ cm}^3$  din anexa nr. 9.

Se adoptă  $p_{\text{cap}} = 11 \text{ kN / m}$ .

Deoarece s-a ales o valoare mai mare decât cea calculată se face calculul de verificare:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &\leq 1,05 \cdot \sigma_a, \\ \sigma_{\max} &= \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{p \cdot L^2 \cdot \cos 20^\circ}{8 \cdot W_z} + \frac{p \cdot L^2 \cdot \sin 20^\circ}{8 \cdot W_y} = \\ &= \frac{11 \cdot 2500^2}{8} \cdot \left( \frac{\cos 20^\circ}{214 \cdot 10^3} + \frac{\sin 20^\circ}{26 \cdot 10^3} \right) = 150,9 < 1,05 \cdot \sigma_a. \end{aligned}$$

deci valoarea adoptată este bună, bara rezistă.

## 9.12. Încovoierea strâmbă

Solicitarea de încovoiere produsă de forțe aplicate în plane longitudinale diferite se numește încovoiere strâmbă. În acest caz se determină momentele încovoiitoare  $M_z$  și  $M_y$ , după descompunerea forțelor aplicate, în componente situate în cele două plane principale de inerție ale barei (grinzii).

Pentru secțiunea (sau secțiunile periculoase) se face calculul de rezistență asemănător cu cel de la încovoierea oblică.



**Aplicația 9.8** Să se dimensioneze bara din figura 9.26 știind că  $\sigma_a = 150$  MPa.

Rezolvare: Se descompun forțele după direcțiile axelor  $Oy$  și  $Oz$  și se trasează diagramele de momente în cele două plane principale centrale de inerție  $M_z$  și  $M_y$ . Se observă că momentul încovoietor maxim este în încastrare, respectiv:

$$M_{i_{\max}} = \sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2} = \sqrt{2,419^2 + 3,45^2} = 4,213 \text{ kNm}.$$

Din condiția de rezistență:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{3 \cdot M_z}{2a^3} + \frac{3 \cdot M_y}{a^3} \leq \sigma_a$$

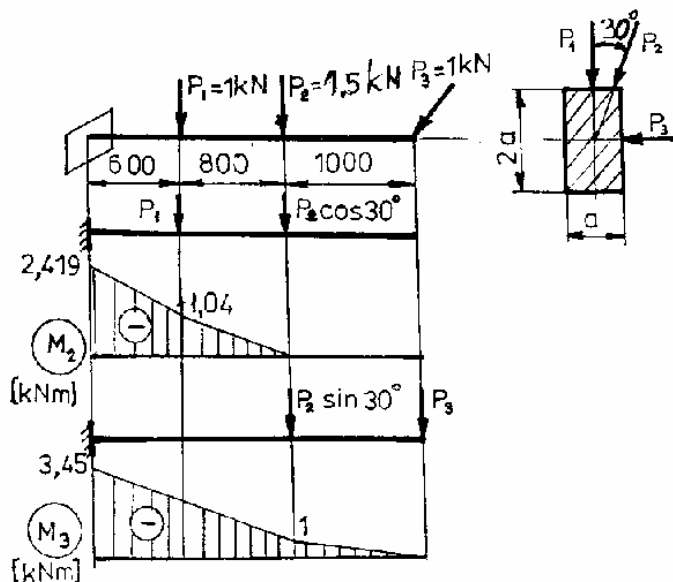
pentru că:

$$W_z = \frac{2a^3}{3} \quad \text{și} \quad W_y = \frac{a^3}{3}$$

iar:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3M_z + 6M_y}{2}} = \sqrt[3]{\frac{(3 \cdot 2,419 + 6 \cdot 3,45) \cdot 10^6}{2 \cdot 150}} = 45,34 \text{ mm}.$$

Se adoptă:  $a = 45$  mm.



**Fig .9.26**

## 9.13. Tensiuni în bare curbe plane

În cadrul acestui paragraf se vor studia deformațiile și tensiunile în bare curbe plane de mare curbura. În acest caz axa barei este conținută într-un plan și raza de curbura este mică. Se vor avea în vedere numai barele curbe plane, de curbura constantă (circulare) cu secțiunea simetrică față de planul forțelor. Sarcinile ce acționează asupra barei sunt conținute în planul de simetrie al secțiunii transversale a barei.

### 9.13.1 Tensiuni și deformații

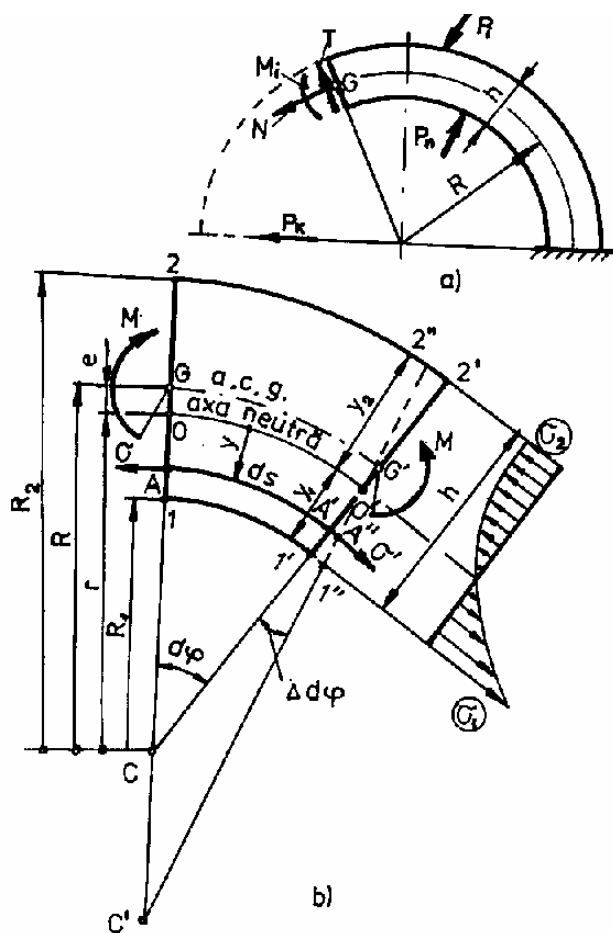


Fig. 9.27

În bara curbă plană, acționată de sarcini conținute în planul barei, se produc eforturile  $N$ ,  $T$  și  $M$  (fig. 9.27,a). Momentul încovoiător produce cele mai importante efecte (tensiuni și deformații), apoi forța normală. Tensiunile produse de forța tăietoare se pot calcula cu formula lui Jurawski:  $\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z}$ , și au distribuția studiată la încovoierea simplă. În cele mai multe cazuri tensiunile tangențiale maxime sunt mici în comparație cu cele normale și ca atare se neglijează.

Forța axială produce în

secțiunea barei tensiuni ce se consideră uniform repartizate și se determină cu formula:  $\sigma = \frac{N}{A}$ , cunoscută de la solicitări axiale.

Momentul încovoietor produce în secțiunea barei tensiuni normale. În cazul barelor de mică curbură, variația acestora nu diferă de cea dată de formula lui Navier (de la barele drepte). Totuși, când raza de curbură este mai mare de 5 ori față de înălțimea secțiunii transversale, diferența dintre tensiunile calculate cu formula lui Navier și cele calculate cu formula dedusă mai jos este mică. De aceea, când  $R > 5 \cdot h$  se admite că tensiunile normale au distribuția dată de formula lui Navier,  $\sigma = \frac{M_i}{I_z} \cdot y$ .

Dacă bara este de mare curbură ( $R < 5 \cdot h$ ) este necesar să se stabilească o nouă relație pentru tensiunile normale. În acest scop se consideră elementul de bară din figura (9.27,b). Pe acesta se definesc elementele geometrice specifice.

Sub acțiunea momentului încovoietor se admite valabilă ipoteza lui Bernoulli (a secțiunilor plane) și deci secțiunea plană  $1'2'$  se rotește cu unghiul  $\Delta d\varphi$  în nouă poziție, rămânând tot plană.

Din toate fibrele din planul axei barei numai fibra  $00'$  își păstrează lungimea inițială,  $ds = r \cdot d\varphi$ ; fibrele inferioare se alungesc, iar cele superioare se scurtează. Această fibră ( $00'$ ) se numește axa neutră. O fibră  $AA'$ , aflată la ordonata  $y$  în raport cu axa neutră se va alungi cu:

$$A'A'' = \Delta ds = y \cdot \Delta d\varphi.$$

Alungirea specifică a fibrei este:

$$\varepsilon = \frac{A'A''}{AA'} = \frac{y}{(r - y)} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$$

Tensiunea normală, în dreptul fibrei  $A'A''$ , conform legii lui Hooke va fi:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = \frac{y}{(r - y)} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot E. \quad (9.55)$$

Întrucât mărimile  $d\varphi$ ,  $\Delta d\varphi$  și  $E$  sunt constante (pentru secțiunea transversală și pentru material), din relația (9.55) rezultă că tensiunile normale variază hiperbolic pe înălțimea secțiunii.

În condiția când în secțiunea transversală acționează numai momentul înconvoietor (încovoiere pură), ecuațiile de echivalență pentru secțiunea din 0 și respectiv 0' sunt:

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0 \quad \text{și} \quad \int_A y \cdot (\sigma \cdot dA) = M. \quad (9.55,a)$$

Înlocuind pe  $\sigma$  din relația (9.55) în prima ecuație se obține:

$$\frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_A \frac{y \cdot dA}{r - y} = 0,$$

respectiv:

$$\int_A \frac{y \cdot dA}{(r - y)} = 0, \quad (9.56)$$

relație ce precizează poziția axei neutre.

Înlocuind pe  $\sigma$  în a doua relație (9.55,a) rezultă:

$$\begin{aligned} M &= \frac{E \cdot \Delta \cdot d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_A \frac{y^2 \cdot dA}{(r - y)} = \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \int_A \frac{y^2 - r \cdot y + r \cdot y}{r - y} \cdot dA = \\ &= \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \left( r \cdot \int_A \frac{y \cdot dA}{(r - y)} - \int_A y \cdot dA \right). \end{aligned}$$

Prima integrală, din paranteză este nulă conform relației (9.56) iar a doua este momentul static al întregii secțiuni față de axa neutră (axă normală în 0 pe 0y). Deci:

$$\int_A y \cdot dA = e \cdot A = S_z,$$

în care  $e = -y$ , este excentricitatea axei neutre 00' față de axa barei GG'.

Drept urmare:

$$M = \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot A \cdot e \quad \text{sau} \quad \frac{E \cdot \Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{A \cdot e}.$$

Ținând seama de aceasta în relația (9.55) se obține ecuația tensiunilor normale pentru barele de mare curbură solificate la încovoiere pură:

$$\sigma = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r - y}, \quad (9.57)$$

care este ecuația unei hiperbole.

Tensiunile maxime din fibrele extreme (1 -pe fibra interioară și 2 -pe fibra exterioară) rezultă prin particularizarea relației (9.57):  $y = y_1$ ,  $r - y = r - y_1 = R_1$  și respectiv  $y = -y_2$  și  $r - y = r + y_2 = R_2$  astfel că:

$$\sigma_1 = \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y_1}{R_1}, \quad \sigma_2 = -\frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y_2}{R_2}. \quad (9.58,a)$$

Dacă în secțiunea barei acționează atât momentul încovoiator cât și forța normală variația tensiunilor normale pe secțiune rezultă din suprapunerea efectelor date de relațiile (6.1) și (9.57), adică:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r - y}, \quad (9.58)$$

iar tensiunile extreme, din fibra interioară și exterioară, sunt date de relațiile:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y_1}{R_1}, \\ \sigma_2 &= \frac{N}{A} - \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y_2}{R_2}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

### 9.13.2. Poziția axei neutre

La barele curbe fibra neutră nu coincide cu axa barei, ci **totdeauna este către interiorul acesteia**, la distanța  $e$  de axa barei. Fibra neutră este definită prin raza  $r$ , sau prin excentricitatea  $e$ . Între raza de curbură a barei  $R$ , raza fibrei neutre  $r$  și excentricitatea  $e$ , există relația:

$$r = R - e \text{ sau } e = R - r. \quad (9.60)$$

Folosind schimbarea de variabilă  $v = r - y$ , respectiv  $y = r - v$  și înlocuind în relația (9.56) se obține:

$$\int_A \frac{y \cdot dA}{r - y} = \int \frac{r - v}{v} \cdot dA = r \cdot \int_A \frac{dA}{v} - \int_A dA = 0.$$

Din aceasta rezultă ecuația axei neutre:

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{v}}. \quad (9.61)$$

Pentru calculul razei  $r$  se ia un element de arie  $dA = b \cdot dy$  paralel cu axa  $Oz$ . Aria ce variază se exprimă funcție de mărimea  $v$ . Astfel pentru secțiunile din figura 9.28 se obțin formulele:

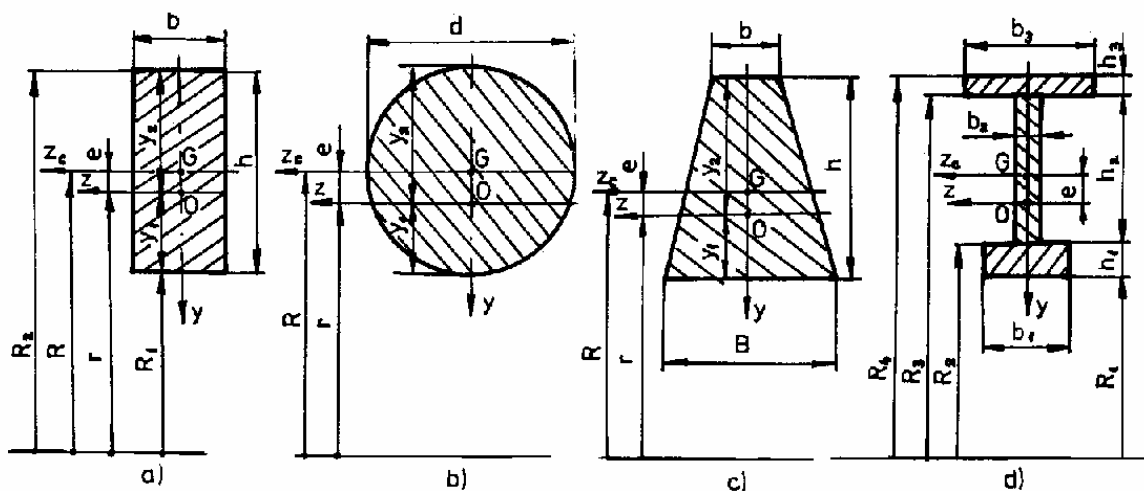


Fig.9.28

- pentru secțiunea dreptunghiulară:

$$r = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (9.62)$$

- pentru secțiunea circulară:

$$r = \frac{2R + \sqrt{4R^2 - d^2}}{4}, \quad (9.63)$$

- pentru secțiunea trapez isoscel:

$$r = \frac{h}{2} \cdot \frac{B - b}{(B \cdot R_2 - b \cdot R_1) \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} - (B - b) \cdot h} \quad (9.64)$$

- pentru secțiunea dublu T:

$$r = \frac{b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3}{b_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} + b_2 \cdot \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \cdot \ln \frac{R_4}{R_3}} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot h_i}{b_i \cdot \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}} \quad (9.65)$$

Se poate obține o formulă aproximativă pentru determinarea poziției axei neutre dacă se face o nouă schimbare de variabilă  $v = R - y_G$ , integrala de la numitor devine:

$$\int_A \frac{dA}{v} = \int_A \frac{dA}{R - y_G} = \frac{1}{R} \cdot \int_A \left( \frac{1}{1 - \frac{y_G}{R}} \right) \cdot dA,$$

în care  $y_G$  este ordonata unui punct al secțiunii față de axa centrală ce trece prin punctul G.

Dezvoltând în serie expresia de sub integrală vom obține:

$$\frac{1}{1 - \frac{y_G}{R}} = 1 + \frac{y_G}{R} + \left( \frac{y_G}{R} \right)^2 + \left( \frac{y_G}{R} \right)^3 + \dots$$

Dacă se iau primii termeni ai seriei, integrala devine:

$$\frac{1}{R} \cdot \int_A \frac{1}{1 + \frac{y_G}{R}} \cong \frac{1}{R} \cdot \int_A \left( 1 + \frac{y_G}{R} + \frac{y_G^2}{R^2} \right) \cdot dA = \frac{A}{R} + \frac{I_{zc}}{R^3}.$$

Termenul al doilea reprezintă momentul static al secțiunii față de axa centrală și este nul. Înlocuind în formula lui r, rezultă:

$$r \cong \frac{A}{\frac{A}{R} + \frac{I_{zc}}{R^3}} = \frac{A \cdot R^3}{A \cdot R^2 + I_{zc}}.$$

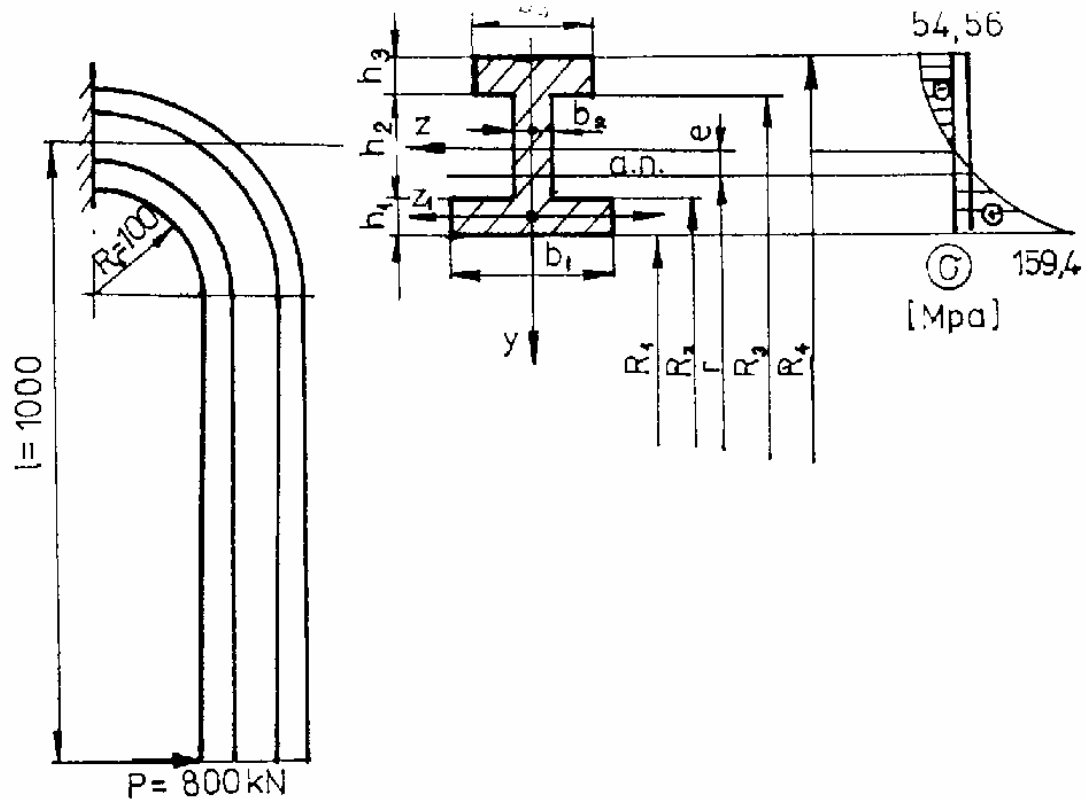
Excentricitatea axei neutre se obține:

$$e = R - r = R - \frac{A \cdot R^3}{A \cdot R^2 + I_{zc}} = \frac{R \cdot I_{zc}}{A \cdot R^2 + I_{zc}}$$

Întrucât valoarea momentului de inerție axial față de axa centrală  $I_{zc}$ , este neglijabil față de valoarea  $A \cdot R^2$ , expresia excentricității va fi:

$$e \approx \frac{I_{zc}}{A \cdot R} \quad (9.66)$$

**Aplicația 9.9** Să se traseze diagramele de variație a tensiunilor pentru secțiunea periculoasă a barei curbe din figura 9.29, dacă:  $h_1=150$  mm:  $h_2=200$  mm:



**Fig. 9.29**

$h_3=150$  mm:  $b_1=300$ mm:  $b_2=100$  mm:  $b_3=200$  mm.

Rezolvare: Din figură se obțin  $R_1 = 100$  mm:  $R_2 = 250$  mm:  $R_3 = 450$  mm:  
 $R_4=600$  mm.

Ordonata centrului de greutate este:



$$y_G = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{-20 \cdot 10 \cdot 17,5 - 20 \cdot 15 \cdot 35}{30 \cdot 15 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot 15} = -14,74 \text{ cm},$$

iar mărimile geometrice ale secțiunii sunt:

$$A = 30 \cdot 15 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot 15 = 950 \text{ cm}^2,$$

$$r = \frac{\sum_1^n b_i \cdot h_i}{\sum_i^n b_i \cdot \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}} = \frac{950}{30 \cdot \ln \frac{25}{10} + 10 \cdot \ln \frac{45}{25} + 20 \cdot \ln \frac{60}{45}} = 24,28 \text{ cm},$$

$$R = R_1 + y_G + 7,5 = 32,24 \text{ cm},$$

$$y_1 = r - R_1 = 24,28 - 10 = 14,28 \text{ cm},$$

$$y_2 = R_4 - r = 60 - 24,28 = 35,72 \text{ cm}.$$

Tensiunile în punctele extreme ale secțiunii periculoase sunt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y_1}{R_1} = \frac{800 \cdot 10^3}{950 \cdot 10^2} + \frac{800 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{950 \cdot 10^2 \cdot 79,6} \cdot \frac{142,8}{100} = \\ &= 8,42 + 151,1 = 159,5 \text{ MPa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y_2}{R_2} = \frac{800 \cdot 10^3}{950 \cdot 10^2} - \frac{800 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{950 \cdot 10^2 \cdot 79,6} \cdot \frac{357,2}{600} = \\ &= 8,42 - 52,98 = -54,56 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

iar variația acestora este dată în figura 9.29, trasate prin suprapunere de efecte.

**Aplicația 9.10** Să se determine forța capabilă să o suporte bara curbă din

figura 9.30 pentru  $R=300 \text{ mm}$  și  $\sigma_a=150 \text{ MPa}$ .

Rezolvare: Mărimile geometrice ale secțiunii

sunt:

$$A = 8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 40 \text{ cm}^2,$$

$$I_z = \frac{8 \cdot 6^3}{12} - \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 141,33 \text{ cm}^4,$$

$$e = \frac{I_z}{A \cdot R} = \frac{141,33}{40 \cdot 30} = 0,12 \text{ cm},$$

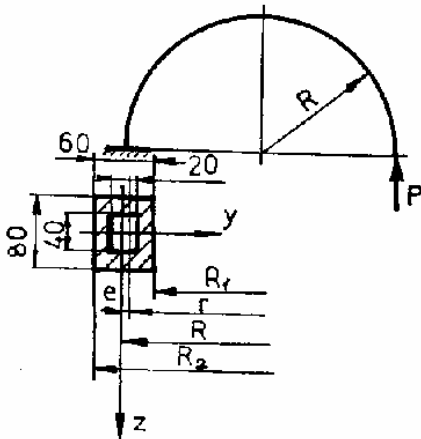


Fig. 9.30

$$r = R - e = 30 - 0,12 = 29,88 \text{ cm},$$

$$R_1 = R - 3 = 27 \text{ cm},$$

$$R_2 = R + 3 = 33 \text{ cm},$$

$$y_1 = r - R_1 = 29,88 - 27 = 2,88 \text{ cm}, \quad y_2 = R_2 - r = 33 - 29,88 = 3,12 \text{ cm}.$$

Din relația:

$$\sigma_a \geq \frac{N}{A} + \frac{M_i}{A \cdot e} \cdot \frac{y_1}{R_1} = \frac{P}{A} + \frac{2P \cdot R}{A \cdot e} \cdot \frac{y_1}{R_1},$$

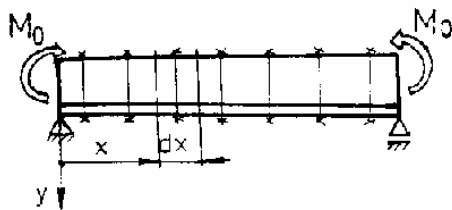
se obține sarcina capabilă :

$$P_{\text{cap}} = \frac{\sigma_a}{\frac{1}{A} + \frac{2R \cdot y_1}{A \cdot e \cdot R_1}} = \frac{\sigma_a \cdot A \cdot e \cdot R_1}{e \cdot R_1 + 2R \cdot y_1} = \frac{150 \cdot 40 \cdot 10^2 \cdot 1,2 \cdot 270}{1,2 \cdot 270 + 2 \cdot 300 \cdot 28,8} = 1,104 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

**Se aoptă:  $P_{\text{cap}} = 11 \text{ kN}$ .**

## 9.14. Încovoierea barelor (grinzilor) de secțiune neomogenă

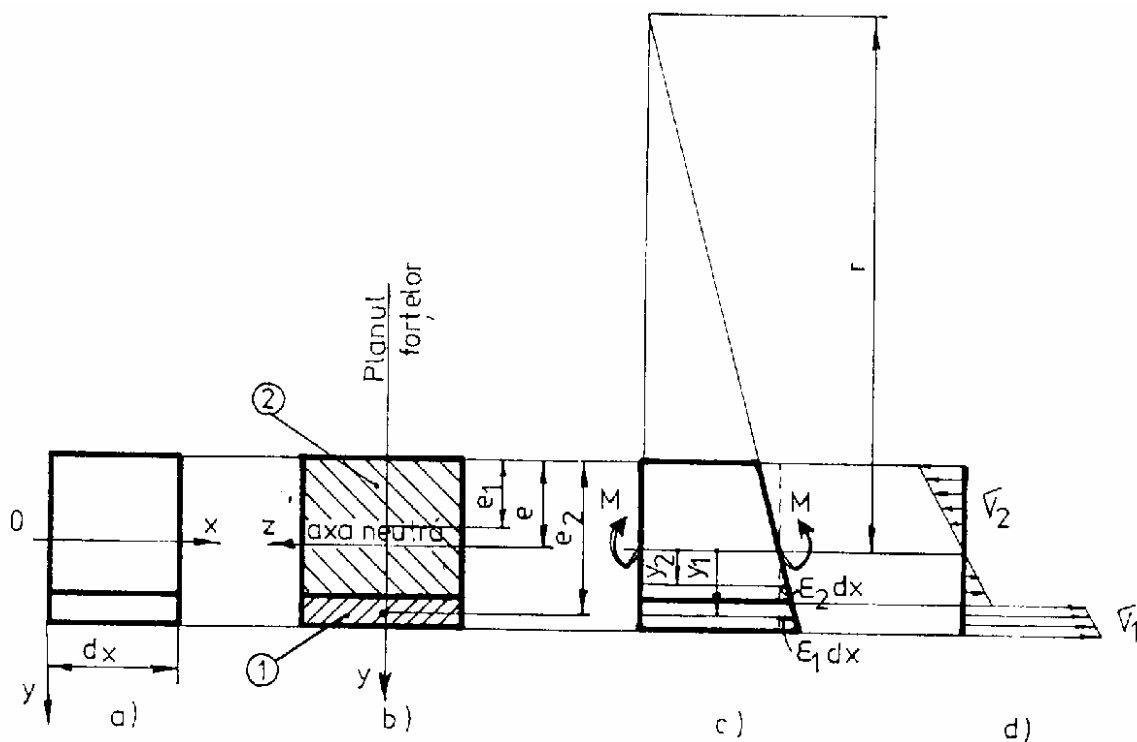
Se consideră o bară dreaptă cu secțiune transversală constantă, neomogenă formată din mai multe straturi din materiale diferite (spre exemplu o bară din lemn întărită cu o platbandă din oțel figura 9.31). Bara este sollicitată la încovoiere pură și pentru a deduce relațiile de calcul se admit următoarele ipoteze:



**Fig. 9.31**

- elementele barei sunt rigidizate între ele și lucrează ca un tot unitar la încovoiere,
- materialele barei satisfac legea lui Hooke, sarcinile aplicate se află într-un singur plan, care este totodată și plan de simetrie al barei,
- prin încovoiere se realizează ipoteza lui Bernoulli cu privire la secțiunile transversale plane.

Din bară se izolează un element oarecare de lungime  $dx$  (fig.9.32,a) și se atașează un sistem de referință triortogonal drept, considerând cazul a două materiale, fără a elimina astfel generalizarea problemei. Prin deformarea elementului sub



**Fig. 9.32**

acțiunea momentului încovoietor  $M$ , cele două secțiuni marginale se rotesc (fig.9.32,c). Se notează cu  $r$ , distanța de la centrul de curbură la axa neutră, a cărei poziție urmează să fie determinată.

Se consideră câte o fibră oarecare în fiecare material la ordonatele  $y_1$  și respectiv  $y_2$ , de axa neutră. Prin solicitarea la încovoiere aceste fibre se alungesc. Considerând secțiunile transversale plane și după deformare, conform ipotezei lui Bernoulli se obține:

$$\frac{\epsilon_1 \cdot dx}{y_1} = \frac{\epsilon_2 \cdot dx}{y_2} = \frac{dx}{r}, \text{ sau } \epsilon_1 = \frac{y_1}{r} \text{ și } \epsilon_2 = \frac{y_2}{r}.$$

Pe baza legii lui Hooke, alungirilor specifice  $\epsilon$ , le corespund tensiunile normale  $\sigma$ :

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 = E_1 \cdot \frac{y_1}{r} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 = E_2 \cdot \frac{y_2}{r}. \quad (9.67)$$

Rezultă că, tensiunile normale pe fiecare zonă a secțiunii transversale sunt proporționale cu distanța de la axa neutră, factorul de proporționalitate fiind funcție de modulul de elasticitate longitudinal al materialului. În figura (9.32,d) sunt prezentate diagramele de variație a tensiunilor. Dacă modulul de elasticitate longitudinal, este mare și tensiunile sunt mari și invers.

În figură s-a considerat  $E_1 > E_2$ .

Scriind ecuațiile de echivalență se obține:

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0; \int_A \sigma \cdot z \cdot dA = 0; \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M. \quad (9.68)$$

Aceste integrale se aplică pe cele două zone ale secțiunii transversale.

Din prima integrală se obține:

$$\int_{A_1} \sigma_1 \cdot dA + \int_{A_2} \sigma_2 \cdot dA = 0, \text{ sau } E_1 \cdot \int_{A_1} y_1 \cdot dA + E_2 \cdot \int_{A_2} y_2 \cdot dA = 0,$$

$$\text{sau: } E_1 \cdot S_1 + E_2 \cdot S_2 = 0.$$

În cazul general al mai multor materiale se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^n E_i \cdot S_i = 0 \quad (9.69)$$

unde s-a notat cu  $S_i = \int_{A_i} y_i \cdot dA$  momentul static, al unei suprafețe oarecare, față de axa neutră. Relația (9.69) determină poziția axei neutre. Dacă se notează cu  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , distanțele de la o dreaptă arbitrară de referință la centrele de greutate ale suprafețelor de arie  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , atunci din (9.69) rezultă:

$$\sum_{i=1}^n E_i \cdot A_i \cdot (e_i - e) = 0, \quad \text{sau} \quad e = \frac{\sum_{i=1}^n E_i \cdot A_i \cdot e_i}{\sum_{i=1}^n E_i \cdot A_i}. \quad (9.70)$$

Ecuația a doua (9.68) este satisfăcută deoarece s-a făcut ipoteza că axa Oy este axa de simetrie a secțiunii transversale.

Din relația a treia (9.68) se obține:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{E}_1}{r} \cdot \int_{A_1} y_1^2 \cdot dA + \frac{\mathbf{E}_2}{r} \cdot \int_{A_2} y_2^2 \cdot dA = \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{I}_2}{r},$$

sau pentru cazul general:

$$\frac{\mathbf{1}}{r} = \frac{\mathbf{M}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I}_i}. \quad (9.71)$$

unde:  $\mathbf{I}_i$  este momentul de inerție al unei suprafețe oarecare  $i$ , față de axa neutră.

Numitorul  $\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I}_i$ , constituie **rigiditatea la încovoiere a barelor de secțiune neomogenă**.

Prin înlocuirea în relațiile (9.67) se obțin expresiile tensiunilor:

$$\sigma_1 = \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{M} \cdot y_1}{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I}_i} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = \frac{\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{M} \cdot y_2}{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I}_i}. \quad (9.72)$$

Dacă se consideră drept module de rezistență ale secțiunii neomogene rapoartele:

$$\mathbf{W}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I}_i}{\mathbf{E}_1 \cdot y_{1\max}} \quad \text{și} \quad \mathbf{W}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I}_i}{\mathbf{E}_2 \cdot y_{2\max}} \quad (9.73)$$

atunci tensiunile maxime se pot calcula cu relația lui Navier:

$$\sigma_1 = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{W}_1} \quad \text{și} \quad \sigma_2 = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{W}_2}, \quad \text{etc.} \quad (9.74)$$

Pentru aplicarea acestor relații trebuie determinată în prealabil poziția axei neutre cu relația (9.70).

**Aplicația 9.11** Să se determine sarcina capabilă să o suporte bara din figura 9.33 și pentru aceasta să se traseze diagrama de variație a tensiunilor pe secțiunea periculoasă. Bara este confecționată din lemn cu  $\sigma_{aL} = 20 \text{ MPa}$ ,  $E_L = 12 \text{ GPa}$  întărită cu o platbandă de oțel cu  $\sigma_{aOL} = 150 \text{ MPa}$  și  $E_{OL} = 210 \text{ GPa}$ .

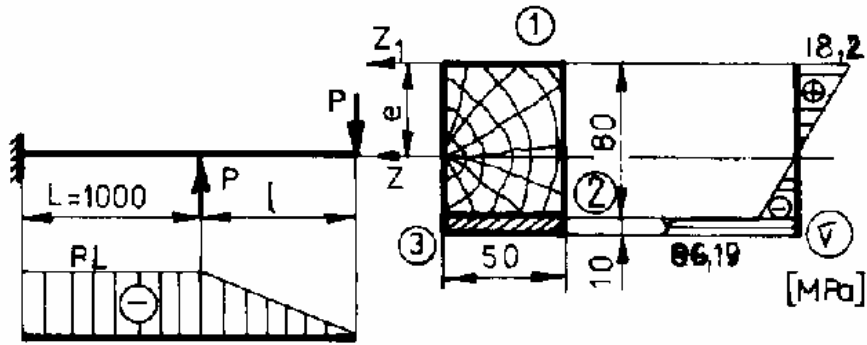


Fig. 9.33

Poziția axei neutre va fi:

$$e = \frac{\sum E_i \cdot A_i \cdot y_i}{\sum E_i \cdot A_i} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 80 \cdot 40 + 2,1 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 85}{12 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 80 + 2,1 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10} = 70,88 \text{ mm.}$$

Rigiditatea barei la încovoiere este:

$$\begin{aligned} \sum E_i \cdot I_i &= 12 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{50 \cdot 80^3}{12} + 50 \cdot 80 \cdot 30,88^2 \right) + \\ &+ 2,1 \cdot 10^5 \cdot \left[ \frac{50 \cdot 10^3}{12} + 50 \cdot 10 \cdot (85 - 70,88)^2 \right] = 9,317 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}^2. \end{aligned}$$

Din relația 9.73 rezultă:

$$P_{\text{capL}} = \frac{(\sum E_i \cdot I_i) \cdot \sigma_{\text{aL}}}{E_L \cdot L \cdot y_1} = \frac{9,317 \cdot 10^{10} \cdot 20}{12 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 70,88} = 2191 \text{ N.}$$

$$P_{\text{capOL}} = \frac{(\sum E_i \cdot I_i) \cdot \sigma_{\text{aOL}}}{E_{\text{OL}} \cdot L \cdot y_3} = \frac{9,317 \cdot 10^{10} \cdot 150}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 1000 \cdot (90 - 70,88)} = 3481 \text{ N.}$$

Se adoptă  $P_{\text{cap}} = 2 \text{ kN}$ , iar tensiunile pentru secțiunea periculoasă vor fi:

$$\sigma_{1L} = \frac{E_L \cdot M_{i\text{max}} \cdot y_1}{\sum E_i \cdot I_i} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 70,88}{9,317 \cdot 10^{10}} = 18,26 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{2L} = \frac{E_L \cdot M_{i\text{max}} \cdot y_2}{\sum E_i \cdot I_i} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot (80 - 70,88)}{9,317 \cdot 10^{10}} = 2,349 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{2\text{OL}} = \frac{E_{\text{OL}} \cdot M_{i\text{max}} \cdot y_2}{\sum E_i \cdot I_i} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot (80 - 70,88)}{9,317 \cdot 10^{10}} = 41,11 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{3OL} = \frac{E_{OL} \cdot M_{i\max} \cdot y_2}{\sum E_i \cdot I_i} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot (90 - 70,88)}{9,317 \cdot 10^{10}} = 86,19 \text{ MPa}$$

Variația tensiunilor pentru secțiunea periculoasă au fost reprezentate în figura 9.33.

### **9.15. Calculul de rezistență al barelor drepte la încovoiere în domeniul plastic**

La toate problemele studiate până acum, la acest capitol, s-a admis că materialele (ER) au deformații elastice și satisfac legea lui Hooke. Deci, tensiunile maxime au valori mai mici decât tensiunea corespunzătoare limitei de elasticitate a materialului.

În practică se întâlnesc probleme la care nu poate fi admisă legea lui Hooke, fie **din cauza depășirii limitei de proporționalitate a materialului**, prin solicitarea produsă, fie din cauza că **materialul nu are o caracteristică liniar-elastică**. Din prima categorie fac parte procesele tehnologice care dau deformații permanente iar, în a doua categorie se încadrează materialele a căror curbă caracteristică nu are nici o porțiune rectilinie.

La solicitările în domeniul plastic, nemai fiind valabilă legea lui Hooke, nu poate fi aplicat principiul suprapunerii efectelor și ipoteza deformațiilor mici.

Pentru calculul la încovoiere, în domeniul plastic al barelor drepte se consideră o porțiune de bară dreaptă sollicitată la încovoiere pură. Secțiunea transversală are cel puțin o axă de simetrie (axa Oy) ce este conținută în planul forțelor (fig. 9.34). Materialul barei admite o curbă caracteristică, identică cu cea de la tracțiune.

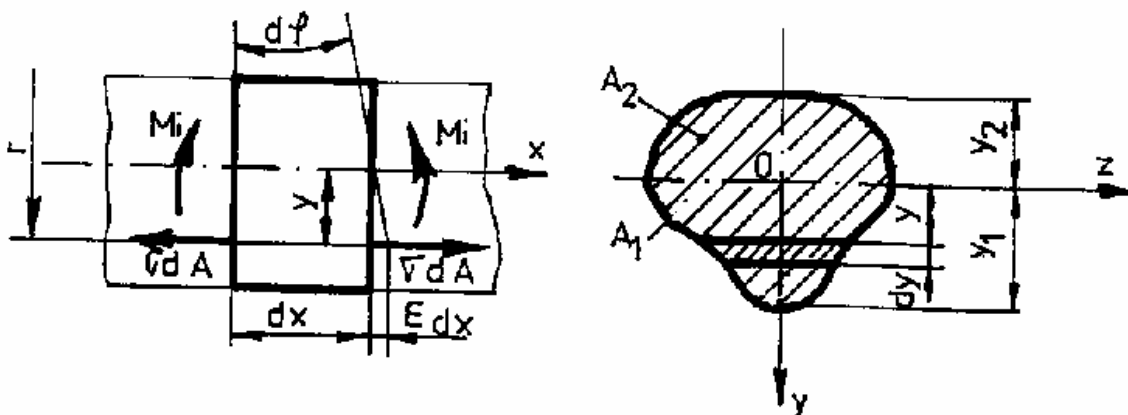


Fig.9.34

Momentul încovoiitor care sollicită bara  $M_i : \sigma_a \cdot W_z$ , are o valoare suficient de mare pentru a produce și deformații plastice. Datorită faptului că secțiunea este simetrică față de axa Oy, axa neutră a secțiunii este perpendiculară pe planul forțelor și poziția ei trebuie determinată.

Axa neutră împarte secțiunea în două zone, una întinsă ( $A_1$ ) și alta comprimată ( $A_2$ ). Ca și la încovoierea liniar - elastică, se verifică ipoteza lui Bernoulli: secțiunile plane și normale pe axa barei înainte de deformare rămân plane și normale pe axa barei și după aplicarea sarcinilor. Deci, se poate exprima alungirea specifică, a unei fibre oarecare, situată la ordonata  $y$ , în funcție de raza de curbură  $r$ , astfel:

$$\varepsilon = \frac{y}{r} . \quad (9.75)$$

Tensiunea normală, produsă de momentul încovoiitor, este funcție de alungirea specifică și se poate exprima astfel:

$$\sigma = f(\varepsilon) = \frac{1}{r} \cdot f(y) . \quad (9.76)$$



Relația (9.76) ne arată că tensiunile normale la încovoiere sunt repartizate pe înălțimea secțiunii, după o lege asemănătoare cu cea exprimată de curba caracteristică a materialului.

- Din ecuația de echivalență a proiecțiilor eforturilor elementare  $\sigma \cdot dA$  pe axa longitudinală a barei,

$$\int_A \sigma \cdot dA = 0, \quad (9.77)$$

se obține poziția axei neutre.

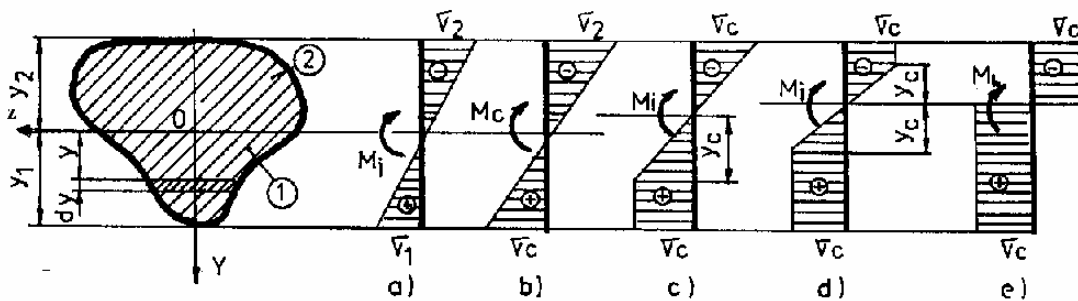


Fig. 9.36

- Din ecuația de echivalență a momentelor forțelor elementare față de axa neutră Oz, se obține relația dintre tensiunile normale  $\sigma$  și momentul încovoiitor  $M_i$ :

$$M_i = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA. \quad (9.78)$$

Rezolvarea ecuațiilor (9.77) și (9.78) presupune cunoașterea curbei caracteristice a materialului și forma secțiunii transversale.

Se admite că materialul este ideal elasto-plastic, adică are o curbă caracteristică schematizată prin două linii drepte (fig.9.35), porțiunea OC,

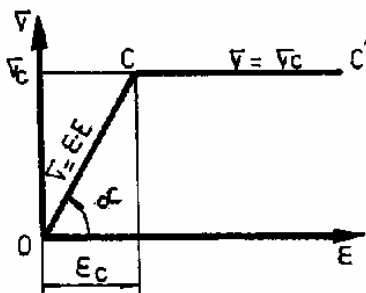


Fig. 9.35

are modulul de elasticitate  $E = \tan \alpha$  și  $CC'$ , modulul de plasticitate  $E_p = 0$ . În acest caz stările de tensiune care se produc succesiv cu creșterea momentului încovoiitor sunt redată în fig.9.36.

Pentru o valoare mică a momentului încovoiitor, tensiunile se distribuie liniar pe înălțimea secțiunii și pot fi determinate cu relația lui

Navier. În acest caz axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii (fig.9.36,a).

La o valoare mai mare a lui  $M_i$ , tensiunea maximă atinge valoarea de curgere  $\sigma_c$  (fig.9.36,b) și în acest caz valoarea momentului încovoietor este:

$$M_c = \sigma_c \cdot W_z \quad (9.79)$$

La creșterea în continuare a momentului încovoietor apare o stare de solicitare elasto-plastică. În acest caz relația lui Navier nu mai este aplicabilă. Axa neutră nu mai trece prin centrul de greutate decât în cazul în care axa Oz este axă de simetrie (fig.9.32,c,d). Pe măsura creșterii momentului încovoietor crește zona plastică (fig.9.36,c,d) și zona elastică se micșorează. La limită, momentul încovoietor limită  $M_L$ , produce deformații plastice în toată secțiunea (fig.9.36,e).

Pentru o stare elasto-plastică ( $M_C : M_i : M_L$ ) tensiunile se pot exprima astfel (pentru fig.9.36,d):

$$\sigma = \frac{y}{y_c} \cdot \sigma_c, \quad \text{-pentru zona elastică,} \quad (9.80,a)$$

$$\sigma = \sigma_c, \quad \text{-pentru zona plastică.} \quad (9.80,b)$$

Ținând seama, în ecuația de echivalență (9.77), de relațiile (9.80) se obține :

$$-\int_{-y_2}^{-y_c} \sigma_c \cdot dA + \int_{-y_c}^{y_c} \frac{y}{y_c} \cdot \sigma_c \cdot dA + \int_{y_c}^{y_1} \sigma_c \cdot dA = 0.$$

Simplificând cu  $\sigma_c$ , rezultă:

$$-\int_{y_2}^{-y_c} dA + \frac{1}{y_c} \cdot \int_{-y_c}^{y_c} y \cdot dA + \int_{y_c}^{y_1} dA = 0.$$

Dacă notăm cu  $A_{1P}$  și  $A_{2P}$  - ariile suprafețelor marginale solicitate plastic, iar cu  $S_e$  - momentul static al zonei centrale, solicitată elastic, față de axa neutră se obține:

$$S_e + y_c \cdot (A_{1p} + A_{2p}) = 0 \quad (9.81)$$

Pentru cazul particular al secțiunii solicitate plastic în totalitate, **la starea limită:**

$$A_{1P} = A_{2P}, \quad (9.82)$$

adică **axa neutră împarte o secțiune sollicitată plastic în părți egale.**

Înlocuind expresiile (9.80) în ecuația (9.78) se obține :

$$\mathbf{M}_i = -\int_{-y_2}^{-y_c} \sigma_c \cdot y \cdot dA + \int_{-y_c}^{y_c} \frac{y}{y_c} \cdot \sigma_c \cdot y \cdot dA + \int_{y_c}^{y_1} \sigma_c \cdot y \cdot dA,$$

sau:

$$\mathbf{M}_i = \sigma_c \cdot (\mathbf{W}_e + \mathbf{S}_p), \quad (9.83)$$

unde s-a notat cu:

$$\mathbf{W}_e = \frac{1}{y_c} \cdot \int_{-y_c}^{y_c} y^2 \cdot dA : \quad (9.84)$$

-modulul de rezistență al zonei elastice calculat față de axa neutră:

$$\mathbf{S}_p = -\int_{-y_2}^{-y_c} y \cdot dA + \int_{y_c}^{y_1} y_1 \cdot dA : \quad (9.85)$$

-suma momentelor statice calculate în valoare absolută față de axa neutră, a zonelor solcitate plastic.

Pentru cazul particular al secțiunii solcitate numai plastic ( $\mathbf{W}_e = \mathbf{0}$ ) se obține expresia momentului încovoietor limită ( $\mathbf{M}_L$ ).

$$\mathbf{M}_L = \sigma_c \cdot \mathbf{S}_p. \quad (9.86)$$

Pentru această valoare a momentului încovoietor întreaga secțiune este solcitată plastic. Pe toată secțiunea există  $\sigma = \sigma_c$ , așa că tensiunile nu mai pot crește. Deci nici momentul încovoietor nu poate crește și se numește **moment limită**. În acest caz alungirea specifică poate crește nedefinit (fig.9.35), o dată cu aceasta crește nedefinit și rotirea secțiunii față de poziția inițială. De aceea în secțiunea unde se ajunge ca  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_L$  se produce o **articulație plastică**.

**Diferența dintre articulația plastică și articulația mecanică este că cea plastică apare pentru o solcitate  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_L$ , iar la articulația mecanică  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ .**

**Aplicația 9.12** Să se determine forța capabilă a barei din figura 9.37. prin metoda stării limită și prin metoda rezistențelor admisibile, dacă  $\sigma_c = 240$  MPa și coeficientul de siguranță impus este de  $c_0 = 1,6$ .

Rezolvare:

**a) Metoda stării limită:**

Poziția axei neutre este dată de relația:

$$A_{1p} = A_{2p},$$

și pentru dimensiunile secțiunii din figură se poate scrie:

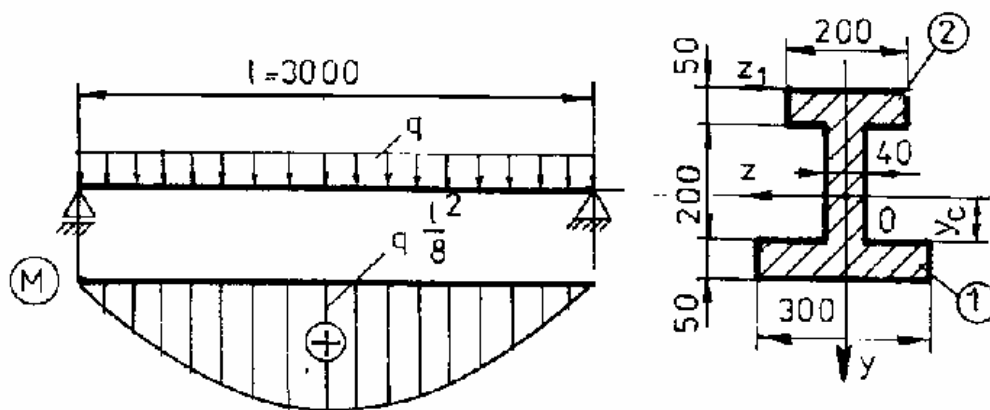
$$30 \cdot 5 + y_c \cdot 4 = 20 \cdot 5 + (20 - y_c) \cdot 4,$$

din care rezultă:

$$y_c = \frac{20 \cdot 5 + 20 \cdot 4 - 30 \cdot 5}{8} = 3,75 \text{ cm.}$$

Momentul static al secțiunii este:

$$\begin{aligned} S_p &= A \cdot e = 30 \cdot 5 \cdot \left( \frac{5}{2} + 3,75 \right) + 4 \cdot \frac{3,75^2}{2} + 4 \cdot \frac{(20 - 3,75)^2}{2} + 20 \cdot 5 \cdot \left( \frac{5}{2} + 20 - 3,75 \right) = \\ &= 3369 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



**Fig. 9.37**

Din condiția  $M_{\max} = \frac{M_L}{c}$ , scrisă astfel :

$$q \cdot \frac{L^2}{8} = \frac{\sigma_c \cdot S_p}{c},$$

se obține sarcina capabilă la starea limită:

$$q_{cp} = \frac{8 \cdot \sigma_c \cdot S_p}{c \cdot L^2} = \frac{8 \cdot 240 \cdot 3369 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 3000^2} = 449,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Se adoptă:  $q_{cp} = 450 \text{ kN/m}$ .

### b) Metoda rezistențelor admisibile:

$$y_G = \frac{20 \cdot 5 \cdot 2,5 + 20 \cdot 4 \cdot 15 + 30 \cdot 5 \cdot 27,5}{20 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 30 \cdot 5} = 16,89 \text{ cm},$$

$$I_z = \frac{30 \cdot 5^3 + 20 \cdot 5^3 + 4 \cdot 20^3}{12} + 20 \cdot 5 \cdot (16,89 - 2,5)^2 + 20 \cdot 4 \cdot (16,89 - 15)^2 + 30 \cdot 5 \cdot (27,5 - 16,89)^2 = 41066 \text{ cm}^4,$$

iar sarcina capabilă se obține din condiția:

$$M_{cap} = \frac{q \cdot L^2}{8} \leq \frac{\sigma_a \cdot I_z}{|y_{max}|},$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i_{max}}}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{p \cdot L^2}{8I_z} \cdot y_{max} = \frac{450 \cdot 3000^2}{8 \cdot 41066 \cdot 10^4} \cdot 168,9 = 208,2 \text{ MPa} < \sigma_c.$$

$$q_{cap} = \frac{8 \cdot \sigma_a \cdot I_z}{L^2 \cdot |y_{max}|} = \frac{8 \cdot 240 \cdot 41066 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 3000^2 \cdot 168,9} = 324,2 \text{ N/mm}$$

Se adoptă:  $q_{cap} = 325 \text{ kN/m}$ .

### Observație:

Dacă se face raportul între  $q_{cp}$  și  $q_{cap}$  se obține:

$$\frac{q_{cp}}{q_{cap}} \cdot 100 = \frac{450}{325} \cdot 100 = 138,5 \%,$$

deci se obține o creștere a sarcinii capabile cu 38,5 % prin metoda stării limită față de metoda rezistențelor admisibile

**Aplicația 9.13** Pentru bara din figura 9.38, se cere să se determine zona solicitată plastic în secțiunea periculoasă pentru:  $\sigma_c = 250 \text{ MPa}$  și  $L = 2\text{m}$ .

$$M_i = \sigma_c \cdot (W_e + S_p).$$

Admitem ca ipoteză, că zona de delimitare între porțiunile de secțiune solicitate plastic și cea elastică, se află pe porțiunea inimii, la  $\pm y_c$  de axa Oz și în acest caz mărimile geometrice sunt:

$$S_p = 2 \cdot \left[ 2 \cdot 4 \cdot 5 + (2 - y_c) \cdot \frac{2 + y_c}{2} \cdot 1 \right] = 2 \cdot (42 - y_c^2) = 84 - y_c^2,$$

$$W_e = \frac{1 \cdot (2y_c)^2}{6} = \frac{2y_c^2}{3},$$

$$M_i = \sigma_c \cdot \left( \frac{2y_c^2}{3} + 84 - y_c^2 \right) = \frac{\sigma_c}{3} \cdot (252 - y_c^2),$$

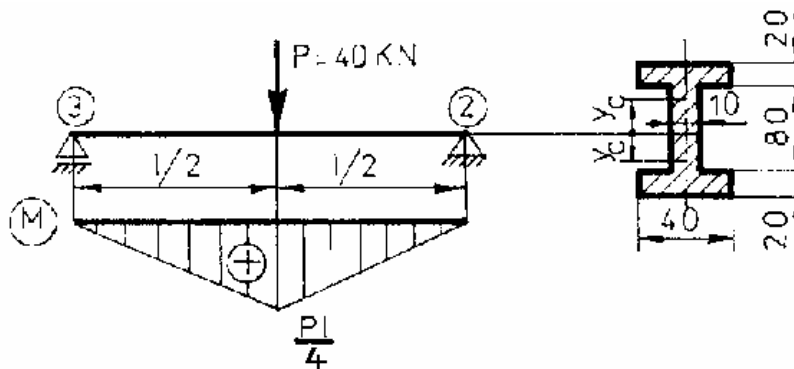


Fig. 9.38

$$252 - y_c^2 = \frac{3M_i}{\sigma_c},$$

$$y_c = \pm \sqrt{252 - \frac{3M_i}{\sigma_c}} = \sqrt{252 - \frac{3 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 200}{4 \cdot 250 \cdot 10^2}} = \pm 3,464 \text{ cm},$$

$$y_c = \pm 34,64 \text{ mm}.$$

**Observație:** Deoarece  $y_c < 40 \text{ mm}$  ipoteza adoptată este corectă.

Pentru determinarea abscisei  $x_p$ , de la care începe zona plastică, se pune condiția:  $M_x = \sigma_c \cdot W_z$ , unde:

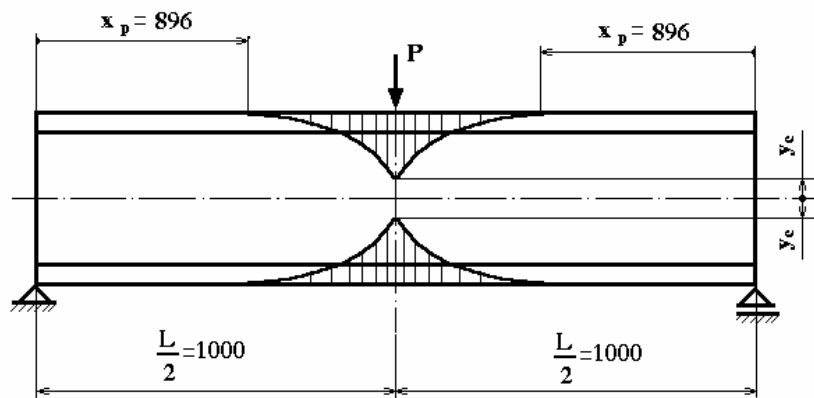
$$W_z = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{4 \cdot 12^3}{12} - \frac{3 \cdot 8^3}{12} \right) = 74,67 \text{ cm}^3,$$

$$M_x = \frac{P \cdot x_p}{2},$$

de unde rezultă:

$$x_p = \frac{2 \cdot \sigma_c \cdot W_z}{P} = \frac{2 \cdot 240 \cdot 74,67 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 896 \text{ mm}.$$

Secțiunea solicitată plastic este reprezentată în figura 9.39.



**Fig. 9.39**