

### 2.3. Vibrații forțate

Forțele dinamice care pot fi aplicate structuri inginerești au diverse forme. În acest capitol vor fi considerate două clase de încărcări dinamice. Prima între acestea reprezintă încărcările armonice și periodice, care pot proveni spre exemplu ca urmare a unor dispozitive rotative amplasate în clădiri. Cea de-a doua categorie de încărcări dinamice sunt cele care variază arbitrar în timp, cele de tip treaptă și șoc.

#### 2.3.1. Vibrații armonice neamortizate ale sistemelor SGLD

O forță armonică are forma  $p(t) = p_0 \sin \omega t$  sau  $p(t) = p_0 \cos \omega t$ , unde  $p_0$  reprezintă amplitudinea forței perturbatoare, iar  $\omega$  pulsația acesteia, căreia îi corespunde perioada  $T = 2\pi/\omega$  (vezi Figura 2.18a). În cele ce urmează se va prezenta răspunsul unui sistem cu un singur grad de libertate dinamică sub efectul unei încărcări de tip sinus, deoarece răspunsul la o încărcare dinamică de tip cosinus este similară cu aceasta.

Folosind ecuația de mișcare (2.6) pentru cazul unor vibrații neamortizate generate de o forță perturbatoare  $p(t) = p_0 \sin \omega t$  obținem:

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \quad (2.40)$$

Deformația  $u(t)$  a sistemului SGLD poate fi obținut rezolvând ecuația (2.40) pentru condițiile inițiale:

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0) \quad (2.41)$$

unde  $u(0)$  și  $\dot{u}(0)$  sunt deplasarea, respectiv viteza în momentul în care este aplicată forța dinamică  $p(t)$ . Soluția particulară a ecuației (2.40) este:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad \omega \neq \omega_n \quad (2.42)$$

Soluția complementară a ecuației (2.40) este:

$$u_c(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (2.43)$$

soluția completă fiind suma soluției particulare și a celei complementare:

$$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t \quad (2.44)$$

Folosind condițiile inițiale (2.41) se obține soluția finală:

$$u(t) = \underbrace{u(0) \cos \omega_n t + \left[ \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin \omega_n t}_{\text{răspuns tranzitoriu}} + \underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin \omega t}_{\text{răspuns staționar}} \quad (2.45)$$

Ecuația (2.45) este reprezentată în Figura 2.18b pentru  $\omega/\omega_n = 0.2$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = \omega_n p_0 / k$  cu linie continuă. Termenul din ecuația (2.45) care include  $\sin \omega t$  reprezintă soluția particulară a ecuației de mișcare (2.40) și este reprezentată cu linie întreruptă.

Pe baza ecuației (2.45) și folosind Figura 2.18b se poate observa că deplasarea  $u(t)$  are două componente distincte de vibrație:

- termenul conținând  $\sin \omega t$  care definește o mișcare oscilatorie cu frecvența perturbatoare
- termenii conținând  $\cos \omega_n t$  și  $\sin \omega_n t$  care definesc o mișcare oscilatorie la frecvența proprie de vibrație a sistemului

Prim dintre aceste componente se numește **răspuns staționar** sau **forțat**, deoarece acesta se datorează forței dinamice aplicate și nu este influențat de condițiile inițiale. Cea de-a doua componentă poartă denumirea de **răspuns tranzitoriu**, care depinde de deplasarea și viteza

inițială, precum și de proprietățile sistemului SGLD și forța perturbatoare. Răspunsul tranzitoriu există chiar și pentru  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ , caz în care ecuația (2.45) devine:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left( \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \quad (2.46)$$

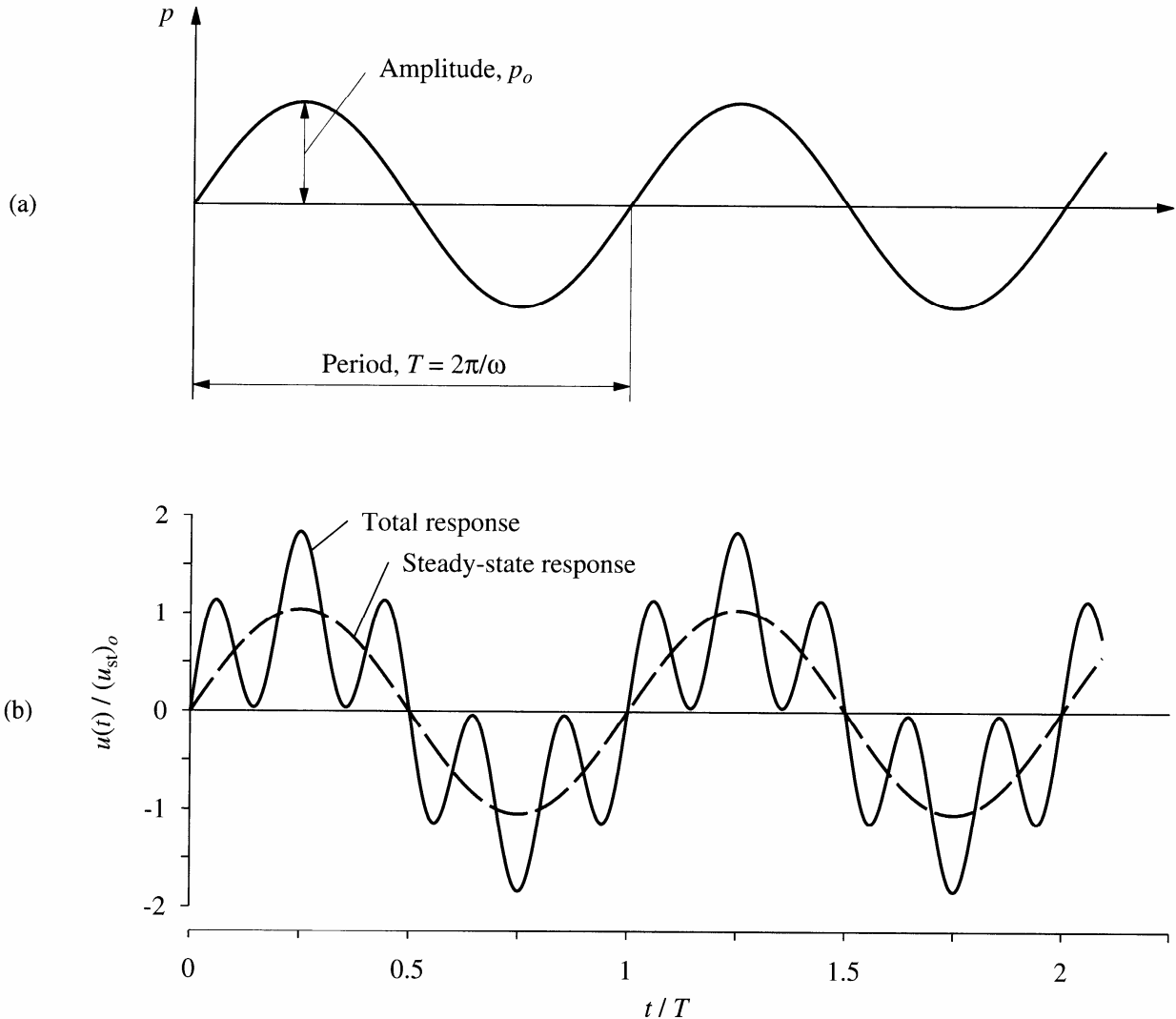


Figura 2.18. Forța armonică (a); răspunsul unui sistem SGLD sub acțiunea unei forțe armonice pentru  $\omega/\omega_n = 0.2$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = \omega_n p_0 / k$  (b), Chopra, 2001.

Răspunsul tranzitoriu apare în Figura 2.18 ca diferența dintre răspunsul total și cel staționar. Acesta continuă la infinit doar în cazul teoretic al vibrațiilor neamortizate, amortizarea prezentă în cazul structurilor reale ducând la diminuarea acestuia cu timpul, motiv din care se numește tranzitoriu.

În cazul în care se neglijează efectul dinamic al sistemului SGLD, conținut în termenul de accelerație din ecuația (2.40), se obține deplasarea statică a sistemului în orice moment de timp  $t$  dat:

$$u_{st}(t) = \frac{P_0}{k} \sin \omega t \quad (2.47)$$

Valoarea maximă a deplasării statice este:

$$(u_{st})_0 = \frac{P_0}{k} \quad (2.48)$$

care reprezintă deformația maximă a sistemului sub acțiunea unei forțe statice cu valoarea  $p_0$  și care va fi denumită în continuare **deformația statică**. Folosind această ultimă notație, răspunsul staționar poate fi exprimat ca:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[ \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right] \sin \omega t \quad (2.49)$$

Factorul din paranteza pătrată a expresiei (2.49) este reprezentat în Figura 2.19 funcție de raportul dintre pulsația perturbatoare și pulsația proprie de vibrație a sistemului SGLD ( $\omega/\omega_n$ ). Pentru  $\omega/\omega_n < 1$  sau  $\omega < \omega_n$  acest factor este pozitiv, indicând faptul că deplasarea  $u(t)$  și forța perturbatoare  $p(t)$  au același semn algebric (sistemul se deplasează în același sens în care acționează forța). În acest caz se spune că deplasarea este **în fază** cu forța perturbatoare. Pentru  $\omega/\omega_n > 1$  sau  $\omega > \omega_n$  acest factor este negativ, indicând faptul că deplasarea  $u(t)$  și forța perturbatoare  $p(t)$  au semne algebrice opuse (sistemul se deplasează în direcție opusă sensului în care acționează forța). În acest caz deplasarea este **defazată** față de forța perturbatoare.

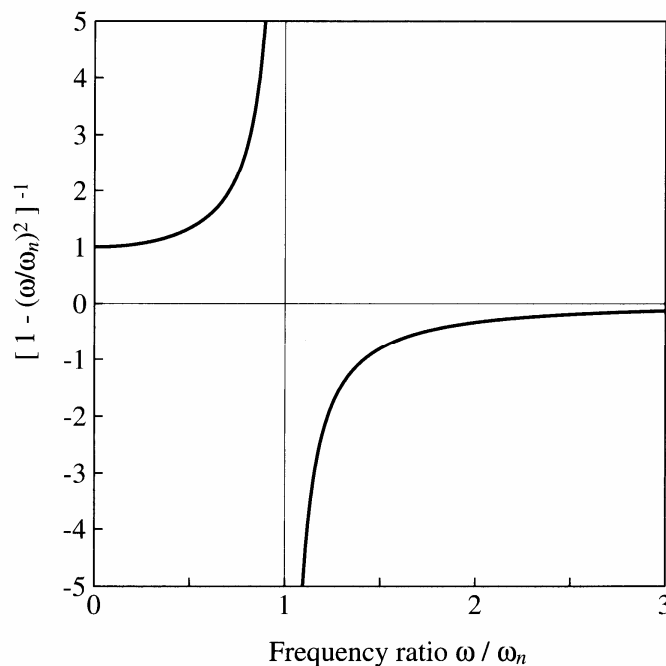


Figura 2.19. Reprezentarea factorului  $\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$  funcție de raportul  $\omega/\omega_n$  (Chopra, 2001).

Noțiunea de fază poate fi exprimată matematic prin exprimarea relației (2.49) în funcție de amplitudinea  $u_0$  a deplasării  $u(t)$  și a **unghiului de fază**  $\phi$  în următoarea formă:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \quad (2.50)$$

unde

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|} \quad \text{și} \quad \phi = \begin{cases} 0^\circ & \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \omega > \omega_n \end{cases} \quad (2.51)$$

Pentru  $\omega < \omega_n$  unghiul de fază  $\phi = 0^\circ$ , indicând faptul că deplasarea  $u(t)$  variază proporțional cu  $\sin \omega t$ , în fază cu forța perturbatoare  $p(t)$ . Pentru  $\omega > \omega_n$  unghiul de fază  $\phi = 180^\circ$ , indicând faptul că deplasarea  $u(t)$  variază proporțional cu  $-\sin \omega t$ , defazat față de forța perturbatoare  $p(t)$ . Variația unghiului de fază funcție de raportul  $\omega/\omega_n$  este reprezentată în Figura 2.20.

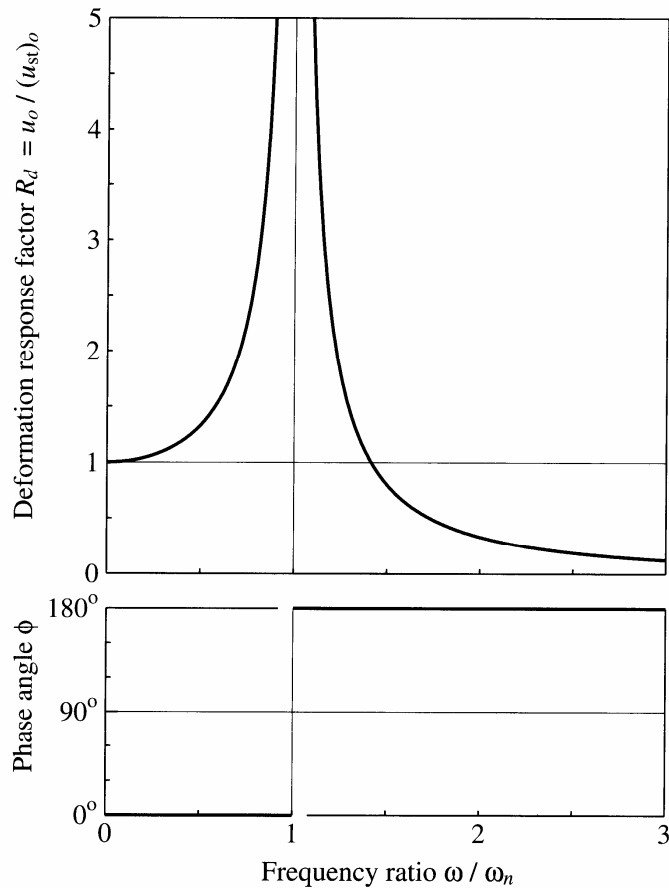


Figura 2.20. Factorul dinamic pentru deplasare și unghiul de fază pentru un sistem neamortizat excitat de o forță armonică (Chopra, 2001).

Factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  este egal cu raportul dintre amplitudinea  $u_o$  a deplasării dinamice (oscilatorii) și deplasarea statică  $(u_{st})_0$ . Expresia factorului dinamic pentru deplasare din ecuația (2.51) este prezentată grafic în Figura 2.20 funcție de raportul  $\omega/\omega_n$  și permite următoarele observații:

- pentru valori mici ale raportului  $\omega/\omega_n$  (forța dinamică variază "lent"), factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  este doar cu puțin mai mare decât 1, amplitudinea mișcării dinamice fiind apropiată de deformația statică
- pentru  $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$  ( $\omega > \omega_n \sqrt{2}$ ), factorul dinamic pentru deplasare  $R_d < 1$ , amplitudinea mișcării dinamice fiind mai mică decât deformația statică
- odată cu creșterea raportului  $\omega/\omega_n$  peste  $\sqrt{2}$  factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  scade, ajungând la valoarea 0 pentru  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ , ceea ce implică faptul că oscilațiile datorate unei variații foarte rapide ale forței perturbatoare în comparație cu pulsația proprie a sistemului sunt mici
- pentru  $\omega/\omega_n \approx 1$  ( $\omega$  apropiat de  $\omega_n$ ), factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  este cu mult mai mare decât 1, ceea ce înseamnă că amplitudinea mișcării dinamice este mult mai mare decât deformația statică

**Pulsația rezonantă** reprezintă pulsația forței perturbatoare pentru care factorul dinamic  $R_d$  este maxim. În cazul unui sistem neamortizat pulsația rezonantă coincide cu pulsația proprie de vibrație  $\omega_n$ , iar factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  este infinit la această pulsație. Totuși, mișcarea de oscilație nu devine infinită imediat, ci gradual, după cum se va vedea din cele ce urmează.

Pentru  $\omega = \omega_n$  soluția (2.46) a ecuației de mișcare nu mai este valabilă, soluția particulară (2.42) nefiind valabilă deoarece este parte a soluției complementare. În acest caz soluția particulară are forma:

$$u_p(t) = -\frac{P_0}{2k} \omega_n t \cos \omega_n t \quad \omega_n = \omega \quad (2.52)$$

iar soluția completă pentru condiții inițiale de repaus  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$  devine:

$$u(t) = -\frac{1}{2} \frac{P_0}{k} (\omega_n t \cos \omega_n t - \sin \omega_n t) \quad (2.53)$$

sau

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{2\pi t}{T_n} \cos \frac{2\pi t}{T_n} - \sin \frac{2\pi t}{T_n} \right) \quad (2.54)$$

Această relație este reprezentată grafic în Figura 2.21, de unde se poate observa că timpul în care are loc o oscilație completă este egală cu  $T_n$ . Mișcarea oscilatorie  $u(t)$  are maxime locale pentru  $t = (j-1/2)T_n$  cu valori de  $\pi(j-1/2)(u_{st})_0$ ,  $j=1,2,3,\dots$ , și minime locale pentru  $t = jT_n$  cu valori de  $\pi j(u_{st})_0$ ,  $j=1,2,3,\dots$ . În fiecare ciclu de oscilație amplitudinea deplasării crește cu valoarea:

$$|u_{j+1}| - |u_j| = (u_{st})_0 [\pi(j+1) - \pi j] = (u_{st})_0 \pi = \frac{P_0}{k} \pi \quad (2.55)$$

Amplitudinea deplasării crește la infinit, dar aceasta devine infinită doar după un timp infinit.

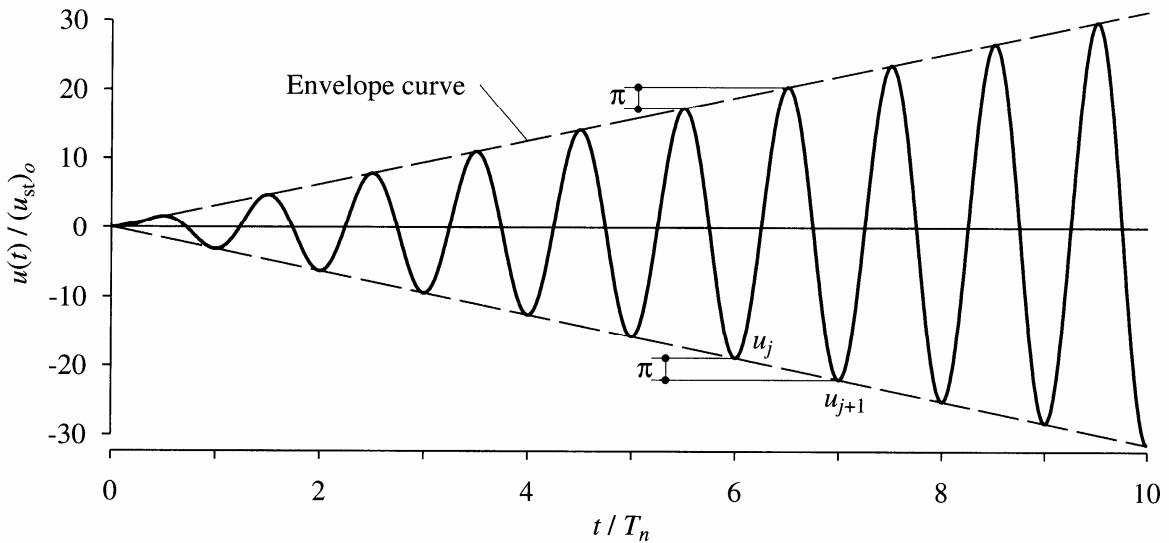


Figura 2.21. Răspunsul unui sistem neamortizat sub acțiunea unei forțe sinusoidale cu frecvența  $\omega = \omega_n$ ,  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$  (Chopra, 2001).

Creșterea infinită a deformațiilor în cazul sistemelor neamortizate sub acțiunea unei încărcări armonice este teoretică din două motive. În primul rând structurile reale au amortizare intrinsecă, care va limita amplificarea la infinit a deformațiilor. În cel de-al doilea rând, structurile reale nu au un răspuns infinit elastic, astfel încât odată cu creșterea deformațiilor peste o anumită valoare, structura fie va intra în curgere plastică, rigiditatea va scădea și pulsația proprie nu va mai fi egală cu cea perturbatoare, fie va ceda într-un mod fragil.

### 2.3.2. Vibrații armonice amortizate ale sistemelor SGLD

#### Răspunsul staționar și tranzitoriu

Folosind ecuația de mișcare (2.6) pentru cazul unor vibrații amortizate generate de o forță perturbatoare  $p(t) = p_0 \sin \omega t$  obținem:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \omega t \quad (2.56)$$

Deformația  $u(t)$  a sistemului SGLD poate fi obținut rezolvând ecuația (2.56) pentru condițiile inițiale:

$$u = u(0) \quad \dot{u} = \dot{u}(0) \quad (2.57)$$

unde  $u(0)$  și  $\dot{u}(0)$  sunt deplasarea, respectiv viteza în momentul în care este aplicată forța dinamică  $p(t)$ . Soluția particulară a ecuației (2.56) este:

$$u_p(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (2.58)$$

unde

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} \quad (2.59)$$

$$D = \frac{p_0}{k} \frac{-2\zeta(\omega/\omega_n)}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}$$

Soluția complementară a ecuației (2.56) este identică soluția care caracterizează oscilațiile libere amortizate:

$$u_c(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) \quad (2.60)$$

unde  $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Soluția completă a ecuației (2.56) este:

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)}_{\text{răspuns tranzitoriu}} + \underbrace{C \sin \omega t + D \cos \omega t}_{\text{răspuns staționar}} \quad (2.61)$$

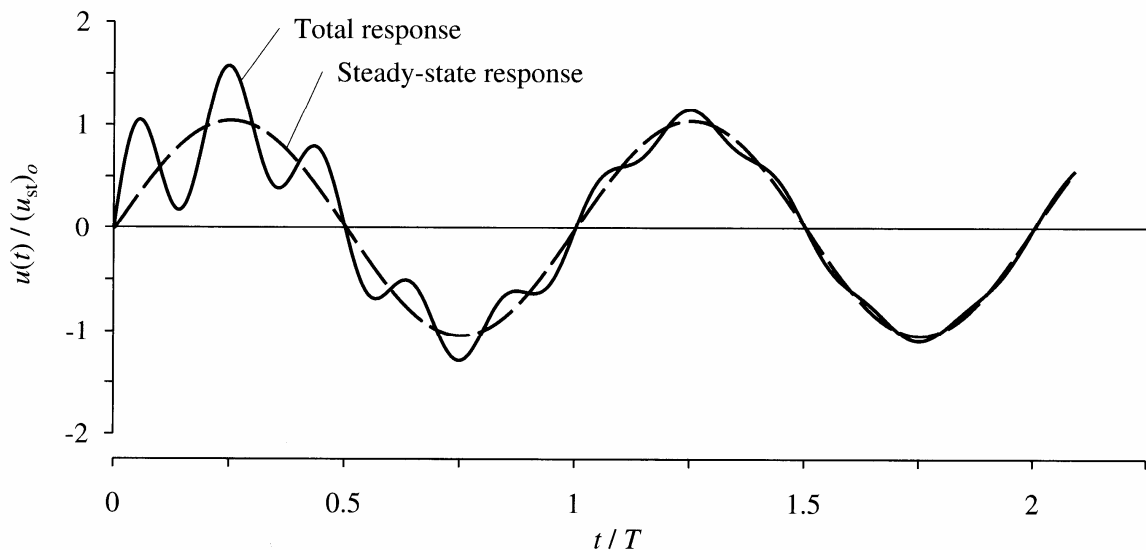


Figura 2.22. Răspunsul unui sistem SGLD amortizat sub acțiunea unei forțe armonice pentru  $\omega/\omega_n = 0.2$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = \omega_n p_0 / k$  (Chopra, 2001).

Constantele  $A$  și  $B$  de mai sus pot fi determinate folosind condițiile inițiale  $u(0)$  și  $\dot{u}(0)$ . Similar vibrațiilor forțate neamortizate, răspunsul dinamic în cazul unor vibrații forțate amortizate este compus din două componente: răspunsul **tranzitoriu** și cel **staționar** sau forțat.

Ecuția (2.61) este reprezentată grafic în Figura 2.22 pentru  $\omega/\omega_n = 0.2$ ,  $\zeta = 0.05$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\dot{u}(0) = \omega_n p_o / k$ . Răspunsul total este indicat printr-o linie continuă, iar cel staționar printr-o linie întreruptă. Diferența dintre răspunsul total și cel staționar este răspunsul tranzitoriu, care scade exponențial cu timpul cu o rată care depinde de  $\omega/\omega_n$  și  $\zeta$ . După un timp răspunsul unui sistem amortizat acționat de o forță perturbatoare armonică este guvernat de componenta staționară. În mare parte din cele ce urmează se va studia doar componenta staționară a vibrațiilor forțate. Se va avea totuși în vedere că este posibil ca deformația maximă a sistemului să aibă loc înainte ca sistemul să atingă stadiul staționar.

#### Răspunsul pentru $\omega = \omega_n$

În continuare se va examina rolul amortizării în reducerea vibrațiilor tranzitorii și în limitarea vibrațiilor staționare pentru cazul în care pulsația forței perturbatoare este egală cu pulsația proprie a sistemului. Pentru  $\omega = \omega_n$  constantele  $C$  și  $D$  din ecuația (2.59) devin  $C=0$  și  $D = -(u_{st})_0 / 2\zeta$ . Pentru  $\omega = \omega_n$  și condiții inițiale de repaus, constantele  $A$  și  $B$  din ecuația (2.61) pot fi determinate a fi  $A = (u_{st})_0 / 2\zeta$  și  $B = (u_{st})_0 / 2\sqrt{1-\zeta^2}$ . Înlocuind valorile constantelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$  în ecuația (2.61), aceasta devine:

$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta} \left[ e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D t \right) - \cos \omega_n t \right] \quad (2.62)$$

Ecuția (2.62) este reprezentată grafic în Figura 2.23 pentru fracțiunea din amortizarea critică  $\zeta = 0.05$ . Comparând Figura 2.23 cu Figura 2.21 reprezentând cazul vibrațiilor neamortizate se poate observa că amortizarea atenuează mișcarea oscilatorie în fiecare ciclu, limitând răspunsul la valoarea:

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} \quad (2.63)$$

Pentru sisteme cu o amortizare mică, termenul conținând sinus din ecuația (2.62) este neglijabil, iar  $\omega_D \approx \omega_n$ , astfel încât ecuația (2.62) se simplifică la:

$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{2\zeta} \underbrace{(e^{-\zeta\omega_n t} - 1)}_{\text{funcția înfășurătoare}} \cos \omega_n t \quad (2.64)$$

funcția înfășurătoare

Variația în timp a deplasării urmărește forma dată de funcția  $\cos \omega_n t$ , amplitudinea acesteia fiind indicată în Figura 2.23 cu linie întreruptă.

Amplitudinea mișcării staționare sub acțiunea unei forțe perturbatoare cu pulsația  $\omega = \omega_n$  și rata cu care este atinsă starea de mișcare staționară depinde foarte mult de amortizarea sistemului. Acest fapt se poate observa în Figura 2.24, în care este reprezentată ecuația (2.62) pentru trei valori ale  $\zeta$ : 0.01, 0.05 și 0.1. Cu cât este mai mică amortizarea, cu atât este mai mare numărul de oscilații necesare pentru a atinge o anumită proporție din amplitudinea mișcării staționare  $u_0$ . De exemplu, numărul de oscilații complete necesare pentru a atinge 95% din  $u_0$  este egal cu 48 pentru  $\zeta = 0.01$ , 24 pentru  $\zeta = 0.02$ , 10 pentru  $\zeta = 0.05$ , 5 pentru  $\zeta = 0.1$ , 2 pentru  $\zeta = 0.2$ .

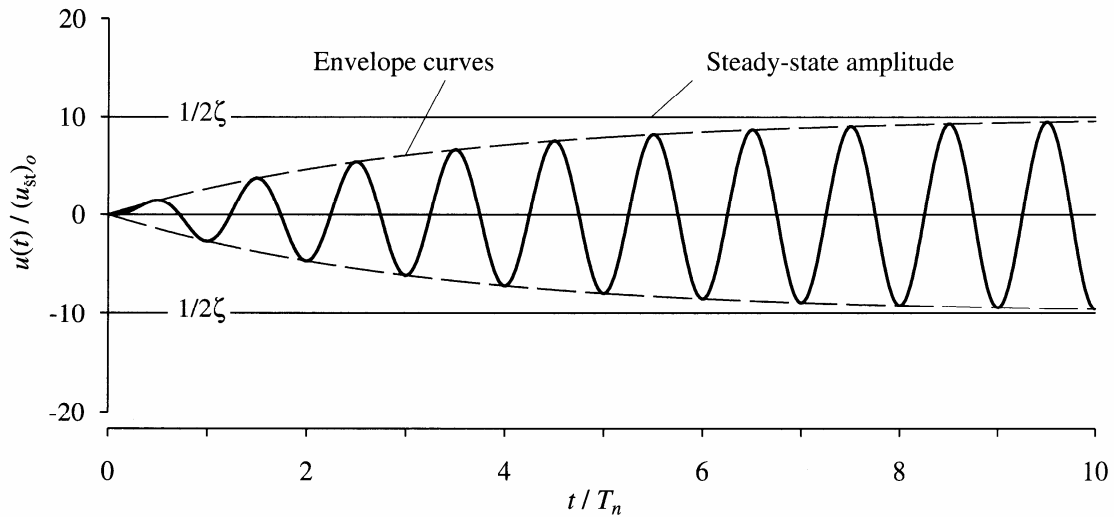


Figura 2.23. Răspunsul unui sistem amortizat cu  $\zeta = 0.05$  sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale cu  $\omega = \omega_n$ ;  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$  (Chopra, 2001).

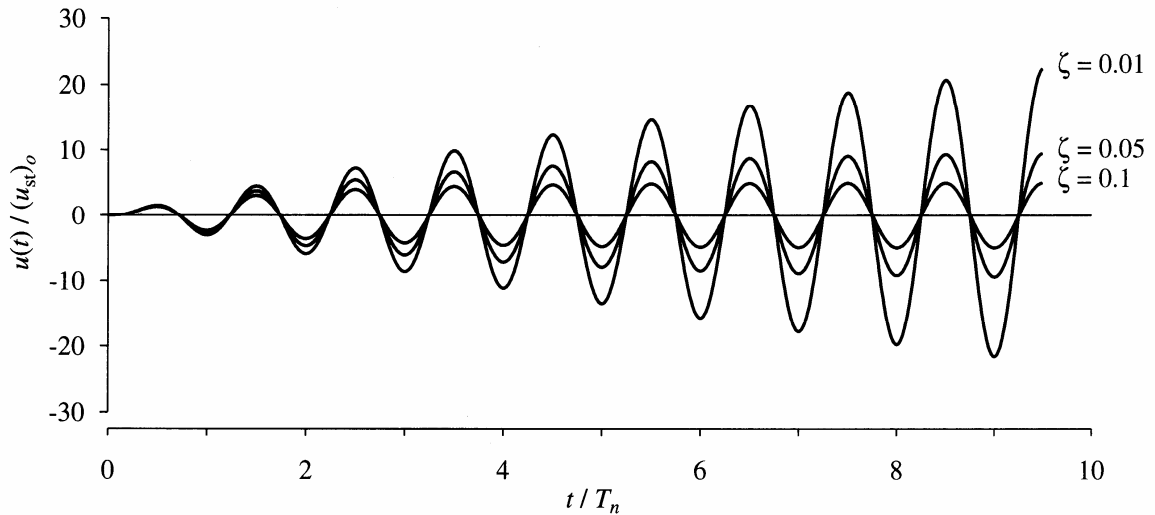


Figura 2.24. Răspunsul a trei sisteme amortizat cu  $\zeta = 0.01, 0.05$  și  $0.1$  sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale cu  $\omega = \omega_n$ ;  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$  (Chopra, 2001).

### Deformația maximă și unghiul de fază

Deformațiile sistemului în stadiul de vibrații staționare sunt definite de ecuațiile (2.58) și (2.59), și pot fi rescrise sub următoare formă:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) = (u_{st})_0 R_d \sin(\omega t - \phi) \quad (2.65)$$

unde  $u_0 = \sqrt{C^2 + D^2}$  și  $\phi = \tan^{-1}(-D/C)$ . Înlocuind valorile C și D, rezultă:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \quad (2.66)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (2.67)$$

Ecuația (2.65) este reprezentată grafic în Figura 2.25 pentru trei valori ale raportului  $\omega/\omega_n$  și o valoare fixă a amortizării ( $\zeta = 0.2$ ). În această figură sunt indicate valorile  $R_d$  și  $\phi$ , precum și variația



în timp a deformației statice, care este proporțională cu forța perturbatoare  $p(t)$ . Mișcarea staționară are aceeași perioadă ca și forța perturbatoare ( $T = 2\pi / \omega$ ), dar cu defazaj de  $\phi / 2\pi$ .

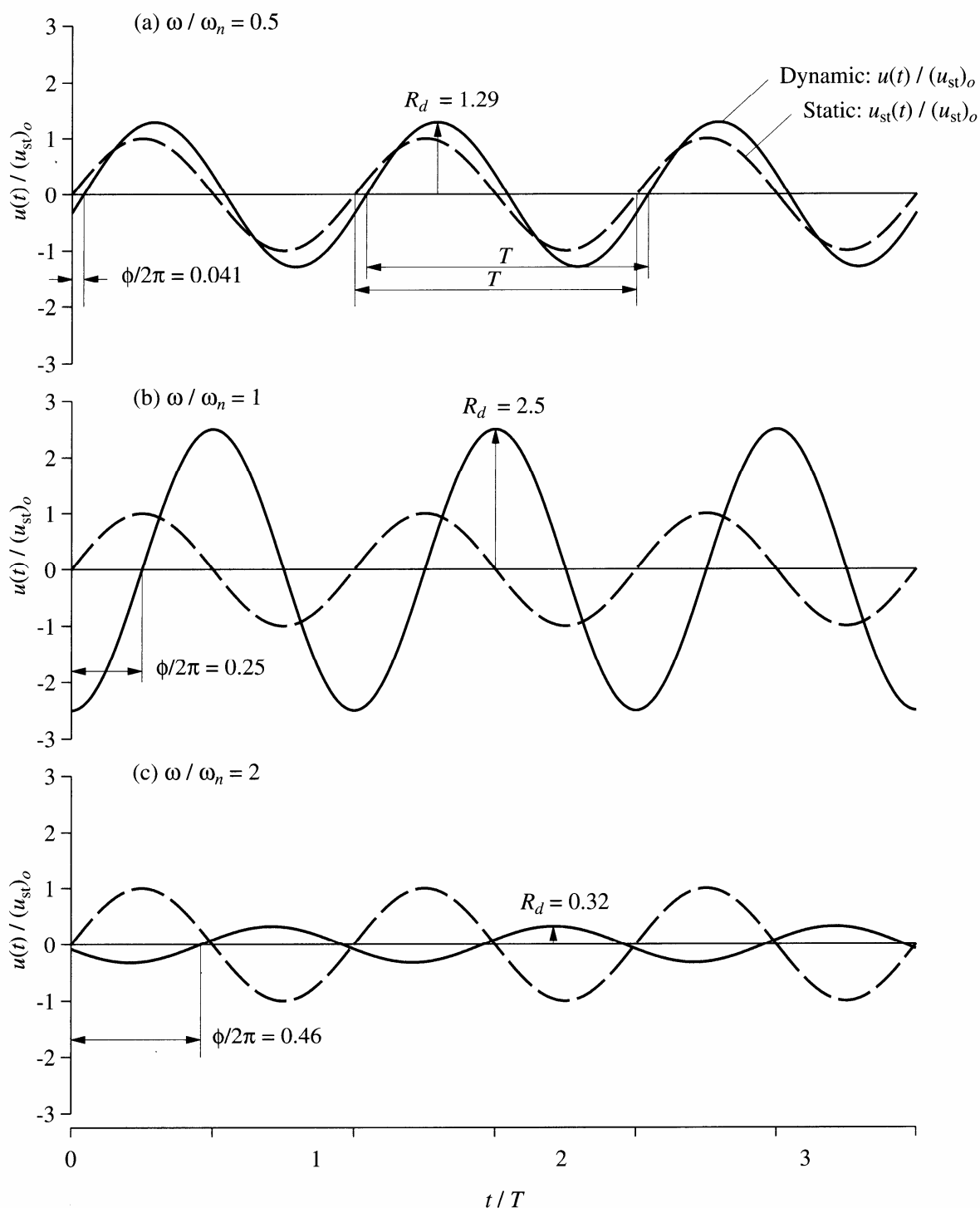


Figura 2.25. Răspunsul staționar al unor sisteme amortizate ( $\zeta = 0.2$ ) sub acțiunea unei forțe perturbatoare sinusoidale cu pulsația:  $\omega / \omega_n = 0.5$  (a),  $\omega / \omega_n = 1$  (b),  $\omega / \omega_n = 2$  (c), Chopra, 2001.

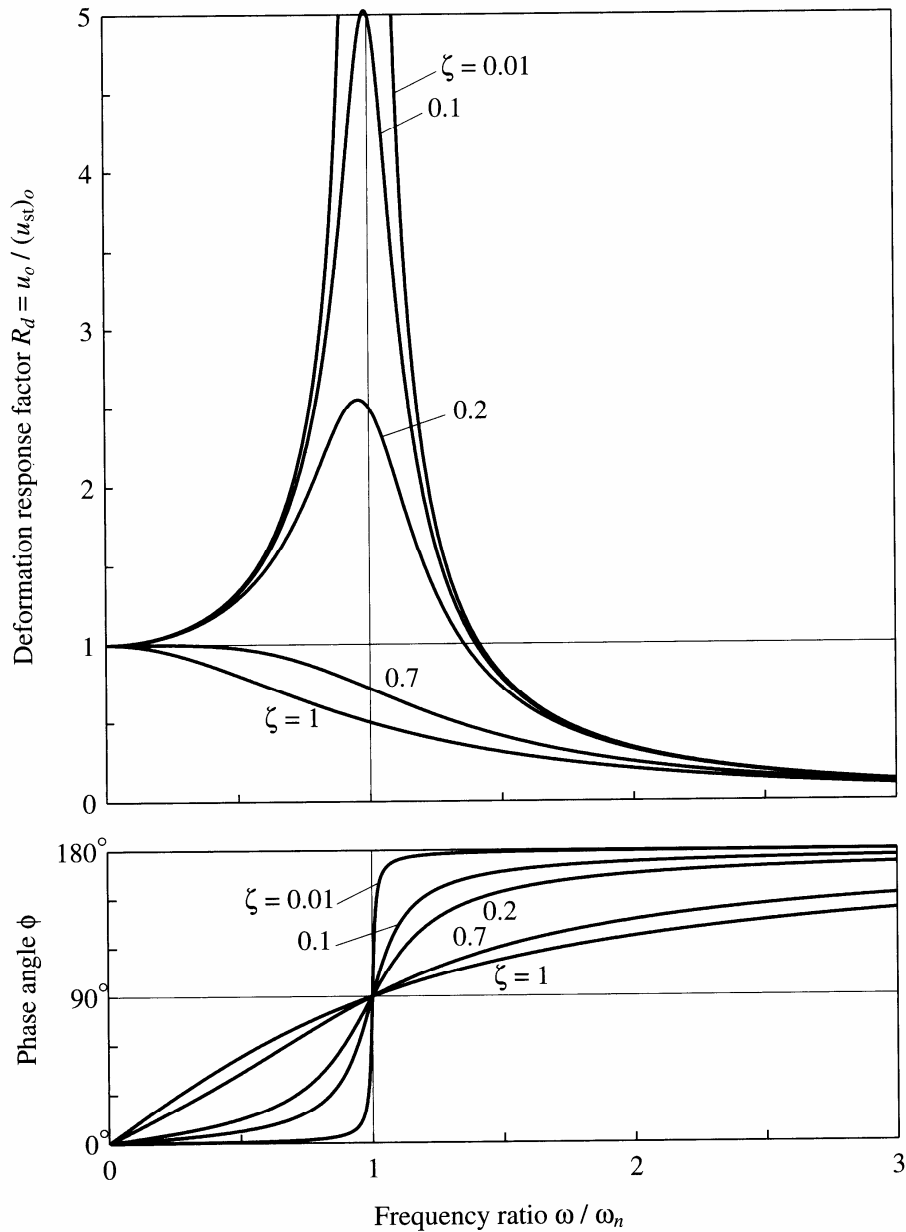


Figura 2.26. Factorul dinamic pentru deplasări și unghiul de fază pentru un sistem amortizat excitat de o forță perturbatoare armonică (Chopra, 2001).

În Figura 2.26 este prezentat factorul dinamic pentru deplasare funcție de  $\omega/\omega_n$  pentru câteva valori ale fracțiunii din amortizarea critică  $\zeta$ . Comparând o reprezentare similară a factorului dinamic pentru cazul vibrațiilor neamortizate din Figura 2.20, se poate observa că amortizarea reduce factorul  $R_d$ , și în consecință și amplitudinea mișcării pentru toate pulsațiile ale forței perturbatoare. Această reducere este într-o strânsă legătură cu pulsația forței perturbatoare, fiind examinată mai jos pentru trei regiuni ale scării de pulsație:

- Pentru valori ale raportului  $\omega/\omega_n \ll 1$  ( $T \gg T_n$ , adică forța dinamică variază "lent"), factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  este doar cu puțin mai mare decât 1, amplitudinea mișcării dinamice fiind apropiată de deformația statică și fiind quasi-independentă de valoarea amortizării. Astfel,

$$u_0 \cong (u_{st})_0 = \frac{p_0}{k} \quad (2.68)$$

Acest rezultat implică faptul că răspunsul dinamic este foarte apropiat de cel static și este guvernat de rigiditatea sistemului.

- Pentru  $\omega/\omega_n \gg 1$  ( $T \ll T_n$ , adică forța dinamică variază "repede"), factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  tinde către zero odată cu creșterea raportului  $\omega/\omega_n$  și este puțin afectat de valoarea amortizării. Pentru valori ridicate ale raportului  $\omega/\omega_n$ , termenul  $(\omega/\omega_n)^4$  domină ecuația (2.66), care poate fi aproximată cu:

$$u_0 \cong (u_{st})_0 \frac{\omega_n^2}{\omega^2} = \frac{p_0}{m\omega^2} \quad (2.69)$$

ceea ce implică faptul că răspunsul este controlat de masa sistemului.

- Pentru  $\omega/\omega_n \approx 1$  (pulsăția forței perturbatoare este apropiată de pulsăția proprie de vibrație a sistemului), factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  este sensibil la valoarea amortizării, și pentru valori mici ale amortizării poate fi mult mai mare decât 1, ceea ce înseamnă că amplitudinea mișcării dinamice poate fi mult mai mare decât deformația statică. Pentru  $\omega/\omega_n = 1$  ecuația (2.66) devine:

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{c\omega_n} \quad (2.70)$$

ceea ce implică faptul că amplitudinea mișcării este controlată de amortizarea sistemului.

Unghiul de fază  $\phi$ , care indică defazajul în timpul dintre răspunsul sistemului și forța perturbatoare variază cu raportul  $\omega/\omega_n$  și este reprezentat grafic în Figura 2.26. Valoarea acestuia este examinată mai jos pentru aceleași trei regiuni ale domeniului de valori  $\omega/\omega_n$ :

- Pentru valori ale raportului  $\omega/\omega_n \ll 1$  (forța dinamică variază "lent"), unghiul de fază  $\phi$  este apropiat de  $0^\circ$ , deplasarea sistemului fiind aproximativ în fază cu forța perturbatoare, ca în Figura 2.25a. Deplasarea sistemului și forța perturbatoare au același sens.
- Pentru  $\omega/\omega_n \gg 1$  (forța dinamică variază "repede"), unghiul de fază  $\phi$  este apropiat de  $180^\circ$ , deplasarea sistemului fiind în esență defazată de forța perturbatoare, ca în Figura 2.25c. Deplasarea sistemului și forța perturbatoare au sensuri opuse.
- Pentru  $\omega/\omega_n \approx 1$  (pulsăția forței perturbatoare este apropiată de pulsăția proprie de vibrație a sistemului), unghiul de fază  $\phi$  are valoarea de  $90^\circ$  pentru orice valoare a lui  $\zeta$ , deplasarea sistemului având un maximum la trecerea forței prin valoarea 0, situație exemplificată în Figura 2.25b.

### Factorii dinamici

Ecuția (2.65) reprezentând răspunsul staționar al unui sistem amortizat sub acțiunea unei forțe perturbatoare armonice poate fi scrisă sub următoarea formă:

$$\frac{u(t)}{p_0/k} = R_d \sin(\omega t - \phi) \quad (2.71)$$

**Factorul dinamic pentru deplasare**  $R_d$  este egal cu raportul dintre amplitudinea  $u_0$  a deplasării dinamice (oscilatorii) și deplasarea statică  $(u_{st})_0$  și este dat de ecuația (2.66).

Derivând ecuația (2.71) în raport cu timpul obținem următoarea relație:

$$\frac{\dot{u}(t)}{p_0/\sqrt{km}} = R_v \cos(\omega t - \phi) \quad (2.72)$$

unde  $R_v$  este **factorul dinamic pentru viteză** și care este raportat la  $R_d$  prin ecuația:

$$R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \quad (2.73)$$

Derivând ecuația (2.72) în raport cu timpul obținem următoarea relație:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{p_0/m} = -R_a \sin(\omega t - \phi) \quad (2.74)$$

unde  $R_a$  este **factorul dinamic pentru accelerație** și care este raportat la  $R_d$  prin ecuația:

$$R_a = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d \quad (2.75)$$

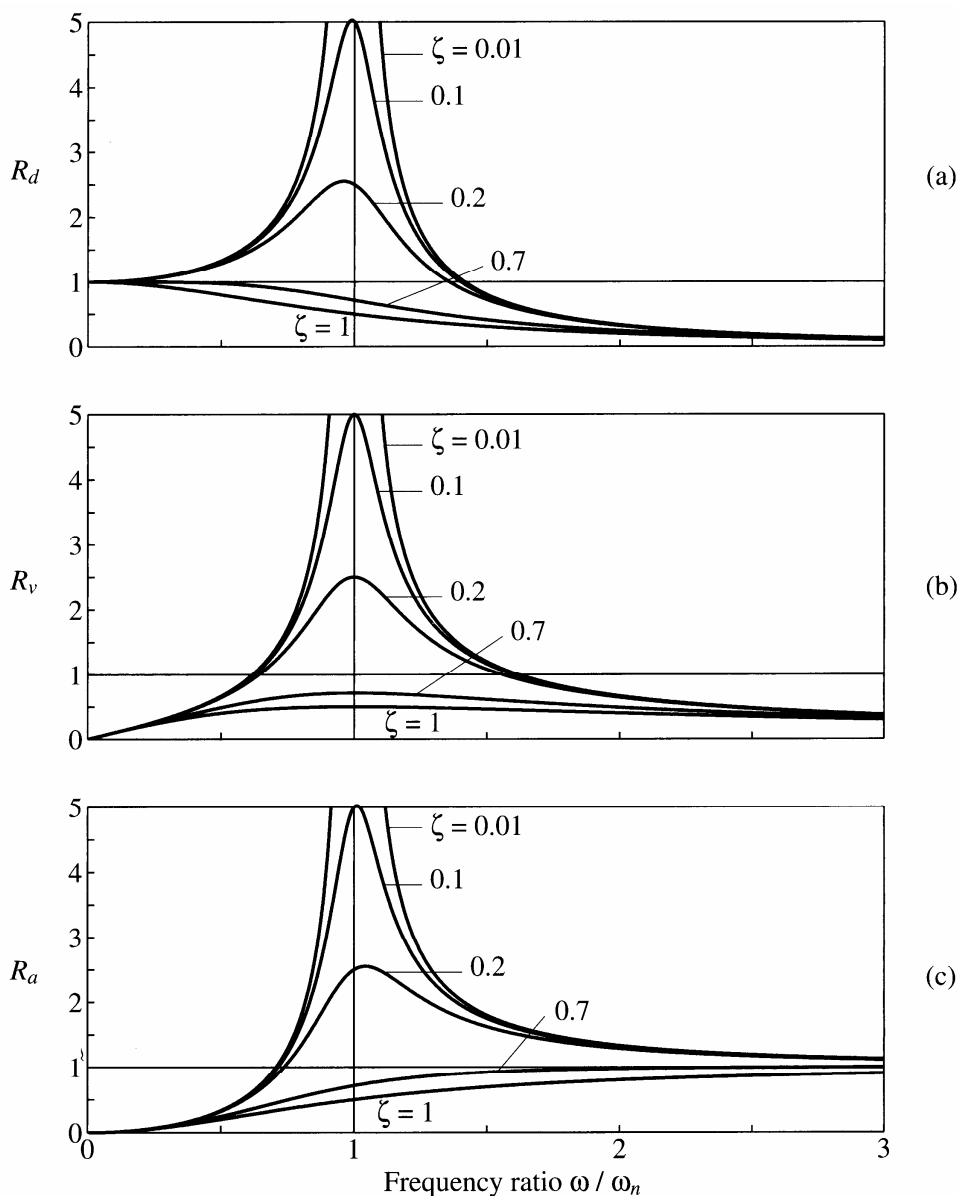


Figura 2.27. Factorii dinamic pentru deplasare, viteză și accelerație pentru un sistem amortizat excitat de o forță armonică (Chopra, 2001).

Din ecuația (2.74) se poate observa că  $R_a$  reprezintă raportul dintre accelerația sistemului dinamic și accelerația indusă de forța  $p_0$  asupra masei  $m$ .

Factorii dinamic  $R_d$ ,  $R_v$  și  $R_a$  sunt reprezentați funcție de raportul  $\omega/\omega_n$  în Figura 2.27. Se pot observa următoarele:

- Factorul dinamic pentru deplasare  $R_d$  este egal cu 1 pentru  $\omega/\omega_n = 0$ , are valoarea maximă pentru  $\omega/\omega_n < 1$  și tinde către zero pentru  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$
- Factorul dinamic pentru viteză  $R_v$  este egal cu 0 pentru  $\omega/\omega_n = 0$ , are valoarea maximă pentru  $\omega/\omega_n = 1$  și tinde către zero pentru  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$

- Factorul dinamic pentru accelerație  $R_a$  este egal cu 0 pentru  $\omega/\omega_n = 0$ , are valoarea maximă pentru  $\omega/\omega_n > 1$  și tinde către 1 pentru  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$
- Pentru  $\zeta > 1/\sqrt{2}$  factorii  $R_d$  și  $R_a$  nu înregistrează vârfuri.

Relația simplă între cei trei factori dinamici:

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d \quad (2.76)$$

permite reprezentarea celor trei factori pe un singur grafic logaritm (vezi Figura 2.28). Astfel, relația  $R_d - \omega/\omega_n$  este reprezentată în mod similar cu Figura 2.27b, dar folosind o scară logaritmă. Valorile  $R_d$  și  $R_a$  pot fi determinate de pe scările logaritmice diagonale, diferite de scara verticală pentru  $R_v$ . Această reprezentare compactă permite înlocuirea celor trei grafice din Figura 2.27 cu unul singur (Figura 2.28).

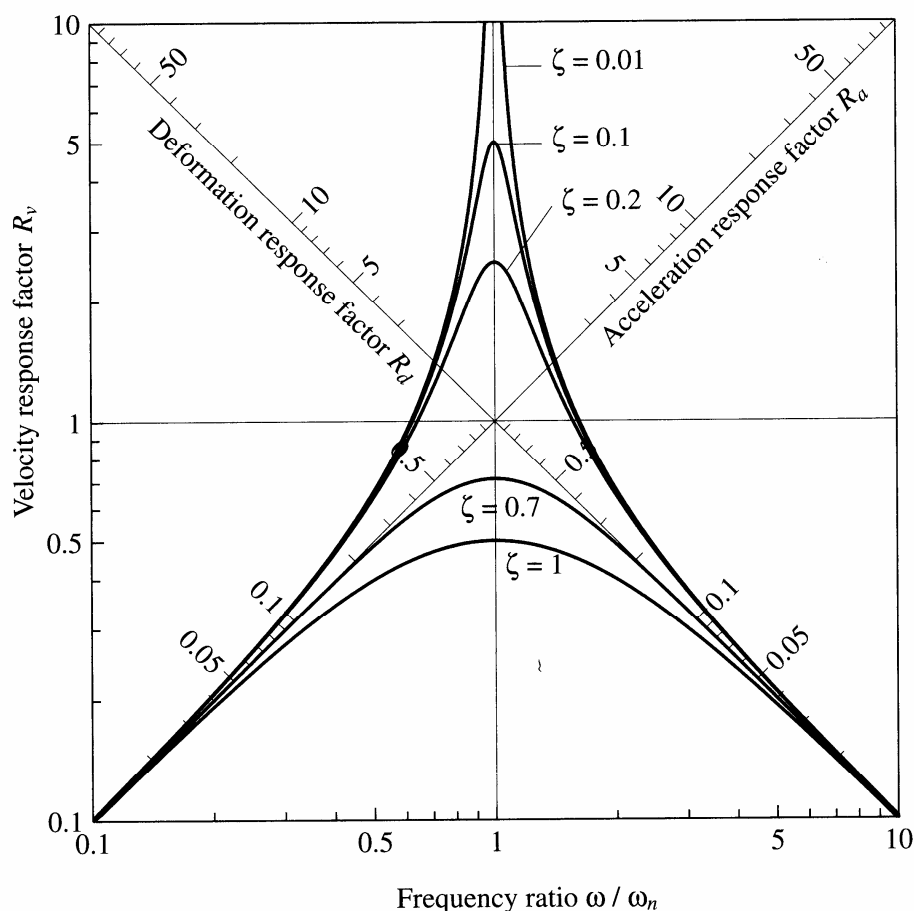


Figura 2.28. Reprezentare folosind un grafic combinat cu patru scări logaritmice a factorilor dinamici pentru deplasare, viteză și accelerație pentru un sistem amortizat excitat de o forță armonică (Chopra, 2001).

### Răspunsul la rezonanță

**Frecvența rezonanță** este definită ca și frecvența la care se înregistrează amplitudinea maximă a răspunsului în termeni de deplasare, viteză sau accelerație. După cum se poate observa din Figura 2.27 valorile maxime ale deplasării, vitezei și accelerației se înregistrează la valori puțin diferite ale pulsației. Frecvențele (sau pulsațiile) de rezonanță pot fi determinate derivând expresiile  $R_d$ ,  $R_v$  și  $R_a$  în raport cu  $\omega/\omega_n$  și egalându-le cu zero. Pentru  $\zeta < 1/\sqrt{2}$  acestea sunt:

- pulsația rezonanță pentru deplasare:  $\omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
- pulsația rezonanță pentru viteză:  $\omega_n$

- pulsația rezonantă pentru accelerație:  $\omega_n / \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Pentru un sistem neamortizat cele trei pulsații rezonante sunt identice și sunt egale cu pulsația proprie de vibrație a sistemului  $\omega_n$ . De notat faptul că pulsațiile rezonante pentru un sistem amortizat sunt diferite de pulsația de vibrații amortizate  $\omega_D$ . Totuși, pentru valori mici ale amortizării ( $\zeta < 20\%$ ), diferențele între pulsația rezonantă, cea proprie și cea amortizată sunt minore. Valoarea factorilor dinamici corespunzător pulsațiilor rezonante ale acestora sunt:

$$R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad R_v = \frac{1}{2\zeta} \quad R_a = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.77)$$

#### Lățimea de bandă la semiputere

**Lățimea de bandă la semiputere** este diferența dintre valorile pulsațiilor de cele două părți ale pulsației rezonante ( $\omega_b - \omega_a$ ) pentru care factorul dinamic pentru deplasări este de  $1/\sqrt{2}$  ori mai mic decât valoarea acestuia la rezonanță. Acest concept este exemplificat în Figura 2.29.

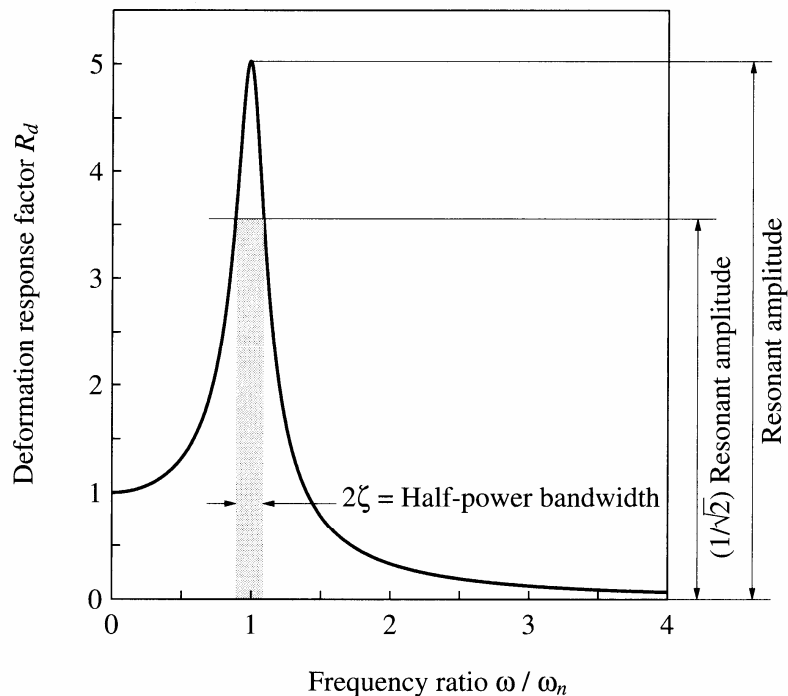


Figura 2.29. Definiția lățimii de bandă la semiputere (Chopra, 2001).

Pentru valori mici ale lui  $\zeta$  este adevărată următoarea relație:

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_n} = 2\zeta \quad (2.78)$$

relație care poate fi reformulată ca și:

$$\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_n} \quad \text{sau} \quad \zeta = \frac{f_b - f_a}{2f_n} \quad (2.79)$$

unde  $f = \omega/2\pi$  este frecvența de vibrație. Acest rezultat permite evaluarea amortizării unei structuri pe baza unor încercări de vibrații forțate.

### 2.3.3. Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe arbitrare

#### Răspunsul sub acțiunea unui impuls unitar

O **forță de tip impuls** este o forță care are o valoare mare și acționează pentru o perioadă foarte scurtă. În Figura 2.30a este reprezentată o forță  $p(t) = 1/\varepsilon$  de durată  $\varepsilon$  și care începe la timpul  $t = \tau$ . Pentru valoarea  $\varepsilon \rightarrow 0$  forța tinde către  $\infty$ , dar **mărimea impulsului forței**, definit ca și integrala funcției  $p(t)$  rămâne egală cu unitatea. O astfel de forță pentru cazul  $\varepsilon \rightarrow 0$  se numește un impuls unitar.

Conform legii a 2-a a lui Newton, dacă o forță  $p$  acționează asupra unei mase  $m$ , variația cantității de mișcare (sau a impulsului punctului material) este egală cu forța aplicată:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{u}) = p \quad (2.80)$$

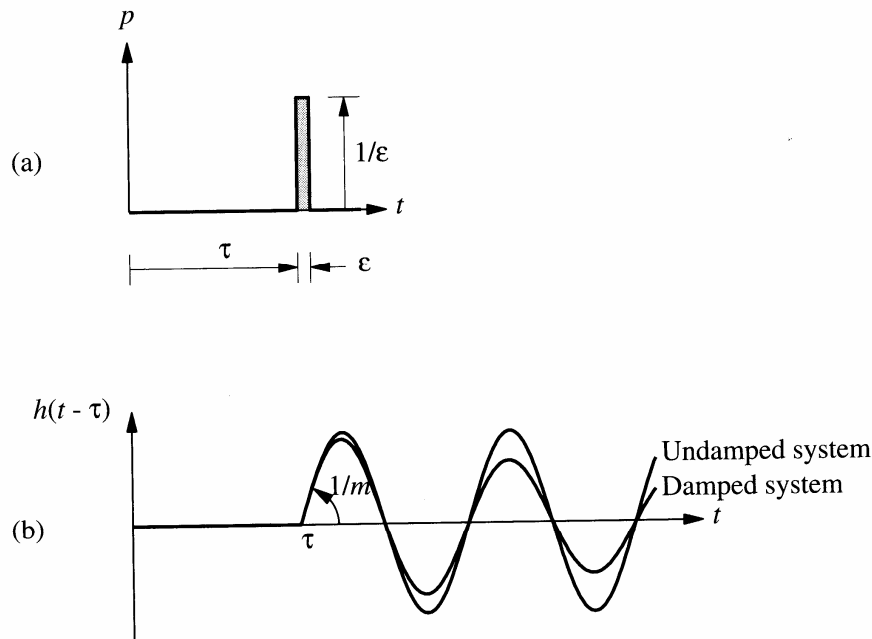


Figura 2.30. Un impuls unitar (a) și răspunsul sub acțiunea unui impuls unitar (b), Chopra, 2001.

Pentru o masă constantă această ecuație devine:

$$m\ddot{u} = p \quad (2.81)$$

Integrând ambele părți în raport cu timpul obținem:

$$\int_{t_1}^{t_2} p dt = m(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m\Delta\dot{u} \quad (2.82)$$

Integrala din partea stângă a ecuației reprezintă mărimea impulsului forței, iar produsul dintre masă și viteză este cantitatea de mișcare (impulsul punctului material). Astfel, ecuația (2.82) arată că mărimea impulsului este egală cu variația cantității de mișcare.

Acest rezultat este valabil și pentru sisteme cu un singur grad de libertate dinamică, atunci când forța acționează pe o durată infinitezimală, deoarece nici rigiditatea și nici amortizarea nu au timp să fie implicate în mișcare. De aceea, folosind ecuația (2.82), un impuls unitar la timpul  $t = \tau$  va imprimă masei  $m$  viteza:

$$\dot{u}(\tau) = \frac{1}{m} \quad (2.83)$$

iar deplasarea este egală cu zero până în momentul acționării impulsului:

$$u(\tau) = 0 \quad (2.84)$$

Un impuls unitar va genera vibrații libere unui sistem SGLD din cauza vitezei și deplasării inițiale date de relațiile (2.83) și (2.84). Înlocuind cele două relații în ecuația (2.18) obținem răspunsul unui sistem neamortizat sub acțiunea unui impuls unitar:

$$h(t-\tau) \equiv u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \sin[\omega_n(t-\tau)] \quad t \geq \tau \quad (2.85)$$

În mod similar pe baza ecuației (2.29) obținem răspunsul unui sistem amortizat sub acțiunea unui impuls unitar:

$$h(t-\tau) \equiv u(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] \quad t \geq \tau \quad (2.86)$$

Aceste funcții de răspuns la acțiunea unui impuls unitar, notate cu  $h(t-\tau)$  sunt arătate în Figura 2.30b.

### Răspunsul sub acțiunea unei forțe arbitrare

O forță  $p(t)$  care variază arbitrar cu timpul poate fi reprezentată ca și o serie de impulsuri infinitezimale (vezi Figura 2.31). Răspunsul unui sistem liniar elastic dinamic sub acțiunea unui impuls de mărime  $p(\tau)d\tau$  aplicat la momentul de timp  $\tau$  este egal cu produsul dintre mărimea impulsului și răspunsul unui impuls unitar:

$$du(t) = [p(\tau)d\tau]h(t-\tau) \quad t > \tau \quad (2.87)$$

iar răspunsul sistemului la timpul  $t$  este egal cu suma răspunsurilor tuturor impulsurilor până în acel moment (vezi Figura 2.31):

$$u(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.88)$$

rezultat care este cunoscut sub denumirea de **integrală de convoluție** și este aplicabilă oricărui sistem dinamic.

Înlocuind relația (2.86) în ecuația (2.88) obținem **integrala Duhamel** pentru un sistem SGLD amortizat:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)]d\tau \quad (2.89)$$

și pentru un sistem amortizat devine:

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau \quad (2.90)$$

Ecuația este valabilă numai pentru condiții inițiale "de repaos":  $u(0) = 0$  și  $\dot{u}(0) = 0$ . Integrala Duhamel reprezintă o metodă generală de determinare a răspunsului dinamic sub acțiunea unei forțe arbitrare  $p(t)$ . Deoarece integrala de convoluție se bazează pe principiul suprapunerii efectelor, integrala Duhamel este valabilă numai pentru sisteme liniar elastice. Dacă forța  $p(t)$  este o funcție simplă integrala se poate evalua analitic. Pentru încărcări dinamice complicate sau care sunt definite numeric la valori de timp discrete, integrala Duhamel poate fi integrată numeric.



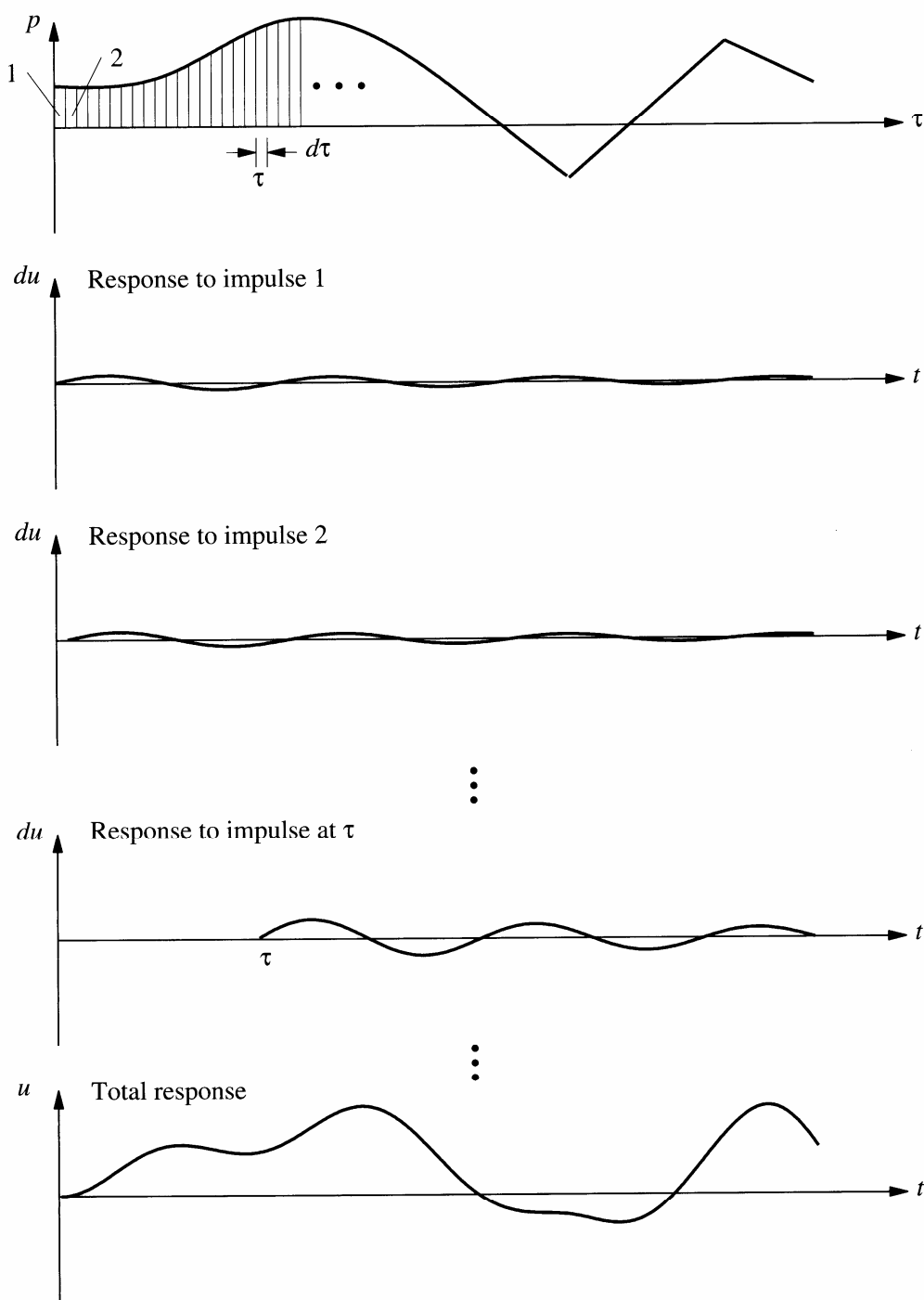


Figura 2.31. Demonstrarea grafică a integralei de convoluție (Chopra, 2001).

### 2.3.4. Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip treaptă și rampă

Spre deosebire de forțele perturbatoare armonice, răspunsul dinamic sub acțiunea unor forțe de tip treaptă, rampă și impuls este influențat într-o măsură foarte mică de amortizarea sistemului. Din această cauză analiza răspunsului dinamic în aceste din urmă cazuri va fi demonstrat în principal pe baza vibrațiilor neamortizate.

*Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip treaptă*

O forță de tip treaptă este exemplificată în Figura 2.32a și este definită de următoarea relație:

$$p(t) = p_0 \quad t \geq 0 \quad (2.91)$$

Folosind integrala Duhamel (2.90) pentru rezolvarea ecuației de mișcare a unui sistem SGLD neamortizat se obține:

$$u(t) = (u_{st})_0 (1 - \cos \omega_n t) = \frac{p_0}{k} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T_n} \right) \quad (2.92)$$

unde  $(u_{st})_0 = p_0/k$  este deformația statică sub acțiunea forței  $p_0$ .

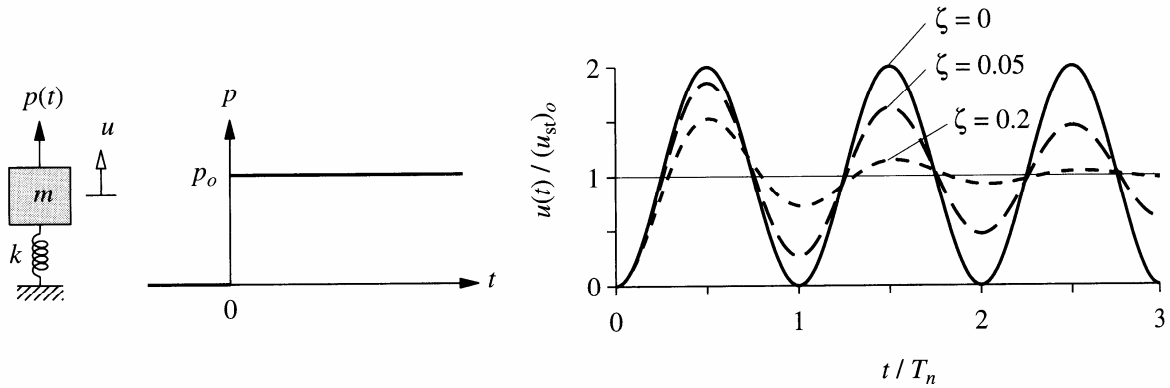


Figura 2.32. Un sistem SGLD (a), forța de tip treaptă (b), răspunsul dinamic (c), Chopra, 2001.

Deplasarea normalizată  $u(t)/(u_{st})_0$  în raport cu timpul normalizat  $t/T_n$  este reprezentată în Figura 2.32c. Se poate observa că sistemul oscilează în jurul unei noi poziții de echilibru, deplasată cu  $(u_{st})_0$  față de poziția inițială  $u = 0$ . Deplasarea maximă poate fi obținută egalând derivata ecuației (2.92) în raport cu timpul cu zero, ceea ce conduce la  $\omega_n \sin \omega_n t = 0$ . Această ecuație are soluția:

$$\omega_n t_0 = j\pi \quad \text{sau} \quad t_0 = \frac{j}{2} T_n \quad (2.93)$$

Deplasarea maximă corespunde unor valori impare ale lui  $j$ , în timp ce valorile pare conduc la deplasările minime. Amplitudinea deplasării se obține din ecuația (2.92) în care se înlocuiesc valorile  $t_0$  din relația (2.93):

$$u_0 = 2(u_{st})_0 \quad (2.94)$$

rezultat care indică faptul că o forță de tip treaptă aplicată dinamic produce o deplasarea care este de două ori mai mare decât deplasarea datorată aceleiași forțe aplicată static.

Răspunsul unui sistem amortizat sub acțiunea forței de tip treaptă poate fi obținut substituind relația (2.91) în ecuația (2.89) și evaluând integrala Duhamel, ceea ce conduce la:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left[ 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left( \cos \omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_D t \right) \right] \quad (2.95)$$

Răspunsul dinamic al sistemului amortizat este reprezentat în Figura 2.32 cu linii întrerupte pentru două valori ale fracțiunii din amortizarea critică. Efectul amortizării este o depășire mai mică a mișcării față de poziția statică și o descreștere în timp a vibrațiilor. Valoarea amortizării controlează mărimea depășirii și rata cu care scad amplitudinile vibrațiilor. După un timp suficient de mare, vibrațiile se opresc, fapt care reprezintă stadiul staționar.

#### Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip rampă

O forță de tip rampă este exemplificată în Figura 2.33a și este definită de următoarea relație:

$$p(t) = p_0 \frac{t}{t_r} \quad t \geq 0 \quad (2.96)$$

Folosind integrala Duhamel (2.90) pentru rezolvarea ecuației de mișcare a unui sistem SGLD neamortizat se obține:

$$u(t) = (u_{st})_0 \left( \frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r} \right) = (u_{st})_0 \left( \frac{t}{T_n} \frac{T_n}{t_r} - \frac{\sin 2\pi t / T_n}{2\pi t_r / T_n} \right) \quad (2.97)$$

unde  $(u_{st})_0 = p_0/k$  este deformația statică sub acțiunea forței  $p_0$ .

Ecuația (2.97) este reprezentată grafic în Figura 2.33c pentru  $t_r/T_n=2.5$ , împreună cu deformația statică în momentul  $t$ :

$$u_{st}(t) = \frac{p(t)}{k} = (u_{st})_0 \frac{t}{t_r} \quad (2.98)$$

Se poate observa că sistemul dinamic oscilează cu perioada  $T_n$  față de poziția de echilibru static.

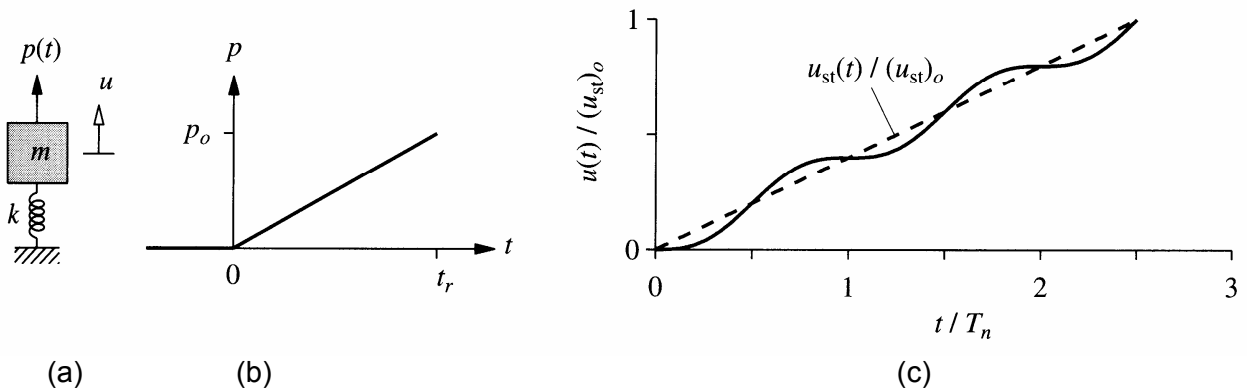


Figura 2.33. Un sistem SGLD (a), forța de tip rampă (b), răspunsul dinamic și cel static (c), Chopra, 2001.

### Răspunsul dinamic sub acțiunea unei forțe de tip treaptă cu creștere finită

Deoarece în realitate o forță nu poate fi aplicată instantaneu, este de interes analiza răspunsului dinamic al unei forțe care are o creștere finită  $t_r$ , dar rămâne constantă după atingerea acestei valori. O astfel de forță este exemplificată în Figura 2.34a:

$$p(t) = \begin{cases} p_0(t/t_r) & 0 \leq t \leq t_r \\ p_0 & t \geq t_r \end{cases} \quad (2.99)$$

Această excitație are două faze: faza de rampă și faza constantă.

Expresia deplasării în faza de rampă este cea identică relației (2.97):

$$u(t) = (u_{st})_0 \left( \frac{t}{t_r} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n t_r} \right) \quad t \leq t_r \quad (2.100)$$

iar răspunsul în faza constantă poate fi determinat înlocuind relația (2.99) în ecuația (2.90):

$$u(t) = (u_{st})_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\omega_n t_r} [\sin \omega_n t - \sin \omega_n (t - t_r)] \right\} \quad t \geq t_r \quad (2.101)$$

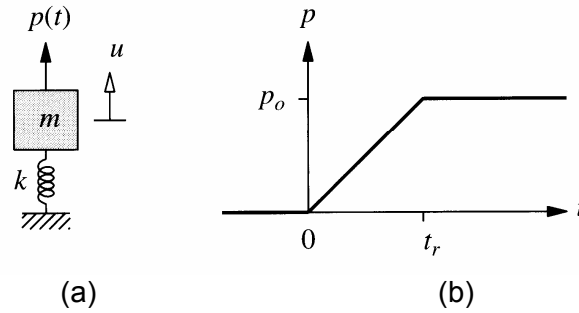


Figura 2.34. Un sistem SGLD (a), forța de tip treaptă cu creștere finită (b), Chopra, 2001.

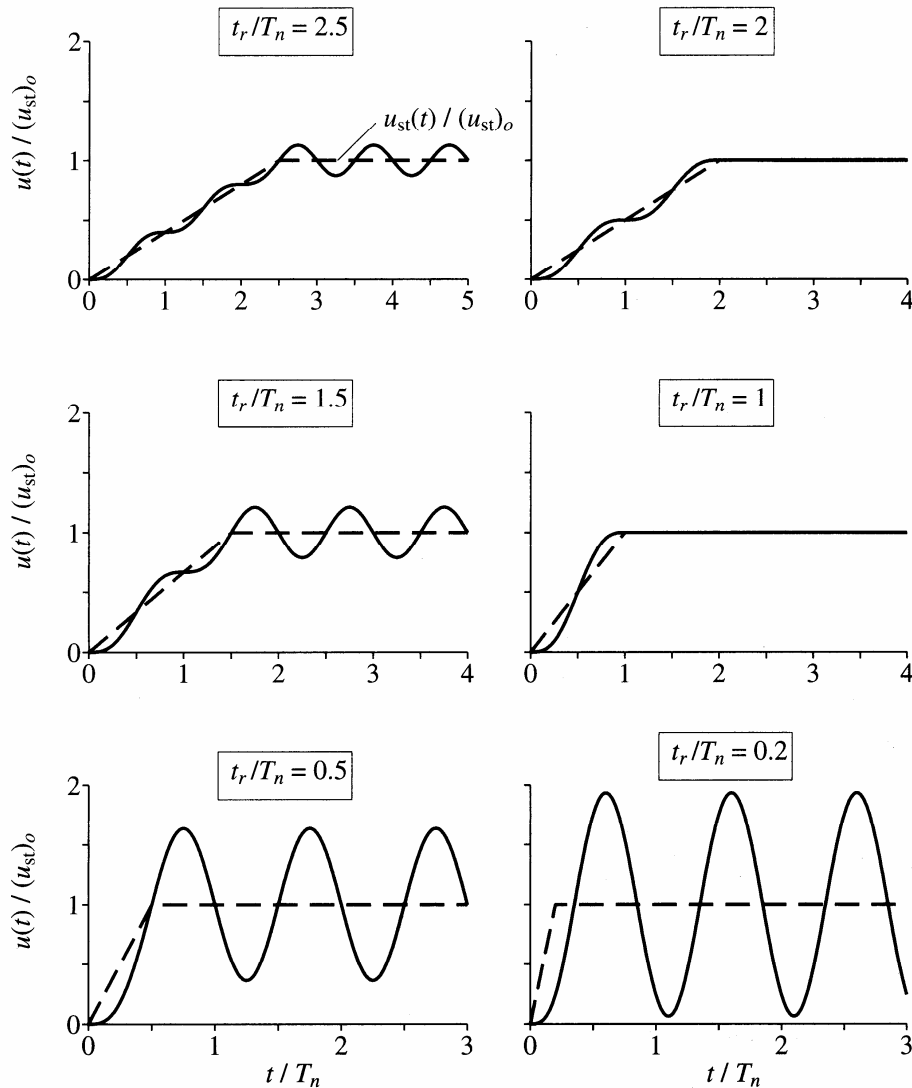


Figura 2.35. Răspunsul dinamic și cel static al unui sistem SGLD sub acțiunea unei forțe tip treaptă cu creștere finită (Chopra, 2001).

Deplasarea normalizată  $u(t)/(u_{st})_0$  este o funcție de timpul normalizat  $t/T_n$ , deoarece  $\omega_n t = 2\pi(t/T_n)$ . Această funcție depinde doar raportul  $t_r/T_n$ , deoarece  $\omega_n t_r = 2\pi(t_r/T_n)$  și nu separat de  $t_r$  și  $T_n$ . Această ecuație este reprezentată în Figura 2.35 pentru câteva valori ale raportului  $t_r/T_n$  dintre timpul de creștere a forței și perioada proprie a sistemului, împreună cu răspunsul static  $u_{st}(t) = p(t)/k$ . Aceste rezultate permit următoarele observații:

- În timpul creșterii forței (faza de rampă) sistemul oscilează față de poziția de echilibru static cu perioada proprie de vibrație  $T_n$

- Pentru zona de forță constantă (faza constantă) sistemul se comportă similar, oscilând față de poziția de echilibru static cu perioada proprie de vibrație  $T_n$
- Dacă viteza este egală cu zero la finalul fazei de rampă  $\dot{u}(t_r) = 0$ , sistemul nu oscilează în timpul fazei de forță constantă
- Pentru valori mici ale raportului  $t_r/T_n$  (timp de creștere a forței mici) răspunsul este similar cu cel datorat unei forțe de tip treaptă (vezi Figura 2.34c)
- Pentru valori mari ale raportului  $t_r/T_n$  răspunsul dinamic este apropiat de poziția de echilibru static, ceea ce semnifică un efect dinamic scăzut.

Deplasarea atinge valoarea maximă în timpul fazei constante de aplicare a forței, iar coeficientul dinamic pentru deplasare are expresia:

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = 1 - \frac{|\sin(\pi t_r / T_n)|}{\pi t_r / T_n} \quad (2.102)$$

Coeficientul dinamic pentru deplasare atinge valoarea maximă  $R_d$  depinde doar de raportul  $t_r/T_n$  dintre timpul de creștere a forței și perioada proprie a sistemului. Reprezentarea grafică a acestei relații (vezi Figura 2.36) se numește **spectru de răspuns** al unei forțe de tip treaptă cu creștere finită.

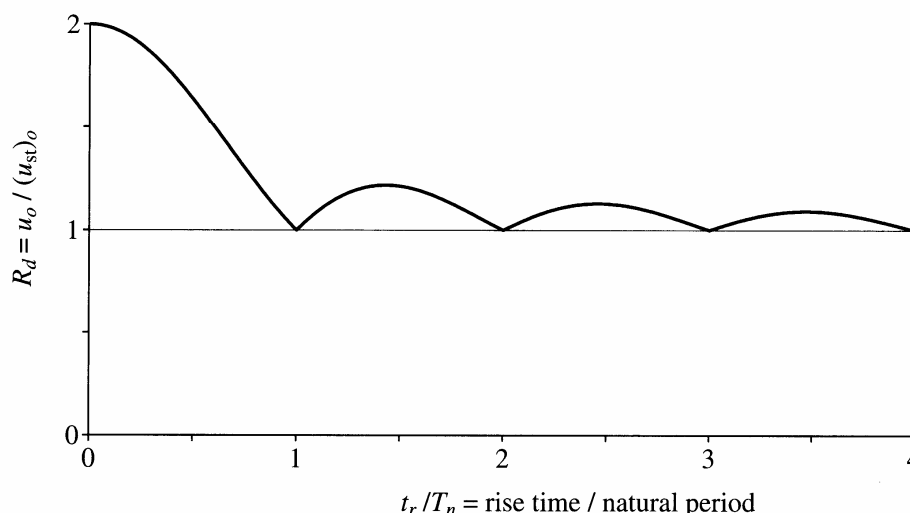


Figura 2.36. Spectrul de răspuns pentru forța de tip treaptă cu creștere finită (Chopra, 2001).

Spectrul de răspuns caracterizează complet amplitudinea răspunsului dinamic pentru orice sistem SGLD fără amortizare sub acțiunea unei forțe de tip treaptă cu creștere finită. Pe baza spectrului de răspuns din Figura 2.36 pot fi făcute următoarele observații:

- Dacă  $t_r < T_n/4$  (un timp de creștere redus),  $u_0 \approx 2(u_{st})_0$ , adică sistemul "simte" forța perturbatoare ca și o forță aplicată instantaneu (de tip treaptă).
- Dacă  $t_r > 3T_n$  (un timp de creștere mare),  $u_0 \approx (u_{st})_0$ , adică sistemul "simte" forța perturbatoare ca și o forță aplicată static.
- Dacă  $t_r/T_n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $u_0 = (u_{st})_0$ , deoarece  $\dot{u}(t_r) = 0$  iar sistemul nu oscilează pe durata fazei constante de încărcare (vezi Figura 2.35).