3.6. Răspunsul inelastic al sistemelor SGLD

3.6.1. Introducere

Conform practicii actuale, majoritatea structurilor sunt proiectate pentru forțe seismice inferioare celor care ar asigura un răspuns elastic în timpul unui cutremur major. Această abordare are la baza două rațiuni:

- pentru multe tipuri de construcții civile este în general neeconomică proiectarea structurilor în domeniul elastic din încărcarea seismică
- în trecut, structurile proiectate pentru forțe mai mici decât cele care ar fi asigurat un răspuns elastic, au supraviețuit unor cutremure majore

Astfel, majoritatea structurilor vor suferi deformații inelastice sub acțiunea unui cutremur major. De aceea, este importantă înțelegerea comportării seismice a sistemelor inelastice. În Figura 3.13a este prezentată comportarea reală a unui sistem inelastic şi idealizarea elasto-plastică a acestuia. Una dintre modalitățile de determinarea a curbei elasto-plastice idealizate este prin egalarea ariilor sub curba reală şi cea idealizată până la **deplasarea maximă** u_m. Un sistem elasto-plastic are un comportament liniar elastic cu rigiditatea k până la atingere **forței de curgere** f_y la **deplasarea de curgere** u_y, după care structura se deformează la o forță constantă f_y (rigiditatea fiind zero). Un sistem elasto-plastic acționat de o mişcare seismică va avea un comportament ciclic, reprezentat schematic în Figura 3.13b.

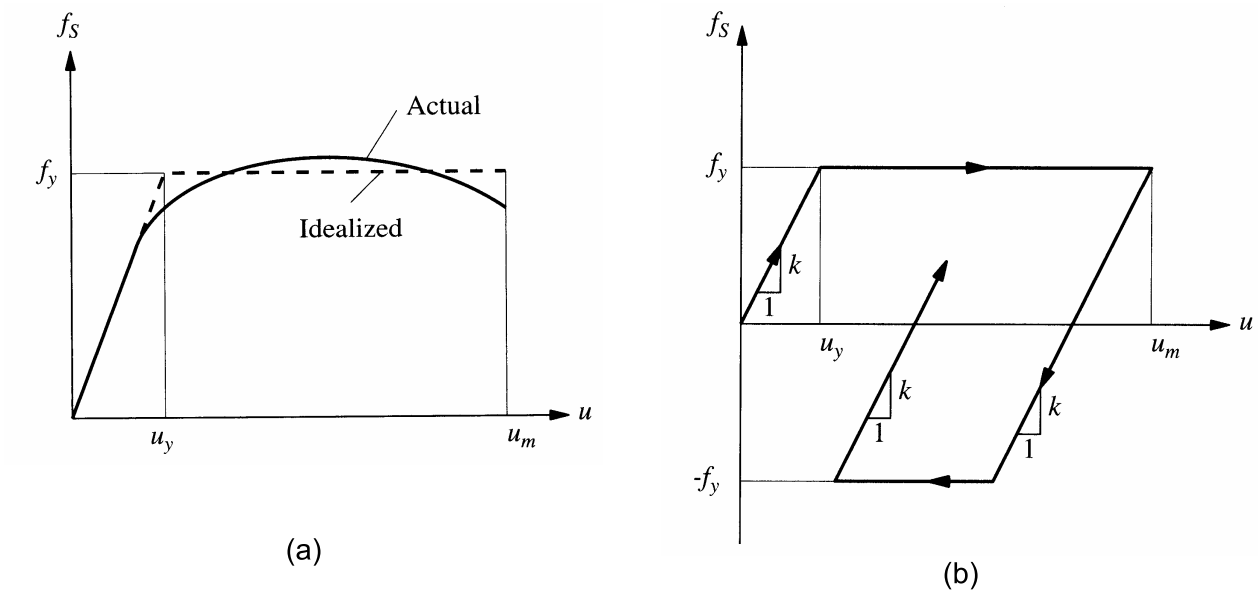

Figura 3.13. Relația forță-deplasare pentru un sistem inelastic: comportarea reală şi idealizarea acesteia (a); relația forță-deplasarea ciclică pentru un sistem elasto-plastic (b), Chopra, 2001.

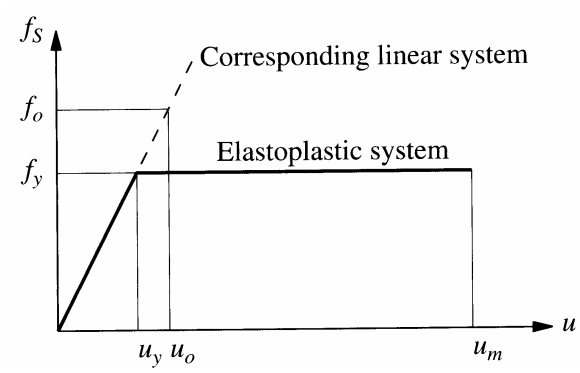

Figura 3.14. Sistemul elasto-plastic şi corespondentul său elastic (Chopra, 2001).

Pentru a înțelege răspunsul seismic al unui sistem SGLD elasto-plastic, este utilă comparația acestuia cu răspunsul unui ***sistem corespunzător elastic***. Acest sistem are aceiaşi rigiditate inițială cu cea a sistemului elasto-plastic, precum şi aceiaşi amortizare şi masă (vezi Figura 3.14). În consecință, cele două sisteme vor avea aceiaşi perioadă proprie de vibrație (doar pentru deformații mici, perioada proprie de vibrație a sistemului inelastic nefiind definită după curgere).

Pentru a caracterizarea răspunsul inelastic pot fi introduse câteva notații: **forța de curgere normalizată** $\overline{f_y}$, **factorul de reducere al forței de curgere** R_y, şi **factorul de ductilitate** μ:

$$\overline{f_y} = \frac{f_y}{f_0} = \frac{u_y}{u_0} \tag{3.12}$$

$$R_y = \frac{f_0}{f_y} = \frac{u_0}{u_y} = \frac{1}{\overline{f_y}} \tag{3.13}$$

$$\mu = \frac{u_m}{u_y} \tag{3.14}$$

unde f_0 şi u_0 sunt valorile de vârf ale forței şi deplasării în sistemul elastic corespunzător. Mărimea f_0 poate fin interpretată ca şi valoarea minimă a forței de curgere f_y necesară pentru a asigura un răspuns elastic al unui sistem SGLD. Dacă forța de curgere normalizată este subunitară, sistemul SGLD va suferi deformații plastice. Factorul de reducere al forței de curgere este valoarea inversă a forței de curgere normalizate. Astfel, un sistem va suferi deformații inelastice dacă R_y>1. Factorul de ductilitate este supraunitar pentru sisteme care au depăşit deplasarea de curgere şi este o măsură adimensională a gradului de deformare inelastică a sistemului.

Ecuația de mişcare pentru un sistem SGLD inelastic sub efectul mişcării seismice este:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_S(u,\dot{u}) = -m\ddot{u}_g \tag{3.15}$$

Împărțind ecuația (3.15)cu m obținem:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u_y \tilde{f}_S(u,\dot{u}) = -\ddot{u}_g \tag{3.16}$$

unde $\tilde{f}_S(u,\dot{u}) = f_S(u,\dot{u})/f_y$. Ecuația (3.16)demonstrează că, pentru o mişcare seismică $\ddot{u}_g(t)$ dată, răspunsul seismic al unui sistem SGLD inelastic depinde de pulsația proprie de vibrație ω_n, fracțiunea din amortizarea critică ζ, deplasarea de curgere u_y şi forma relației forță-deplasare $\tilde{f}_S(u,\dot{u})$.

3.6.2. Efectul comportării elasto-plastice

În Figura 3.15 sunt prezentate patru sisteme SGLD cu aceiaşi perioadă proprie de vibrație (T_n=0.5 sec), amortizare (ζ=5%), dar cu forțe de curgere diferite ($\overline{f_y}$=1.0, 0.5, 0.25, 0.125), supuse accelerogramei El Centro. Primul dintre acestea ($\overline{f_y}$=1.0) reprezintă un sistem liniar elastic, celelalte trei reprezentând sisteme elasto-plastice cu forțe de curgere descrescătoare ($\overline{f_y}$=0.5, 0.25, 0.125).

Sistemul liniar elastic oscilează față de poziția de echilibru inițială, având o deplasare de vârf de 2.25 țoli. Datorită amortizării, după încetarea mişcării seismice oscilațiile încetează, deformația permanentă u_p=0.

Sistemele inelastice intră în curgere ca urmare a oscilațiilor induse de mişcarea seismică. Cu cât forța de curgere este mai mică, cu atât sistemele intră în curgere mai des şi pentru perioade mai lungi de timp. Datorită curgerii, sistemele inelastice sunt deplasate față de poziția de echilibru inițială, sistemul oscilând față de o nouă poziție de echilibru. Datorită acestui fenomen, sistemele inelastice nu revin la poziția inițială după încetarea oscilațiilor, ci au o deformație permanentă u_p≠0. Această deformație permanentă este în general cu atât mai mare, cu cât forța de curgere a sistemului este mai mică. Astfel, o structură care a suferit deformații plastice în urma unui cutremur de pământ s-ar putea să aibă o poziție deviată de la verticală după încetarea mişcării seismice. Pentru acest exemplu concret (accelerograma El Centro şi un sistem cu T_n=0.5) deplasarea de vârf a sistemelor inelastice este mai mică decât deplasarea de vârf a sistemului elastic. Acest aspect nu are un caracter general, deplasarea de vârf a sistemelor inelastice fiind afectate într-o mare măsură de perioada proprie de vibrație T_n şi caracteristicile mişcării seismice, şi într-o mai mică măsură de amortizare.

Factorul de ductilitate poate fi determinat folosind ecuația (3.14). Pentru sistemul cu $\overline{f_y}$=0.25, factorul de ductilitate este egal cu 3.11 şi reprezintă **cerința de ductilitate** impusă sistemului. Pentru ca un sistem inelastic să nu cedeze, cerința de ductilitate impusă de o mişcare seismică trebuie să fie mai mică decât **ductilitatea capabilă**.

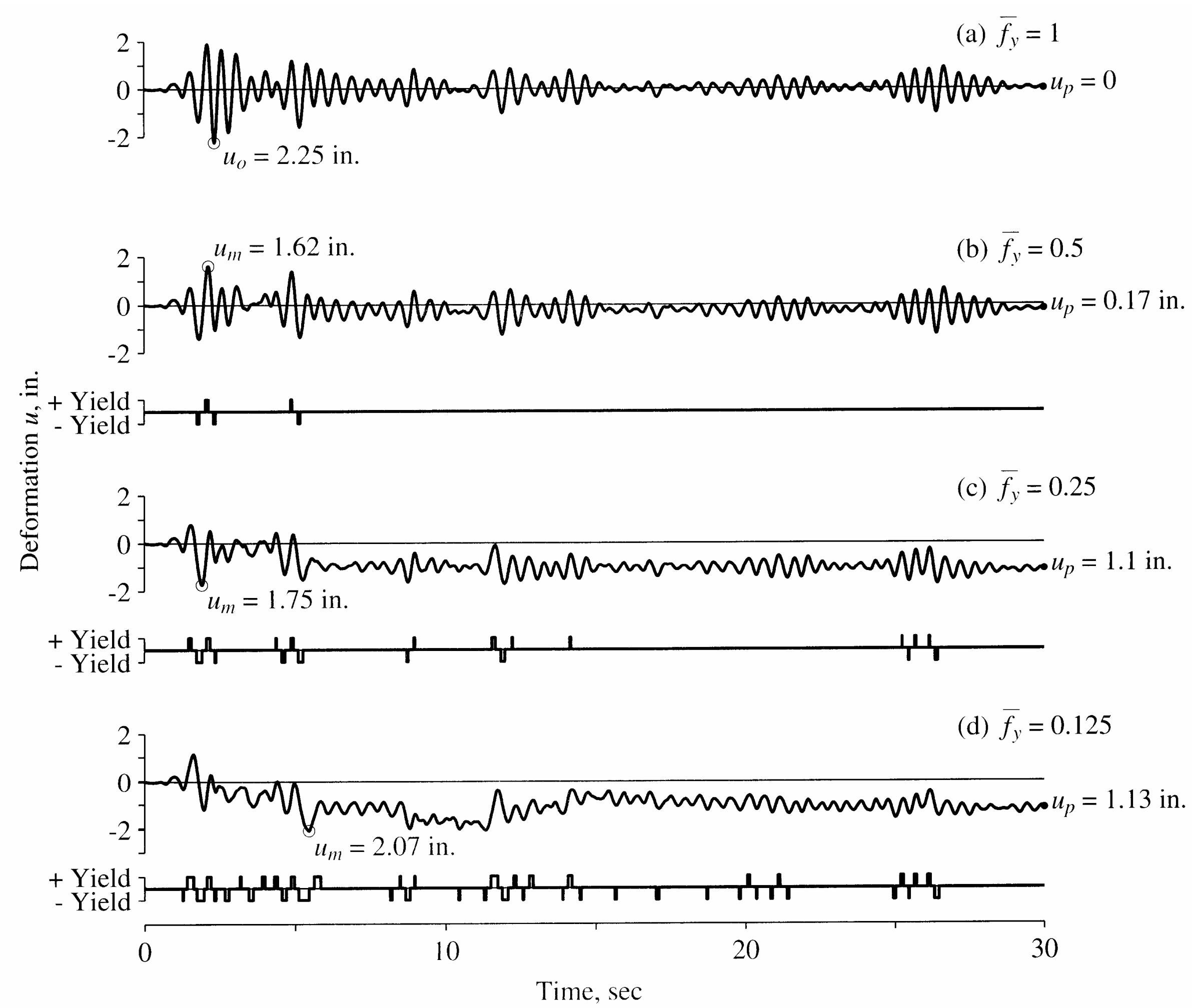

Figura 3.15. Răspunsul seismic a patru sisteme SGLD cu T_n=0.5 sec, ζ=5% şi $\overline{f_y}$=1.0, 0.5, 0.25, 0.125 sub acțiunea înregistrării El Centro (Chopra, 2001).

3.6.3. Relația dintre ductilitate μ factorul de reducere R_y

Raportul între deplasarea de vârf a sistemului inelastic şi cea a sistemului elastic corespunzător u_m/u_0 este exemplificată în Figura 3.16 pentru patru sisteme SGLD cu T_n=0.5 sec, ζ=5% şi $\overline{f_y}$=1.0, 0.5, 0.25, 0.125 sub acțiunea înregistrării El Centro. Pot fi evidențiate următoarele observații pentru diverse perioade proprii de vibrație:

- Pentru sisteme foarte flexibile (T_n>T_f) deplasarea de vârf a sistemului inelastic u_m este independentă de $\overline{f_y}$ şi este apropiată de deplasarea de vârf a sistemului elastic corespunzător u_0.

- Pentru sisteme cu perioade proprii de vibrație în domeniile de sensibilitate la viteză şi deplasare (T_n>T_c) deplasarea de vârf a sistemului inelastic u_m variază funcție de $\overline{f_y}$ şi poate fi mai mică sau mai mare decât deplasarea de vârf a sistemului elastic corespunzător u_0.
- Pentru sisteme cu perioade proprii de vibrație în domeniul de sensibilitate la accelerație (T_n<T_c) deplasarea de vârf a sistemului inelastic u_m este apreciabil mai mare decât deplasarea de vârf a sistemului elastic corespunzător u_0, raportul u_m/u_0 fiind mai mare pentru valori mai mici ale $\overline{f_y}$.

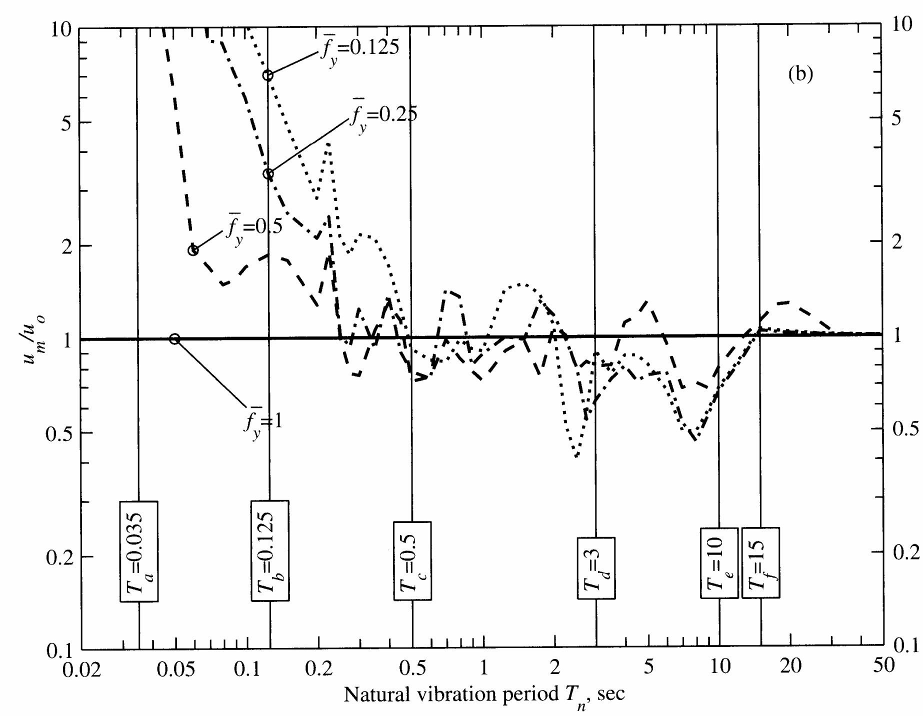

Figura 3.16. Raportul u_m/u_0 pentru patru sisteme SGLD cu T_n=0.5 sec, ζ=5% şi $\overline{f_y}$ =1.0, 0.5, 0.25, 0.125 sub acțiunea înregistrării El Centro (Chopra, 2001).

Pe baza observațiilor anterioare, au fost propuse diverse idealizări care să poată fi aplicate în practica curentă de proiectare. Astfel, pentru sisteme SGLD inelastice având perioada proprie în domeniul sensibil la viteză şi deplasare, se poate considera că deplasarea de vârf a sistemului inelastic este egală cu deplasarea de vârf a sistemului elastic corespunzător (u_m/u_0=0), principiu cunoscut sub denumirea de "deplasări egale", vezi (Figura 3.17a). Pentru acest caz se poate arăta că R_y=μ. Pentru sisteme cu perioada proprie de vibrație în domeniul de sensibilitate la accelerație, este acceptat principiul "energiilor egale", ceea ce implică egalitatea dintre aria de sub curba forță deplasare a sistemului elastic cu aria de sub curba forță-deplasare a sistemului inelastic (Figura 3.17b), raportul u_m/u_0 rezultând supraunitar. În acest caz se poate arăta că $R_y = \sqrt{2\mu - 1}$. Pentru sisteme cu perioada proprie de vibrație foarte mică (T_n<T_a) deformațiile sunt foarte mici, sistemul având un comportament în esență elastic, rezultând R_y=1. Relația dintre factorul de reducere R_y, perioada proprie de vibrație T_n şi ductilitatea μ este exprimată sintetic în următoarea relație:

$$R_y = \begin{cases} 1 & T_n < T_a \\ \sqrt{2\mu - 1} & T_b < T_n < T_{c'} \\ \mu & T_n > T_c \end{cases} \tag{3.17}$$

Pentru determinarea factorului de reducere R_y între T_a şi T_b, respectiv $T_{c'}$ şi T_c se foloseşte interpolarea liniară. Relația (3.17) este reprezentată grafic în Figura 3.18 şi exprimă valoarea factorului de reducere R_y care poate fi folosit la proiectarea unei structuri cu perioada proprie de vibrație T_n şi care posedă o capacitate de ductilitate μ dată. Aceiaşi relație poate fi interpretată şi ca cerința de ductilitate μ a unui sistem cu perioada proprie de vibrație T_n caracterizată de un factor de reducere R_y dat.

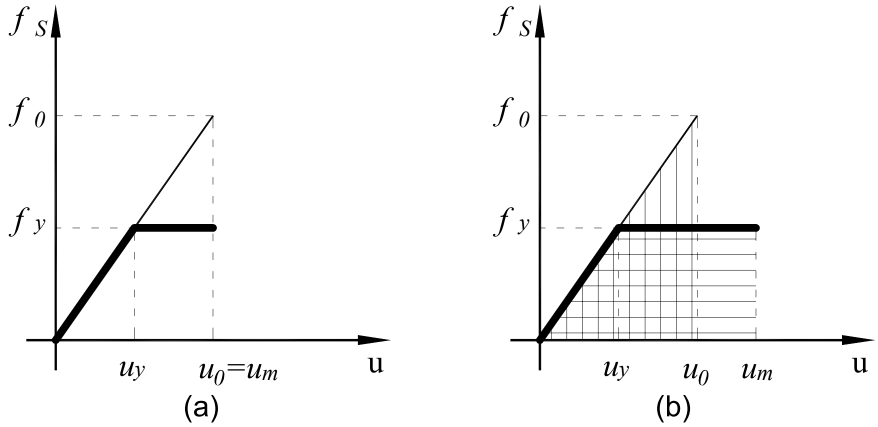

Figura 3.17. Principiul "deplasărilor egale" (a) şi cel al "energiilor egale" (b) în relația dintre deplasarea de vârf a unui sistem inelastic şi a sistemului elastic corespunzător.

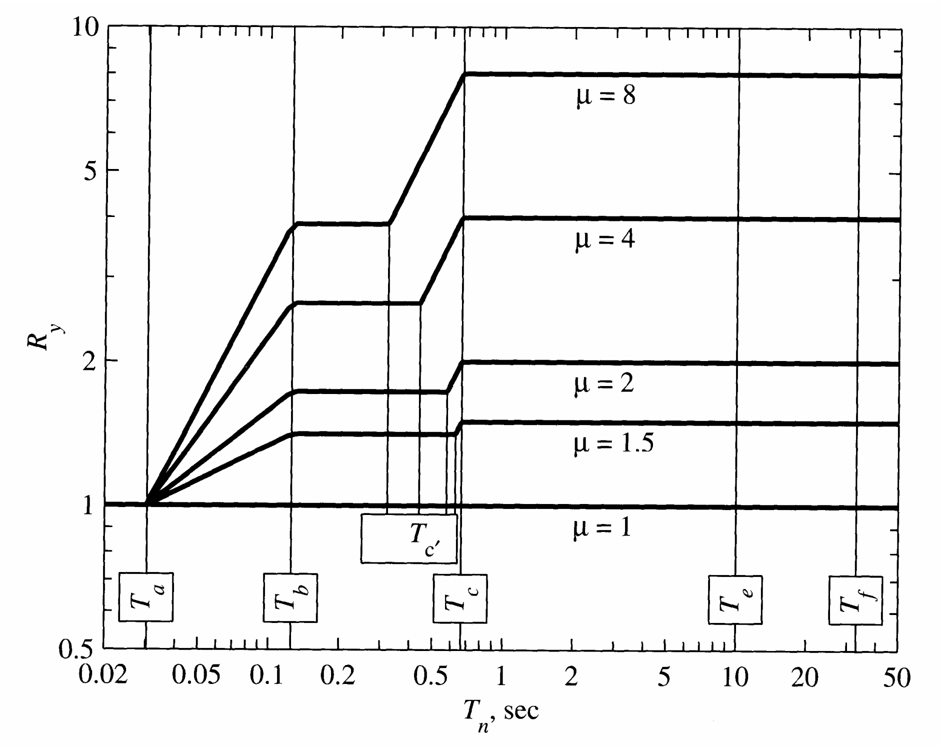

Figura 3.18. Relația idealizată între factorul de reducere R_y şi ductilitate μ (Chopra, 2001).

3.7. *Factorii care influențează mişcarea seismică*

Principalii factori care influențează mişcarea seismică într-un amplasament pot fi grupați în patru categorii: (1) factori de sursă, (2) propagarea undelor seismice, (3) factori locali de amplasament, (4) interacțiunea teren-structură (vezi Figura 3.19).

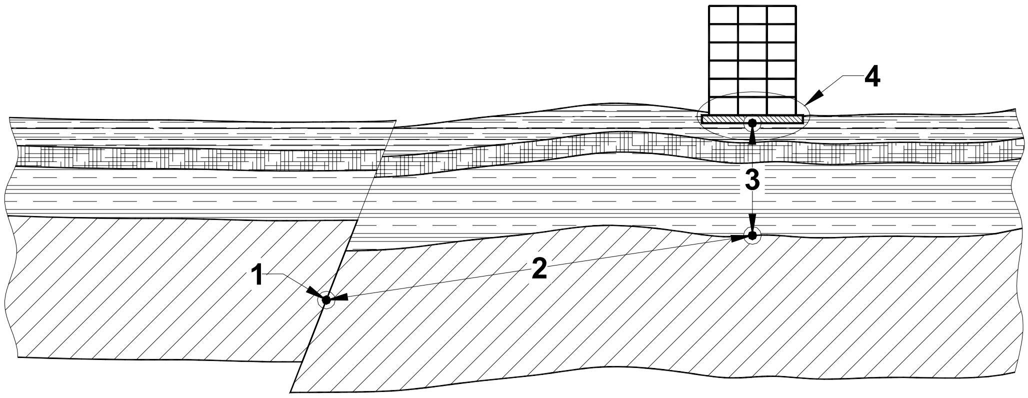

Figura 3.19. Principalii factorii ce caracterizează mişcarea seismică într-un amplasament (1 – factori de sursă; 2 – efectul propagării undelor seismice; 3 – factorii de amplasament; 4 – interacțiunea teren-structură).

3.7.1. Factorii de sursă

Factorii de sursă includ tipul de regim tectonic (cutremure inter-placă sau intra-placă), magnitudinea cutremurului, cât şi tipul de falie (transcurentă, normală, inversă, oblică), precum şi fenomenul de directivitate pentru cutremurele locale.

3.7.2. Factorii de propagare

Propagarea energiei emise de o sursă seismică are loc prin intermediul undelor de volum (P şi S), care pot fi directe, reflectate şi refractate, şi a undelor de suprafață (Rayleigh şi Love). Înregistrarea efectuată într-un amplasament dat depinde de adâncimea focarului, distanța sursă-receptor şi structura geologică dintre acestea şi este afectată de reflexiile şi refracțiile multiple, difracțiile şi interferențele diferitelor tipuri de unde, împrăştierea, disiparea şi dispersarea undelor seismice. Odată cu creşterea distanței dintre sursă şi amplasament intensitatea mişcării seismice scade, iar durata acesteia creşte. Componenta verticală a mişcării seismice scade cu distanța şi de cele mai multe ori poate fi neglijată în calcul pentru cutremurele îndepărtate, dar poate fi importantă în cazul cutremurelor locale.

3.7.3. Factorii de amplasament

Mişcarea seismică reală dintr-un amplasament dat va diferi însă substanțial de cea determinată pentru roca de bază, funcție de condițiile geotehnice locale, efectele de bazin şi topografie. Schematic, straturile de teren de sub construcție acționează ca şi un oscilator dinamic (Figura 3.20), modificând mişcarea de la nivelul rocii de bază funcție de caracteristicile liniare şi neliniare ale acestuia. Parametri cheie care guvernează amplificarea/deamplificarea mişcării terenului sunt: grosimea, modulul de elasticitate, amortizarea şi viteza undelor de forfecare a stratului de teren moale, impedanța teren/rocă, stratificarea şi proprietățile stratului de teren de la interfața între terenul moale şi roca de bază.

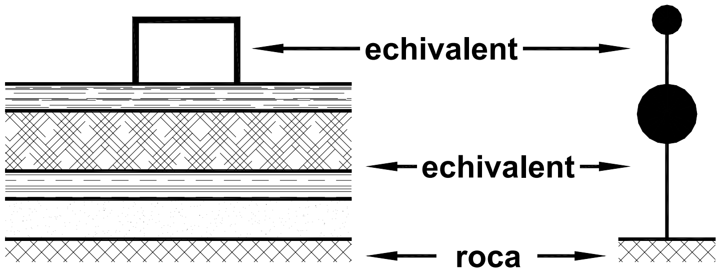

Figura 3.20. Idealizarea straturilor de teren cu un oscilator dinamic, după Whittaker, n.d.

Influența tipului de teren asupra formei spectrului de răspuns al pseudo-accelerației este prezentată în Figura 3.21, conform unor studii statistice efectuate de către Seed şi colab. pe un set de 104 accelerograme înregistrate în SUA, Japonia şi Turcia. Pe baza acestor rezultate pot fi evidențiate două aspecte ale influenței terenului asupra spectrului de răspuns:

- În raport cu roca de bază, terenurile rigide şi cele necoezive sunt caracterizate de o amplificare mai mare a accelerației de vârf a terenului (pseudo-accelerații mai mari în zona de pseudo-accelerație constantă), cât şi de o creştere moderată a perioadei de colț T_c.
- În raport cu roca de bază, terenurile moi sunt caracterizate de o amplificare redusă a accelerației de vârf a terenului, dar de o creştere substanțială a perioadei de colț T_c, ceea ce echivalează cu ordonate spectrale ridicate pentru structuri cu perioade proprie de vibrație T_n>0.5 sec.

În cele mai multe cazuri amplificarea maximă a răspunsului are loc la perioade apropiate de perioada predominantă de vibrație a stratului de teren moale.

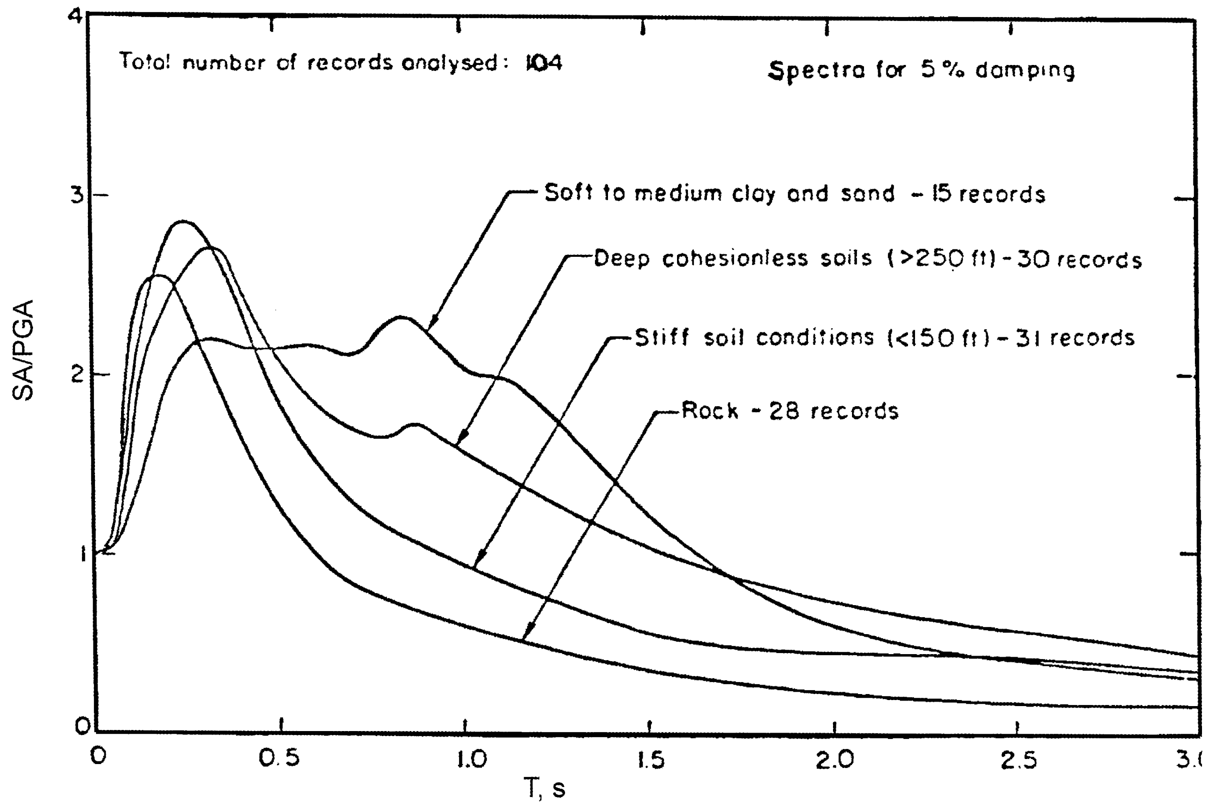

Figura 3.21. Spectre normalizate ale pseudo-accelerației pentru diferite tipuri de teren, după Seed şi colab., 1976, în NEHRP 2000.

O mare parte din efectele unui amplasament asupra caracteristicilor mişcării seismice pot fi explicate prin răspunsul dinamic al straturilor superficiale de teren, presupunând o stratificare orizontală şi folosind un model 1-D de propagare a undelor (vezi Figura 3.22a). Unda incidentă poate să rezoneze în stratul de teren, dar o parte din energie este refractată, limitând efectele amplificării undelor seismice. În cazul unor structuri geologice sedimentare de tip bazin (vezi Figura 3.22b), straturile de teren nu sunt orizontale. Dacă unda seismică intră în bazin prin muchia acestuia, se pot dezvolta unghiuri incidente post-critice, ceea ce duce la "captarea" undei în interiorul bazinului. Efectele unor reflexii multiple sunt amplificarea şi creşterea duratei mişcării seismice. Modelarea acestor efecte necesită o analiză 2-D sau 3-D.

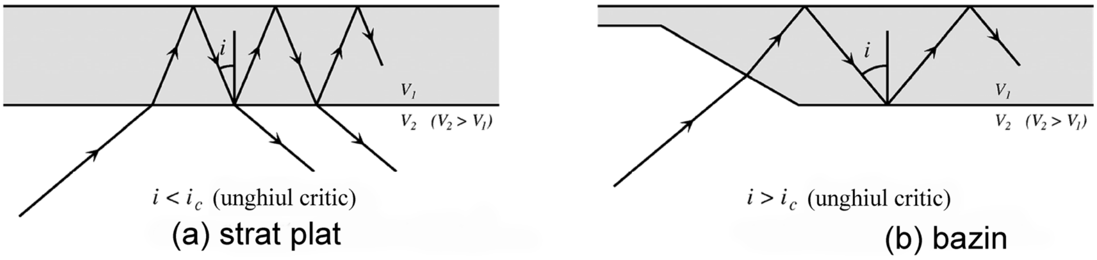

Figura 3.22. Reprezentare schematică a efectului de bazin, după Graves, 1993, în Stewart şi colab., 2001.

Amplificări ale mişcării seismice pot apărea şi în cazul unor suprafeţe topografice neregulate, cum ar fi creasta, canionul şi panta. Un exemplu caracteristic de amplificare a mişcării seismice de către o topografie de tip pantă a fost descris de către Castellani şi colab. (vezi Figura 3.23). Astfel, degradările unei localităţi italiene la cutremurul din Irpinia (1980) au fost mult mai pronunţate în apropiere de coama pantei, faţă de zonele mai îndepărtate de aceasta.

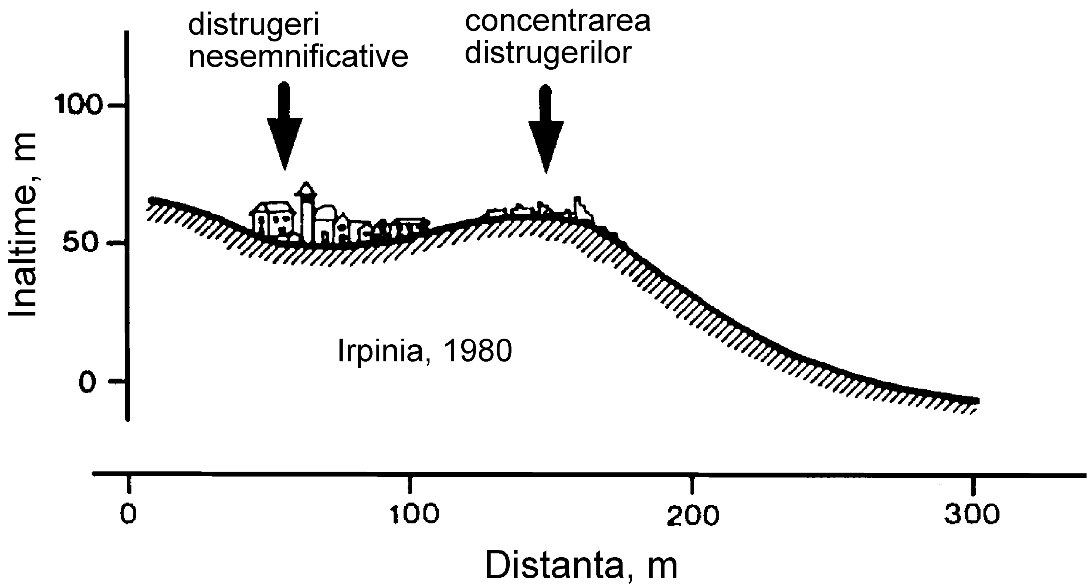

Figura 3.23. Efectul topografiei asupra distribuţiei distrugerilor în cazul cutremurului Irpinia 1980, după Castellani şi colab, 1982, în Athanasopoulos şi colab., 1998.

3.7.4. Interacţiunea teren structură

Mişcarea seismică afectată de factorii de sursă, de propagare şi de amplasament reprezintă aşa numita mişcare în câmp liber. Răspunsul unei structuri la o mişcare seismică de tip câmp liber este afectată de interacţiunea teren structură. În esenţă, acest fenomen modifică atât proprietăţile dinamice ale structurii, cât şi caracteristicile mişcării seismice la nivelul fundaţiei. Cauza fenomenului este constituită de flexibilitatea terenului sub acţiunea unei excitaţii dinamice. Pentru structuri amplasate pe terenuri deformabile, mişcarea seismică la nivelul fundaţiei este în general diferită de cea în câmp liber, conţinând o importantă componentă de rotire, pe lângă componenta de translaţie. Componenta de rotire şi interacţiunea teren-structură în general, au efecte importante pentru structurile rigide situate pe terenuri flexibile. Un alt efect al fenomenului de interacţiune teren-structură îl reprezintă disiparea energiei de vibraţie către mediul de fundare, prin radiaţia undelor şi răspunsul neliniar al trenului. Astfel, pot fi distinse două mecanisme de interacţiune între structură, fundaţie şi teren:

- Interacţiunea inerţială: inerţia dezvoltată în structură din cauză oscilaţiilor creează forţa tăietoare şi momentul la bază, care la rândul lor generează deplasări ale fundaţiei faţă de terenul liber. Interacţiunea inerţială are ca efect creşterea perioadei proprii de vibraţie a structurii din cauza flexibilității terenului de fundare şi o modificare (de obicei creştere) a amortizării terenului, din cauza disipării energiei prin radiație şi răspuns neliniar al terenului.

- Interacțiunea cinematică: prezența elementelor rigide ale fundației pe, sau în teren duce la modificarea mişcării de la cea din câmpul liber, ca şi rezultat al incoerenței mişcării seismice sau înglobării fundației. Interacțiunea cinematică are ca efect reducerea componentei de translație a mişcării, dar o creştere a celor de torsiune si rotire, precum şi filtrarea frecvențelor înalte ale mişcării seismice.

Pentru structurile obişnuite interacțiunea inerțială are efectele cele mai pronunțate asupra ansamblului teren-structură. În cazul unor sisteme cu un singur grad de libertate dinamică efectele interacțiunii teren-structură pot fi evaluate folosind un sistem echivalent cu perioada şi coeficientul de amortizare modificate, pentru a ține cont de prinderea flexibilă în fundație şi amortizarea terenului de fundare.

4. Sisteme cu mai multe grade de libertate dinamică

4.1. Ecuații de mişcare, formularea problemei, metode de rezolvare

O structură poate fi idealizată ca şi un ansamblu de elemente (rigle, stâlpi, pereți, etc.) interconectate în noduri (vezi Figura 4.1a). Deplasările nodurilor reprezintă gradele de libertate (GLD). În general, într-o problemă plană un nod are trei GLD: două deplasări de nod şi o rotire. Într-o problemă spațială, un nod are în general 6 GLD: trei deplasări de nod şi trei rotiri de nod.

Un cadru plan cu două deschideri şi două nivele are 18 GLD (vezi Figura 4.1a). Ținând cont de faptul că deformațiile axiale ale elementelor pot fi neglijate de cele mai multe ori pentru cadre cu înălțime redusă, numărul de GLD pentru acest cadru poate fi redus la doar 8 (vezi Figura 4.1b). Forțele dinamice (momente şi forțe) sunt aplicate în noduri (vezi Figura 4.2), momentele $p_3(t)$ la $p_8(t)$ fiind egale cu zero în cele mai multe cazuri practice.

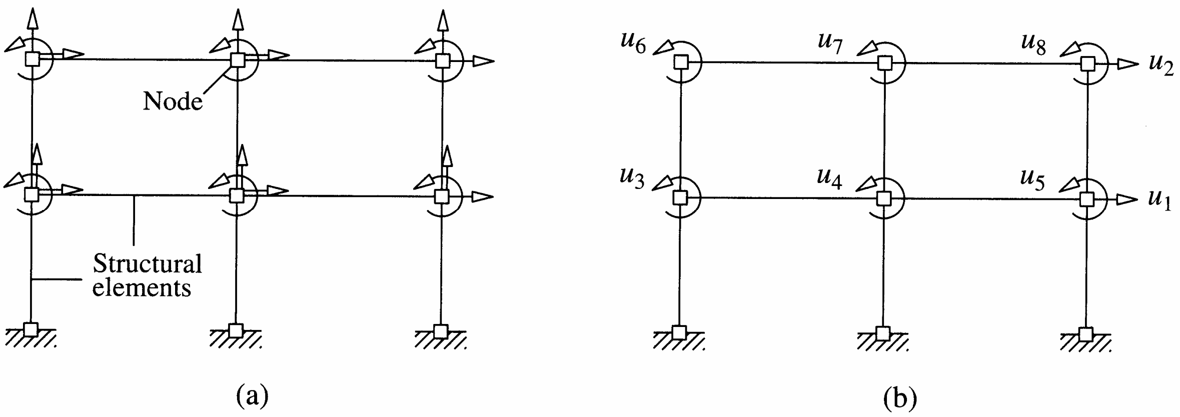

Figura 4.1. Grade de libertate: inclusiv deformațiile axiale: 18 GLD (a), deformațiile axiale neglijate: 8 GLD (b), Chopra, 2001.

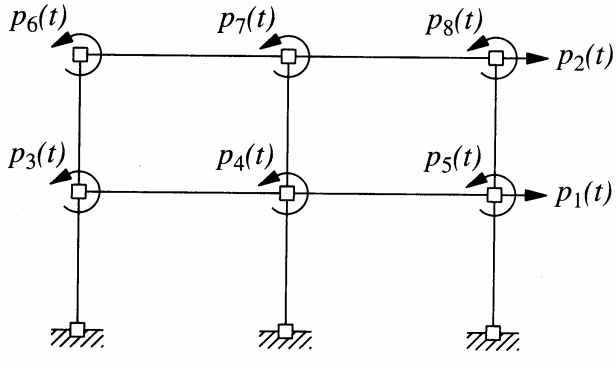

Figura 4.2. Forțe dinamice $p(t)$ aplicate în noduri.

4.1.1. Forțele elastice

Deplasările nodurilor u_j sunt în relație cu forțele nodale f_{Sj} (vezi Figura 4.3a). Pentru sisteme liniare forțele nodale pot fi determinate pe baza principiului suprapunerii efectelor şi a coeficienților de rigiditate. Dacă se blochează toate gradele de libertate şi se impune o deplasare unitară pe direcția gradului de libertate j, vor fi generate forțe pe direcția gradelor de libertate considerate, pentru a menține structura în echilibru static. **Coeficientul de rigiditate** k_{ij} este forța pe direcția gradului de libertate i datorată unei deplasări unitare de-a lungul gradului de libertate j. Spre exemplu, în Figura 4.3b sunt prezentate forțele k_{i1} (i=1, 2, …,8) necesare păstrării echilibrului în cazul impunerii unei deplasări unitare u_1=1. Cu toate că toate forțele k_{ij} din Figura 4.3 sunt reprezentate cu semnele lor pozitive, unele dintre acestea vor fi negative pentru a fi compatibile cu deplasările impuse.

Cunoscând coeficienții de rigiditate k_{ij}, forțele nodale f_{Si} pe direcția gradului de libertate i, asociate deplasării u_j, j=1, 2, …, N sunt obținute folosind principiul suprapunerii efectelor (vezi Figura 4.3a):

$$f_{Si} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + ... + k_{ij}u_j + ... + k_{iN}u_N \tag{4.1}$$

Ecuațiile corespunzătoare i=1, 2, …, N pot fi scrise în formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{Nj} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

sau, în formă compactă:

$$[f_S] = [k]\{u\} \tag{4.3}$$

unde [k] este matricea de rigiditate a structurii, care este o matrice simetrică (k_{ij}=k_{ji}).

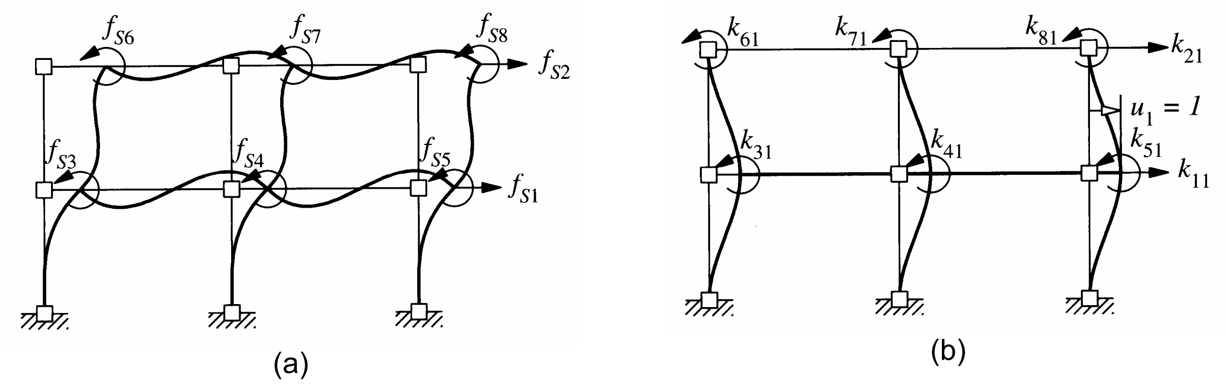

Figura 4.3. Componenta de rigiditate ale cadrului (a) , coeficienții de rigiditate pentru u_j=1 (b), Chopra, 2001.

4.1.2. Forțele de amortizare

În mod similar cu matricea de rigiditate poate fi determinată şi matricea de amortizare. Astfel, dacă se blochează toate gradele de libertate şi se impune o viteză unitară pe direcția gradului de libertate j, vor fi generate forțe pe direcția gradelor de libertate considerate, pentru a menține structura în echilibru static. **Coeficientul de amortizare** c_{ij} este forța pe direcția gradului de libertate i datorată unei viteze unitare de-a lungul gradului de libertate j.

Cunoscând coeficienții de amortizare c_{ij}, forțele nodale f_{Di} pe direcția gradului de libertate i, asociate vitezei $\dot{u}_j$, j=1, 2, …, N sunt obținute folosind principiul suprapunerii efectelor (vezi Figura 4.4):

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + ... + c_{ij}\dot{u}_j + ... + c_{iN}\dot{u}_N \tag{4.4}$$

Ecuațiile corespunzătoare i=1, 2, …, N pot fi scrise în formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \vdots \\ f_{DN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{Nj} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

sau, în formă compactă:

$$[f_D]=[c]\{\dot{u}\} \tag{4.6}$$

unde [c] este matricea de amortizare a structurii.

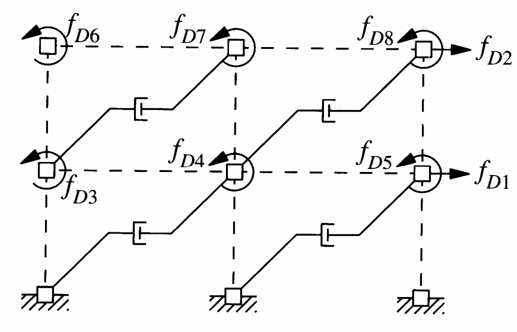

Figura 4.4. Componenta de amortizare ale cadrului (Chopra, 2001).

4.1.3. Forțele de inerție

Astfel, dacă se blochează toate gradele de libertate şi se impune o accelerație unitară pe direcția gradului de libertate *j*, conform principiului lui D'Alambert vor fi generate forțe de inerție pe direcția gradelor de libertate considerate, pentru a menține structura în echilibru. **Coeficientul masei** m_{ij} este forța pe direcția gradului de libertate *i* datorată unei accelerații unitare de-a lungul gradului de libertate *j*. Spre exemplu, în Figura 4.5b sunt prezentate forțele m_{i1} (*i*=1, 2, …,8) necesare păstrării echilibrului în cazul impunerii unei accelerații unitare $\ddot{u}_1 = 1$.

Cunoscând coeficienții maselor m_{ij}, forțele nodale f_{Ii} pe direcția gradului de libertate *i*, asociate accelerației $\ddot{u}_j$, *j*=1, 2, …, N sunt obținute folosind principiul suprapunerii efectelor (vezi Figura 4.5a):

$$f_{Ii} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + ... + m_{ij}\ddot{u}_j + ... + m_{iN}\ddot{u}_N \tag{4.7}$$

Ecuațiile corespunzătoare *i*=1, 2, …, N pot fi scrise în formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \vdots \\ f_{IN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{Nj} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

sau, în formă compactă:

$$[f_I]=[m]\{\ddot{u}\} \tag{4.9}$$

unde [m] este matricea masei structurii, care este o matrice simetrică (m_{ij}=$\underline{m_{ji}}$).

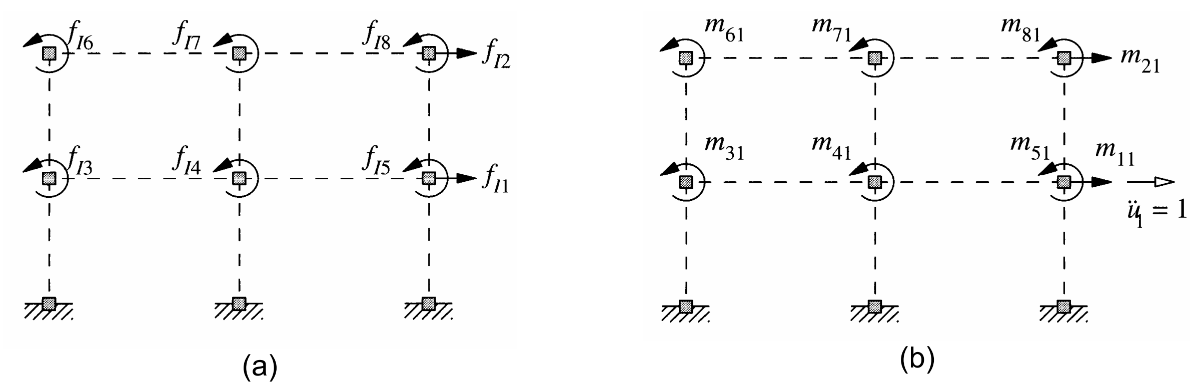

Figura 4.5. Componenta de masă a cadrului (a) , coeficienții de masă pentru $\ddot{u}_1 = 1$ (b), Chopra, 2001.

În general masa unei structuri este distribuită în întreaga structură (vezi Figura 4.6a). Totuşi, în cele mai multe cazuri, masa poate fi considerată concentrată în nodurile structurii. Procedura constă din concentrarea masei elementelor la fiecare capăt al acestuia pe baza principiilor staticii, urmată de adunarea masei elemente care concură în nodurile corespunzătoare (vezi Figura 4.6b şi c). În general, componentele de rotire ale maselor au o influenţă minoră asupra răspunsului dinamic al structurilor şi sunt neglijate. Masele obţinute în acest mod vor avea componente pe cele trei direcţii de translaţie (x, y şi z). Considerând barele structurii infinit rigide axial (ipoteză considerată şi la stabilirea matricei de rigiditate), masele structurii pot fi considerate concentrate la nivelul planşeelor structurii, acţionând doar pe direcţia x (Figura 4.6d). Astfel, pentru exemplu din Figura 4.5, masa asociată unei acceleraţii unitare $\ddot{u}_1 = 1$ este $m_{11}=m_1$ (unde $m_1 = m_a + m_b + m_c$, vezi Figura 4.6c), iar $m_{i1}=0$ pentru i=2, 3,…, 8.

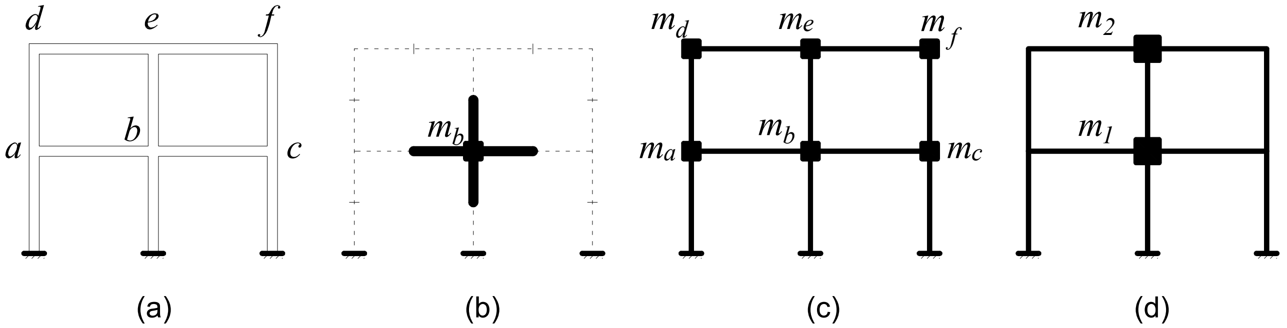

Figura 4.6. Concentrarea maselor în noduri (a-c) şi la nivelul planşeelor (d).

În general, pentru mase concentrate în noduri, matricea maselor este diagonală:

$$m_{ij} = 0 \; pentru \; i \neq j \quad şi \quad m_{jj} = m_j \; sau \; 0 \tag{4.10}$$

unde m_j este masa asociată cu un gradul de translaţie j, şi m_j=0 pentru un grad de libertate de rotire.

La structurile multietajate spaţiale, numărul elementelor din matricea maselor poate fi redus considerând efectul de şaibă rigidă a planşeelor. Astfel, planşeele care posedă o rigiditate foarte mare în planul lor (cum ar fi planşee le beton armat) sunt considerate de o rigiditate infinită în planul lor dar flexibile în afara planului. Datorită mişcării de corp rigid, deplasările orizontale (după x şi y) ale nodurilor de la nivelul unui planşeu nu sunt independente, şi pot fi reduse la doar trei grade de libertate definite în centrul de greutate al fiecărui planşeu: două deplasări orizontale şi o rotire faţă de axa verticală (vezi Figura 4.7a). În cazul în care planşeul nu poate fi considerat rigid (cazul planşeelor din lemn), masele trebuie atribuite fiecărui nod în parte, proporţional cu aria aferentă nodului respectiv (vezi Figura 4.7b).

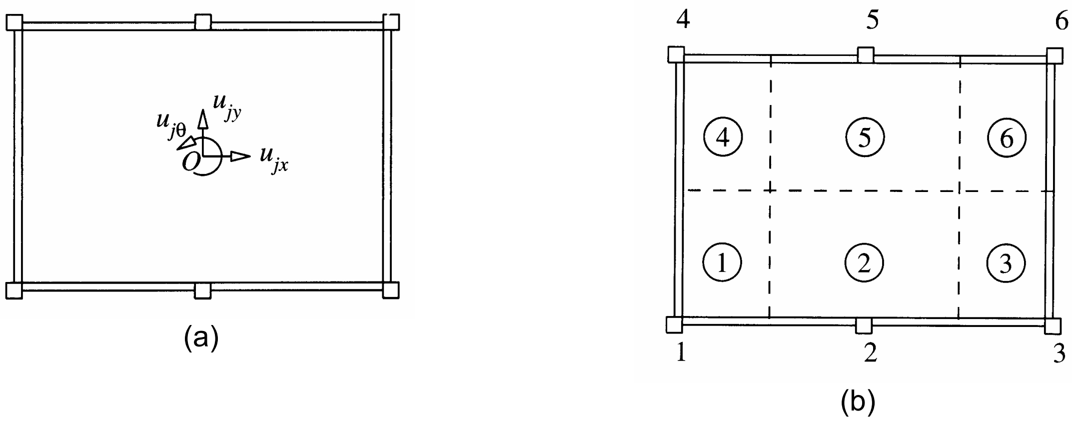

Figura 4.7. Grade de libertate pentru planşee rigide în planul lor (a); Aria aferentă pentru distribuirea masei în noduri la planşee flexibile în planul lor (b), Chopra, 2001.