DESENHO GEOMÉTRICO

MARMO

1

CARLOS MARMO E NICOLAU MARMO

editora scipione

editora scipione

DIRETORES
Luiz Esteves Sallum
Maurício Fernandes Dias
Vicente Paz Fernandez
Patrícia Fernandes Dias
José Gallafassi Filho
Antonio Nicolau Youssef
Joaquim Nascimento

GERÊNCIA EDITORIAL
Aurelio Gonçalves Filho

RESPONSABILIDADE EDITORIAL
Valdemar Vello

GERÊNCIA DE PRODUÇÃO
Gil Naddaf

REVISÃO
chefia - Sâmia Rios
assistência - Miriam de Carvalho Abões
preparação - Irene Hikichi
revisão - Eloiza Helena Rodrigues,
Claudia Blanco Padovani e Dráusio de Paula

ARTE
chefia - Antonio Tadeu Damiani
coordenação geral - Sérgio Yutaka Suwaki
coordenação de arte - Edson Haruo Toyota
assistência - Young Lee Kim
capa e miolo - Sylvio Ulhôa Cintra Filho
ilustrações - Maurício Negro Silveira

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
José Antônio Ferraz

COMPOSIÇÃO E ARTE-FINAL
Diarte Editora e Comercial de Livros
coordenação geral - Nelson S. Urata
coordenação de arte-final - Silvio Vivian
coord. de composição - Armando F. Tomiyoshi
composição - Maria Aparecida de Souza e
Laurencio Mendes Vilela
arte-final - Marta de Souza, Jorge L. Barriunuevo e
Rogério Sardella

IMPRESSÃO E ACABAMENTO

Artes Gráficas e Editora Parâmetro Ltda.

Editora Scipione Ltda.

MATRIZ
Praça Carlos Gomes, 46
01501-040 São Paulo SP

DIVULGAÇÃO
Rua Fagundes, 121
01508-030 São Paulo SP

Tel. (011) 239 1700
Telex (11) 26732

Caixa Postal 65131

1994

ISBN 85-262-1868-9

Dedicamos o presente curso de Desenho Geométrico aos professores que permaneceram lecionando esta matéria durante os últimos vinte anos e, também, aos nossos alunos, com os quais tanto aprendemos.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

"Devemos tornar as coisas simples, mas não mais simples do que são."

Einstein

Pensando na escola como um centro de formação de indivíduos aptos a exercer a sua cidadania, dotados de juízo crítico, capazes de expressar com clareza suas idéias e de compreender os principais problemas que afligem a sociedade atual, não temos dúvidas de que se torna necessário aos estudantes dominar três tipos de linguagem: verbal, simbólica e gráfica. A linguagem gráfica tem sido relegada a um plano secundário, abrindo uma lacuna na formação dos alunos.

O Desenho estabelece um canal de comunicação universal para a transmissão da linguagem gráfica. É disciplina que permite ao estudante tirar uma série muito grande de conclusões a partir de um mínimo de informações, liberando a criatividade. Interliga as demais disciplinas ajudando a compreensão de desenhos em geral e a resolução de questões de natureza prática do cotidiano. O Desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria, fortalecendo o ensino desta importante matéria.

Neste curso de Desenho também estudaremos Geometria, sempre que julgarmos necessário, sem assumir compromisso com a ordenação lógica que tão bem a caracteriza.

Percebe-se uma tendência mundial no sentido de restaurar o ensino do Desenho. Não poderíamos nos omitir.

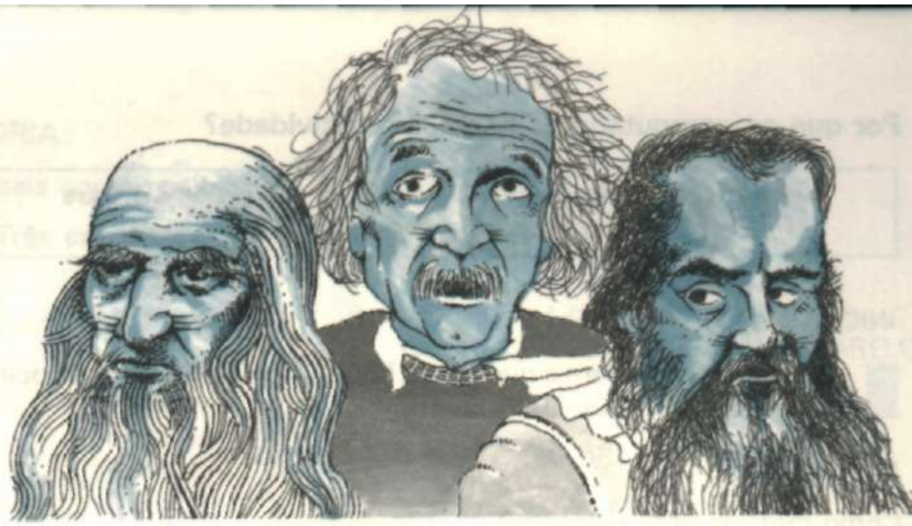
Agradecemos à Editora Scipione a oportunidade que nos concede de participar desse processo publicando esta obra que pretende, acima de tudo, evidenciar a importância do Desenho como disciplina formativa.

Receberemos, com muito prazer, críticas e sugestões para melhorar este trabalho.

Os Autores

CAPÍTULO

ZERO



A NOSSA HISTÓRIA

I AS PROFISSÕES

001 Qual o nosso objetivo na vida?

Desde a origem da Humanidade, procuramos resolver nossos problemas pessoais, mas a plena felicidade só é alcançada quando conseguimos ser úteis aos outros.

002 Como se consegue ser útil?

Exercendo com ***amor e competência*** alguma profissão. Todas as profissões — de qualquer nível — são dignas e necessárias.

003 Qual profissão escolher?

O Curso Secundário deve mostrar um panorama das profissões, para que você possa optar corretamente, em função de seus anseios e de suas aptidões. Uma escolha acertada lhe trará grande realização pessoal.

004 Como tornar-se um bom profissional?

Além de querer ser competente, um bom profissional deve ser CRIATIVO, isto é, ser capaz de CONCLUIR soluções para os problemas que surgirem.

005 Podem-se usar computadores?

Usados como arquivos de informações (Informática), como calculadoras (computadores), como desenhistas (Computação Gráfica) e como executantes de tarefas mecânicas (Robótica), são ferramentas de trabalho admiráveis; no entanto não têm CRIATIVIDADE...

006 Por que os computadores não têm criatividade?

A criatividade exige INICIATIVA E MOTIVAÇÃO, que computadores NÃO POSSUEM.

CRIATIVIDADE É A CAPACIDADE DE CONCLUIR.

INICIATIVA:

A iniciativa e a motivação são dois dos fatores multiplicativos da criatividade; se um deles for nulo, a criatividade será nula.

Só fazem aquilo para o que foram PROGRAMADOS e só "raciocinam" baseados em ALGORITMOS.

Stephen Hawking, um dos maiores matemáticos deste século, detesta algoritmos (fórmulas, equações, ...). Certamente ele sabe o porquê...

MOTIVAÇÃO:

Como motivar uma máquina?
Numa "geração" futura terão criatividade se, e somente se:

a. tiverem circuitos neurônicos, que imitam o cérebro humano e/ou

b. forem associados a cérebros humanos.
Na ficção científica há os andróides.

007 Como desenvolver a nossa criatividade?

Estudando matérias que permitem treinar essa capacidade inata de CONCLUIR conhecimentos.

008 Devo decorar regras, fórmulas e frases?

Só se você for um andróide ou um papagaio...

009 Mas... e a teoria?

Em qualquer matéria há um conjunto mínimo de conhecimentos NECESSÁRIOS (não pode faltar nenhum) e SUFICIENTES (basta saber esses) para possibilitar a CONCLUSÃO de todos os restantes.

ENSINAR A APRENDER.

Esse conjunto chama-se TEORIA MÍNIMA (TM)

APRENDER A ENSINAR.

Oportunamente veremos qual é a TM da nossa matéria.

Se bastasse conhecer a fórmula $E = mc^2$... quantos saberiam a Teoria da Relatividade?

010 Como saberei se estou estudando corretamente?

Não se contente em apenas saber como fazer. Queira aprender O PORQUÊ de tudo.

QUANDO VOCÊ CONSTATAR QUE É CAPAZ DE CONCLUIR QUE TEM CRIATIVIDADE, SABERÁ QUE É GENTE E NÃO ROBÔ.

011 Eu gostaria de tentar...

No decorrer deste curso, não faltarão oportunidades para você testar e exercitar a sua criatividade. No entanto, apenas como um mero exemplo, daremos um problema e a teoria necessária e suficiente para resolvê-lo.

012 **TEORIA:**

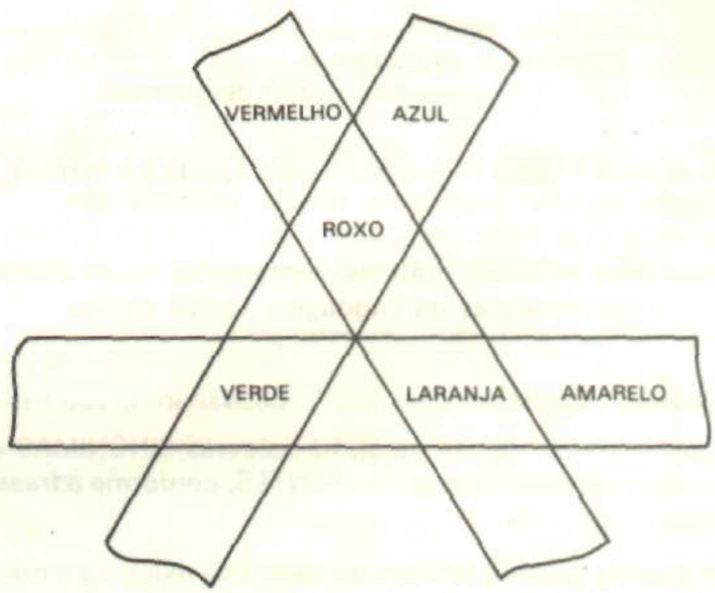
Há seis cores básicas:

a. Três **primárias:**

VERMELHO
AZUL
AMARELO

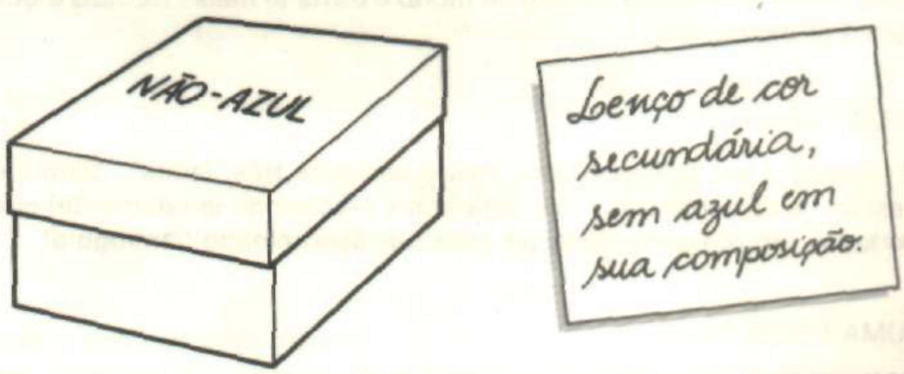
b. Três **secundárias:**

ROXO = VERMELHO + AZUL
VERDE = AZUL + AMARELO
LARANJA = VERMELHO + AMARELO



013 ***O mistério da cor de um lenço...***

Numa caixa fechada há um lenço. Um bilhete informa que a cor do lenço é secundária, mas o azul não entra na sua composição. Qual é a cor desse lenço?



R: ....

Sem a teoria, você resolveria esse problema?

II A COMUNICAÇÃO

014 Como saber de que teoria vou precisar?

Nós vamos comunicá-la a você usando uma LINGUAGEM, um código.

015 Qual linguagem?

Num livro poderemos usar três linguagens:

> VERBAL: **escrita,**
> SIMBÓLICA: **símbolos e**
> GRÁFICA: **desenhos (inclui diagramas).**

Em classe usamos ainda a linguagem verbal falada e a mímica, com gestos, entonação da voz, expressões faciais, broncas, etc.

> Utilizando recursos gráficos, tentaremos suprir certas características da linguagem verbal escrita.

016 Características? Quais?

O grande matemático Giuseppe Peano (1932-1858 = 74a.) tentou inventar uma linguagem que ele denominou de "Interlíngua", ou seja, linguagem internacional.

Na linguagem comum, de uso geral, há palavras SINÔNIMAS e há palavras que podem transmitir idéias DIFERENTES, conforme a frase onde estão inseridas.

Aqui não se procura transmitir sentimentos e sim idéias.

No estudo de uma matéria técnica ou científica exige-se a máxima PRECISÃO nas mensagens e deveremos usar uma LINGUAGEM técnica, com termos técnicos e sintaxe técnica.

017 O que são termos técnicos?

A Matemática, a Física, etc. procuram definir seus termos técnicos.

São termos que, em cada matéria, assumem significados específicos; os bons dicionários citam esses significados. Por exemplo, o termo "elemento" em Matemática e em Química tem significados diferentes.

018 O que é sintaxe técnica?

É uma forma de compor o texto de modo a torná-lo mais PRECISO e CONCISO. Por exemplo:

Sintaxe é uma parte da Gramática.

NUMA DEFINIÇÃO:

"Triângulo é um polígono com três, e somente três, lados". Sem a expressão "e somente três" não estaremos precisando (exatamente) quantos lados um polígono deve ter para ser denominado "triângulo".

NUMA PROPOSIÇÃO:

Procuraremos usar sempre uma forma mais concisa — e, portanto, mais clara:

> SE (HIPÓTESE), ENTÃO (TESE).

019 ***O que é linguagem simbólica?***

É aquela que emprega símbolos:

HIPÓTESE $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ TESE

O símbolo (implica) significa que a partir da HIPÓTESE conclui-se a TESE e o (*) esclarece qual o motivo da implicação.

020 Chamam-se RECÍPROCAS entre si duas proposições onde a HIPÓTESE (ou parte) de uma está na TESE da outra.

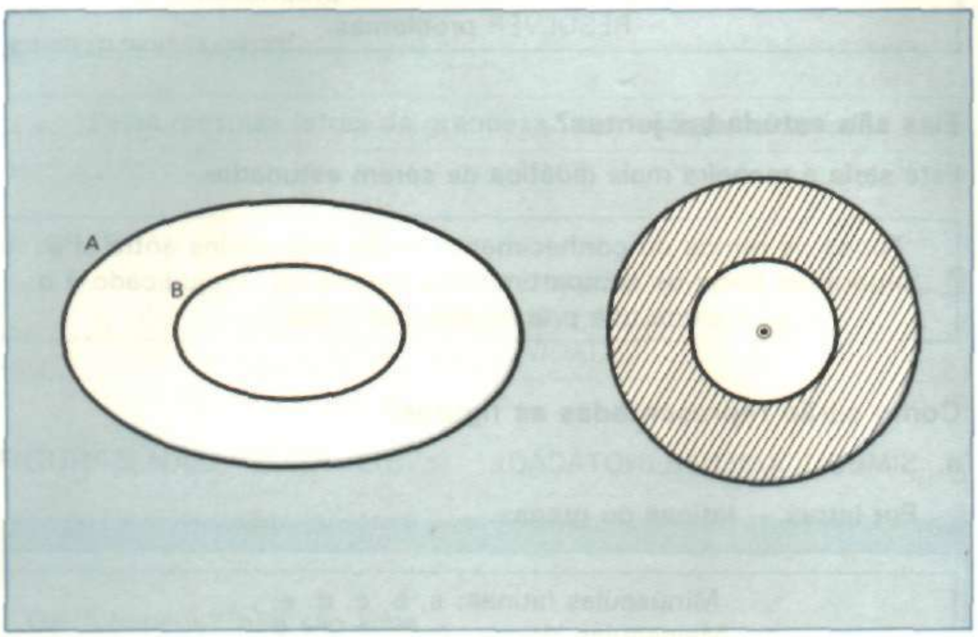
Uma proposição DIRETA pode ter uma ou mais recíprocas verdadeiras ou falsas.

Verdadeira significa que é aceita.

Apenas quando há UMA ÚNICA recíproca e ela é VERDADEIRA, pode-se usar o símbolo BI-IMPLICA (⇔) e/ou "E RECIPROCAMENTE".

021 **O que é linguagem gráfica?**

É aquela em que a mensagem é transmitida por um desenho:



- O primeiro desenho "diz graficamente" que B é um subconjunto de A.
- O segundo (parte hachurada) é a "definição gráfica" de coroa circular.

022 **Qual a melhor linguagem?**

Verbal, simbólica e gráfica.

- A SIMBÓLICA e a GRÁFICA são mais concisas e são universais (não dependem do idioma); ambas podem substituir longos textos.
- A GRÁFICA, sendo visual, é melhor compreendida; "ver para crer"...
- As três se equivalem e podem ser traduzidas entre si e entremeadas.

III O DESENHO E A GEOMETRIA

023 Quais as relações entre estas matérias?

Bem íntimas. Um casamento perfeito.
Ambas estudam as FIGURAS GEOMÉTRICAS, com seus conceitos e suas propriedades.

O Desenho é a GEOMETRIA GRÁFICA.

024 No que diferem?

É a Geometria Moderna. Euclides (séc. III a.C.), em sua obra *Elementos*, não usou números, só figuras.

A Geometria estuda as FIGURAS relacionando-as com NÚMEROS (abstratos), que são suas MEDIDAS.

O Desenho estuda as figuras (abstratas) relacionando-as com suas representações (que são concretas). O Desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria.

025 E na prática?

O Desenho consegue:

DEFINIR conceitos, DEMONSTRAR propriedades e RESOLVER problemas.

026 Elas são estudadas juntas?

Esta seria a maneira mais didática de serem estudadas.

Todos os ramos do conhecimento estão entrosados entre si e separá-los torna-os compartimentos estanques. Prejudicado é o aluno que precisa estudar TODOS...

027 Como serão representadas as figuras?

a. SIMBOLICAMENTE (NOTAÇÃO):

Por letras — latinas ou gregas.

Minúsculas latinas: a, b, c, d, e, ...
Maiúsculas latinas: A, B, C, D, E, ...
Minúsculas gregas: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi, \ldots \theta, \pi, \ldots$

NO TEXTO TÉCNICO OU SIMBÓLICO:

ESTAS LETRAS TÊM "CHAPÉUS".

"Chapéus" da moda:			
Segmentos	(—)	Retas	(↔)
Semi-retas	(→)	Ângulos	(∧)

NO DESENHO, **e somente no desenho:**

Para não "poluí-los" — são a nossa principal forma de comunicação —

AS LETRAS NÃO TÊM "CHAPÉUS".

Nos desenhos os "chapéus" são desnecessários; é óbvio que são figuras.

b. GRAFICAMENTE:

As figuras só existem na nossa imaginação; por isso são abstratas.

Por DESENHOS **(concretos) que devem ser o mais parecidos possível com as** FIGURAS **(abstratas) que representam.**

Os desenhos são feitos de tinta, giz, grafite, ... ; por isso são concretos.

028 Como serão representadas as medidas?

MÁXIMO 80

80 o quê?

km/h, milha/h, ...?

MEDIDA **de uma grandeza é um** NÚMERO **associado à grandeza e à** UNIDADE.

MEDIDA ⇔ NÚMERO + UNIDADE

a. SIMBOLICAMENTE:

Pelas mesmas letras da grandeza, mas sem o "chapéu".

Para distinguir figuras de números.

b. GRAFICAMENTE:

Por um dos segmentos que têm AQUELA MEDIDA e NAQUELA UNIDADE.

Uma medida pode ser dada graficamente.

029 FIGURAS NÃO "MEDÍVEIS":

Quanto menor o "pingo", mais se parecerá com o ponto geométrico (abstrato).

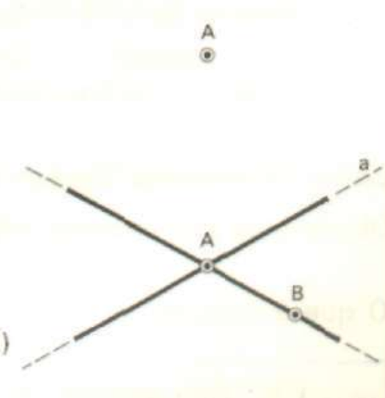
A "rodinha" protege o "pingo" das "maldosas linhas".

Os "chapéus" não são lidos...

PONTOS: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, ...

RETAS: $\overleftrightarrow{a}$, $\overleftrightarrow{b}$, $\overleftrightarrow{c}$, ...
ou $\overleftrightarrow{AB}$, ... (2 pontos)

SEMI-RETAS: $\overrightarrow{Aa}$, ..., $\overrightarrow{AB}$, ...
(A 1.ª letra sempre designa a origem $\overline{A}$)

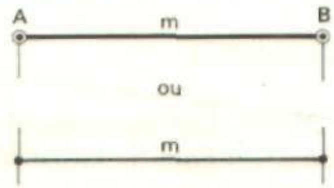


Os três "tracinhos" indicam que o desenho pode continuar e *são facultativos.*

030 FIGURAS QUE SÃO GRANDEZAS:

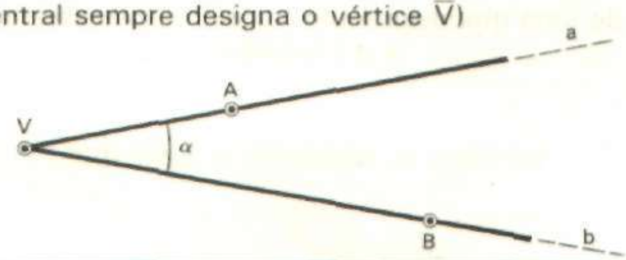
SEGMENTOS (*A grandeza é o comprimento*):

FIGURA: $\overline{AB}$ ou $\overline{m}$.
MEDIDA: AB = m.



ÂNGULOS (A grandeza é a abertura):

FIGURA: $a\hat{V}b$ ou $A\hat{V}B$ ou $\hat{\alpha}$, ...
MEDIDA: aVb ou AVB ou α, ...
(A letra central sempre designa o vértice $\overline{V}$)



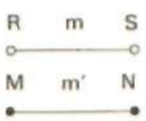
Qual o de maior grandeza?
$\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ ...

031 **O que significa** figuras coincidentes?

Significa que uma mesma figura, por algum motivo, recebeu LETRAS (*nomes*) *diferentes, mas trata-se de* UMA SÓ.

Figuras distintas ($\neq$) são figuras não coincidentes.

EXEMPLOS:



$\overline{RS} \sim \overline{MN} \Leftrightarrow m = m'$

O símbolo (=), relacionando figuras, indica que elas são COINCIDENTES, isto é, trata-se de uma só figura.

Esse mesmo símbolo (=) relacionando NÚMEROS *indica que eles são* IGUAIS, isto é, o mesmo número (3 = III = ...).

032 **Como representar figuras coincidentes?**

Obviamente pelo mesmo desenho.

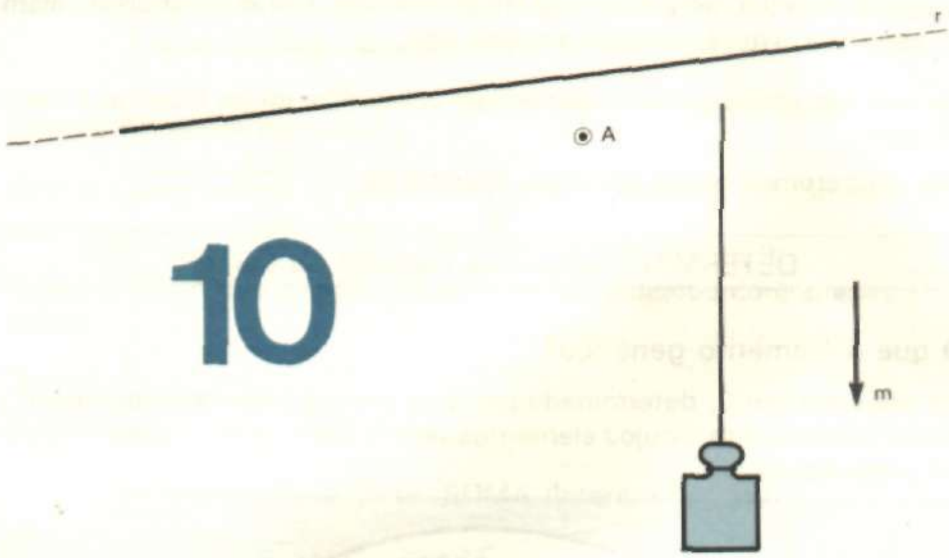
Duas retas chamam-se paralelas se, e somente se:
a) são coplanares
b) não têm ponto comum.

033 **O que é** direção?

É o "algo comum" ao conjunto das retas paralelas a uma determinada reta.

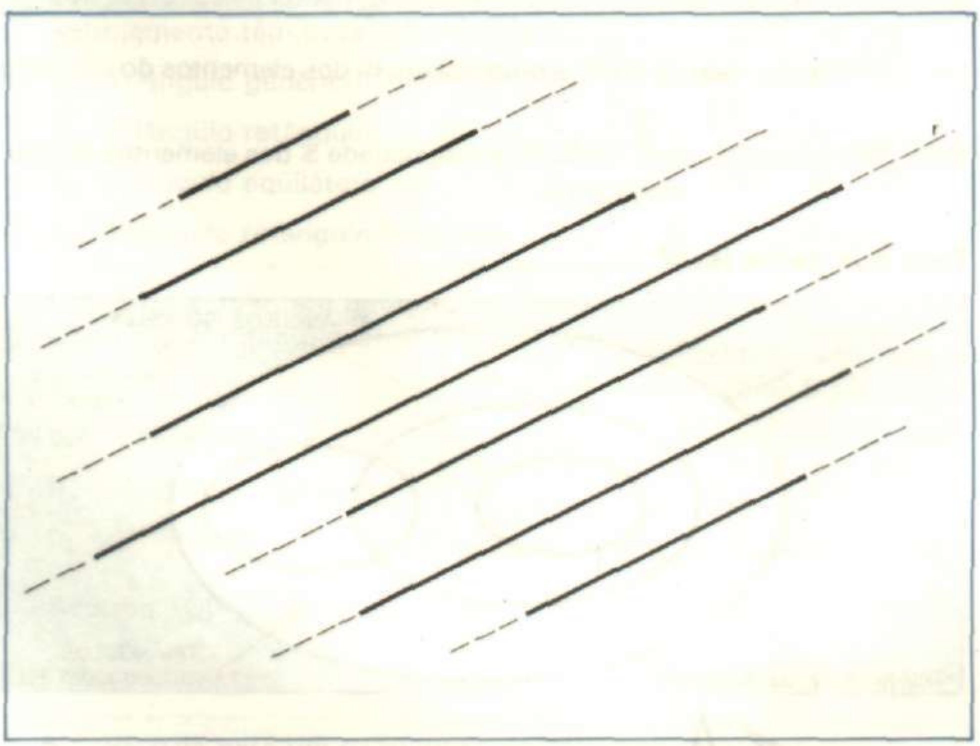
034 **Mas... é abstrata?**

Sim. É tão abstrata como um número, um ponto, uma reta, ... uma força, ... mas PODE SER REPRESENTADA.



035 **Como?**

Por uma das retas que têm a direção:



Os "chapéus", desnecessários nos desenhos, só iriam "poluí-los".

Direção $\overleftrightarrow{r}$ (somente no texto e em linguagem simbólica usa-se o "chapéu").

IV A TEORIA DOS CONJUNTOS

036 Já estudei isso...

Sabemos... Essa teoria é importante exatamente porque nos fornece linguagens (técnica, simbólica e gráfica) precisas, claras e concisas, além de objetivas, isto é, comum a todos nós.

Peano, que se preocupava com a clareza das mensagens, foi um dos precursores dessa teoria.

Por que não empregar essa maneira de comunicar idéias técnicas e científicas?

Nós utilizaremos esses recursos. Prepare-se.

037

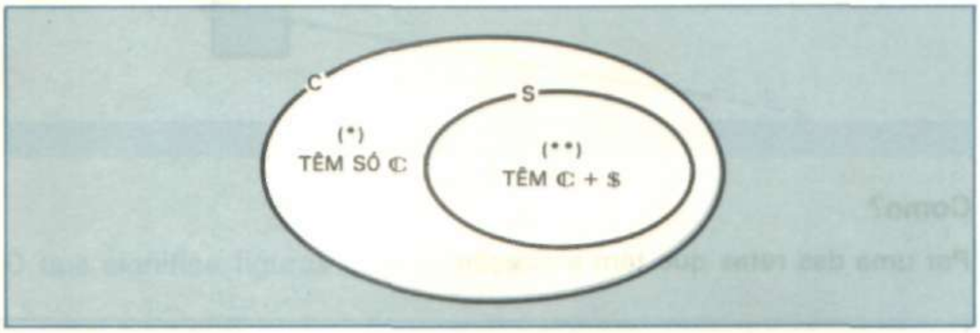
DETERMINAR **significa ou** DAR **ou** OBTER.

Repetiremos o ou (exclusivo) para deixar claro que SÓ HÁ ESSAS possibilidades.

038 O que é elemento genérico?

$\mathbb{C}$ e $\mathbb{S}$ são letras que designam propriedades.

Em um conjunto C, determinado por uma propriedade característica $\mathbb{C}$, há um subconjunto S cujos elementos têm — além de $\mathbb{C}$ — uma SEGUNDA propriedade $\mathbb{S}$.

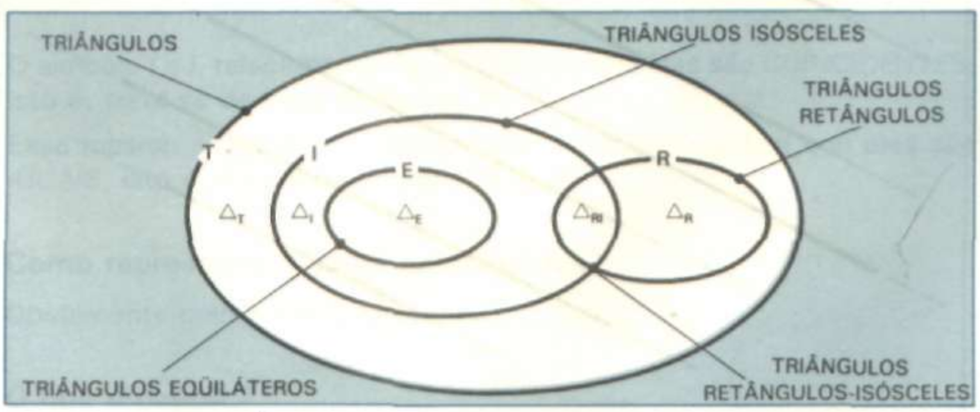


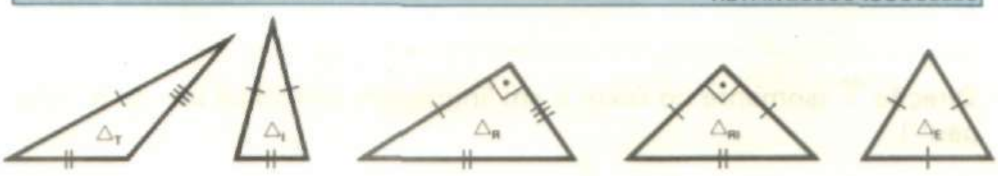
Um conjunto é determinado se, e somente se: ou é dado (dando-se os seus elementos) ou é obtível (pela sua propriedade característica).

(*) GENÉRICO: *tem* APENAS *a propriedade $\mathbb{C}$ dos elementos do conjunto* C.

(**) PARTICULAR: tem TAMBÉM a propriedade $\mathbb{S}$ dos elementos do subconjunto S.

039 Para que serve isso?





040

SE		ENTÃO
Vale para um GENÉRICO (Tem ₵)	→	Vale para qualquer PARTICULAR (Tem ₵ + $)

A recíproca é falsa.

041 **Não compreendi o porquê...**

Qual é a propriedade ₵ característica dos polígonos do conjunto T?

R: ....

Qual é a SOMA dos ângulos internos de um polígono com apenas TRÊS lados?

R: ....

CONCLUSÃO:

Propriedade ₵ ⇒ SOMA (internos) = 180°

Para demonstrar que SOMA = 180°, deveremos partir de um △ que tem apenas ₵.

042 **Gostaria de testar se compreendi ou não.**

Parabéns! É assim que se aprende.
Responda sim ou não:

a. Um △ isósceles genérico tem uma certa propriedade. Quais △s obrigatoriamente têm essa propriedade?

a_1. Triângulo genérico R: ....

a_2. Triângulo retângulo R: ....

a_3. Triângulo eqüilátero R: ....

a_4. Triângulo retângulo-isósceles R: ....

b. Um △ retângulo tem uma propriedade.
Quais △s obrigatoriamente também têm?

b_1. △ genérico R: ....

b_2. △ eqüilátero R: ....

b_3. △ retângulo-isósceles R: ....

b_4. △ isósceles R: ....

Acertou TODAS ⇔ compreendeu.

043 **Em resumo:**

SE vale para um GENÉRICO, ENTÃO vale para qualquer PARTICULAR.

A recíproca é falsa.

V O DESENHO E AS PROFISSÕES

044 Como o Desenho auxilia as profissões?

De duas maneiras:

Plano de desenho: papel, lousa,...

REPRESENTANDO — no plano de desenho — as figuras e as grandezas e RESOLVENDO GRAFICAMENTE os problemas.

Resolver graficamente significa resolver desenhando.

045 Quais figuras e quais grandezas?

Neste livro, apenas as figuras e as grandezas contidas num mesmo plano, isto é, COPLANARES.

Figuras e grandezas não-coplanares são estudadas por outras partes do Desenho: Geometria Descritiva, Perspectivas, Desenho Técnico, etc.

046 Como representar uma figura plana?

O desenho e a figura real deverão ser SEMELHANTES entre si.

ÂNGULOS

Todos os ângulos — correspondentes — se conservam com suas medidas.

SEGMENTOS

Todos os segmentos — correspondentes — conservam a MESMA RAZÃO (razão de semelhança) entre suas medidas; as medidas do desenho *são sempre os* NUMERADORES *dessas frações.*

Em figuras semelhantes:
a. os ângulos correspondentes têm mesma medida e
b. os segmentos correspondentes *estão numa mesma razão* (razão de semelhança).

047 O que é escala numérica?

ESCALA NUMÉRICA ➡ $E = \dfrac{\text{DESENHO}}{\text{FIGURA}}$

ESCALA NUMÉRICA É A RAZÃO DE SEMELHANÇA **DO DESENHO PARA A FIGURA**, QUE FORMAM UM PAR ORDENADO (DESENHO, FIGURA).
(1º) (2º)

A noção intuitiva de par ordenado é utilíssima em qualquer matéria técnica ou científica.
Por que não usá-la?
Um par ordenado é um par onde sabe-se qual é o 1º.

Uma escala numérica E é um número (puro) — sem unidade — e é sempre escrito na forma:

$x > 1$	**1:x**	ESCALA REDUZIDA DESENHO < FIGURA	$1{:}x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}$
$x > 1$	**x:1**	ESCALA AMPLIADA DESENHO > FIGURA	$x{:}1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1}$
$x = 1$	**1:1**	ESCALA NATURAL DESENHO ≅ FIGURA	(congruentes; $E = 1$).

048 **O que significa cotar um desenho?**

Significa escrever no desenho as medidas da figura. As medidas do desenho não são escritas porque — se necessário — poderão ser medidas.

049 **Como obter a escala de um desenho?**

Dividindo um COMPRIMENTO *(medida de um segmento)* do desenho pelo comprimento do segmento correspondente da figura e AMBOS NA MESMA UNIDADE.

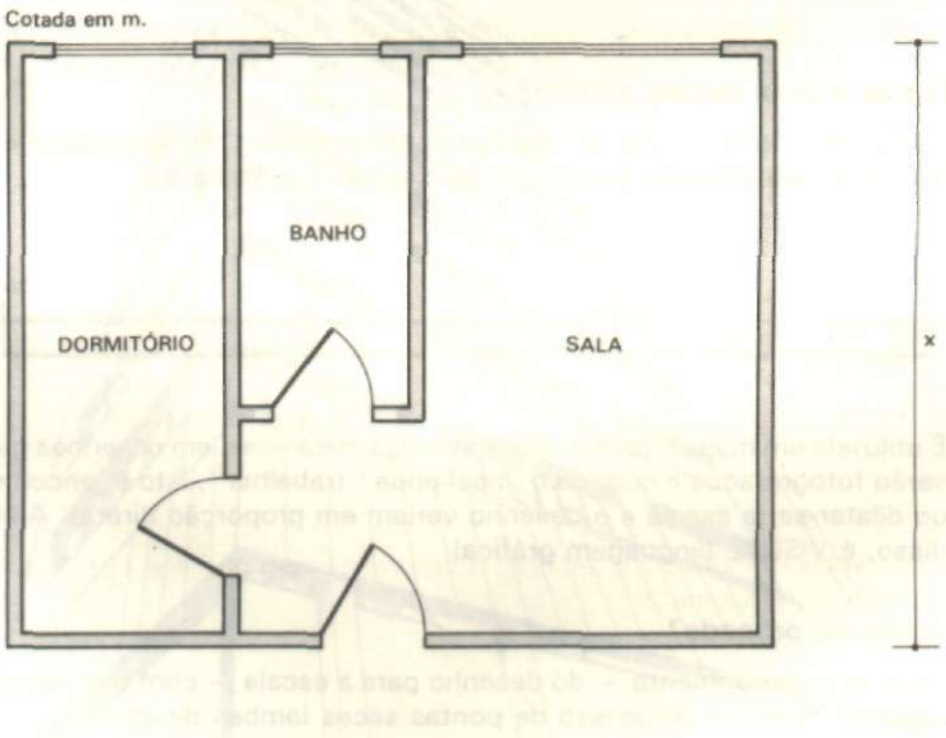
Exemplo:

- Um segmento de 8 m está desenhado com 8 cm. Qual a escala E?
- Resolução: Para poder "cortar" a UNIDADE, o numerador e o denominador *deverão estar na* MESMA UNIDADE:

$$E = \frac{\text{DESENHO (8 cm)}}{\text{FIGURA (8 m)}} = \frac{(8\text{ cm})}{800\text{ cm}} = \frac{1}{100} \Rightarrow \boxed{E = 1{:}100}$$

050 **Em que escala está a planta abaixo?**

R: ....



051 **Qual a dimensão x da construção?**

R: x = ...8,00...... m.

A parte clara da foto abaixo é um embrião de galinha, com 7 dias de idade. Nesse estágio a cabeça é quase do tamanho do resto do corpo.

052 **Qual a escala numérica?**

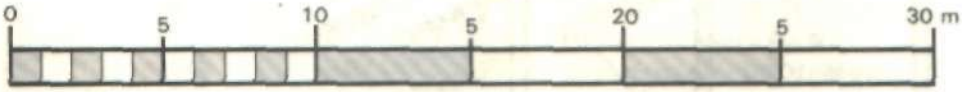
R_1: 2:1

Qual é a maior distância entre dois pontos da cabeça?

R_2: 1,07 cm

053 **O que é uma** escala gráfica?

Como diz o nome, é uma escala que vem desenhada. Escreve-se nela a UNIDADE (m) utilizada para medir os segmentos da figura.



É utilizada em mapas, onde é difícil cotar as distâncias, em desenhos que serão fotografados e quando o papel pode ''trabalhar'', isto é, encolher ou dilatar-se (a escala e o desenho variam em proporção direta). Além disso, é VISUAL (linguagem gráfica).

054 **Como se procede?**

Leva-se o comprimento — do desenho para a escala — com uma tira de papel ou com um compasso de pontas secas (ambas de aço).
Na escala acima, o segmento AB mede 12 m. Verifique.

055 **O que é uma escala física?**

A medida de qualquer grandeza (volume, superfície, velocidade, aceleração, força, temperatura, etc.) pode ser representada por:

- UMA RAZÃO (agora tem unidade):

  E = 1 cm : 5 litros; E = 1 cm : 10 m/s;

  E = 1 mm : 10 Newton; E = 1 cm : 15 °C; ... ou

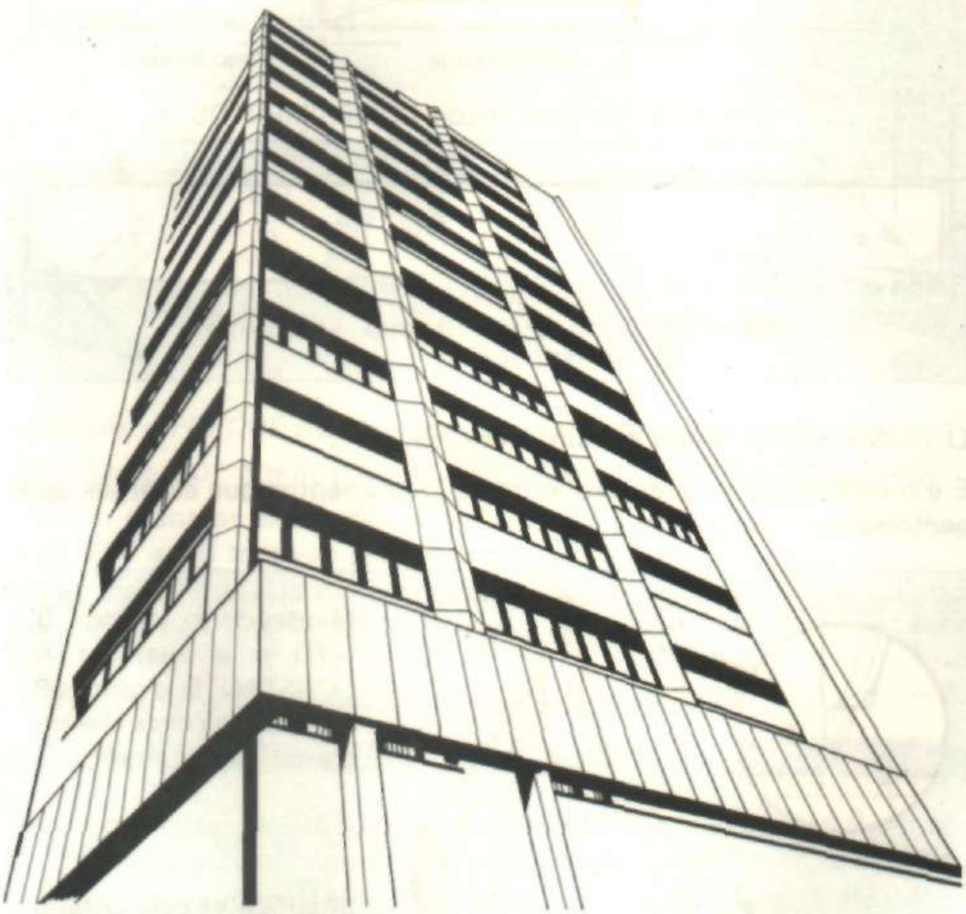
  Este ou não é exclusivo.

- UM SEGMENTO:

20 m/s

056 **Existe a profissão de desenhista?**

Não somente existe, como há especializações: na Arquitetura, na Construção Civil, nas Indústrias (máquinas, veículos,...), no desenho de livros (arte-finalistas), etc.



Em São Paulo, por exemplo, há poucos desenhistas que sabem desenhar a perspectiva de um prédio visto de baixo para cima...

HÁ AINDA BONS COLÉGIOS PROFISSIONALIZANTES.

O estudante já se forma com alguma profissão e pode optar se vai ou não prosseguir numa faculdade.

VI OS INSTRUMENTOS DE DESENHO

057 Quais são?

São tantos que não citaremos todos, mesmo porque é possível até inventar novos instrumentos...

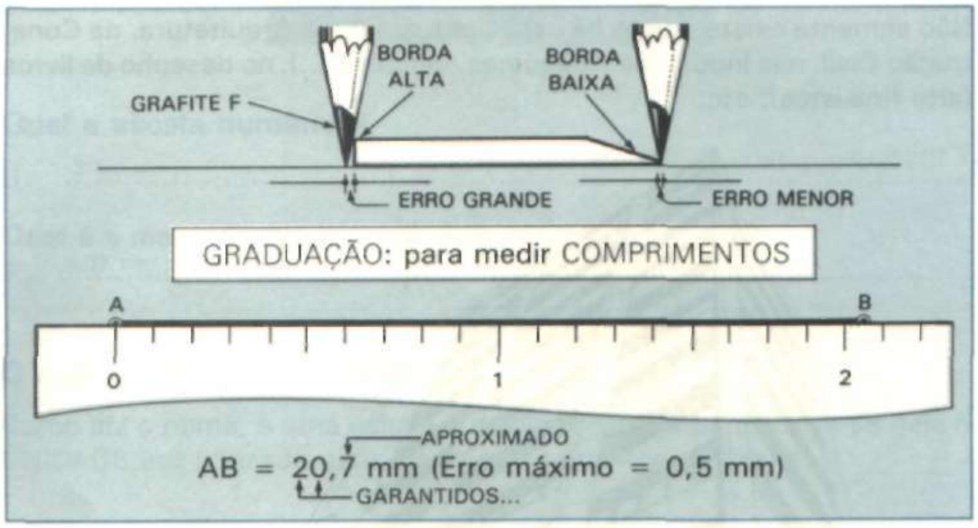
Os principais são a régua graduada, o compasso, o jogo de esquadros e o transferidor.

Os bons são caros e devem ser manejados com capricho e conhecimento.

058 A RÉGUA: **para traçar retas.**

É uma escala gráfica (1:1) PORTÁTIL **graduada em mm ou 0,5 mm.**

Deve-se usar a borda baixa:



O erro gráfico é inevitável; pode-se apenas diminuí-lo.

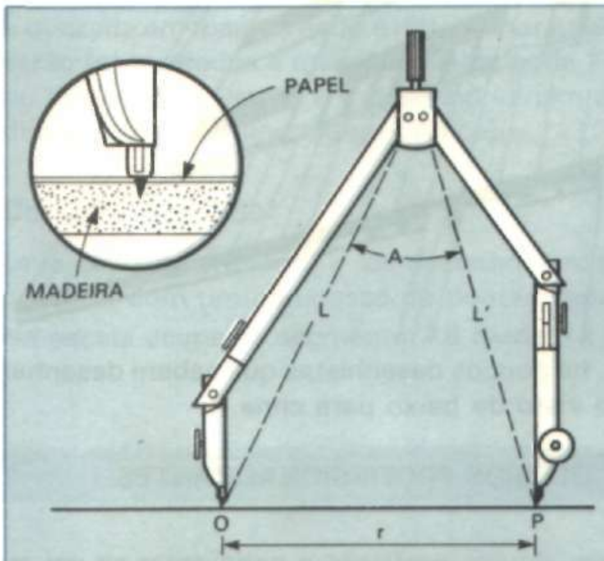
Aconselha-se o emprego de lapiseiras tipo kol-i-nor.

ponta de 2 mm apontada com lixa

059 O COMPASSO: **traça circunferências.**

É o mais PRECISO e **precioso entre os instrumentos que estamos apresentando.**

Ponta-seca especial para não "arrombar" o papel.



Mantendo o centro $\overline{O}$ FIXO **e a abertura** A CONSTANTE, **o grafite** $\overline{P}$ **traçará uma circunferência ou parte (arco).**

Justifica-se pelo critério LAL' de congruência de triângulos.

OP = **r é o** RAIO.

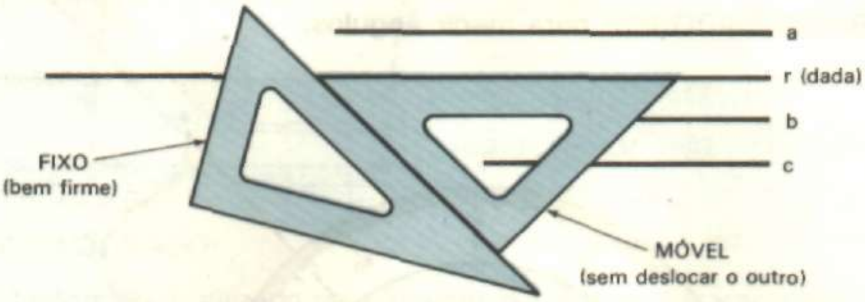
É óbvio que L e L' conservam seus comprimentos.

O pior defeito de um compasso é ficar "bambo".

060 **Jogo de esquadros**

Trabalham SEMPRE JUNTOS, o de 45° e o de 60°, sendo um FIXO e o outro MÓVEL.

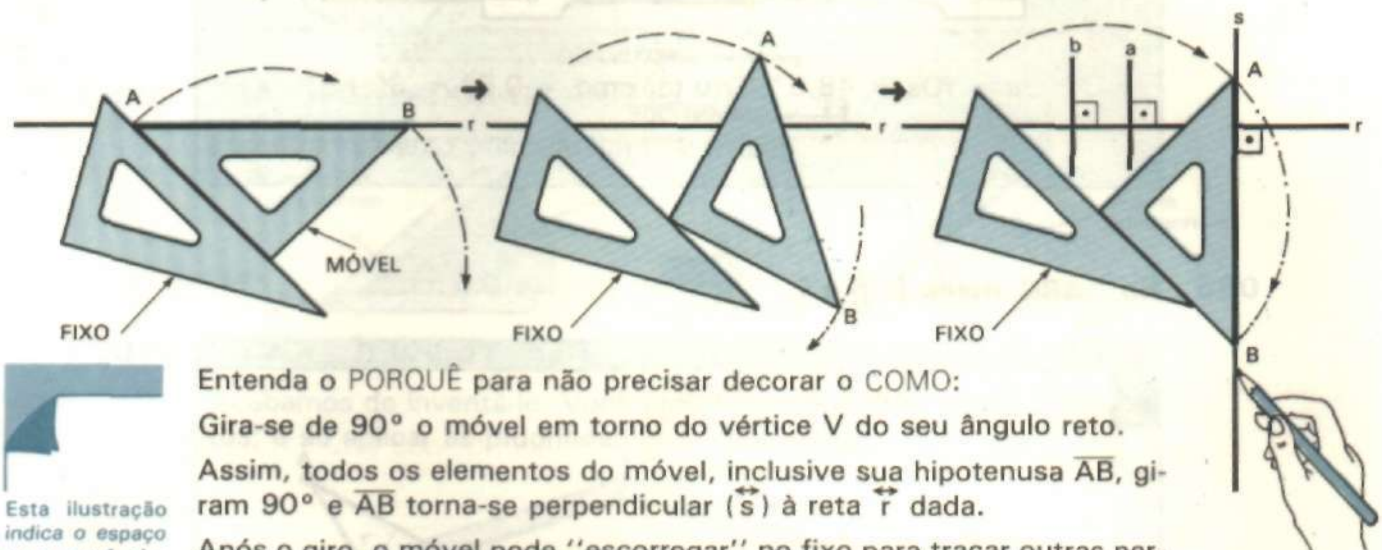
061 **Traçado de paralelas:**



Qualquer dos dois pode ser usado como "o fixo" do par.

Representa um ângulo reto.

062 **Traçado de perpendiculares:**



Esta ilustração indica o espaço para você desenhar

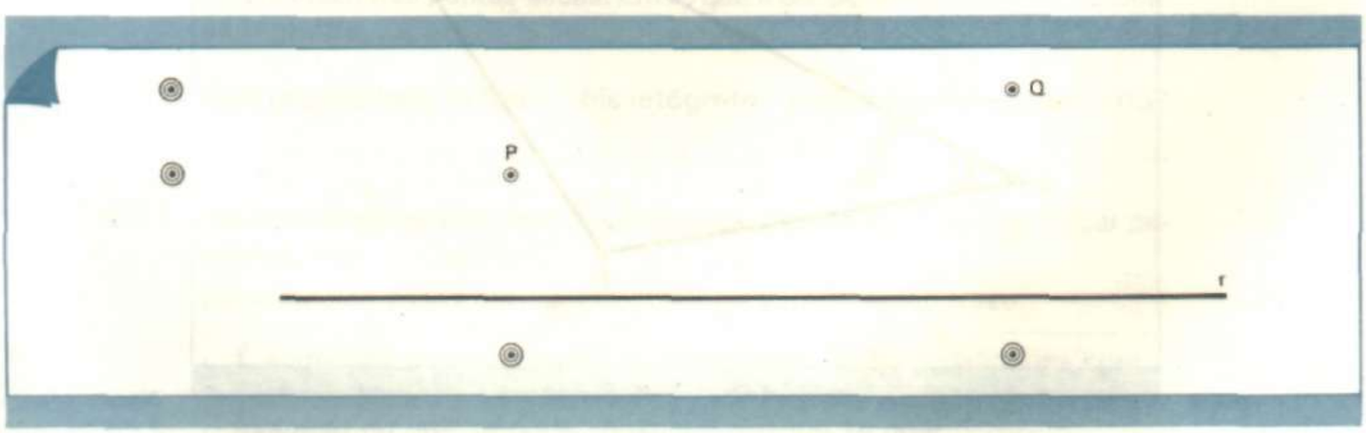
Entenda o PORQUÊ para não precisar decorar o COMO:

Gira-se de 90° o móvel em torno do vértice V do seu ângulo reto.

Assim, todos os elementos do móvel, inclusive sua hipotenusa $\overline{AB}$, giram 90° e $\overline{AB}$ torna-se perpendicular ($\overleftrightarrow{s}$) à reta $\overleftrightarrow{r}$ dada.

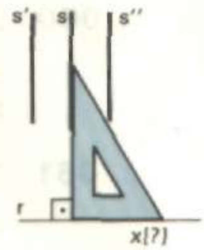
Após o giro, o móvel pode "escorregar" no fixo para traçar outras perpendiculares, como $\overleftrightarrow{a}$, $\overleftrightarrow{b}$, ..., se precisarmos.

063 **Trace por $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ paralelas e perpendiculares à $\overleftrightarrow{r}$.**



Acertou os ALVOS (◉)?

064 Por que é errado usar um só esquadro?



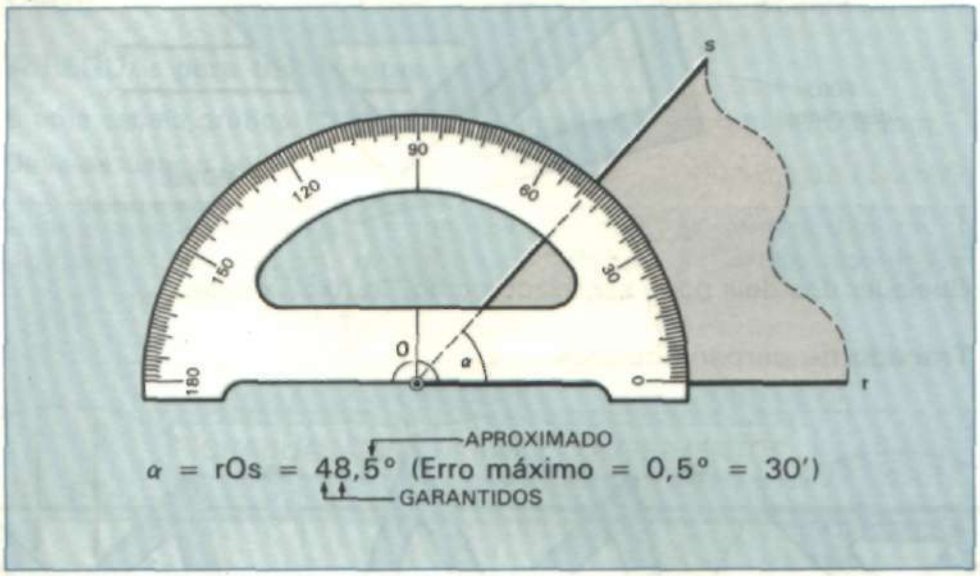
É um erro operacional, pois:

a. o vértice $\overline{X}$ do ângulo reto $r\hat{X}s$ não resulta bem preciso e

b. cada perpendicular exige "um ajustamento".

065 TRANSFERIDORES: **para medir ângulos.**

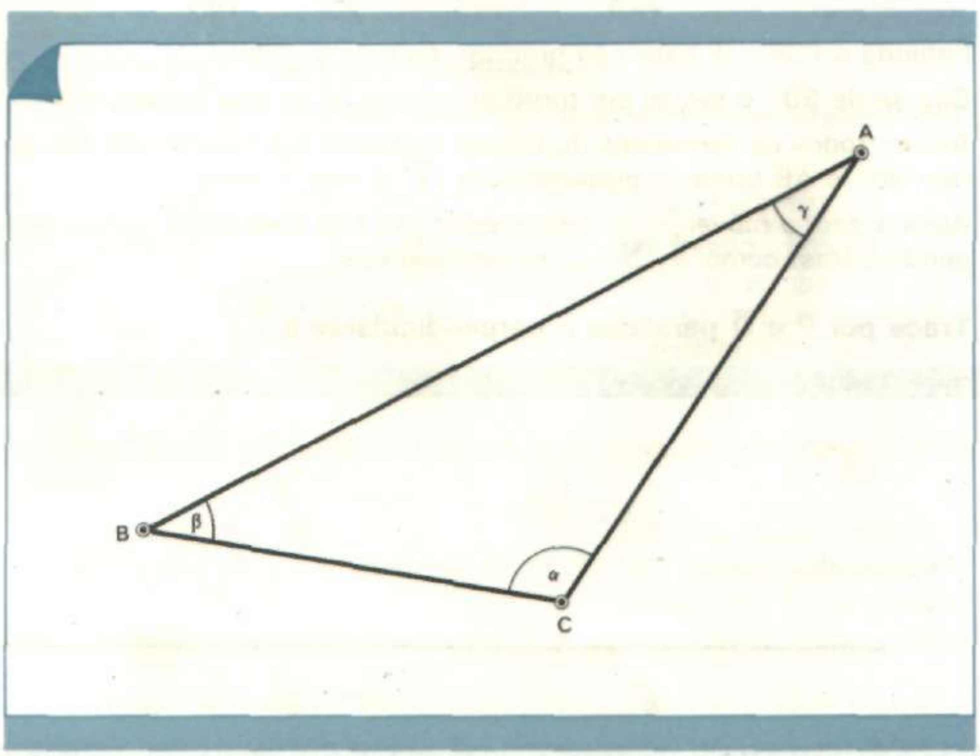
Mede-se a "abertura" do ângulo; o que mais poderíamos medir?



$\alpha = r\hat{O}s = 48{,}5°$ (Erro máximo $= 0{,}5° = 30'$)

Serve também para desenhar ângulos de medidas dadas.

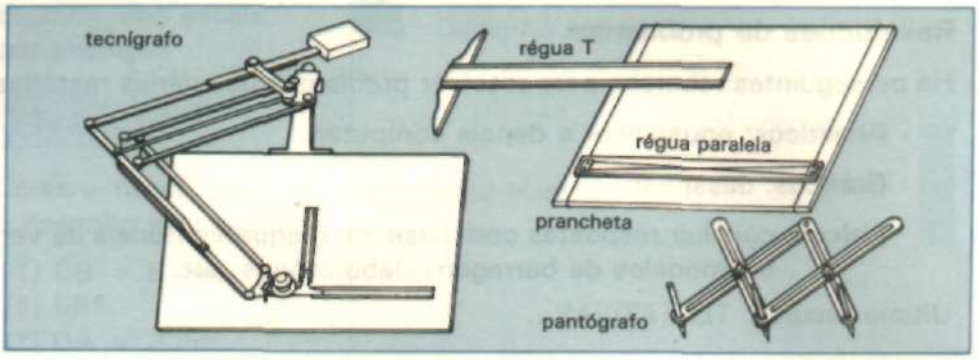
066 No $\triangle ABC$, meça $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$.



R: α = ...114°...; β = ...38°...; γ = ...28°... ($\alpha + \beta + \gamma = 180°$).

Sempre citando a unidade (grau, ...).

067 OUTROS INSTRUMENTOS:



Instrumento de Galileu Galilei (de 1606) para vários empregos, desde mudar escalas de desenhos até calcular juros compostos.

068 PARALELÓGRAFO:

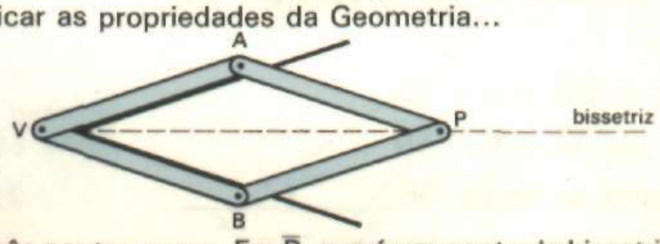
É um instrumento utilizado pela Marinha e serve para traçar paralelas; seu funcionamento é explicado por propriedades dos paralelogramos.

069 TRANSPORTADOR DE ÂNGULOS.

É um instrumento utilizado em marcenaria.

070 "BISSETÓGRAFO".

Acabamos de inventá-lo. Você também poderá criar outros instrumentos; é só aplicar as propriedades da Geometria...



$\overline{A}$, $\overline{V}$ e $\overline{B}$ são três pontas-secas. Em $\overline{P}$, que é um ponto da bissetriz, coloca-se o grafite.

071 Que propriedade utiliza o "bissetógrafo" para o seu funcionamento?

R: ....

072 Há ainda elipsógrafos para traçar elipses, parabológrafos para traçar parábolas, etc.

Estudaremos essas curvas CÔNICAS no livro 3 deste curso.

> **É admirável como os egípcios construíram as suas pirâmides com tamanha precisão e utilizando instrumentos daquela época. É um bom exemplo do que se pode conseguir quando se quer.**

Os geômetras egípcios eram denominados "esticadores de corda"; a corda foi a precursora do compasso.

073 Resoluções de problemas.

Há os seguintes recursos para resolver problemas das várias matérias:

Analíticos: equacionar e depois computar.

Gráficos: desenhar.

Físicos: concluir respostas com base em maquetes (túneis de vento, modelos de barragens, laboratórios, etc.).

Último recurso: TENTATIVAS...

074 Relação dados: respostas.

Em problemas reais — não apenas teóricos — os dados são sempre mais ou menos IMPRECISOS e, por isso, não tem cabimento apresentar as respostas até a "enésima" casa decimal.

Por exemplo, na planta de um loteamento as frentes dos lotes — estava escrito — eram de 14,788236 m...; nem com um aparelho a *laser* é possível demarcá-los no terreno.

O "profissional" simplesmente computou: dividindo 251,4 m (frente da quadra) por 17 (número de lotes), dá 14,788236 m e computador não erra...

A Topografia — parte da Engenharia que estuda a medição e demarcação de glebas e pesquisa a melhor forma de compensar os inevitáveis erros cometidos nas medições de campo.

Uma gleba pode ser um terreno, um sítio, uma fazenda, etc.

075

> A precisão de uma resolução gráfica é perfeitamente COMPATÍVEL com a prática.

Não têm significado respostas enganadoramente precisas.

076 Problema de Física:

Obter a resultante $\overrightarrow{OR}$ das forças $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

DADOS:

Módulos: de $\overrightarrow{OA}$ = a = 3N

de $\overrightarrow{OB}$ = b = 5N

Módulo é o valor da grandeza sem sinal + ou −.

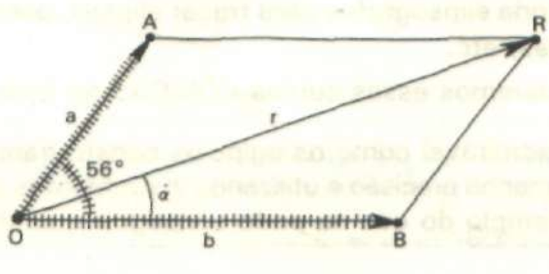
Ângulo entre as forças: 56°.

TEORIA (necessária e suficiente):

O módulo (intensidade) r da resultante $\overrightarrow{OR}$ é representado pela diagonal $\overline{OR}$ de um paralelogramo de lados $\bar{a}$ e $\bar{b}$.

Obter uma força é obter seu módulo (r) e sua direção (determinada por α).

Rascunho:
(sem escala)



RESOLUÇÃO GRÁFICA:

Escolha uma escala; por exemplo:

1 cm : 1 N.

Use esquadros e transferidor.

Copie — nessa escala — o desenho do rascunho:

1º) OB = 5 cm.
2º) 56°.
3º) OA = 3 cm.
4º) *Obtenha $\overline{R}$ traçando as paralelas.*

Desenho em escala:

R: r = ...7,2 N..........; α = ...21°..........

Se você souber resolver analiticamente, obterá r = 7,125713 N e α = 20°25′ 41,592″.

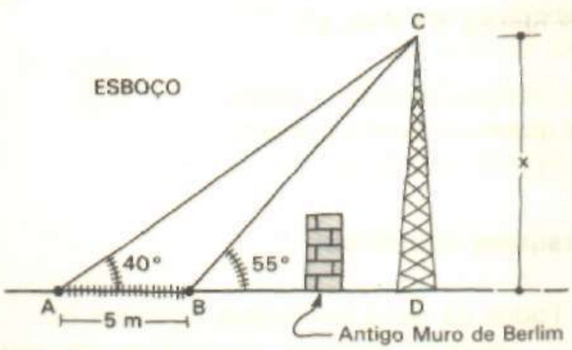
Graficamente — na escala adotada — obtemos r = 7,13 N e α = 20,4° (ou 20°24′). Com um desenho maior, bons instrumentos, capricho e boa técnica ao desenhar, obteremos precisão maior.

077 Problema de Espionagem:

Precisando descobrir a altura x de uma torre $\overline{CD}$ vertical e inacessível, um agente posicionou-se em $\overline{A}$ e $\overline{B}$ — colineares com $\overline{D}$ — e anotou os dados:

Colineares: da mesma reta.

ESBOÇO: é um desenho não em escala.



Como tinha pressa e não havia computador já programado para esse problema, foi a um escritório de Engenharia — onde sempre há uma prancheta — e obteve **x**... Como?

RESOLVA GRAFICAMENTE EM FOLHA AVULSA. USE A PRANCHETA.

Adotou (por exemplo) a escala 1:100 e COPIOU o esboço, mas em escala.

R: x = ...10.... m.

$\longrightarrow$ corresponde a

1:100 ⇔ 1 cm → 100 cm ⇔ 1 cm → 1 m.

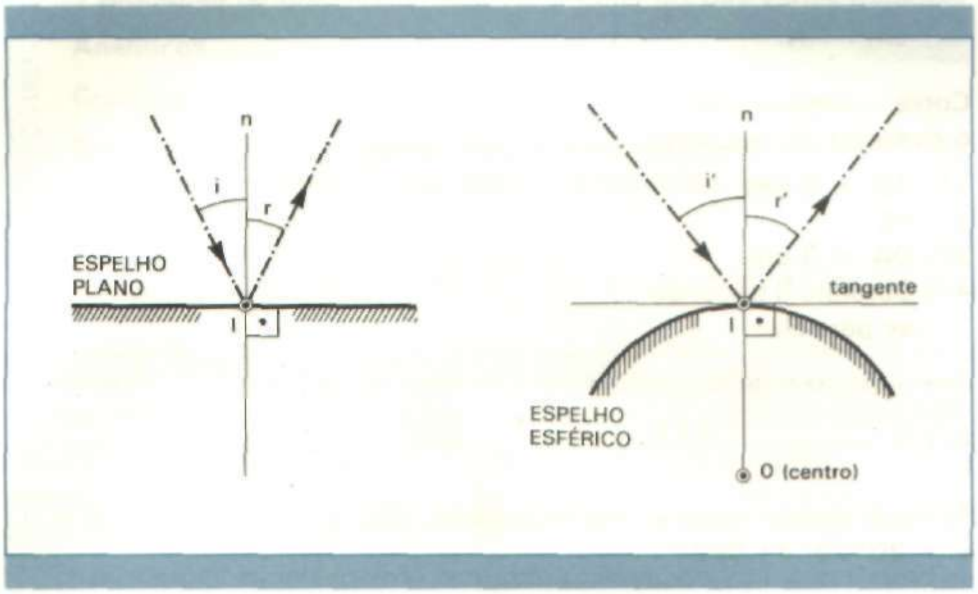
A prancheta não é simplesmente um móvel decorativo...

078 E se $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{D}$ não fossem da mesma reta?

Nesse caso $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{D}$ e $\overline{C}$ não estariam num mesmo plano e seria um problema de Geometria Descritiva.

079 O Desenho aplicado à Óptica (parte da Física).

Sabe-se que todos os raios de luz que incidem num espelho refletem-se de modo que i = r; i' = r'; ...

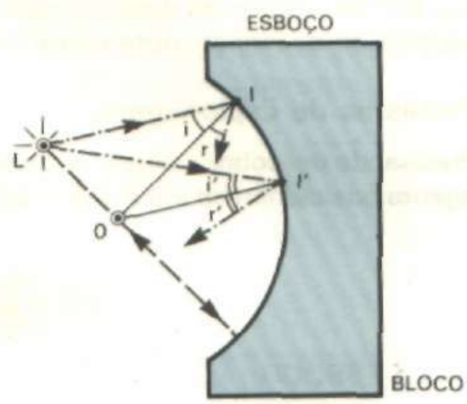


080 Problema de Óptica:

Num bloco maciço foi feita uma concavidade (buraco) com forma esférica e de centro $\overline{O}$.

A superfície do buraco foi espelhada e tornou-se um ESPELHO CÔNCAVO.

$\overline{L}$ é uma pequeníssima lâmpada, quase um ponto, e chama-se FONTE PONTUAL.



081 Pesquisa científica:

Todos os raios luminosos emitidos por $\overline{L}$, após se refletirem num espelho esférico, passam ou não por um mesmo ponto?

Para responder, temos os seguintes recursos:

- FÍSICO (EXPERIMENTAL):

  Num laboratório há aparelhos que permitem obter essa resposta. Custam caro.

- GRÁFICO:

  O raio $\overrightarrow{LO}$ reflete-se sobre si próprio, pois incide com ângulo zero; *é um raio particular.*

  Os raios incidentes $\overrightarrow{LI}$ e $\overrightarrow{LI}'$, genéricos, retornam obedecendo i = r e i' = r'.

Para verificar se TODOS passam por um mesmo ponto,
basta verificar se

ou três genéricos
ou dois genéricos e um particular,

após as reflexões, passam ou não por um mesmo ponto.

1º) Desenhe uma circunferência de centro e raio arbitrários.
2º) Tome um ponto $\overline{L}$ arbitrário (mas genérico).
3º) Com instrumentos trace os três raios luminosos.

LABORATÓRIO GRÁFICO
ENTRE QUEM QUISER

Os raios refletidos passam ou não por um mesmo ponto?

R: ....

082

Em países onde a verba para o ensino é escassa, seria conveniente incentivar o estudo dos recursos gráficos e não, como infelizmente acontece, fazer exatamente o contrário.

083 **Um último exemplo:**

Destinado a mostrar que:

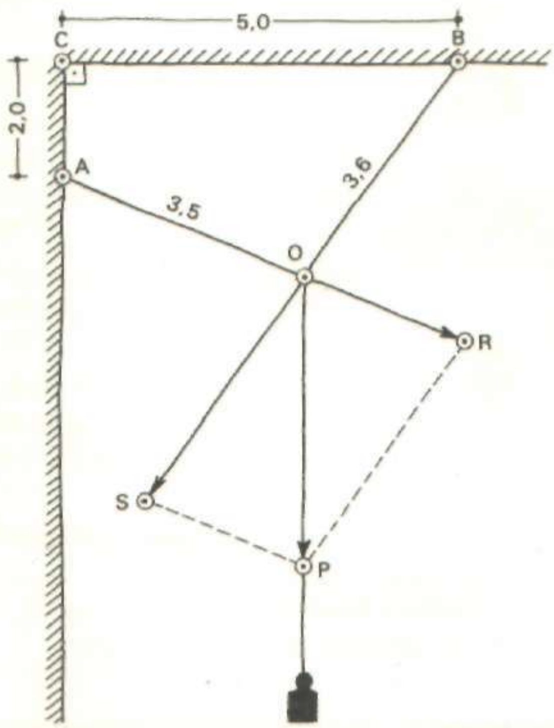
Se, e somente se, num mesmo desenho há duas (ou mais) grandezas DIFERENTES, usam-se escalas DIFERENTES; é óbvio que uma para cada grandeza.

084 **Problema de Engenharia:**

$\overline{AC}$ está numa parede vertical e $\overline{CB}$ num forro horizontal. Escolher os cabos de aço $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ para sustentar um peso máximo de 5 000 N.

Observe os dados na figura e na tabela:

Esboço cotado em **m**:



CABO (nº)	RESISTÊNCIA MÁXIMA (N)
001	1 000
002	2 000
003	3 000
004	4 000
005	5 000
006	6 000

RESOLUÇÃO:

Adotemos — por exemplo — as escalas:

Comprimentos 1:100 (1 cm : 1 m) Forças (intensidades) 1 cm : 1 000 N

Acompanhe, em seguida, a execução.

EXECUÇÃO:

1. Desenhe abaixo um ângulo reto.
2. Marque CB = 5,0 cm e CA = 2,0 cm.
3. Os arcos ($\overline{A}$; 3,5 cm) e ($\overline{B}$; 3,6 cm) determinam o ponto $\overline{O}$.
4. Na vertical, marque OP = 5,0 cm.
5. Por $\overline{P}$ trace a paralela à $\overrightarrow{AO}$, obtendo o ponto $\overline{S}$; $\overline{R}$ é desnecessário.
6. Meça $\overline{OS}$ e $\overline{SP}$, transforme em N e responda:

R: Cabo $\overline{OA}$ nº ....003.......... e cabo $\overline{OB}$ nº ....005..........

($\overline{O}$; r) significa circunferência (ou arco) de centro $\overline{O}$ e raio r.

Em Física, desprezam-se os pesos dos cabos, que são considerados inextensíveis e perfeitamente flexíveis, despreza-se o atrito nas argolas e considera-se um valor aproximado para a aceleração da gravidade.
Tem cabimento fazer a conta com muitas casas decimais?

085 Para três cabos não-coplanares, a resolução gráfica é feita em Geometria Descritiva e é mais fácil e rápida do que resoluções analíticas.

VIII DISTÂNCIAS

Precisamos esclarecer o conceito de DISTÂNCIA, que será utilizado no próximo capítulo.

086 Em Geometria Euclidiana define-se:

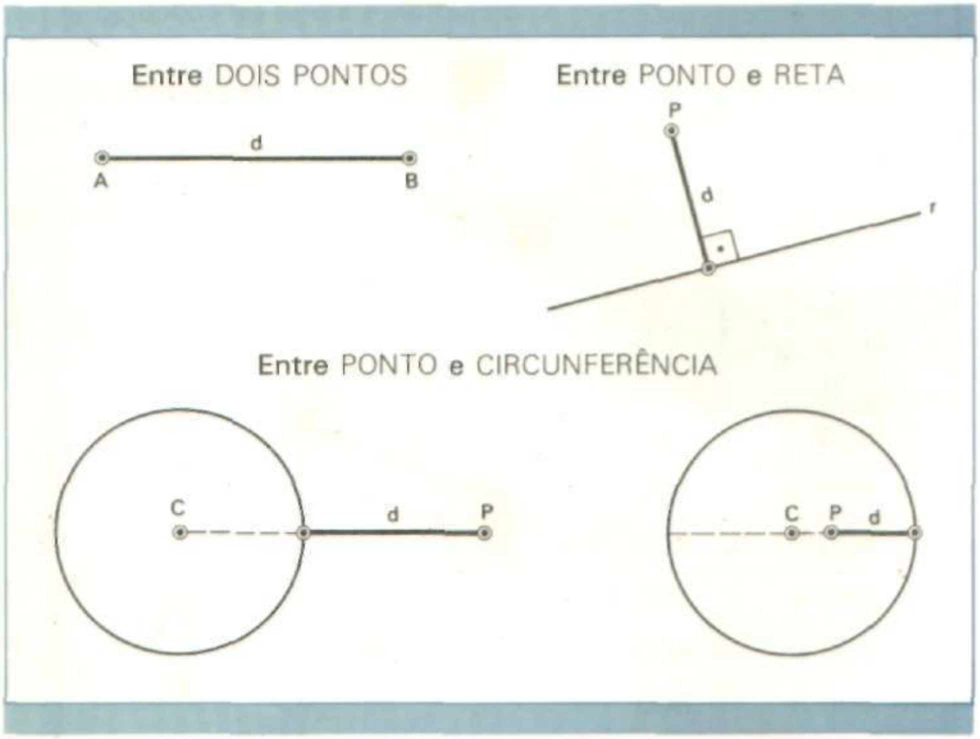
> DISTÂNCIA entre duas figuras geométricas quaisquer é sempre a MEDIDA do menor e único segmento com uma extremidade em cada uma dessas figuras.

As duas figuras não devem ter nenhum ponto comum

087 ***A distância, sendo uma medida, pode ser enunciada:***

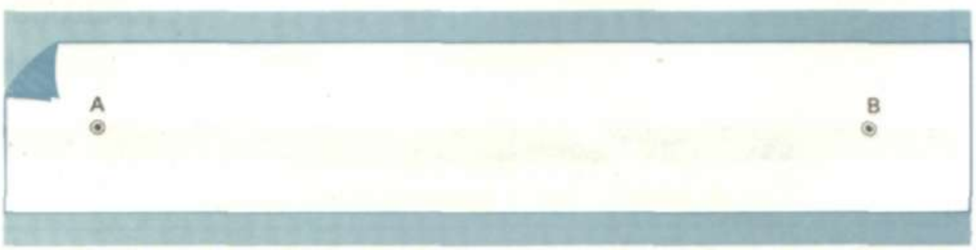
- ou por um NÚMERO seguido pela unidade
- ou por um SEGMENTO desenhado na escala utilizada no desenho.

088



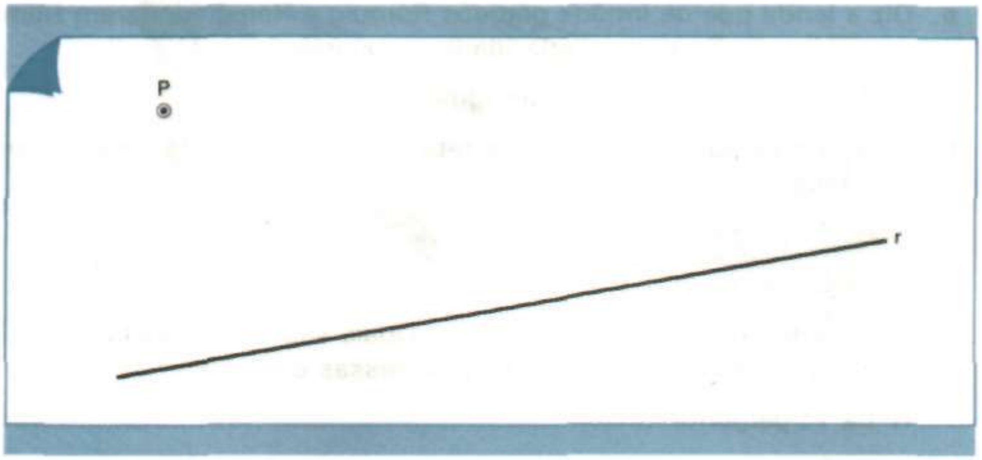
089 A distância existe entre as figuras, isto é, de qualquer das duas à outra. Por exemplo, a reta $\overleftrightarrow{r}$ dista **d** de $\overline{P}$.

090 Meça a distância entre $\overline{A}$ e $\overline{B}$ (em mm):



R: AB = ...101......... mm.

091 **Meça a distância entre $\overline{P}$ e $\overleftrightarrow{r}$ (em mm).**



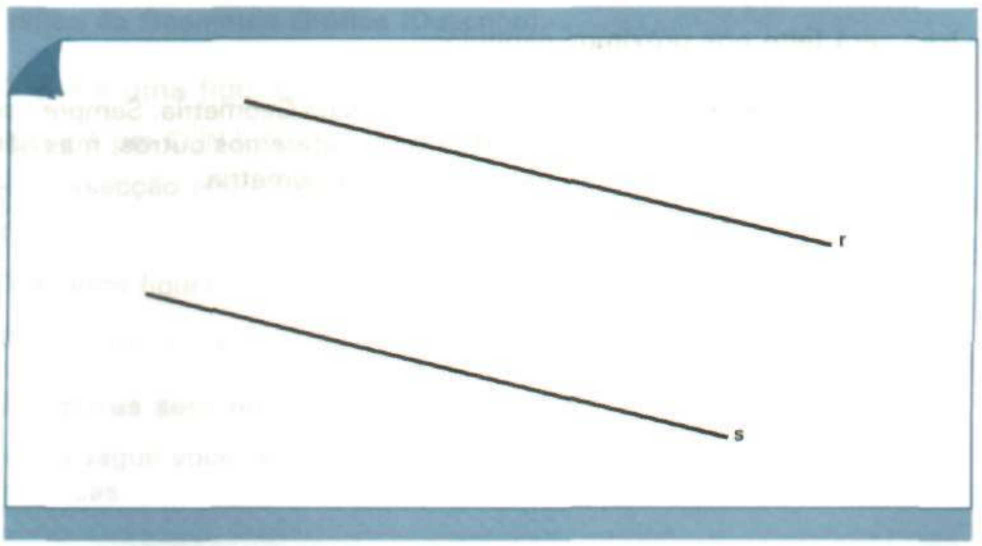
"Chutar" onde medir, é proibido... Medir o segmento $\overline{PO} \perp \overleftrightarrow{r}$ com $\overline{O}$ em $\overleftrightarrow{r}$ é o certo.

R: Distância = ...34........ mm.

092 **Meça a distância entre as paralelas $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$.**

A distância (que é um número, uma medida) é única; para medi-la é obrigatório traçar previamente uma das perpendiculares comuns às retas dadas.

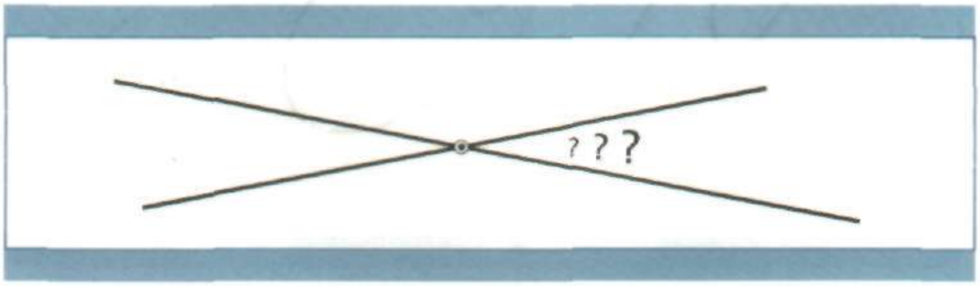
Essa exigência deve-se à precisão dos conceitos e não à precisão da medida.



R: Distância = ...28........ mm.

093 **Existe distância entre retas concorrentes?**

Não. Não é definida.



094 **O que significa o termo eqüidistante?**

a. Diz a lenda que os irmãos gêmeos Rômulo e Remo fundaram Roma em 753 a.C. Qual era a sua idade na ocasião?

R: Não sei, mas sei que eram iguais entre si.

b. Dois pontos eqüidistam de uma reta. As distâncias são conhecidas? São iguais?

R. da 1ª pergunta: ....

R. da 2ª pergunta: ....

c. Um ponto eqüidista de duas retas. Quais são as distâncias entre o ponto e cada reta? O que sabemos dessas distâncias?

R. da 1ª pergunta: ....

R. da 2ª pergunta: ....

095 CONCLUSÃO DESTE CAPÍTULO ZERO:

Somente a ginástica mental desenvolve a parte do cérebro responsável pela criatividade.

A criatividade — que exige motivação e iniciativa — é inata, mas precisa ser DESENVOLVIDA mediante exercícios apropriados e constantes, uma verdadeira ginástica mental.

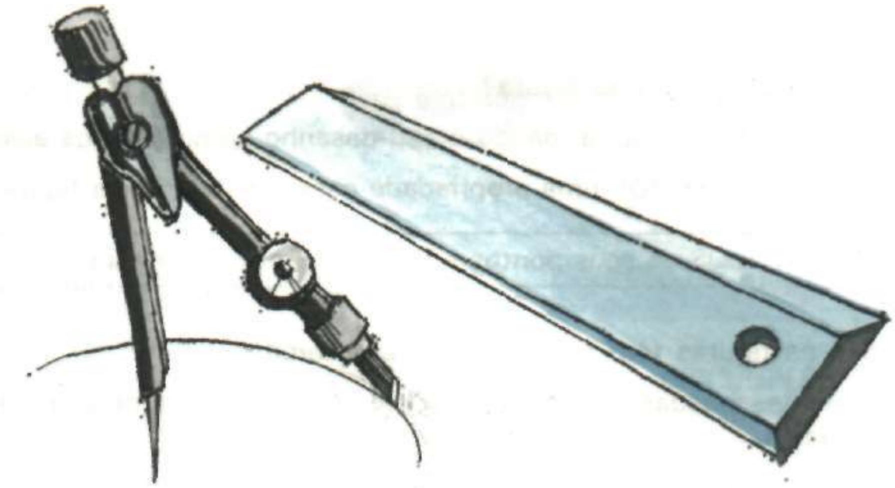
Não se trata de desenvolver a memória...

Isso será feito nos próximos capítulos.

096 Já estudamos alguns conceitos e propriedades da Geometria. Sempre que for necessário, e nas ocasiões oportunas, estudaremos outros, mas não na ORDENAÇÃO em que são estudados em Geometria.

CAPÍTULO

1



DESENHO GEOMÉTRICO DG

I LUGARES GEOMÉTRICOS

097 Este é um assunto de Geometria que será aqui estudado sob o enfoque gráfico da Geometria Gráfica (Desenho).

098 **O que é uma** figura?

Figura é um CONJUNTO — não vazio — de PONTOS.

A intersecção (∩) de duas retas paralelas é uma figura?

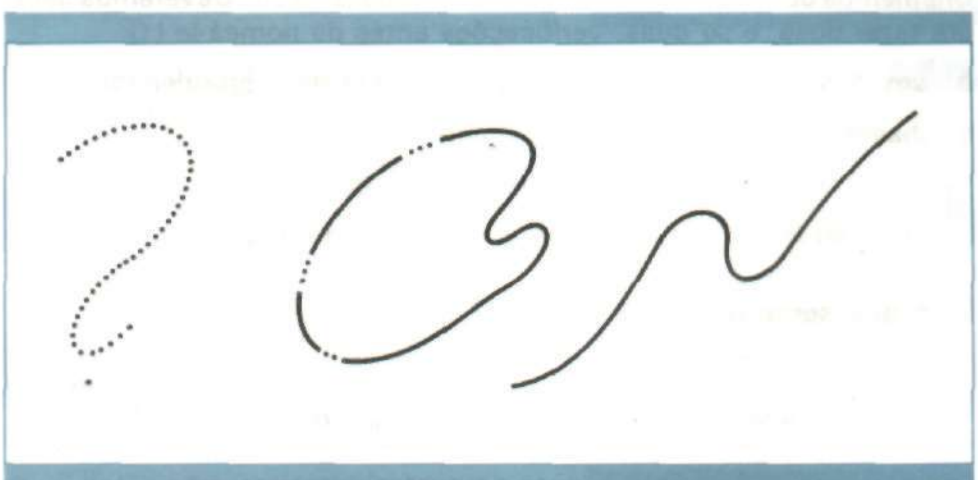
R: ....

Cite cinco figuras conhecidas.

R: ....

099 **Há figuras sem nome?**

Sim, a seguir você verá as representações de algumas, contínuas e descontínuas.



100 **Como determinar uma figura?**

OU DAMOS a figura, dando o seu desenho como fizemos acima,
OU ENUNCIAMOS uma propriedade característica $\mathbb{C}$ da figura.

TODOS os seus pontos e SOMENTE eles a **tenham**.

101 **Todas as figuras têm propriedade característica?**

Não. As desenhadas no item 099, por exemplo, não têm nenhuma (que se saiba...).

102 **Sabendo-se a propriedade $\mathbb{C}$, é possível desenhar (obter) a figura?**

Sim, mas somente se $\mathbb{C}$ for geométrica.

103 **Essas figuras têm nome?**

Sim. Elas, e somente elas, foram batizadas com o nome de LUGARES GEOMÉTRICOS, cujo apelido é LG.

É uma definição!

104 **De onde surgiu esse esdrúxulo nome?**

Um LG é o "lugar" onde PROCURAR UM PONTO que possui uma certa propriedade "geométrica".

105 **Então o que é um LG? Complete:**

Se não souber, releia o nº 100.

LG **é uma figura tal que:**

a. .... e

b. .... têm

uma propriedade .... **comum, e reciprocamente.**

106 **Como convencer-se de que uma figura é ou não é o** LG **dos pontos que têm uma propriedade $\mathbb{C}$?**

Chamemos de φ (lê-se "fi") a figura "candidata" a LG. Deveremos sempre fazer duas, e só duas, verificações antes de nomeá-la LG:

a. um PONTO GENÉRICO (todos) de φ deverá ter a propriedade $\mathbb{C}$ e

b. (basta um só dos seguintes caminhos):

OU TODOS os pontos fora de φ não têm $\mathbb{C}$
OU um PONTO GENÉRICO que tem $\mathbb{C}$ está em φ.

107 **Para que serve o estudo dos LGs?**

Os LGs constituem grande parte da TEORIA MÍNIMA (TM) do nosso estudo e conhecê-los é imprescindível.

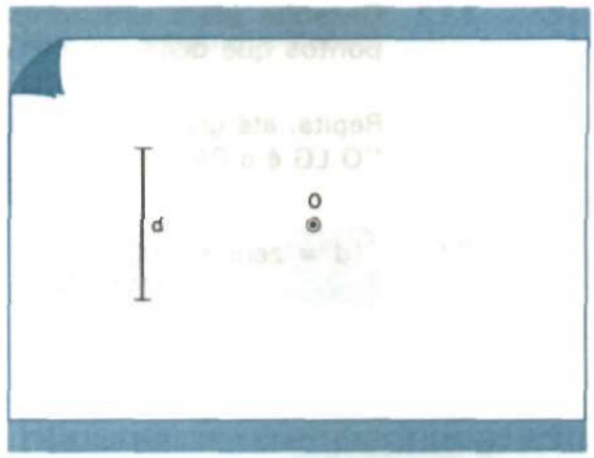
Estudaremos inicialmente apenas os quatro primeiros; há muitos...

L1

Propriedade $\mathbb{C}$		Figura φ
DISTÂNCIA **d (determinada)** **de** um PONTO $\overline{O}$ **(determinado)**	$\Longleftrightarrow$	CIRCUNFERÊNCIA ($\overline{O}$; d)

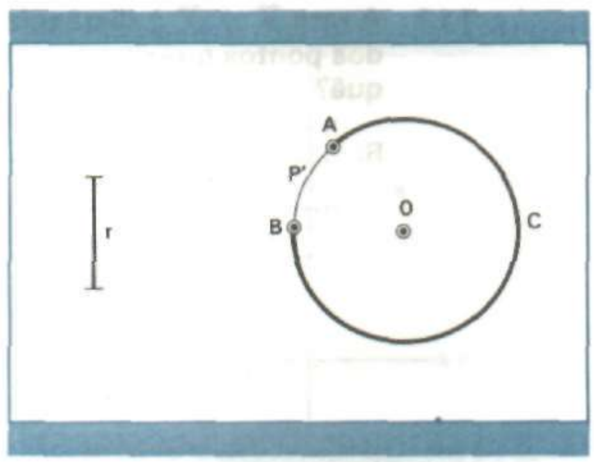
108 **Desenhe o LG dos pontos que** distam d **de $\overline{O}$.**

SE ou $\overline{O}$ ou d não forem
ou dados ou obtíveis,
ENTÃO não dá para desenhar o LG.



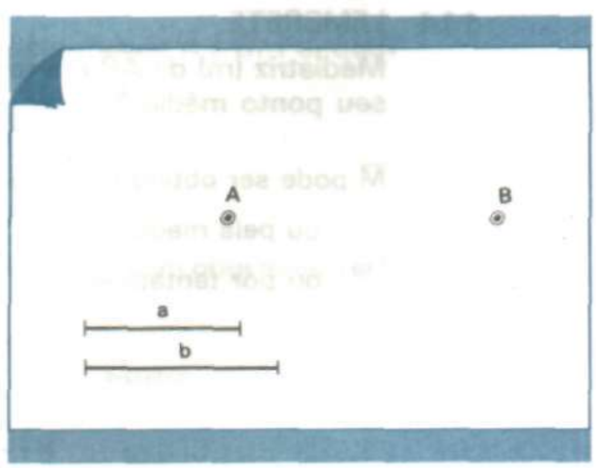
109 **O arco $\overset{\frown}{ACB}$ é o LG dos pontos que distam r de $\overline{O}$? Por quê?**

R: ....
....
....



110 **Obtenha "um" ponto $\overline{X}$ que dista** a **de $\overline{A}$ e** b **de $\overline{B}$.**

"Um" significa "pelo menos um" e deve-se obter "tantos quantos houver", desde que seja possível.



111 **Quantos há?**

R: ....

O segundo é um "CLANDESTINO"...

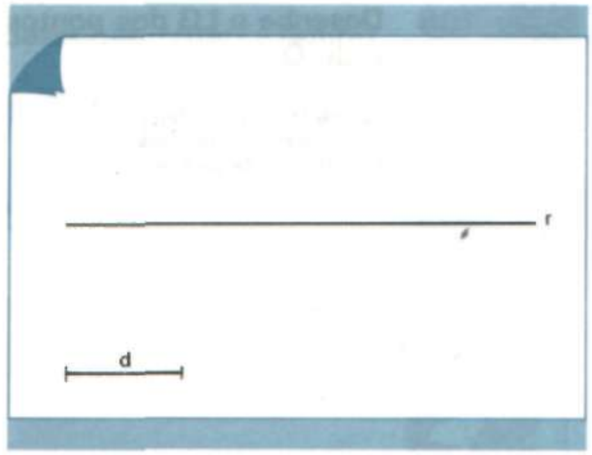
L2

Propriedade $\mathbb{C}$		Figura φ
DISTÂNCIA **d** (determinada) de uma RETA $\overleftrightarrow{r}$ (determinada)	$\Longleftrightarrow$	PAR DE PARALELAS à reta $\overleftrightarrow{r}$ e distantes d de $\overleftrightarrow{r}$.

112 **Desenhe (com esquadros) o LG dos pontos que distam d de $\overleftrightarrow{r}$.**

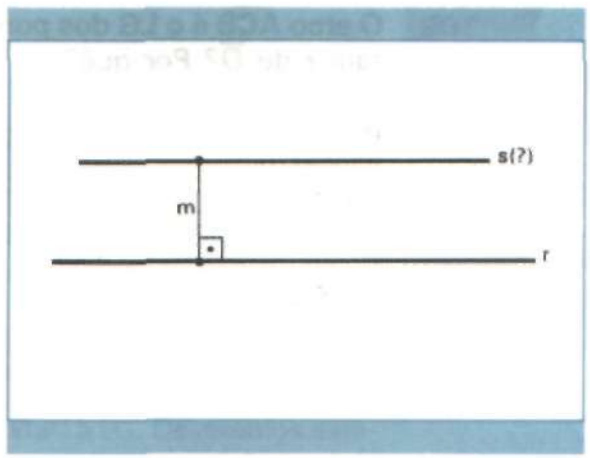
Repita, até gravar:
"O LG é o PAR", ...

d = zero $\Leftrightarrow$ LG = $\overleftrightarrow{r}$
(coincide)



113 **A reta $\overleftrightarrow{s}$ // $\overleftrightarrow{r}$ à distância m é o LG dos pontos que distam m de $\overleftrightarrow{r}$? Por quê?**

R: ....
....
....

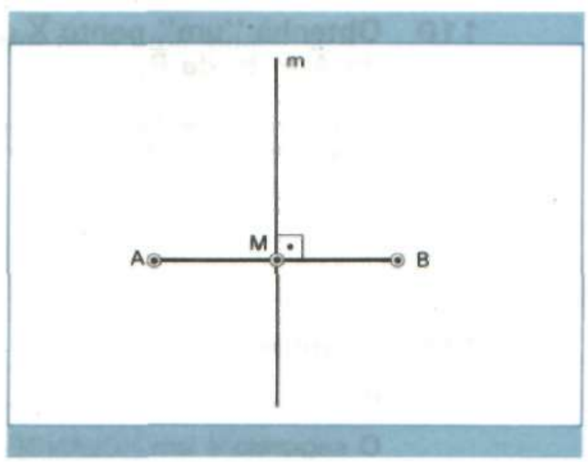


114 LEMBRETE:
Mediatriz (m) de $\overline{AB}$ é a reta $\perp$ $\overline{AB}$ no seu ponto médio $\overline{M}$.

$\overline{M}$ pode ser obtido (não em DG):

É teoricamente errado...

ou pela medida de $\overline{AB}$
ou por tentativas.



L3

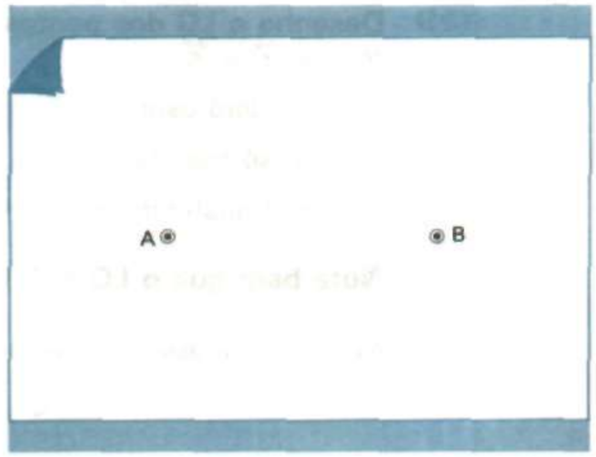
Propriedade $\mathbb{C}$		Figura φ
EQÜIDISTAR de DOIS PONTOS $\overline{A}$ e $\overline{B}$	$\Longleftrightarrow$	MEDIATRIZ de $\overline{AB}$

115 **Desenhe (com esquadros) o LG dos pontos que** eqüidistam **de $\overline{A}$ e $\overline{B}$.**

Quais pontos devem eqüidistar de $\overline{A}$ e $\overline{B}$?

R: *Todos os pontos da* ....

.... e somente eles.



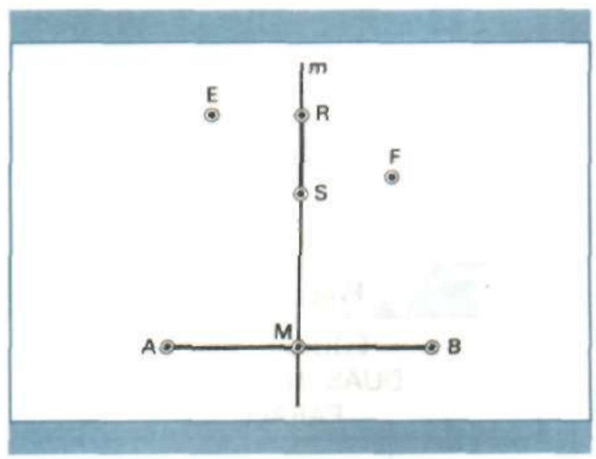
116 **Dos pontos nomeados ao lado:**

Eqüidistam de $\overline{A}$ e $\overline{B}$:

R: ....

Não eqüidistam de $\overline{A}$ e $\overline{B}$:

R: ....



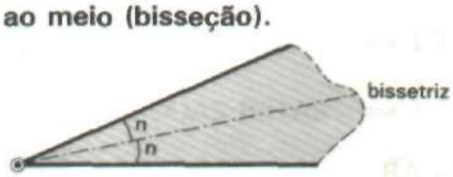
117 **O segmento $\overline{RS}$ é o LG dos pontos eqüidistantes de $\overline{A}$ e $\overline{B}$? Por quê?**

R: ....

....

118 LEMBRETE:

Bissetriz de um ângulo é a SEMI-RETA INTERNA **— com origem no vértice — e que o reparte ao meio (bisseção).**



L4

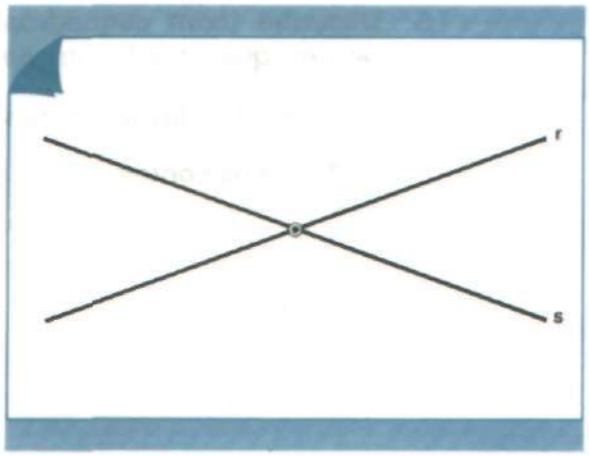
Propriedade $\mathbb{C}$		Figura φ
EQÜIDISTAR de DUAS RETAS $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$ CONCORRENTES.	$\Longleftrightarrow$	É A QUADRA de BISSETRIZES dos ângulos $\widehat{rs}$.

119 **Desenhe o LG dos pontos** eqüidistantes **de $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$.**

Você poderá usar:

ou só transferidor

ou transferidor e esquadros.



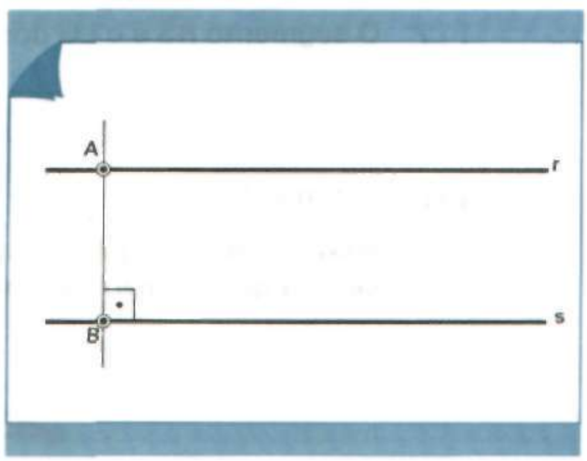
120 **Note bem que o LG é** A QUADRA.

Bissetriz é — por definição — uma semi-reta.

L4a

Propriedade $\mathbb{C}$		**Figura** φ
EQÜIDISTAR de DUAS RETAS $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$ PARALELAS	$\Longleftrightarrow$	É A RETA (paralela à $\overleftrightarrow{r}$ e à $\overleftrightarrow{s}$) EQÜIDISTANTE de $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$.

121 **Trace o LG dos pontos eqüidistantes de $\overleftrightarrow{r}$ e de $\overleftrightarrow{s}$.**



122 É a mediatriz de $\overline{AB}$.

123 Oportunamente estudaremos outros LGs e esperamos que — até lá — você possa concluí-los sozinho.

124 RESUMO:

SIGLAS	PROPRIEDADES	FIGURAS
L1	DISTAR de UM PONTO	CIRCUNFERÊNCIA
L2	DISTAR de UMA RETA	PAR DE PARALELAS
L3	EQÜIDISTAR de DOIS PONTOS	MEDIATRIZ
L4	EQÜIDISTAR de DUAS RETAS — CONCORRENTES →	QUADRA DE BISSETRIZES
L4a	EQÜIDISTAR de DUAS RETAS — PARALELAS →	RETA EQÜIDISTANTE

125 **Observe a ordenação lógica:**

L1 e L2: DISTÂNCIA **determinada de** "UM"
(ou um PONTO **ou uma** RETA **determinados).**

L3 e L4: EQÜIDISTÂNCIA **(só temos a igualdade) de** "DOIS"
(L4a) **(ou dois** PONTOS **ou duas** RETAS **determinados).**

Determinada: { ou dada / ou obtível.

Se num "outro mundo" estudarem LG, certamente a ordenação será essa...

DISTAR de um PONTO $\Leftrightarrow$ L1

DISTAR de uma RETA $\Leftrightarrow$ L2

EQÜIDISTAR de DOIS PONTOS $\Leftrightarrow$ L3

EQÜIDISTAR de DUAS RETAS $\Leftrightarrow$ L4

II ENUNCIADO GRÁFICO EG

126 O que é um problema?

É uma questão pedindo para:

> **OBTER uma resposta a partir de**
> **DADOS necessários e suficientes.**

127 Como podem ser esses dados e a resposta?

> FIGURAS,
> MEDIDAS e
> RELAÇÕES.

128 Relações? Quais?

> **Entre** FIGURAS: de pertinência, de paralelismo, de perpendicularidade, etc.
>
> **Entre** MEDIDAS: igualdades ou outras proporções.

129 Como comunicar quais os dados e o que se quer?

Fornecendo um texto — num idioma — em linguagem TÉCNICA, denominado ENUNCIADO do problema.

130 Pode-se usar a linguagem gráfica?

Você previu o que vamos estudar...
PODE-SE, CONVÉM e, portanto, DEVEREMOS usar, em Desenho, esse tipo de enunciado, tão útil que até foi batizado com o nome de

131 ENUNCIADO GRÁFICO EG

Há quem compreenda Braille, taquigrafia, partituras musicais.

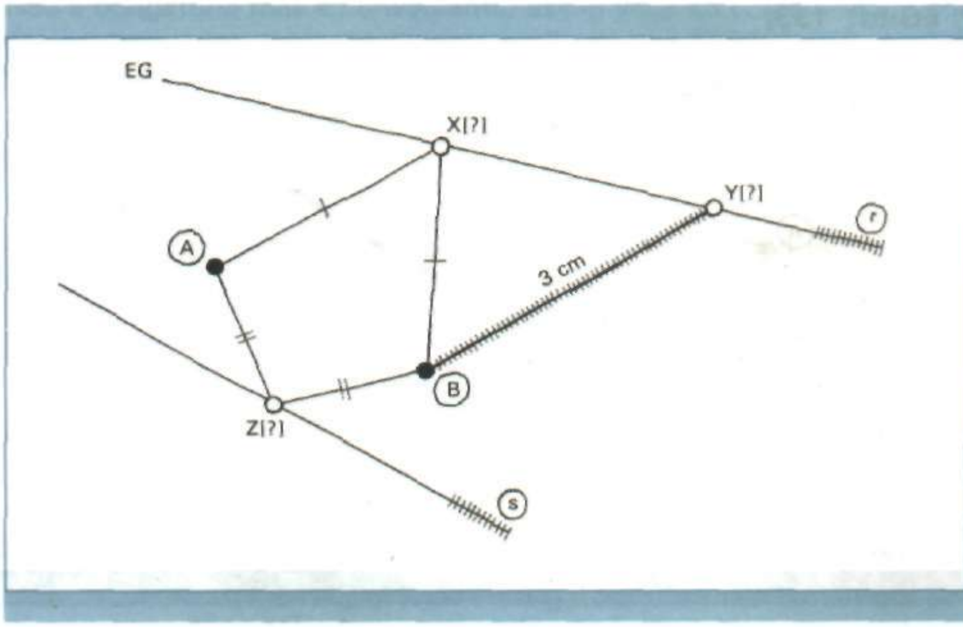
132 É fácil compreender um EG?

Para um telegrafista é fácil entender a mensagem; ele sabe o Código Morse...

Se você souber o CÓDIGO GRÁFICO...

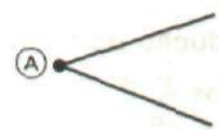
A •—	H ••••	O ———	V •••—
B —•••	I ••	P •——•	W •——
C —•—•	J •———	Q ——•—	X —••—
D —••	K —•—	R •—•	Y —•——
E •	L •—••	S •••	Z ——••
F ••—•	M ——	T —	
G ——•	N —•	U ••—	

133 Qual é o código gráfico?



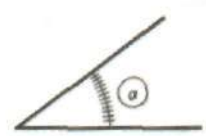
QUAL O CÓDIGO DE UM IDIOMA?

PONTOS DADOS: "Rodinhas" nas letras e/ou ● "bolinha" cheia.



RETAS DADAS: "Rodinhas" nas letras e/ou "farpas" junto à letra.

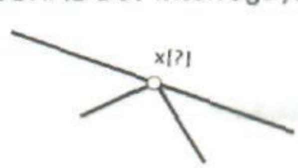
MEDIDAS DADAS: "Farpas" no segmento que a representa; num ângulo, "farpas" na abertura e "rodinha" na letra.



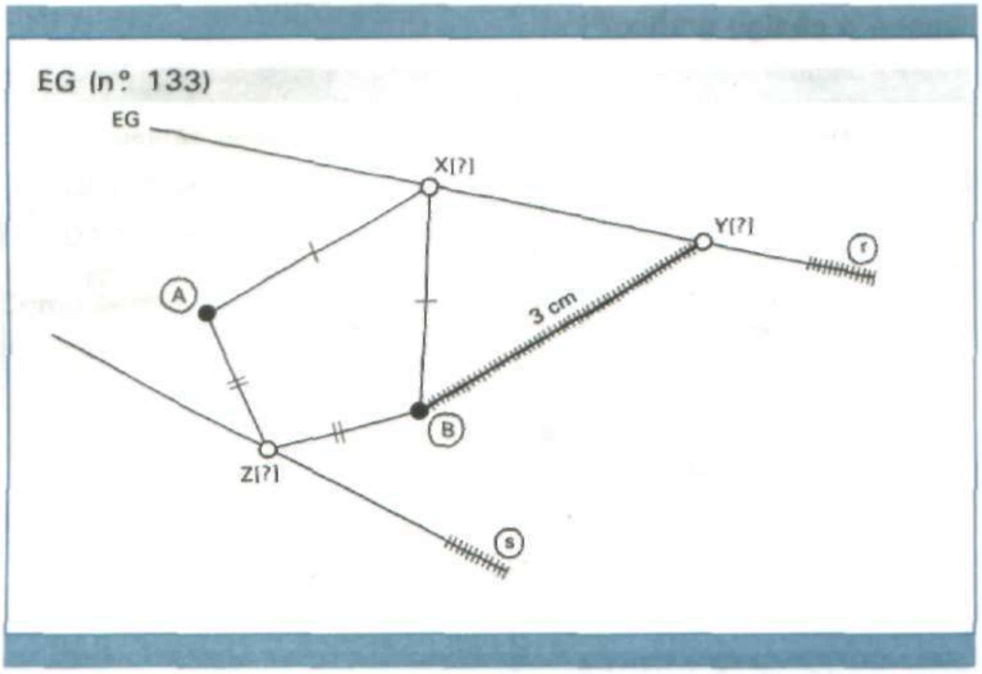
IGUALDADES: O mesmo número de "tracinhos" quando deverão ser congruentes.

SEGMENTOS E ÂNGULOS CONGRUENTES (≅) ⟺ MEDIDAS IGUAIS (=)

PONTOS e RETAS PROCURADOS: Interrogação [?] junto à letra.



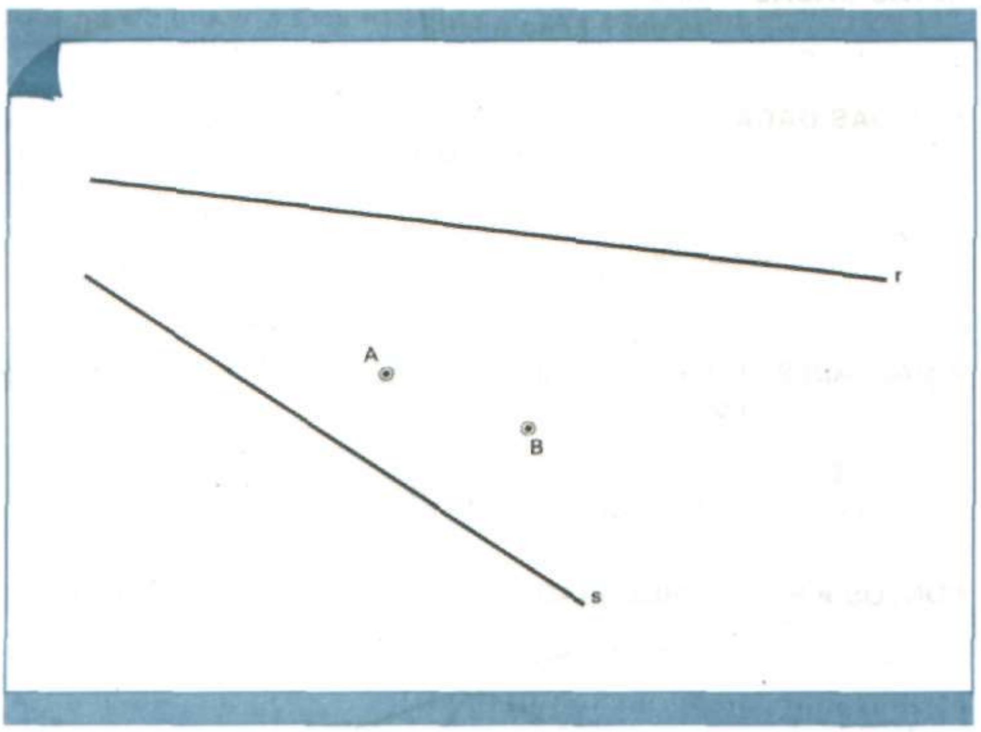
PONTOS AINDA NÃO COPIADOS: ○ "Bolinha" vazia.



134 Tradução do EG anterior:

Dados $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$, obter $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{Z}$ em $\overleftrightarrow{s}$, tais que XA = XB, ZA = ZB e YB = 3 cm.

Obtenha as respostas:



135 Obtive dois $\overline{Y}$!...

Está correto. No EG você coloca uma só resposta para ENXERGAR o processo para obtê-la; ao resolver, surge(m) a(s) "clandestina(s)".

136 O EG deve ser feito a mão livre?

Não é obrigatório mas é conveniente; assim você só acreditará em coisas comprovadas geometricamente e não no que PARECE SER. No EG, que fizemos, o △ABX "parece" ser eqüilátero mas não é obrigatoriamente eqüilátero e sim obrigatoriamente isósceles. **Parece ser mas não é...**

137

É ingenuidade acreditar num desenho geométrico feito a mão livre...

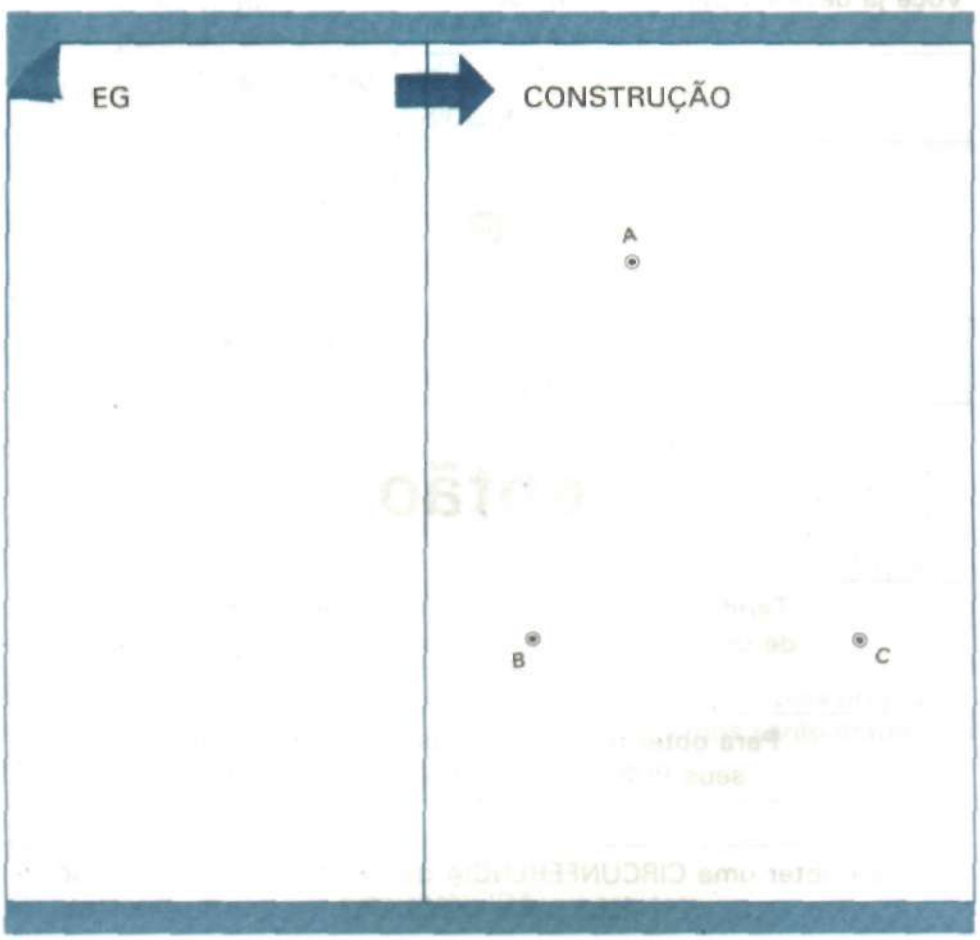
138

Para desenhar o EG, freqüentemente é mais fácil começar pela resposta e depois colocar os dados.

Para exemplificar, resolva o problema seguinte, mas desenhe antes o EG.

Como é um problema simples, não é obrigatório desenhar o EG; você poderia apenas IMAGINÁ-LO, *mas desenhe-o para treinar.* Apenas saber a ginástica não desenvolve a musculatura... **Pelé treinava...**

139 Traçar a circunferência que passa por $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$.



140 **Outro exemplo (faça o EG e a construção no nº 142):**

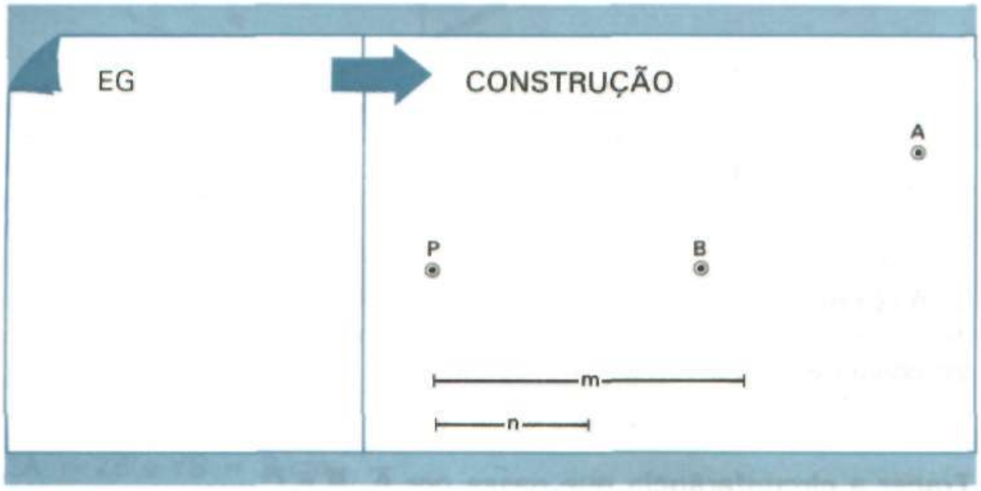
Traçar por $\overline{P}$ a reta $\overleftrightarrow{x}$ que contém um ponto $\overline{X}$ distante m **de $\overline{A}$ e** n **de $\overline{B}$, sendo $\overline{P}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, m e n dados.**

141

Antes de desenhar o EG é necessário fazer uma INTERPRETAÇÃO DO TEXTO.

Releia o texto até captar a mensagem.

142



Você já deve ter percebido que se:

143

Um PONTO **só pode ser obtido pela** INTERSECÇÃO DE DOIS LGs (LINHAS).

Num mapa, tendo-se a latitude e a longitude, pode-se obter o local exato do naufrágio...

e

144

CADA LG **é desenhado a partir da sua** PROPRIEDADE CARACTERÍSTICA.

então

145

Tendo-se DUAS PROPRIEDADES **geométricas de um** PONTO, **pode-se obtê-lo graficamente.**

146

Para obter uma RETA, **basta obter** DOIS **de seus** PONTOS **(distintos um do outro).**

147

Para obter uma CIRCUNFERÊNCIA **de** RAIO DETERMINADO, **só falta obter o** CENTRO.

III MÉTODO FUNDAMENTAL MF

148 O que é um método?

É um modo de proceder que nos torna organizados e:

Torne-se um "faixa-preta" em Desenho.

A ORGANIZAÇÃO é um dos fatores que aumentam a CRIATIVIDADE TÉCNICO-CIENTÍFICA.

A EFICIÊNCIA aumenta com a ORGANIZAÇÃO.

149 Qual é o MÉTODO FUNDAMENTAL?

É um método de trabalho que propõe o seguinte:

Para resolver sozinho um problema que — para você — é desconhecido, proceda sempre (para criar o hábito) como segue:

1º MOMENTO:

Leia o enunciado e interprete-o para captar:

- QUAIS OS DADOS **e**
- O QUE SE QUER.

2º MOMENTO:

- DESENHE **no rascunho um EG.**

3º MOMENTO (CRUCIAL...):

- RACIOCINE **para descobrir qual o caminho que — partindo dos** DADOS **— o levará à** RESPOSTA.

4º MOMENTO:

- **Escreva um** ROTEIRO, **de preferência em linguagem simbólica, para guiá-lo durante a execução do desenho definitivo.**

5º MOMENTO:

- COPIE **o EG mas:**
  - **com** INSTRUMENTOS **e**
  - ACERTANDO AS MEDIDAS CORRETAS.

150 EG "TRABALHADO" EGT:

EGT é um EG onde, além de TODOS OS DADOS **e de** UMA DAS RESPOSTAS, **desenhamos também** INDICAÇÕES **que nos permitem copiá-lo.**

Indicaremos LG com traço-ponto.

151 Para descobrir a resolução, você precisará saber as principais propriedades das figuras. São poucas e as que *ainda não vimos* serão estudadas antes do seu emprego em problemas.

152 MOMENTO FINAL:

- **Sempre que possível,** CONFIRA **a resposta.**

153 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MF:

No nº 154 há um problema cuja resolução vamos concluir juntos com todo o cuidado possível para você aprender o MÉTODO e não apenas o problema.

1º MOMENTO:

Leia o enunciado e interprete o texto.

2º MOMENTO:

Desenhe o EG. Neste exemplo já está feito.

3º MOMENTO (RACIOCÍNIO DETALHADO):

Pense em alguém já com o compasso pronto e que não sabe onde "espetá-lo"...

a. Há pontos dados? Quais? R: ....
b. Há retas dadas? Quais? R: ....
c. Há medidas dadas além de AC, BC e AB? R: ....
d. Qual a figura procurada? R: ....
e. Você já sabe qual a abertura do compasso? R: ....
f. Você já sabe onde "espetar" a ponta-seca? R: ....
g. Qual ponto deveremos procurar? R: ....
h. O que precisamos para obter graficamente esse ponto?
R: ....
i. Você já sabe quais são? Se sabe, então já resolveu... Se não sabe, procure! Do L1 ao L4:
j. $\overline{X}$ está a uma distância DETERMINADA de um dos pontos determinados? R: ....
k. $\overline{X}$ está a uma distância determinada de uma reta determinada?
R: ....
l. $\overline{X}$ eqüidista de dois pontos determinados? R: ....
Caso sim, de quais pontos? R: ....
m. $\overline{X}$ eqüidista de duas retas determinadas? R: ....
Caso sim, de quais retas? R: ....

4º MOMENTO:

Escreva o roteiro.

5º MOMENTO:

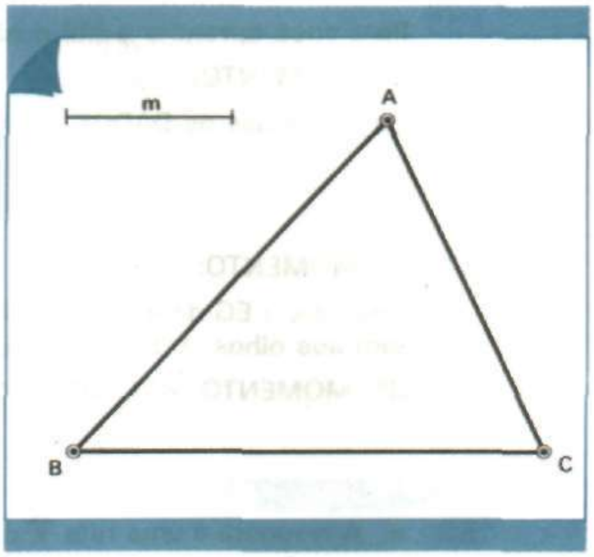
Copie o EG ou o EGT, obtendo a resposta.

MOMENTO FINAL:

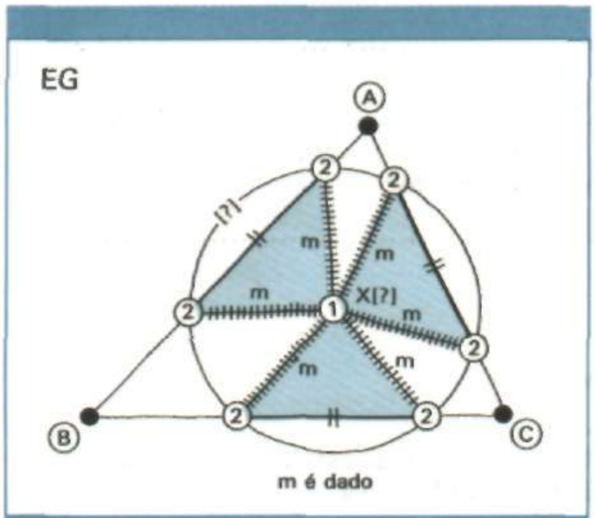
Confira se os segmentos têm a mesma medida.

154 PROBLEMA:

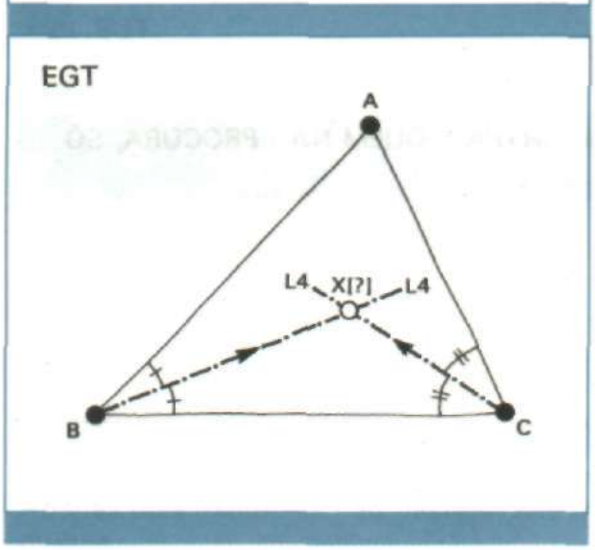
Dados o △ABC e m, pede-se uma circunferência de raio m que determina nos lados do △ABC três segmentos de mesmo comprimento.



Teoria: critério LLL de congruência de triângulos.



Eventualmente indicaremos a ordem em que as "bolinhas" brancas vão sendo "mortas" com números em seu interior. Um mesmo número indica que foram obtidas simultaneamente.



3º MOMENTO (RACIOCÍNIO):

SE a incógnita é uma circunferência de RAIO DADO.

ENTÃO só falta obter o seu centro.

ROTEIRO (COMO COPIAR):

1) **Traça-se a bissetriz de AB̂C.**
2) **Traça-se a bissetriz de BĈA (bastam duas bissetrizes).**
3) **Essas bissetrizes se encontram no centro $\overline{X}$ procurado.**
4) **Traça-se a circunferência ($\overline{X}$; m).**

155 **O MF pode ser utilizado em qualquer resolução gráfica.**

156 2º EXEMPLO **(enunciado o nº 163):**

Para você aprender o MF e não apenas o problema.

1º MOMENTO:

Captou quais os DADOS e o QUE SE QUER?

157 2º MOMENTO:

Desenhe o EG de modo que TODOS os dados fiquem bem visíveis (saltem aos olhos...). Siga o código gráfico.

3º MOMENTO (RACIOCÍNIO):

158 a. A resposta é uma reta $\overleftrightarrow{x}$ da qual já temos $\overline{P}$; qual ponto vamos procurar?

R: ....

159 b. Como se obtém graficamente um ponto?

R: ....

160 c. Você já percebeu quais são esses LGs?

R: ....

Caso sim, você já CONCLUIU como resolver este problema; caso não, precisamos procurar esses LGs, do L1 ao L4.

161

QUEM PROCURA, LOGO ENCONTRA E QUEM NÃO PROCURA, SÓ ACHA POR MUITA SORTE...

162 Quem ainda não viu, procure:

Será o L1?

R: ....

Será o L2?

R: ....

Será o L3?

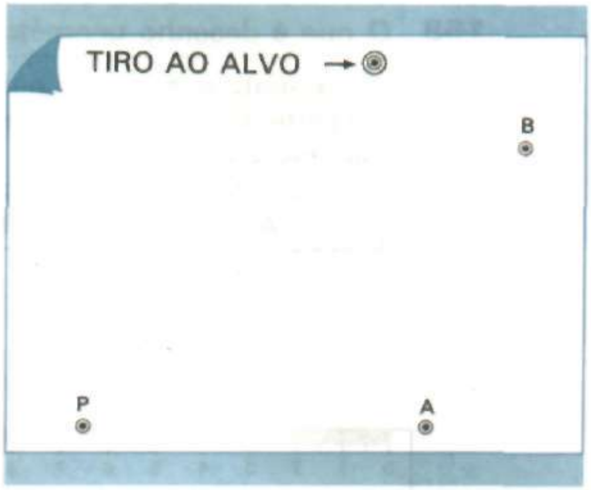
R: ....

Será o L4?

R: ....

163 PROBLEMA:

Traçar por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$ tal que um seu ponto $\overline{X}$ seja eqüidistante de $\overline{P}$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$.



Poderíamos ter dado um enunciado mais simples, mas faz parte do aprendizado você saber interpretar textos...

164 EG

RACIOCÍNIO (Resumido):

ESCREVA

....

....

....

....

....

165 EGT

ROTEIRO (Resumido):

....

....

....

....

....

....

166 Apenas dois exemplos não bastam. Até o término deste livro, veremos muitos.

167 Quando você adquirir prática no MF, estará concluindo resoluções sozinho.

IV DESENHO GEOMÉTRICO DG

168 O que é desenho geométrico DG?

É o assunto principal do nosso estudo.
É a parte do Desenho (de figuras planas) onde deveremos empregar como únicos instrumentos:

A RÉGUA — mas não a graduação — e o COMPASSO.

169 E a graduação?

Somente para desenhar as medidas DADAS *e medir as* RESPOSTAS.

170 E os outros instrumentos?

Existem para serem utilizados nas outras partes do Desenho.

171 Mas... na Era dos Computadores?

Exatamente. É um bom modo para exercitarmos a nossa capacidade de concluir.

172 Como?...

Concluir significa basear-se em coisas anteriores, e o DG inicia o seu estudo com apenas dois postulados:

Traçar significa desenhar um traço contínuo, numa única operação.

DOIS PONTOS (distintos) determinam UMA ÚNICA RETA, que só pode ser traçada com a régua.

173 Podendo-se usar esquadros, UM PONTO e a DIREÇÃO de uma reta DETERMINAM essa reta.

174

UM PONTO (centro) e UMA DISTÂNCIA (raio não nulo) determinam UMA ÚNICA CIRCUNFERÊNCIA, que só pode ser traçada com o compasso.

O compasso não consegue traçar nenhuma outra linha.

175 É *como num jogo de xadrez?*

É como qualquer jogo; deveremos obedecer às regras...

176 Só régua e compasso produzem maior precisão?

Não. O processo de obtenção do ponto médio de um segmento por tentativas pode até ser mais preciso do que o utilizado em DG.

177 **O que é uma** operação gráfica?

É um traço feito de uma só vez.

178 **O que é uma** construção gráfica?

É o conjunto ORDENADO de operações gráficas que levam à resposta.

179 **O que é um** roteiro?

Basta o como; o porquê é facultativo.

É a descrição da construção gráfica.

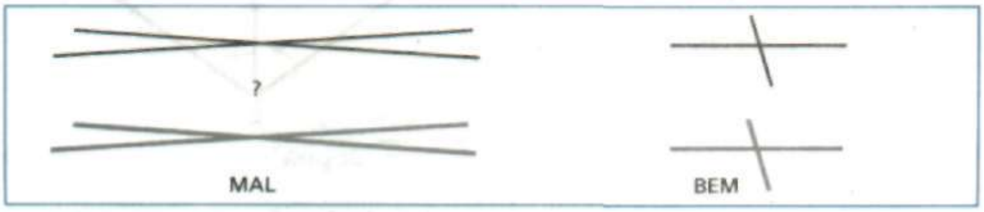
180 **Como desenhar com boa precisão?**

É necessário querer, usar bons instrumentos e ter conhecimentos... Qualquer pessoa sã pode desenhar com precisão.

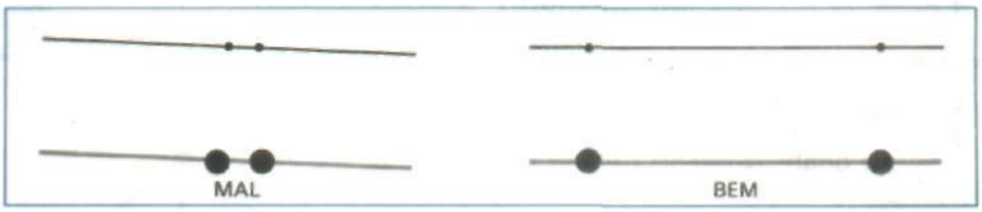
181 **Quais** c-o-n-h-e-c-i-m-e-n-t-o-s?

Os mais importantes são:

Um ponto é obtido com maior precisão quando as linhas não são muito oblíquas.



Ao obter uma reta, faça o possível para que os dois pontos não fiquem muito próximos entre si.



E esses erros se acumulam...

182 **Como influir nisso?**

Numa construção, quando um elemento for teoricamente arbitrário, tome-o

ARBITRÁRIO, **mas** CONVENIENTE.

Para isso, é necessário "pré-ver" o prosseguimento da construção.

Exemplo no nº 189; no fim.

V PROBLEMAS FUNDAMENTAIS

183 Serão os nossos primeiros problemas de DG propriamente ditos. Iremos resolvê-los juntos para servirem de exemplos de aplicação do MF.

Queremos ensinar o MF e NÃO APENAS OS PROBLEMAS.

184 **Posso tentar sozinho?**

Pode, e você os resolverá, mas esses problemas são como a tabuada e convém até decorá-los.

185 **Qual a teoria de Geometria necessária?**

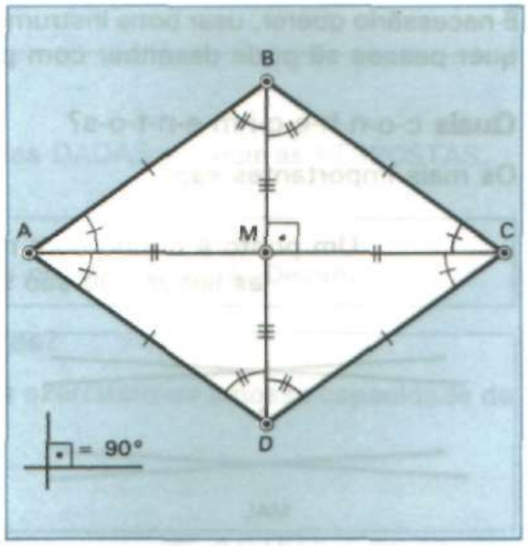
PROPRIEDADES DOS LOSANGOS:

a. LADOS:

- os opostos paralelos;
- os quatro congruentes.

b. DIAGONAIS:

- mesmo ponto médio;
- perpendiculares entre si;
- bissetam os ângulos.

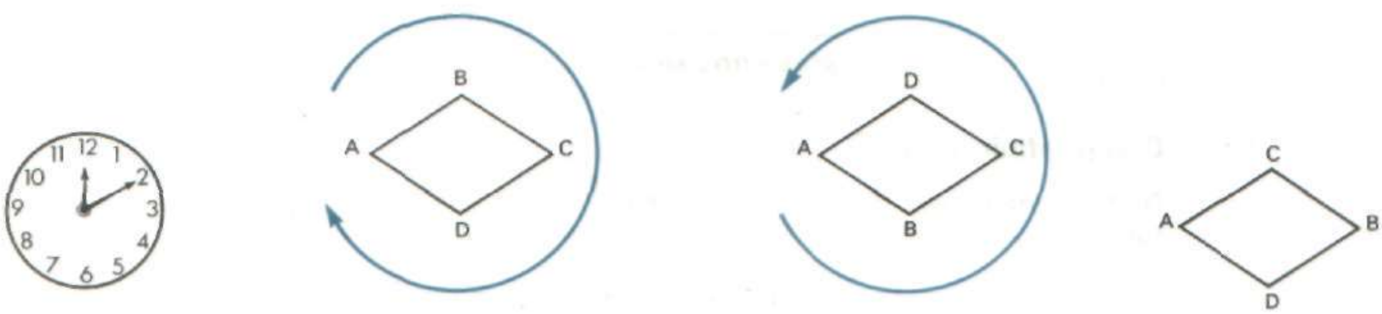


O TEXTO e o DESENHO "dizem" o mesmo.

186 **Como se nomeia um polígono?**

Usaremos normalmente a notação:

- ou **nch**: **N**otação **C**íclica **H**orária
- ou **ncah**: **N**otação **C**íclica **A**nti-**H**orária.



Evitaremos empregar

- *uma notação cruzada (ACBD, ...).*

187 Nos próximos quatro problemas, o EG será um losango a mão livre, o que se consegue com mais facilidade começando a desenhá-lo pelo ângulo reto.

188 Qual é o 1º problema?

Traçar a PERPENDICULAR a uma reta $\overleftrightarrow{r}$ por um ponto $\overline{B}$ fora da reta.

1º momento

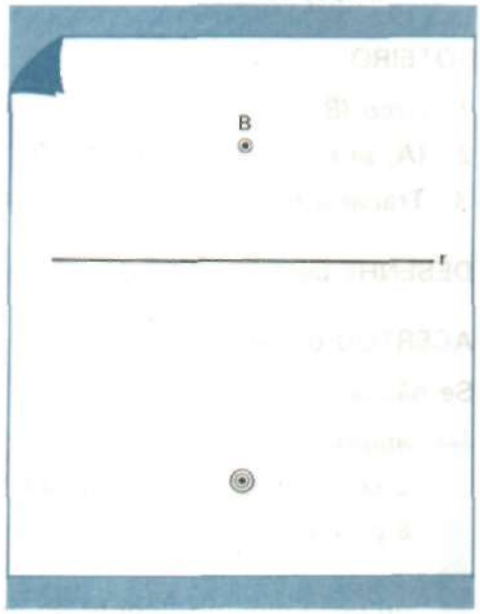
LEIA O TEXTO.

a. **Quais os dados?**

R: Figuras: $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{B}$.
Relação: perpendicularidade.

b. **O que se quer?**

R: $\overleftrightarrow{x} \perp \overleftrightarrow{r}$ por $\overline{B}$.

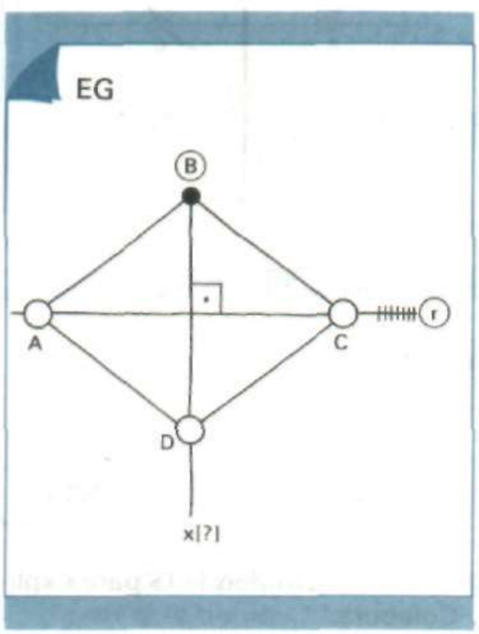


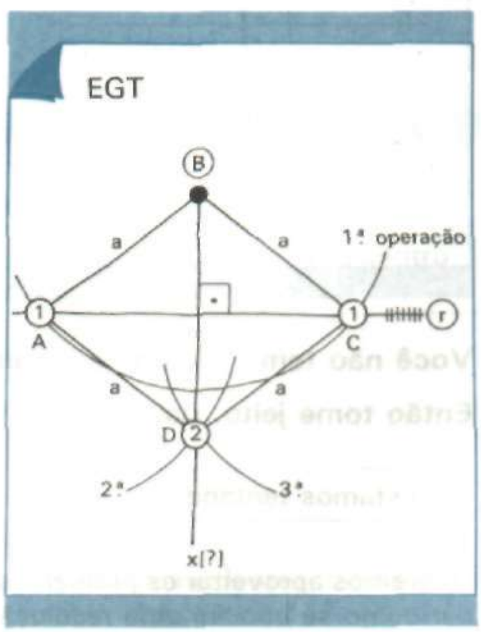
2º momento

Qual figura tem um ângulo reto?

R: O losango genérico (inclui os particulares).

EG: Desenhe um losango genérico ABCD e assinale os dados ($\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{B}$):





3º momento

SE você copiar o EG "encaixando" o losango ABCD com um vértice em $\overline{B}$ (dado) e com a diagonal $\overline{AC}$ em $\overleftrightarrow{r}$ (dada).
ENTÃO obterá $\overleftrightarrow{x}$...

189 Como vou copiar?

Lembre-se que o losango ABCD é genérico; logo, **a** *é arbitrário (mas conveniente).*

Faça, então, assim:

4º momento

ROTEIRO:

1. Arco ($\overline{B}$; a) obtendo $\overline{A}$ e $\overline{C}$ em $\overleftrightarrow{r}$.
2. ($\overline{A}$; a) e ($\overline{C}$; a) determinam $\overline{D}$.
3. Traçar a reta $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{x}$, que é a resposta.

5º momento

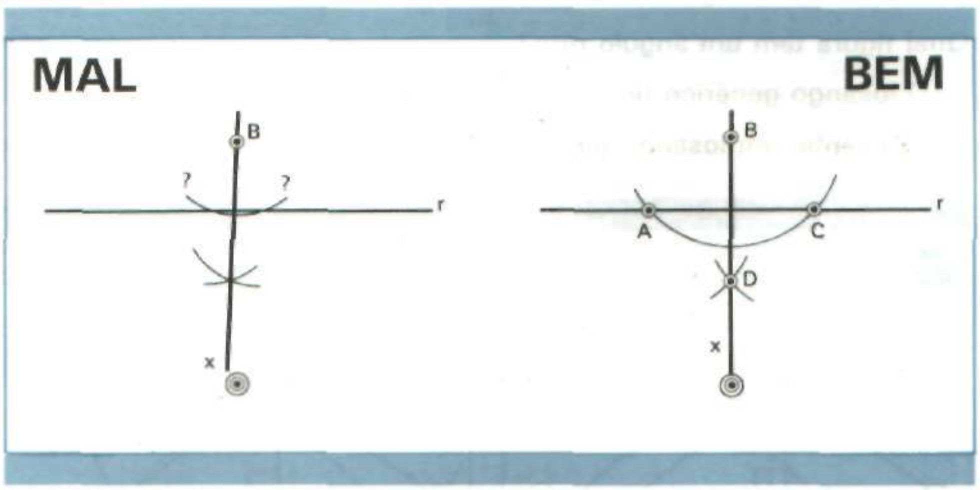
DESENHE **com** PRECISÃO!

momento final

ACERTOU **o alvo?**

Se não acertou:

apontou as grafites?
o seu compasso está bambo?
a ponta-seca é redonda?
...
ou você caiu no "conto do arbitrário"?... **Veja abaixo:**



190 Você não tem "jeito para desenhar"?

Então tome jeito, uai...

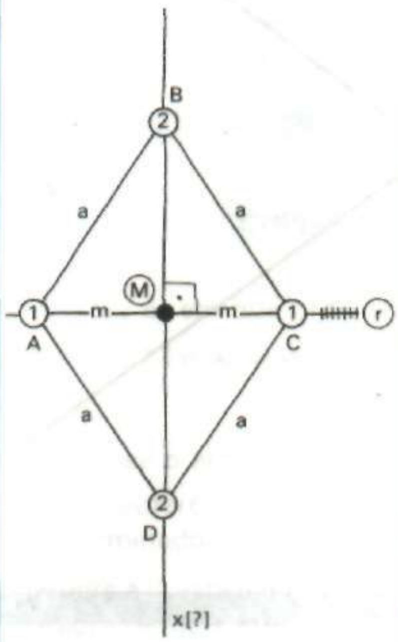
191 Estamos tentando ensinar DG e não alguns problemas de DG.

Queremos aproveitar os problemas fáceis e FUNDAMENTAIS para explicar como se conclui uma resolução. Colabore.

192 Qual é o 2º problema?

Traçar a PERPENDICULAR **a uma reta $\overleftrightarrow{r}$**
por um ponto $\overline{M}$ da reta.

EG



CONSTRUÇÃO

3º momento

Agora você precisa "encaixar" o losango ABCD com seu centro no $\overline{M}$ dado e com sua diagonal ($\overline{AC}$) em $\overleftrightarrow{r}$ dada.

4º momento

ROTEIRO (**m** e **a** são arbitrários, mas...):

1. ($\overline{M}$; m) → $\overline{A}$ e $\overline{C}$ em $\overleftrightarrow{r}$.
2. ($\overline{A}$; a) e ($\overline{C}$; a) determinam $\overline{B}$ e $\overline{D}$.
3. $\overleftrightarrow{x} = \overleftrightarrow{BD}$ (é por isso que definimos figuras coincidentes; uma só reta com dois nomes...).

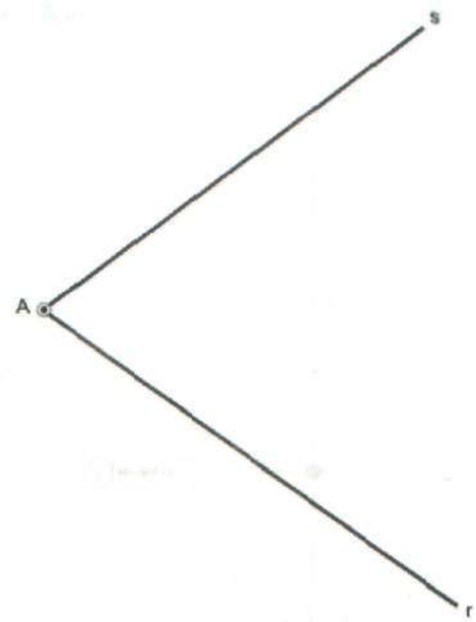
193 **Qual é o 3º problema?**

Traçar a BISSETRIZ **de um ângulo rÂs.**

Treine...

EG (Faça-o)

CONSTRUÇÃO



3º momento

Agora você precisa "encaixar" o losango ABCD com um vértice em $\overline{A}$, outro ($\overline{D}$) em $\overleftrightarrow{r}$ e um terceiro ($\overline{B}$) em $\overleftrightarrow{s}$.

4º momento

ROTEIRO (o comprimento **a** é arbitrário, mas...):

1. $(\overline{A}; a) \rightarrow \overline{D}$ em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{B}$ em $\overleftrightarrow{s}$.
2. $(\overline{B}; a)$ e $(\overline{D}; a)$ determinam $\overline{C}$.
3. A semi-reta $\overrightarrow{AC}$ é a bissetriz procurada.

É como num jogo de tênis: você precisa saber para onde olhar...

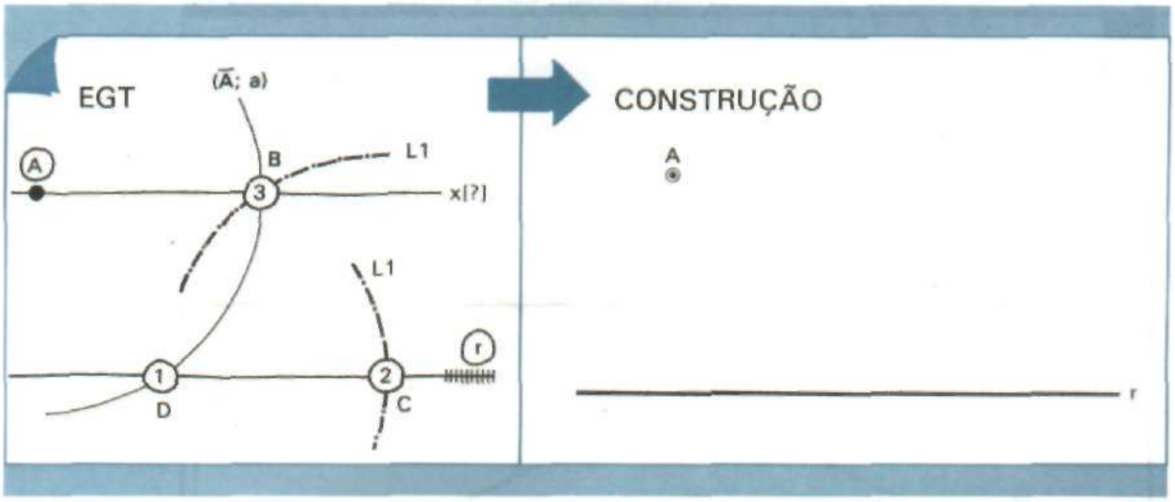
Treina o pescoço e não a munheca.

194 Traçar uma bissetriz com régua e compasso dá maior precisão do que com um transferidor comum (erros na leitura da medida do ângulo dado e na marcação da metade dessa medida).

Nos outros três problemas — usar esquadros ou régua e compasso — as precisões se equivalem.

195 Qual é o 4º problema?

Por $\overline{A}$, a reta $\overleftrightarrow{x}$ PARALELA à $\overleftrightarrow{r}$.



Neste problema você precisa "encaixar" o losango ABCD com um vértice em $\overline{A}$ e um lado $(\overline{DC})$ em $\overleftrightarrow{r}$.

tiro ao ponto

196 COPIAR ⟺ "MATAR" PONTOS

A questão é: em que ordenação? Qual (ou quais) o 1º, o 2º, ...

Veja a seqüência no EGT.

Ordenação? Então trata-se do

ROTEIRO:

1. Traça-se o arco ($\overline{A}$; a) com o raio a conveniente, obtendo $\overline{D}$ em $\overleftrightarrow{r}$.
   A circunferência ($\overline{A}$; a) não a consideraremos um LG porque a não é determinado; por isso está em linha cheia no EGT.
2. Agora a já está determinado e traçamos apenas parte (arcos em ponto-traço) de dois LGs:
   ($\overline{D}$; a) = L1 obtendo $\overline{C}$ em $\overleftrightarrow{r}$ e
   ($\overline{C}$; a) = L1 obtendo $\overline{B}$ em ($\overline{A}$; a).
3. A reta $\overleftrightarrow{AB}$ = $\overleftrightarrow{x}$ é a resposta.

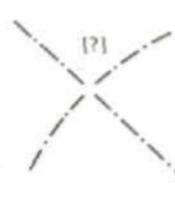
Uma circunferência só é um LG determinado quando o seu centro e o seu raio são determinados (ou dados ou obtíveis).

197 Euclides de Alexandria (séc. III a.C.) POSTULOU (pediu para aceitarmos) que $\overleftrightarrow{x}$ é única.

Não é possível demonstrar isso com apoio nos postulados anteriores; aceitamos porque confirmamos os teoremas decorrentes desse postulado.

198 A seguir daremos como exercícios as construções — só com régua e compasso — dos LGs já estudados. Resolva-os como um treino de:

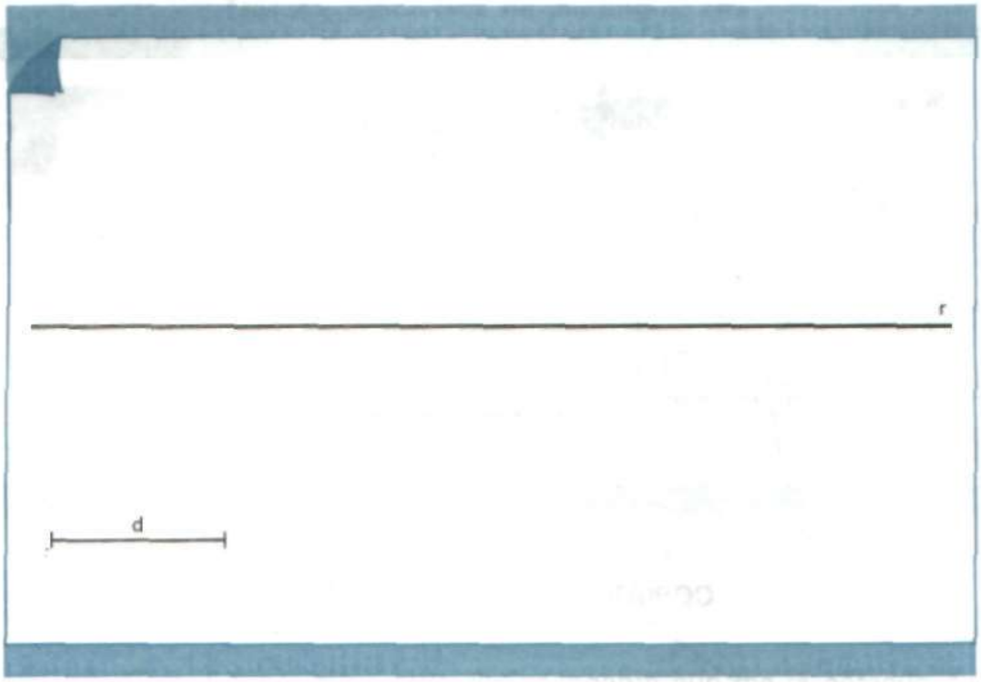
a. Manejo correto dos instrumentos.
b. Como desenhar com precisão.
c. Só use ponto-traço nos EGTs; na construção gráfica poderá acontecer que um ponto procurado esteja entre um ponto e um traço. "Barbeiragem"...



199 Construção do L2:

LG dos pontos que distam d de $\overleftrightarrow{r}$.

Faça o EG em um papel de rascunho separado.



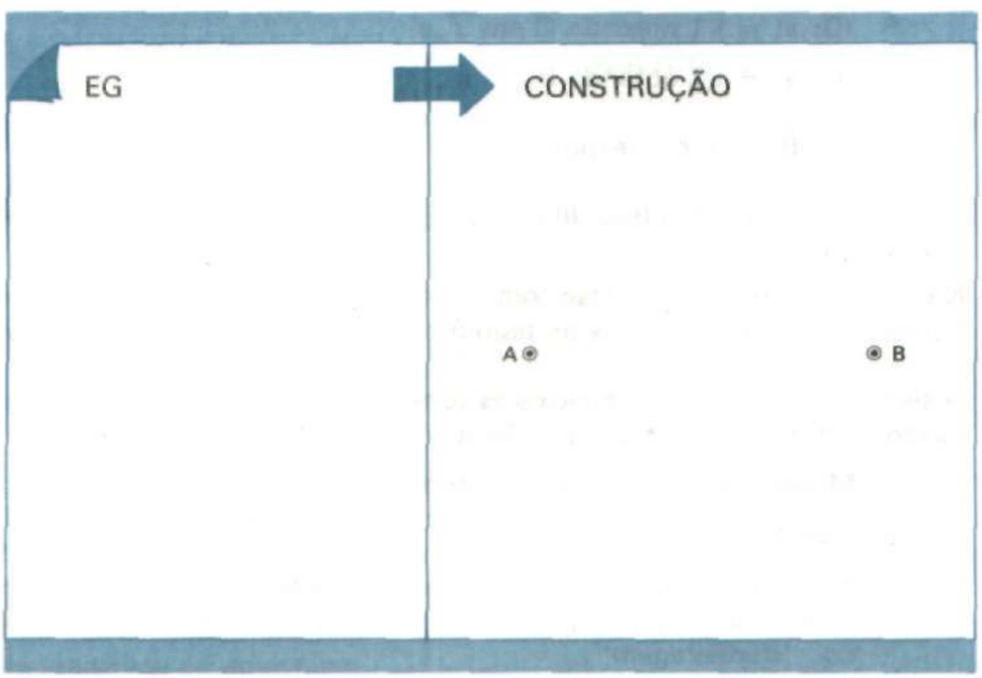
200 Construção do L3:

***LG* dos pontos que *eqüidistam* de $\overline{A}$ e $\overline{B}$.**

Trata-se da

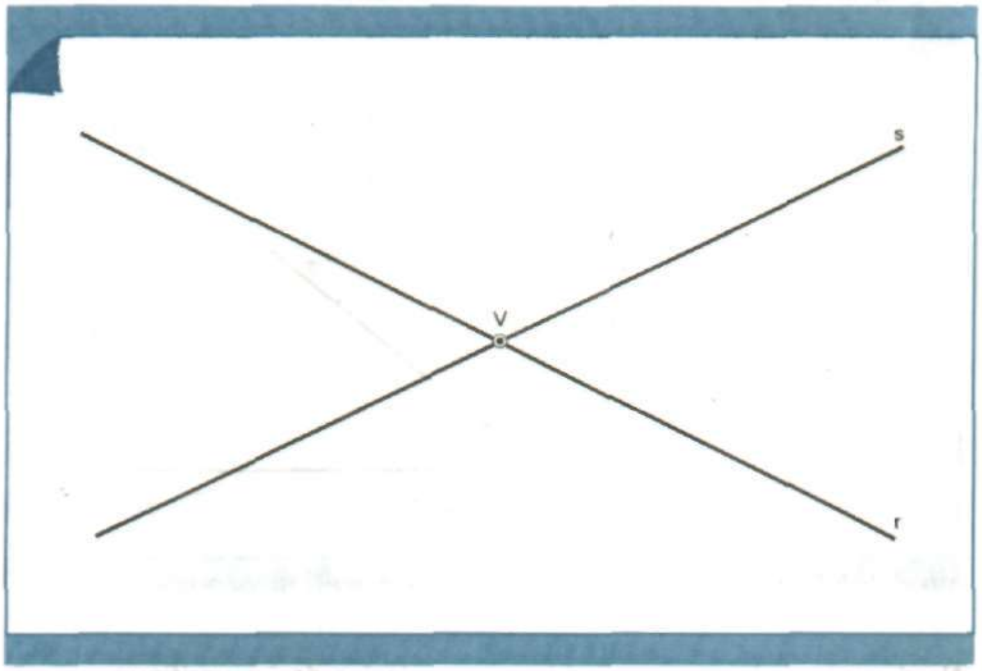
Construção da MEDIATRIZ de $\overline{AB}$ e da obtenção do seu ponto médio.

1º) Desenhe um losango.
2º) Chame uma diagonal de $\overline{AB}$ (e a outra de $\overline{CD}$). Vai dar notação cruzada...



201 Construção do L4:

Construção de BISSETRIZES dos ângulos formados por duas retas concorrentes.



"Encaixe" mentalmente o losango e "copie-o".

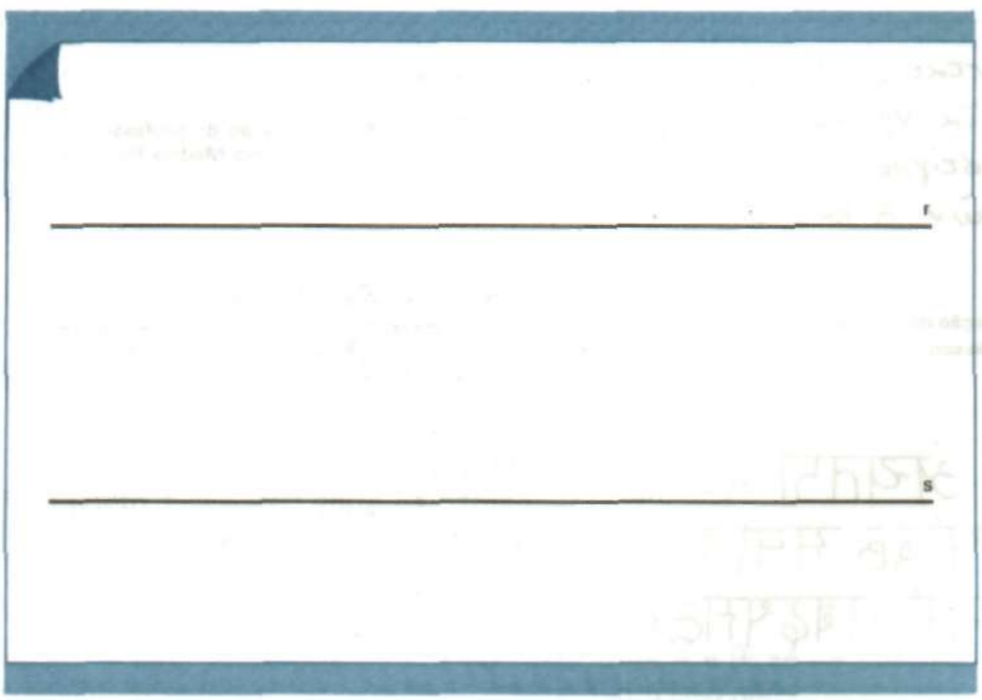
Tente! Você vai conseguir! Ou prefere receitas?...

202 Construção do L4a:

Obter $\overleftrightarrow{x}$ eqüidistante de $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$.

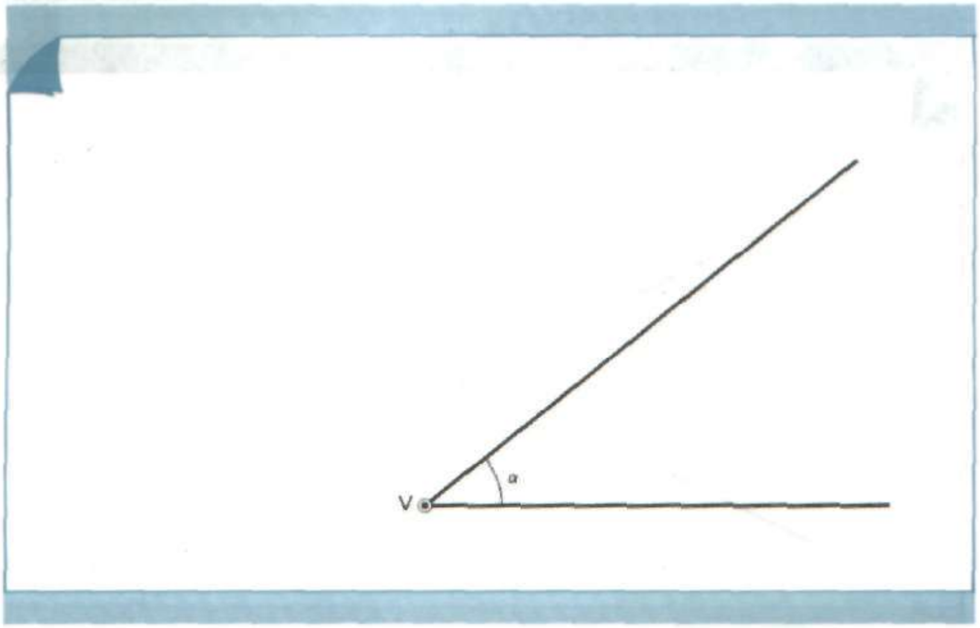
É necessário inicialmente traçar uma perpendicular comum e depois a mediatriz do segmento obtido.

Para traçar a $\perp$ comum, tome numa das retas $\overline{M}$ e $\overline{N}$ convenientes e trace a mediatriz de $\overline{MN}$.



203 DADO $\hat{\alpha}$

Obter seu complemento $\hat{\beta} \cong 90° - \hat{\alpha}$ e seu suplemento $\hat{\gamma} \cong 180° - \hat{\alpha}$.



204 No desenho acima, trace as bissetrizes de $\hat{\alpha}$ e de $\hat{\gamma}$ e verifique que são perpendiculares uma à outra.

205 PROBLEMA:

O enunciado está escrito abaixo em grego, francês e sânscrito, respectivamente.

"Λέγονται δυο στιγμαὶ $\bar{A}$ καὶ $\bar{B}$ καὶ μία εὐθεῖα γραμμή $\overleftrightarrow{\pi}$. Ποίει ἐν εὐθεία μίαν στίγμαν $\bar{X}$ ὅμως απέχοντα στιγμῶν $\bar{A}$ και $\bar{B}$."

Colaboração do professor Dr. Antonio Medina Rodrigues.

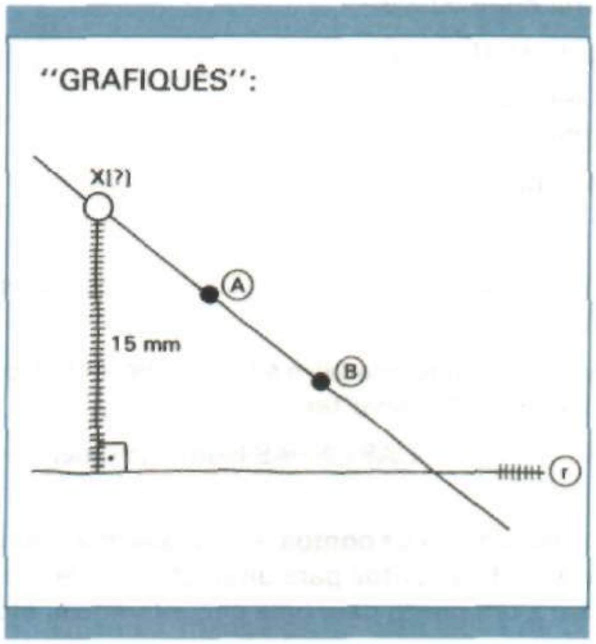
"SOIENT DEUX POINTS $\bar{A}$ ET $\bar{B}$ DIFFERENTS ET UNE DROIT $\overleftrightarrow{\pi}$. OBTENEZ UN POINT $\bar{X}$ ALIGNÉ AVEC LES POINTS $\bar{A}$ ET $\bar{B}$ ET DISTANT DE 15mm DE LA DROITE $\overleftrightarrow{\pi}$."

Colaboração do professor Sezar Sasson.

"दत्ता: अयुतौ $\bar{A}\bar{B}$ बिन्दू $\overleftrightarrow{\pi}$ रेखा च/
$\bar{X}$ बिन्दुं $\bar{A}\bar{B}$ संयोग $\overleftrightarrow{\pi}$ रेखाया
दूरस्थितं पञ्चदशसहस्रतमकं च//"

Colaboração da Prof.ª Dr.ª Maria Valíria A. de Mello Vargas e de Geórgia B. Marmo.

206 **Traduza de um dos idiomas para o português, em prosa ou em verso...**



TRADUÇÃO (seja breve...):

....

....

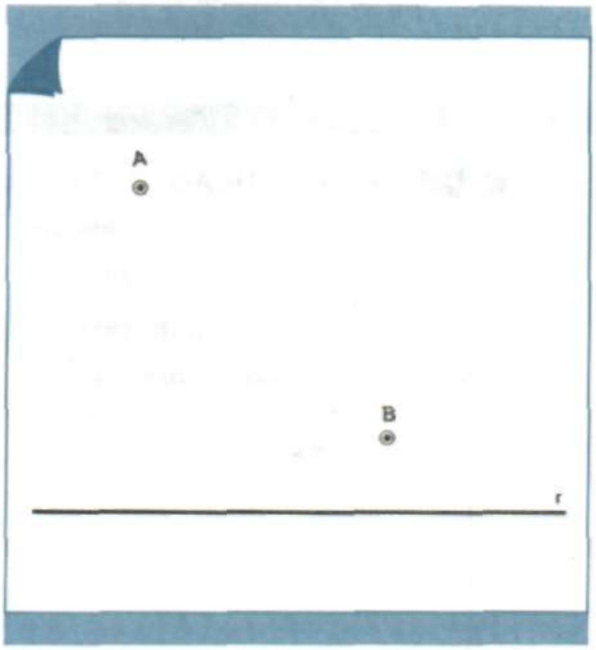
....

....

....

....

Faça a construção gráfica e escreva o roteiro (não é castigo; é um treino...).



ROTEIRO:

....

....

....

....

....

....

....

Para conferir, responda:

R: O ponto $\overline{X}$ resultou entre os pontos ....

207 **Você percebeu?**

No EG — em "GRAFIQUÊS" — $\overline{X}$ não está entre $\overline{A}$ e $\overline{B}$; se for possível prever onde estará a resposta, ótimo. No entanto isso não é necessário.

208 **Criatividade é a capacidade de concluir:**

São fatores multiplicativos da criatividade:

A VONTADE, que depende da MOTIVAÇÃO.

> O CAPÍTULO ZERO foi feito para
> motivá-lo a querer aprender.

A ORGANIZAÇÃO, que o MF proporciona.

A TEORIA:

a. No EG há LINHAS DADAS e há também LINHAS LATENTES, invisíveis, que podem ser REVELADAS.

b. *No* EGT *essas linhas latentes estão reveladas e são* LGs, *descobertos pelas propriedades que cada ponto deve ter.*

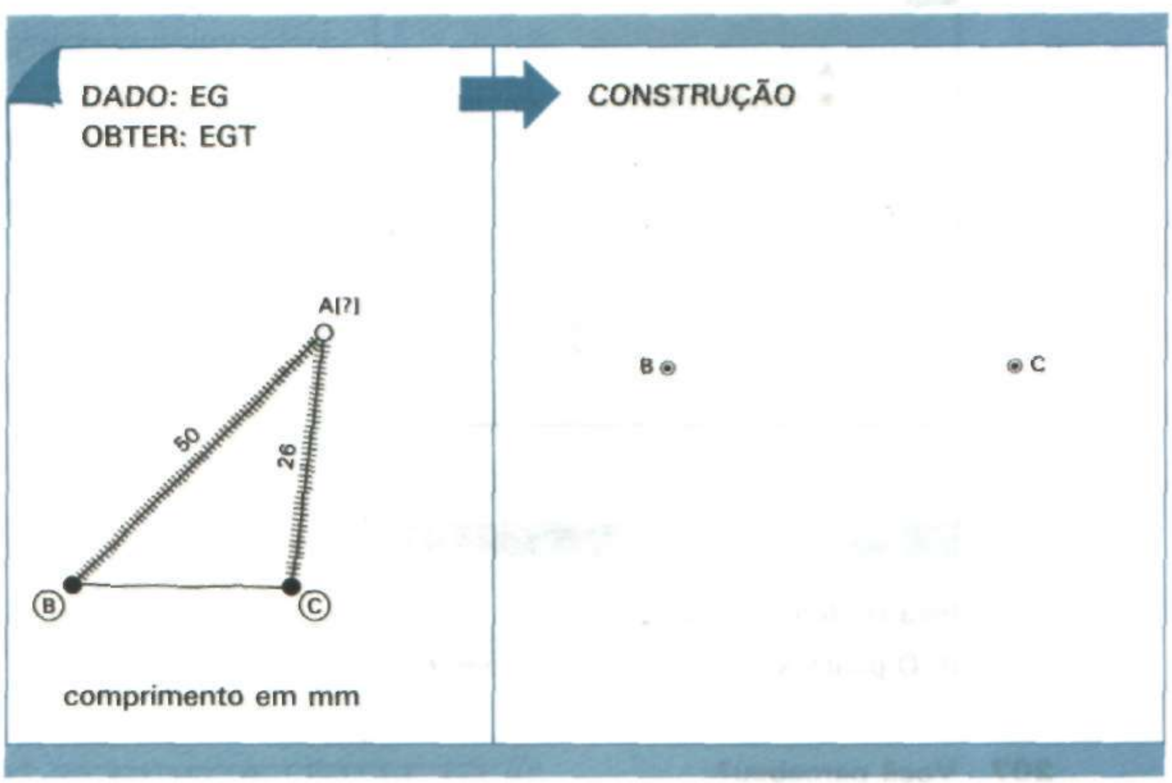
DG: somente régua e compasso.

c. COPIA-SE UM PONTO COPIANDO-SE DUAS LINHAS (somente retas e/ou circunferências) QUE O CONTÊM.

d. COPIA-SE UMA FIGURA, copiando-se os pontos — necessários e suficientes — que a determinam: dois pontos para uma reta; os vértices para um polígono; o centro e um ponto para uma circunferência, etc.

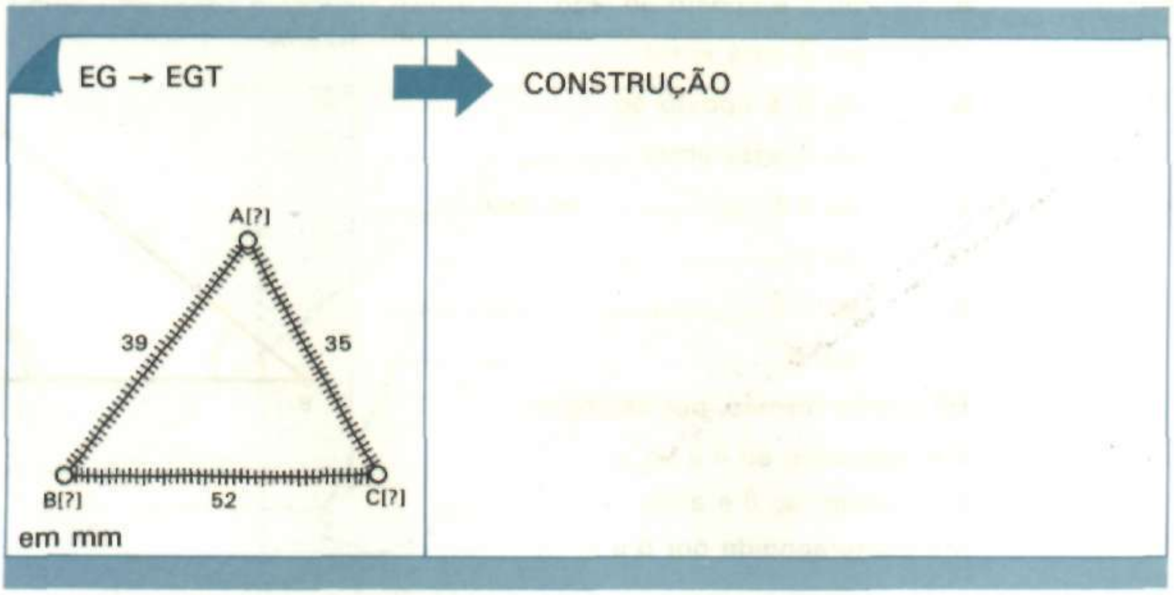
209 Proporemos mais alguns exercícios com os enunciados na forma gráfica e aconselhamos desenhar as linhas latentes (em traço-ponto) transformando os EGs em EGTs, antes de copiá-los.

210 EXERCÍCIO:



Este problema tem .... respostas.

211 EXERCÍCIO:



a. Quantos triângulos há com lados de 52 mm, 39 mm e 35 mm?

R: Um único; em Geometria não há sinal (− ou +).

b. Em quantas posições no papel podem ser desenhados?

R: Tantas quantas se quiser. Então desenha-se uma só (você vê outro jeito?...).

"Tantas quantas se quiser" significa "infinitas".

212 MAIS UM POUCO DE GEOMETRIA:

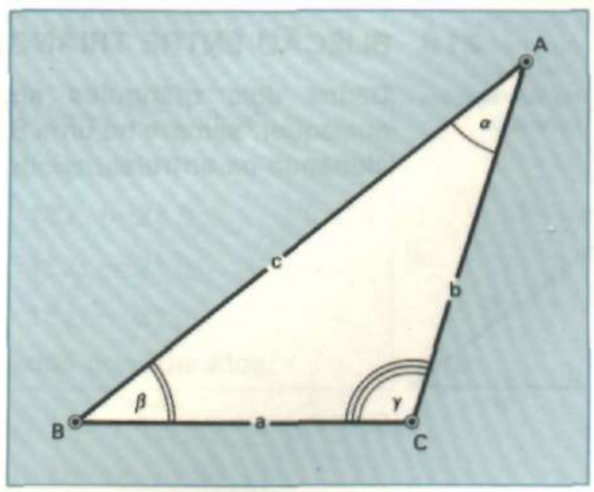
Cada triângulo tem

Inerente: que está inseparavelmente ligado a alguma coisa.

Seis elementos INERENTES:

- **Três lados e**
- **Três ângulos internos.**

Tem também outros, que serão vistos antes de sua utilização em DG.



213 Lugar **que cada elemento ocupa no** △:

Esse lugar pode ser transmitido por palavras e há várias maneiras:

- ou $\hat{\alpha}$ é OPOSTO ao lado $\bar{a}$
- ou $\hat{\alpha}$ ESTÁ ENTRE $\bar{b}$ e $\bar{c}$;

- ou $\bar{a}$ é OPOSTO ao $\hat{\alpha}$
- ou $\bar{a}$ ESTÁ ENTRE $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$.

$\hat{\alpha}$, $\bar{a}$: figuras
α, a: medidas

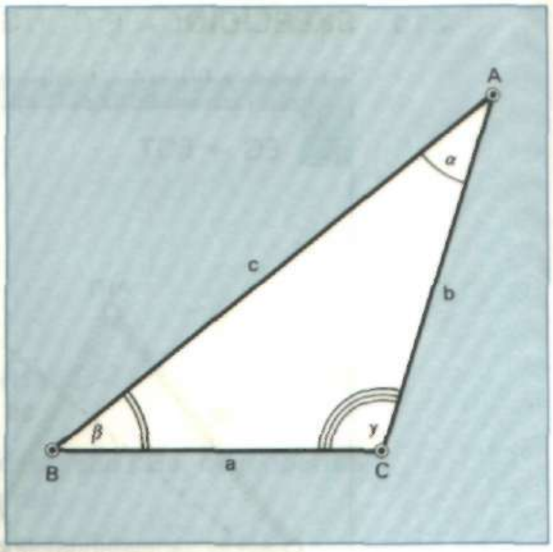
214 **Complete:**

a. ▮ ou $\hat{\beta}$ é oposto ao lado ....
ou $\hat{\beta}$ está entre ....

b. ▮ ou $\overline{b}$ é oposto ao ....
ou $\overline{b}$ está entre ....

c. ▮ ou $\hat{\gamma}$ é .... ao lado ....
ou $\hat{\gamma}$ ....

d. ▮ ou $\overline{c}$ é ....
ou $\overline{c}$ ....



A linguagem comum é assim...

Há outras formas, por exemplo:

$\overline{a}$ é adjacente ao $\hat{\beta}$ e ao $\hat{\gamma}$;

$\overline{a}$ é comum ao $\hat{\beta}$ e ao $\hat{\gamma}$;

$\hat{\alpha}$ é compreendido por $\overline{b}$ e $\overline{c}$; ...

215 BIJEÇÃO:

Entre dois conjuntos existe uma BIJEÇÃO **(correspondência biunívoca)** **quando, e somente quando:**

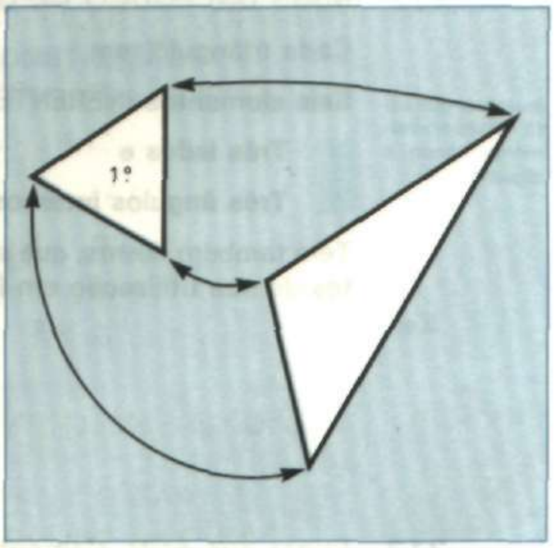
a. a CADA **elemento do 1º corresponde** UM ÚNICO **elemento no 2º e**

b. a CADA **elemento do 2º corresponde** UM ÚNICO **elemento no 1º.**

216 BIJEÇÃO ENTRE TRIÂNGULOS:

Há seis bijeções possíveis.

Dados dois triângulos absolutamente quaisquer, sempre há uma BIJEÇÃO relacionando-os entre si.



Homólogos: provém do grego *homo* mesmo e *logos* lugar.

Estabelecida a bijeção, os elementos que se correspondem recebem o nome de HOMÓLOGOS.

O conceito de ordenação é antiqüíssimo; calcula-se que tenha perto de 300 000 anos. O homem primitivo sabia qual *era o seu 1º filho*, qual o 2º,...

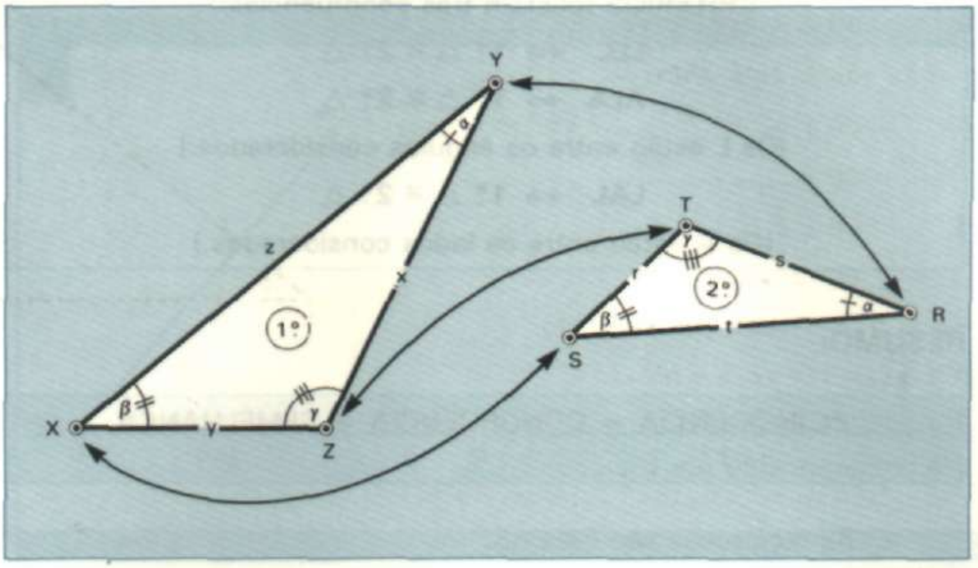
217 PAR ORDENADO DE HOMÓLOGOS:

Qual será o 2º?... Pedro Bó.

Determinando-se qual é o 1º △, os pares de homólogos tornam-se ORDENADOS (sabe-se qual é o 1º).

218 SEMELHANÇA E CONGRUÊNCIA:

Consideremos os triângulos ABC e RST e a bijeção tal que OS ÂNGULOS HOMÓLOGOS SEJAM CONGRUENTES **entre si.**



Congruentes (≅) são figuras superponíveis.

219 Código: cada símbolo A, R e L refere-se a um PAR ORDENADO de elementos homólogos (correspondentes), como segue:

- **A — um par de** ÂNGULOS CONGRUENTES;
- **R, R', R''** — RAZÕES **de lados homólogos e**
- **L — um par de** LADOS CONGRUENTES.

Mensagens:
A - um par de ângulos homólogos congruentes.
R - uma razão de lados homólogos.
L - um par de lados homólogos congruentes.

220 TRIÂNGULOS SEMELHANTES (∼):

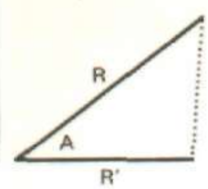
Suficientes: bastam essas.

AAA, R = R' = R'' ═[DEFINIÇÃO]⟹ **1º△ ∼ 2º△**

CRITÉRIOS **(condições suficientes):**

[AA]	**AA**	⟺	**1º△ ∼ 2º△**
[RRR]	**R = R' = R''**	⟺	**1º△ ∼ 2º△**
[RAR]	**A, R = R'**	⟺	**1º△ ∼ 2º△**

A refere-se aos ângulos entre os lados considerados.



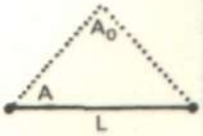
221 RAZÃO DE SEMELHANÇA k:

É a RAZÃO (k) **entre** QUALQUER **lado do 1º △ e o seu** HOMÓLOGO **(lados opostos a ângulos congruentes no 2º △.**

- **Invertendo-se a** ORDEM, **inverte-se o k, que se torna $\frac{1}{k}$ (1/k é o inverso de k).**
- **Escala (lembra-se?) é a razão de semelhança entre o desenho (1º) e a figura representada.**
- **Quando, e só quando k = 1, temos uma** CONGRUÊNCIA **(≅).**

222 TRIÂNGULOS CONGRUENTES (≅):

ALA$_0$, sendo A$_0$ referente aos ângulos opostos aos lados considerados, recai no ALA, pois a soma é 180°.



AAALLL ⟸DEFINIÇÃO⟹ **△ ≅ 2º △**

CRITÉRIOS (bastam três congruências):

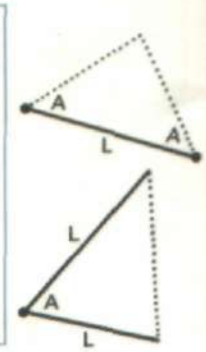
LLL ⟺ 1º △ ≅ 2º △

ALA ⟺ 1º △ ≅ 2º △

(Os L estão entre os ângulos considerados.)

LAL ⟺ 1º △ ≅ 2º △

(Os A estão entre os lados considerados.)



223 RESUMO:

COINCIDÊNCIA ⇒ CONGRUÊNCIA ⇒ SEMELHANÇA
(=) ≅ (∼)

≅ é = ∪ ∼

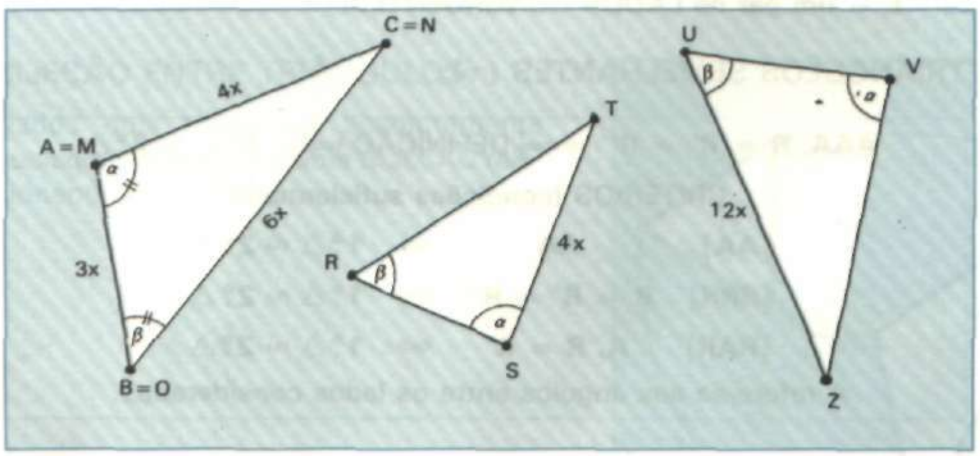
a. *As recíprocas são* FALSAS.

b. **Cada relação é** CASO PARTICULAR **da (ou das) que a sucede (sucedem).**

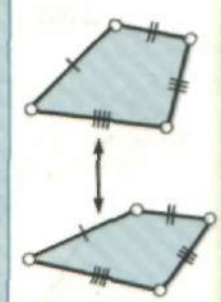
c. **O símbolo (≅) é a** UNIÃO **de (=) com (∼).**

224 Verificação do aprendizado:

As letras só atrapalham...



Articulações nos vértices;



Num polígono de n > 3 lados: se as articulações não forem rígidas, então: o polígono se deformará

Não se baseie nas letras dos vértices.

a. **Baseie-se nos ângulos congruentes e desenhe as flechas que indicam qual a bijeção entre os vértices.**

Baseie-se nos ângulos (com ou sem letras).

△ABC = △BCA = ...
△RTS = △SRT = ...
△VZU = △VUZ = ...

b. **Complete:**

△ABC .... △MON

△ABC .... △RST; k = ...; RT = ...; RS = ...

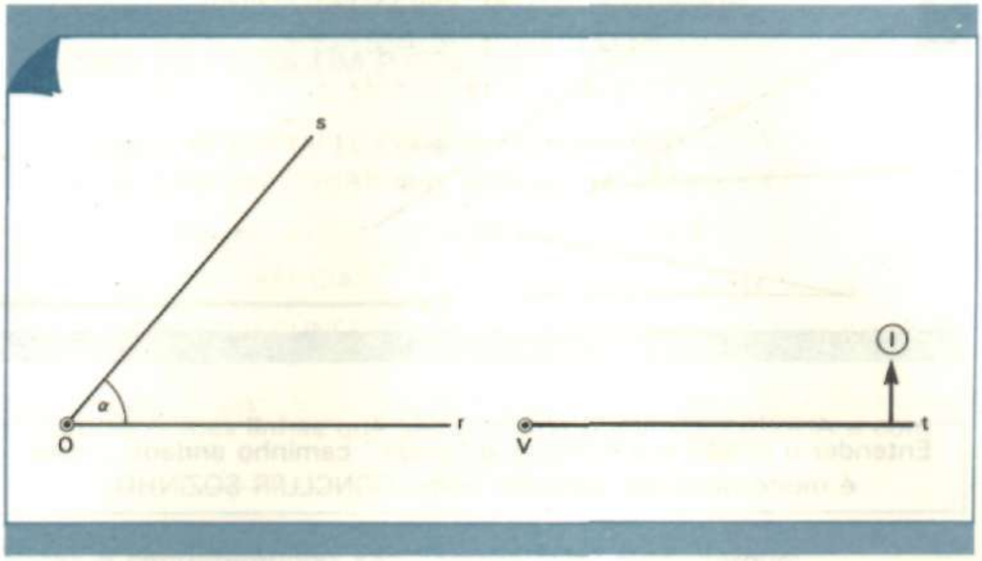
△ABC .... △VZU; k = ...; VZ = ...; UV = ...

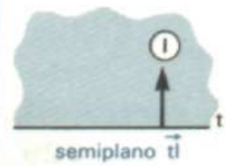
Num triângulo, desde que os comprimentos dos três lados *não se alterem*, o tamanho (logo, a forma) de cada △ não se alterará (*temperatura constante*: os lados não se dilatarão.

225 Você já teve a curiosidade de saber por que certas estruturas são sempre TRIANGULADAS?

226 5º PROBLEMA FUNDAMENTAL:

TRANSPORTE DE ÂNGULOS.





semiplano $\vec{tI}$

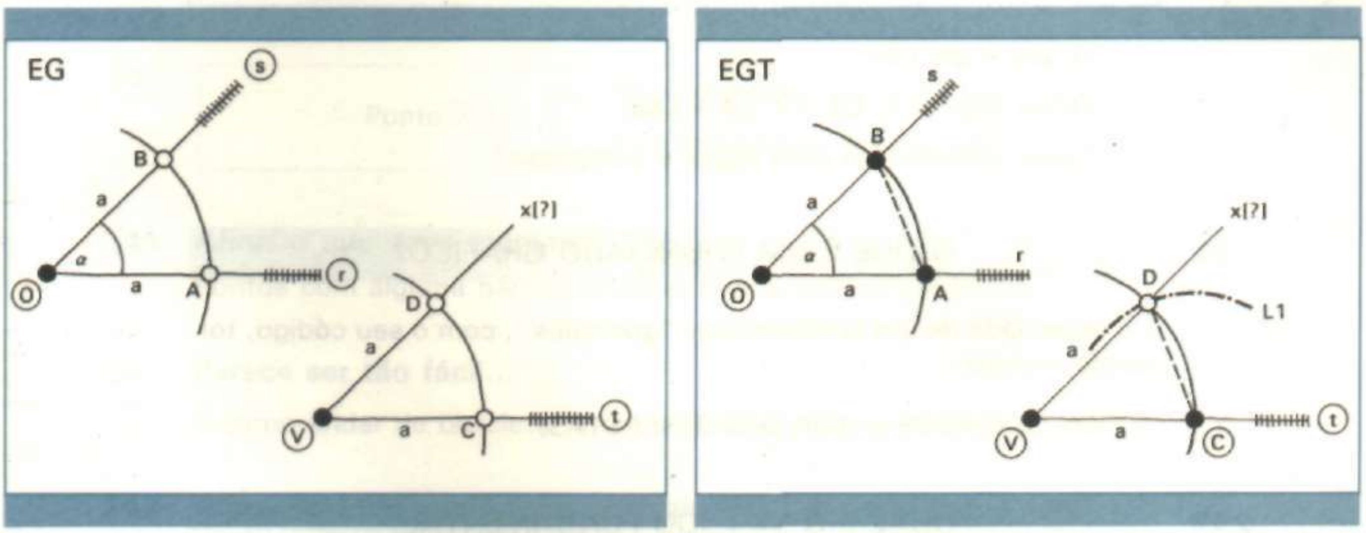
227 **Construir, no semiplano $\vec{tI}$ o ângulo $t\hat{V}x$ de medida α.**

Resolução:

Para não deformar $\hat{\alpha}$ no transporte, deveremos "engradá-lo", "encaixando" um triângulo nele e transportando o "caixote", digo, o triângulo...

É mais fácil "fabricar" um △ isósceles:

Todas as estruturas (tesouras, torres...) trianguladas não se deformam (não se alteram nem a forma e nem o tamanho). Vide nº 272 e 279.



O como →
O porquê:
$\Delta CVD \cong \Delta AOB$
logo $C\hat{V}D' \cong \hat{\alpha}$.

ROTEIRO (seja a conveniente...):

1) $(\overline{O}$: a) → $\overline{A}$ em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{B}$ em $\overleftrightarrow{s}$.

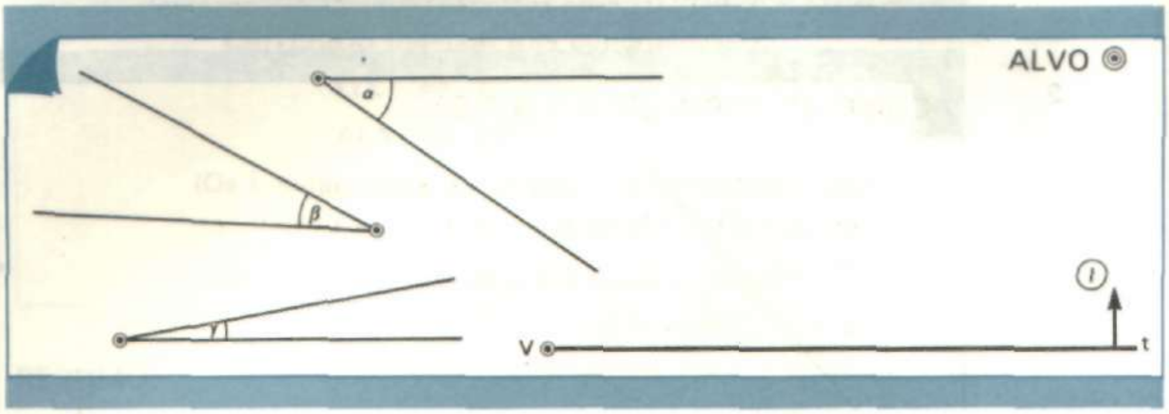
2) $(\overline{V}$; a) → $\overline{C}$ em $\overleftrightarrow{t}$.

3) Agora $\overline{C}$ e a distância AB tornaram-se determinados e $(\overline{C}$, AB) = L1 determina $\overline{D}$.

4) $\overrightarrow{Vx}$ é a resposta.

228 EXERCÍCIO:

No semiplano $\overrightarrow{tI}$, construa o ângulo $t\hat{V}x$ medindo $\alpha + \beta - \gamma$.



229

Entender o COMO e o PORQUÊ é "meio" caminho andado... mas é muito mais útil aprender como CONCLUIR SOZINHO.

Só se aprende a andar de bicicleta pedalando.

230 Como aprender DG?

Como qualquer matéria, o DG tem a sua TEORIA MÍNIMA (TM). Já mostramos grande parte — mas não toda — da TM do DG. Querer resolver sozinho os problemas de DG, sem o apoio dessa TM, é tarefa muito difícil.

231 Qual a parte da TM já estudada?

Os primeiros lugares geométricos.

O que é um LG?

Quais são? (L1, L2, L3, L4 e L4a)

Como construí-los com régua e compasso?

232 O QUE É UM ENUNCIADO GRÁFICO?

É o enunciado de um problema em "grafiquês", com o seu código, tornando visíveis:

TODOS OS DADOS e UMA DAS RESPOSTAS.

"Nada há no intelecto que não tenha antes passado pelos sentidos". Aristóteles (séc. IV a.C.)

233 QUAL É O MÉTODO FUNDAMENTAL?

1º) *Entenda bem o enunciado.*

2º) Traduza-o para o "grafiquês", desenhando o EG no rascunho.

3º) Copie o EGT — no local definitivo — mas:

COM RÉGUA E COMPASSO (DG) **e satisfazendo "o que se quer".**

Um faixa-preta vence um faixa-branca mesmo que este seja potencialmente mais forte. Por quê?

234 COMO C-O-P-I-A-R O EG?

É como ovo de Colombo...

Heureca!

PONTO POR PONTO **e na melhor** ORDENAÇÃO **possível.**

235 COMO SE COPIA UM P-O-N-T-O?

COPIANDO D-O-I-S LGs **que se cruzam nele;**
esses LGs são LINHAS **que — no DG — devem ser**

ou RETAS

ou CIRCUNFERÊNCIAS

ou RETA **e** CIRCUNFERÊNCIA.

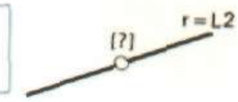
Isso facilitará a previsão do número de respostas.

236 **São as únicas linhas que se consegue traçar com** RÉGUA **e com** COMPASSO.

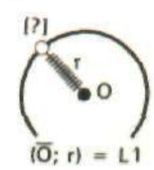
Com dois pregos e um barbante consegue-se traçar uma elipse (livro 3).

237 Retas e circunferências são sempre LGs? SIM, porque:

238 SE **um ponto está numa reta** $\overleftrightarrow{r}$,
ENTÃO **dista zero de** $\overleftrightarrow{r}$**; é o L2.**



239 SE **um ponto está numa circunferência** $(\overline{O}; r)$,
ENTÃO **dista** r **de** $\overline{O}$**; é o L1.**



240 Ponto $\overline{X}$ [?] $\begin{cases} \text{a. } 1^{\text{a}} \text{ propriedade} \iff 1^{\text{o}} \text{ LG} \\ \text{b. } 2^{\text{a}} \text{ propriedade} \iff 2^{\text{o}} \text{ LG} \end{cases}$

241 Afinal o que devo procurar?

Pontos com alguma particularidade; nunca pontos genéricos.

Qualquer detetive sabe disso. Como achar um criminoso sem saber nada dele?

242 Parece ser tão fácil...

É como andar de bicicleta; torna-se fácil com o treinamento.

243 Como vou descobrir quais propriedades um certo ponto tem?

Deverão ser propriedades geométricas, mas como este é um curso de Desenho e não de Geometria, essas propriedades serão transmitidas em doses homeopáticas...

Como são "ovos de Colombo", depois de feitos tornam-se banais, triviais, corriqueiros etc. Para captar como são úteis, tente resolver os vários problemas antes de ler a "TEORIA".

244 Mais algum "ovo de Colombo"?

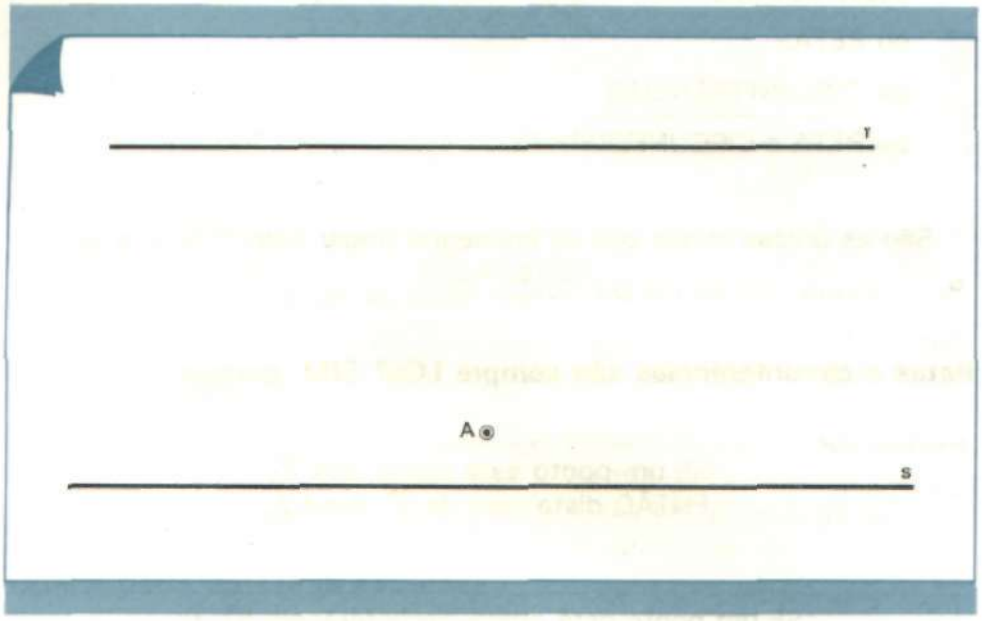
Sim. A seguir resolveremos juntos alguns problemas e, em cada um, diremos qual foi o truque que nos facilitou a resolução.

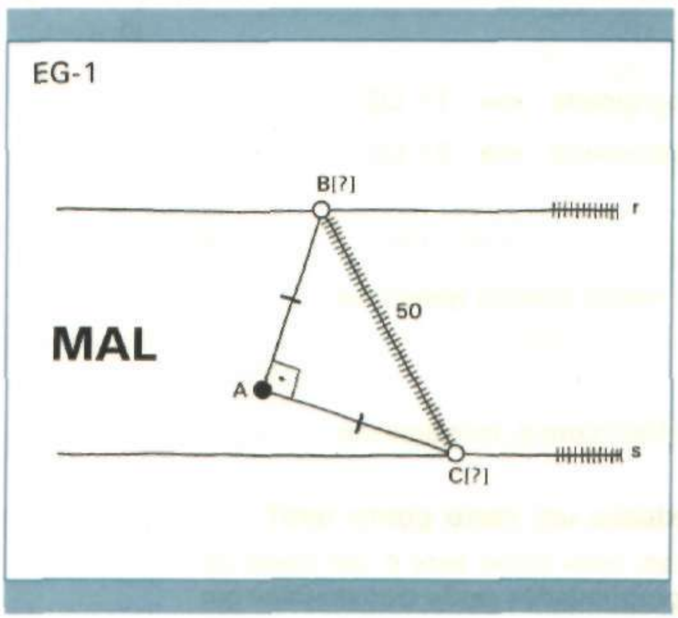
245 1º "OVO"

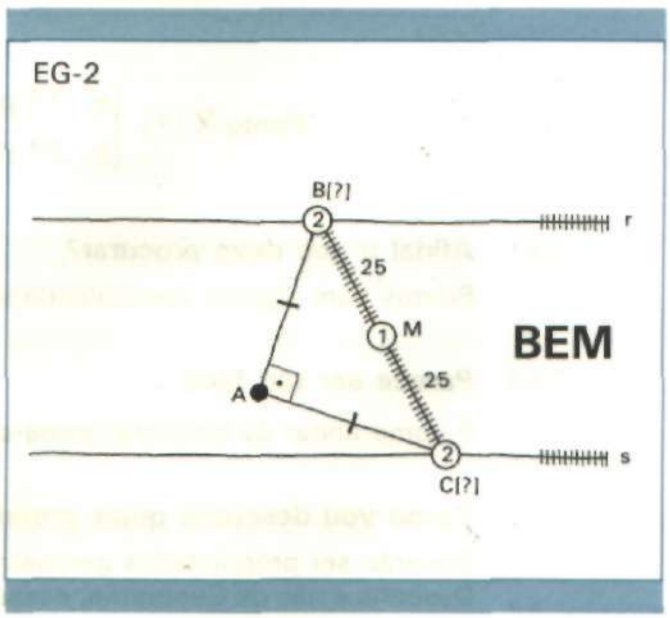
O problema é um mero pretexto para mostrar o "ovo"; este é que deverá ser "absorvido".

246 PROBLEMA:

O △ABC é retângulo em $\overline{A}$ e isósceles; obtê-lo, sabendo que $\overline{B} \in \overleftrightarrow{r}$, $\overline{C} \in \overleftrightarrow{s}$ e BC = 50 mm. ∈: pertence







247 RACIOCÍNIO:

Foram pedidos $\overline{B}$ e $\overline{C}$ mas, de cada um, só achamos uma única propriedade: $\overline{B}$ está em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{C}$ está em $\overleftrightarrow{s}$. Distam 50 mm um do outro, mas distar 50 mm de ponto indeterminado?

248 Vamos desistir ou continuar procurando?

"Procurai e achareis", mas procurar qual ponto?

249 ENUNCIADO DO 1º "OVO" (linguagem técnica):

"Cherchez la femme", dizem os detetives franceses...

Se não temos cão, então caçamos com gato...

SE não der para copiar os pontos respostas finais, ENTÃO deveremos **PROCURAR** pontos auxiliares.

250 COROLÁRIO DO 1º "OVO":

Corolário é uma proposição que decorre imediatamente da anterior, já aceita.

Não adianta procurar pontos genéricos, pois não possuem propriedades particulares que **definem LG**.

Há de ser gatos particulares...

251 Propriedade do ponto particular $\overline{M}$:

Pt.m.: ponto médio.

Sendo $\overline{M}$ o pt.m. da hipotenusa $\overline{BC}$, temos:
MA = MB = MC ("veja" no EG-2).

Essa propriedade está explicada no nº 356.

252 ROTEIRO:

1º) $\overline{M}\,[?]\begin{cases}\text{a. dista 25 mm de } \overline{A} \Rightarrow L1\\ \text{b. eqüidista de } \overleftrightarrow{r} \text{ e } \overleftrightarrow{s} \Rightarrow L4a\end{cases}$

Obter também o "clandestino" $\overline{M'}$.

2º) $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{MA}$ obtém $\overline{B}$ e $\overline{C}$ (mera cópia) e
$\overleftrightarrow{M'B} \perp \overleftrightarrow{M'A}$ determina $\overline{B'}$ e $\overline{C'}$ (analogamente).

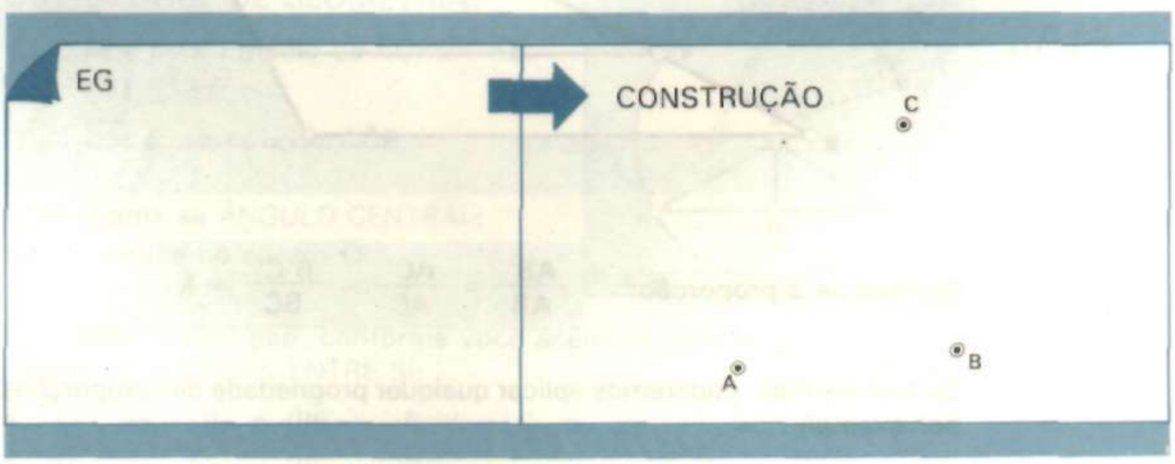
253 Execute o desenho e, para conferir "sua" precisão, responda:

AC = AC' = ...33...... mm.

254 EXERCÍCIO:

Obter na circunferência que passa por $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ um ponto $\overline{X}$ que dista 20 mm de $\overline{B}$.

Agora você vai pedalar sozinho...

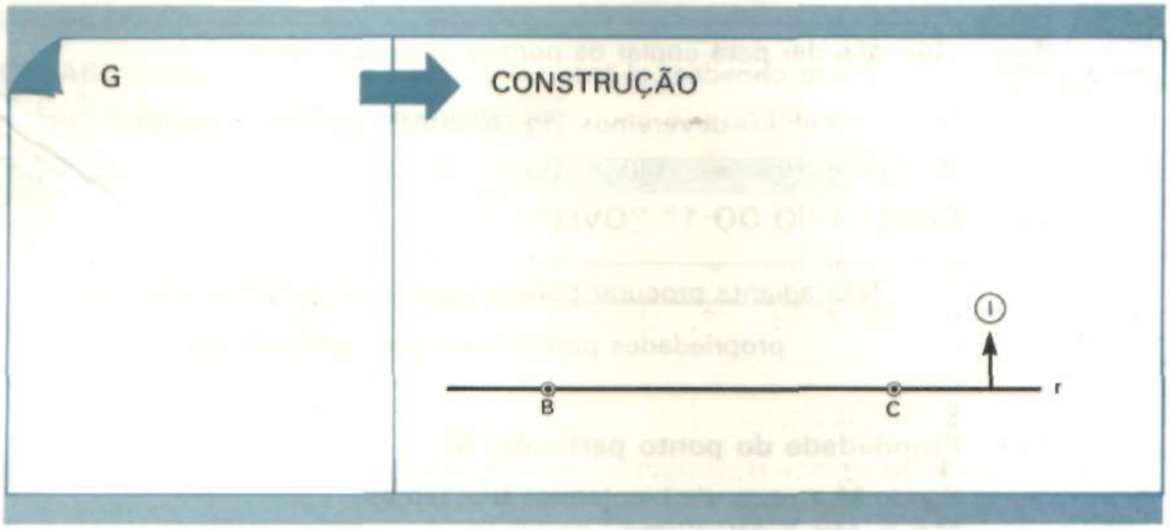


R: XC = ...14.............. mm e X'C = ...38.............. mm.

255 EXERCÍCIO:

No semiplano $\overrightarrow{rI}$, construir $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, AC = 40 mm e sabendo que a MEDIANA **relativa ao lado $\overline{AC}$ mede 30 mm.**

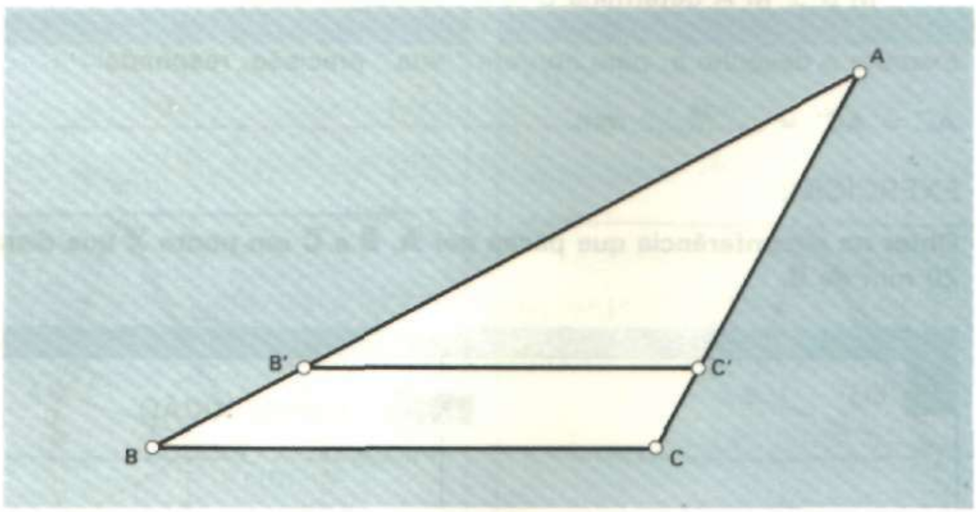
Mediana é o segmento com uma extremidade num vértice e a outra no ponto médio do lado oposto.



R: AB = ...26............ mm.

256 GEOMETRIA "HOMEOPÁTICA":

$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC} \Leftarrow$ [TEOREMA DE TALES] $\Rightarrow \triangle AB'C' \sim \triangle ABC$



Escreve-se a proporção: $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$

Se precisarmos, poderemos aplicar qualquer propriedade das proporções, por exemplo:

$$\frac{AB'}{AB - AB'} = \frac{AC'}{AC - AC'} \Leftrightarrow \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$

257 CASO PARTICULAR DO TALES:

(I) $\overline{B'}$ é ponto médio de $\overline{AB}$

(II) $\overline{C'}$ é ponto médio de $\overline{AC}$

(III) $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$

(IV) $B'C' = \frac{1}{2} BC$

Responda sim ou não conforme você aceite ou não as proposições:

Use o seu bom senso e não a memória...

a. (I) e (II) ⇒ (III) e (IV) R: ....

b. (I) e (III) ⇒ (II) e (IV) R: ....

c. (II) e (III) ⇒ (I) e (IV) R: ....

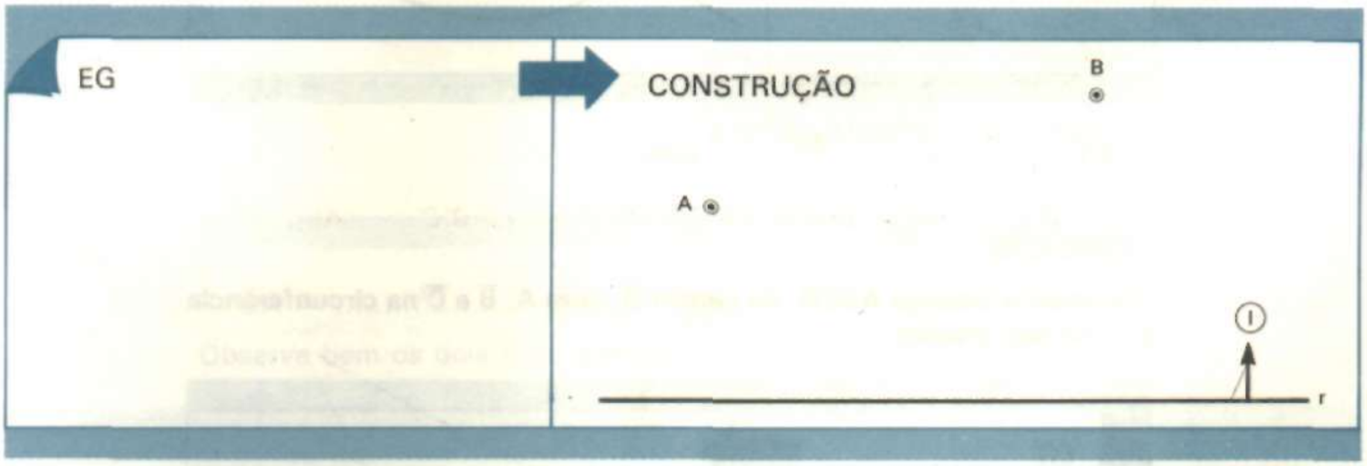
d. (III) e (IV) ⇒ (I) e (II) R: ....

Cansou a "cuca" ou "munheca"?

258 EXERCÍCIO:

No semiplano $\vec{rI}$, construa o $\triangle ABC$, dados $\overline{A}$, $\overline{B}$, BC = 30 mm e sabendo que o ponto médio $\overline{X}$ de $\overline{AC}$ dista 20 mm da reta $\overleftrightarrow{r}$. $\overline{C}$ à direita de B.

Foi imposto que $\overline{C}$ está à direita de $\overline{B}$ para eliminar a "clandestina" que, no caso, cai fora da *região*.



R: AC = ...37....... mm. AC' = ...68....... mm.

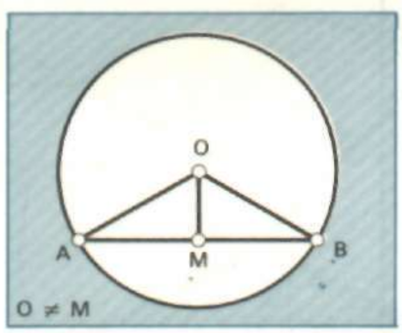
259 *OUTRA DOSE DE GEOMETRIA:*

(I) $\overline{M}$ é ponto médio da CORDA $\overline{AB}$.

(II) $\overline{OM} \perp \overline{AB}$.

(III) $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz do AÔB.

AÔB chama-se ÂNGULO CENTRAL; tem o vértice no centro $\overline{O}$.



Use o seu bom senso, não a memória.

Responda sim ou não, conforme você aceite ou não as seguintes propostas RECÍPROCAS ENTRE SI:

a. (I) ⇒ (II) e (III) R: ....

b. (II) ⇒ (I) e (III) R: ....

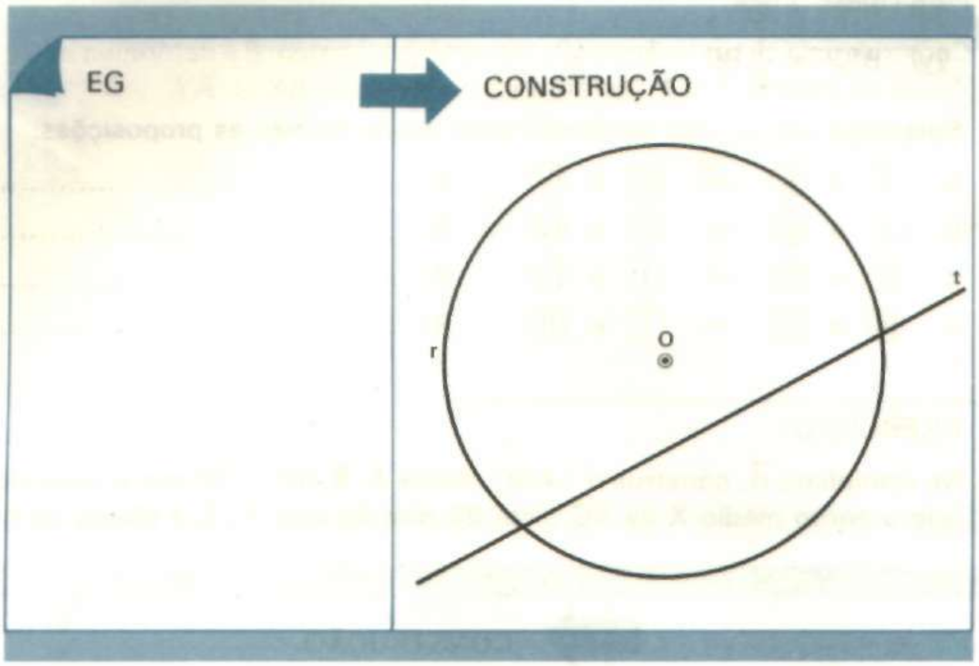
c. (III) ⇒ (I) e (II) R: ....

260 EXERCÍCIO:

Construir as cordas $\overline{XY}$ e $\overline{X'Y'}$ da circunferência $(\overline{O}; r)$ cujos pontos médios estão em $\overleftrightarrow{t}$ e distam 15 m de $\overline{O}$

Será que a dose já fez efeito?...

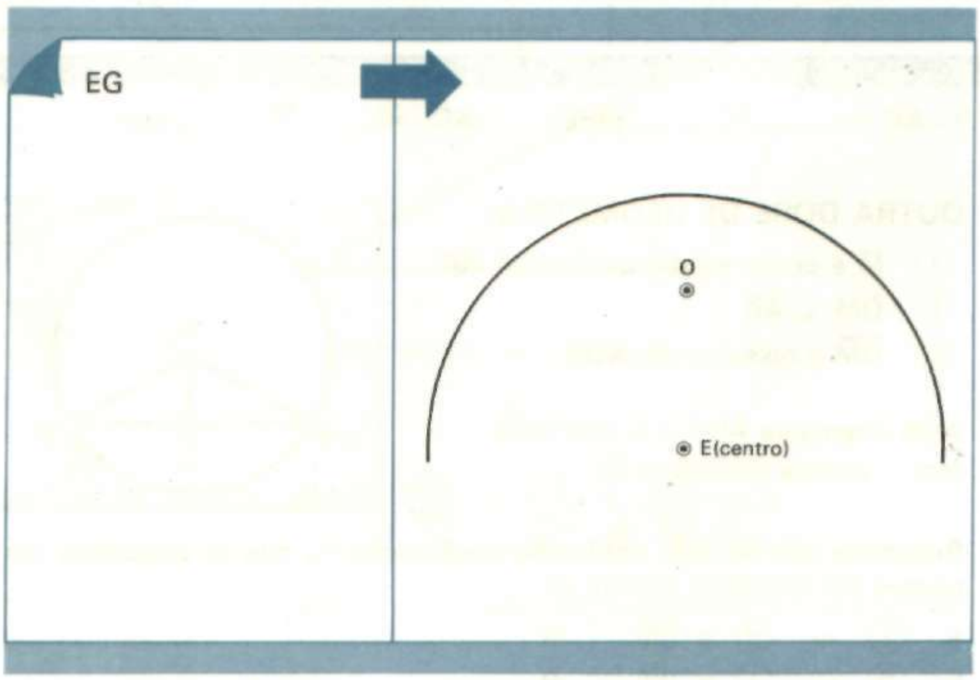
Um enunciado deve ser o mais claro e conciso possível.



R: XY = X'Y' = ...50......... mm.

261 EXERCÍCIO:

Construir o losango ABCD, de centro $\overline{O}$, com $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$ na circunferência e $\overline{D}$ no seu interior.



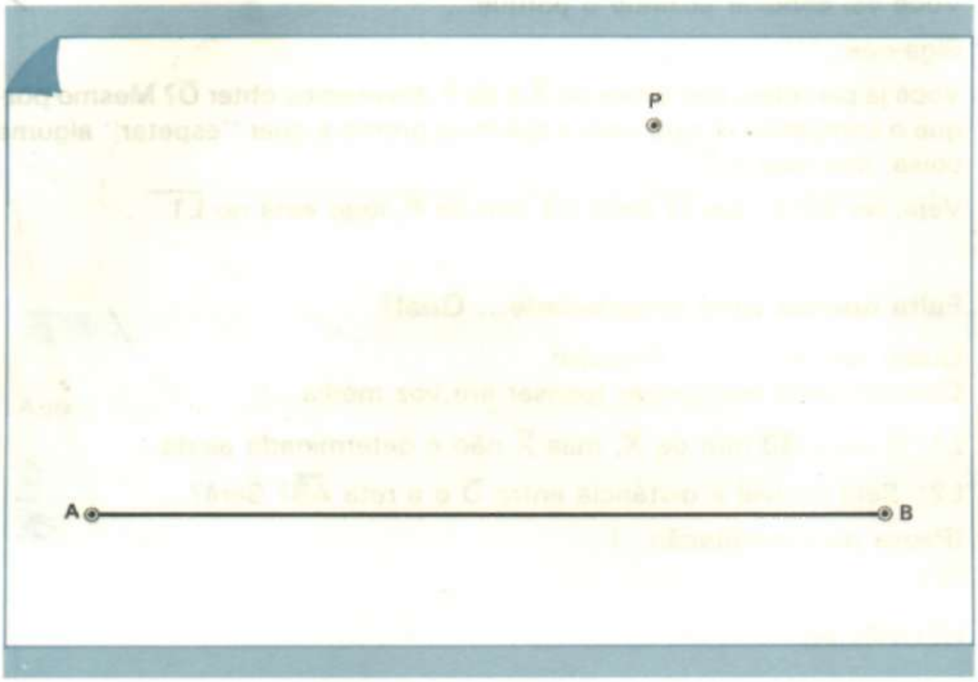
R: BD = ...27......... mm.

262 **2º "OVO":**

Os problemas são pretextos para ensinar como se conclui sozinho uma resolução.

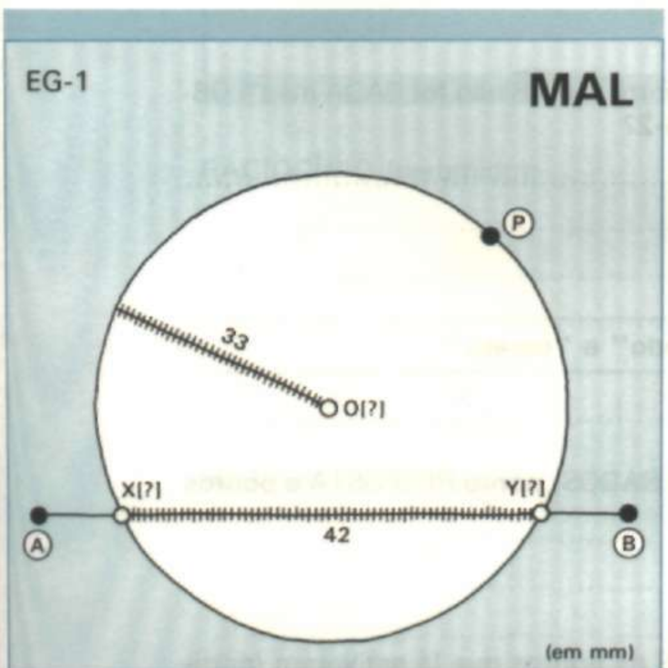
Problema:

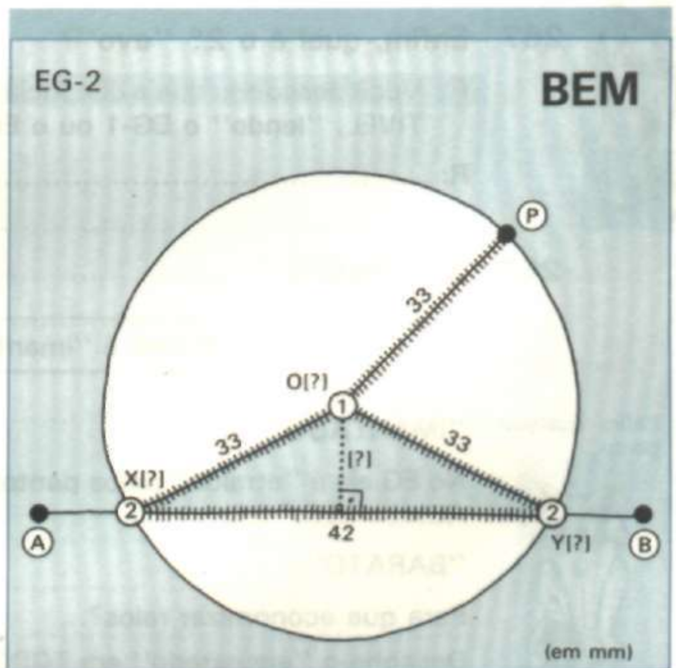
Construir uma circunferência ($\overline{O}$; 33 mm) que contém $\overline{P}$ e determina entre $\overline{A}$ e $\overline{B}$ os pontos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ tais que XY = 42 mm; AX < AY.



R: **OA = ...58...... mm.**

Observe bem os dois EGs, abaixo:





263 Ambos, o EG-1 e o EG-2, seguem o código:

> estão a mão livre para não acreditarmos no que PARECE mas NÃO É e mostram TODOS os dados e UMA das respostas.

264 **Então por que o EG-1 está malfeito?**

Você vai concluir sozinho o porquê...

Siga-nos:

Você já percebeu que antes de $\overline{X}$ e de $\overline{Y}$ deveremos obter $\overline{O}$? Mesmo porque o compasso já está com a abertura pronta e quer "espetar" alguma coisa; que seja o $\overline{O}$...

$\overline{O}$ [?] { a. dista 33 de $\overline{P}$ / b. [?]

Veja, no EG-2, que $\overline{O}$ dista 33 mm de $\overline{P}$, logo está no L1.

265 **Falta apenas uma propriedade... Qual?**

Quem não procura... Procure!
Convém você resmungar (pensar em voz média...):

L1: $\overline{O}$ dista 33 mm de $\overline{X}$, mas $\overline{X}$ não é determinado ainda...

Determinar:
ou dar
ou obter.

L2: Será obtível a distância entre $\overline{O}$ e a reta $\overleftrightarrow{AB}$? Será?...

(Pausa para meditação...)

O △XOY tem tamanho obtível!

266 HEURECA!

Heureca significa "achei"!

O △XOY, tendo lados com 42 mm, 33 mm e 33 mm, pode ser construído à parte e obtemos sua altura que é a tal distância.

267 **Enfim, qual é o 2º "ovo"?**

P: *Você descobriu que a distância entre* $\overline{O}$ *e* $\overleftrightarrow{AB}$ *não foi* DADA *mas é* OBTÍVEL, "lendo" o EG-1 ou o EG-2?

R: ....

268 2º "OVO":

O raio é "imantado" e "barato".

Enfim qualquer ponto...

"IMANTADO":

No EG ele é "atraído" pelos pontos DADOS, ponto RESPOSTA e pontos AUXILIARES.

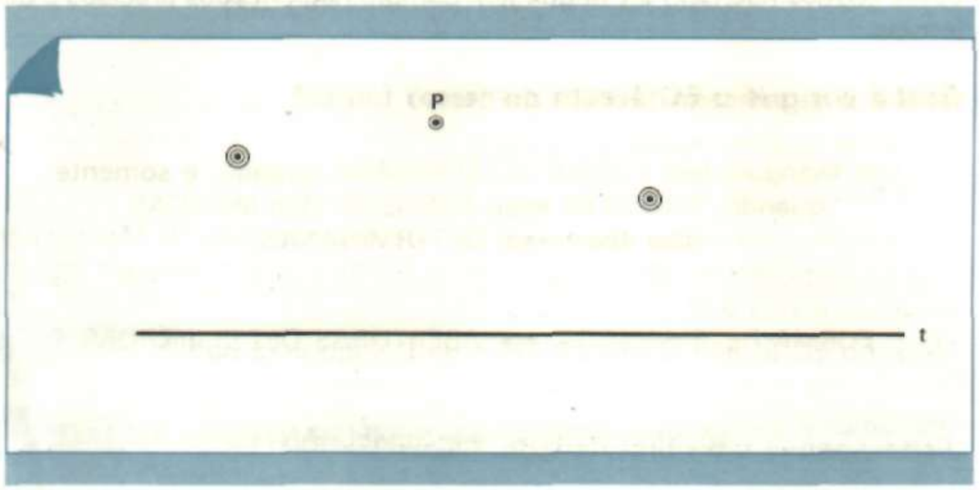
"BARATO":

Para que economizar raios?...

Desenhe-o "encostado" em TODOS os pontos que lá estiverem (particulares).

269 EXERCÍCIO:

Construir uma circunferência ($\overline{O}$; 21 mm) que contém $\overline{P}$ e determina com $\overleftrightarrow{t}$ uma corda de 38 mm.



270 Agora faça um serviço completo, para treinar o MF:

EG

RACIOCÍNIO (resumido):

....

....

....

....

....

ROTEIRO (de preferência, use símbolos):

....

....

....

271 Nos próximos capítulos mostraremos mais alguns "ovos de Colombo".

VI CONCEITOS FUNDAMENTAIS

272 FORMA, TAMANHO E POSIÇÃO

Esses termos não têm, em linguagem comum, significados precisos e objetivos.

273 **Qual é o significado técnico do termo** forma?

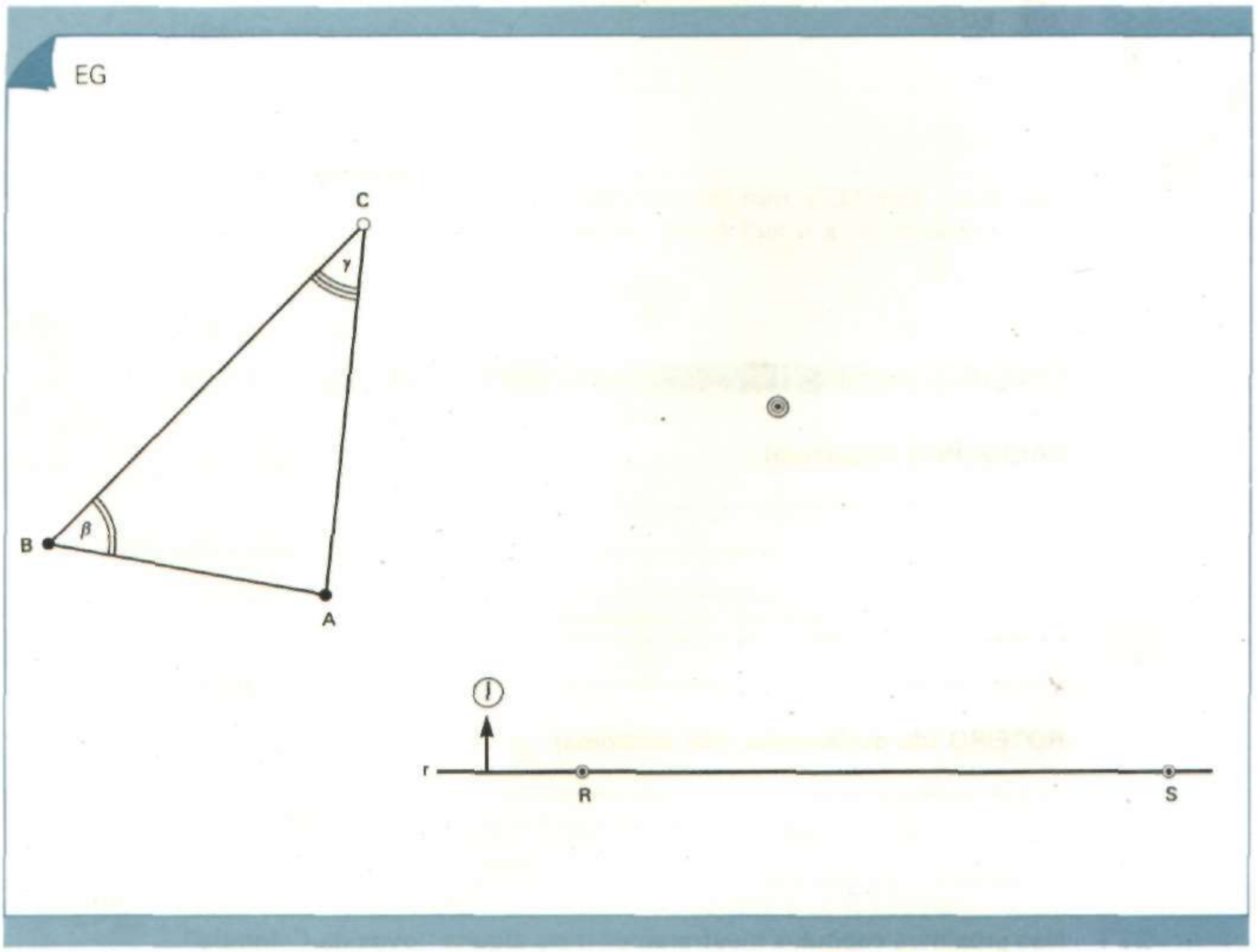
> **Um triângulo tem** FORMA DETERMINADA **quando, e somente quando,** TODOS **os seus** ÂNGULOS TÊM MEDIDAS **(das aberturas)** DETERMINADAS.

274 FORMA DETERMINADA $\Leftrightarrow$ ABERTURAS DETERMINADAS

275 MESMA FORMA $\Leftrightarrow$ SEMELHANTES

276 EXERCÍCIO:

No semiplano $\overrightarrow{rI}$, obtenha o $\triangle$RST $\sim$ $\triangle$ABC, sabendo que SRT = β e RST = γ.



277 **Qual é o significado exato de** tamanho?

> **Um triângulo tem** TAMANHO DETERMINADO **se, e somente se,** TODOS OS SEUS SEGMENTOS **têm** COMPRIMENTOS DETERMINADOS.

278

> TAMANHO DETERMINADO ⟺ COMPRIMENTOS DETERMINADOS

279

> MESMO TAMANHO ⟺ CONGRUENTES

P: *Dois recipientes com volume de um litro cada têm obrigatoriamente o mesmo tamanho? Por quê?*

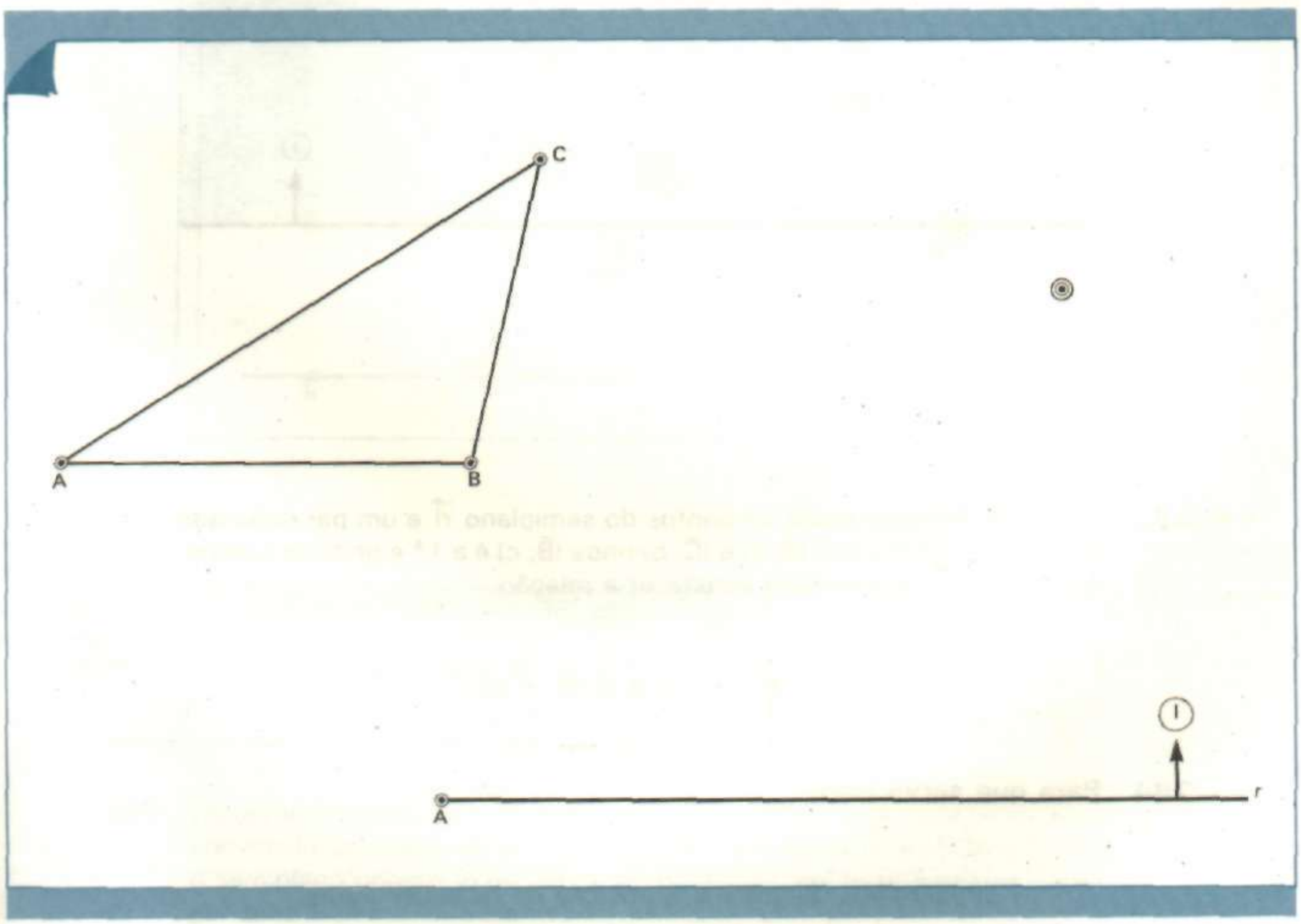
R: ....

P: *Dois triângulos de mesma área têm obrigatoriamente o mesmo tamanho? Por quê?*

R: ....

280 EXERCÍCIO:

Transporte △ ABC para o semiplano $\overleftrightarrow{rI}$, com $\overline{A} = \overline{A'}$, $\overline{B'}$ em $\overleftrightarrow{A'r}$ e A'C' = AC.

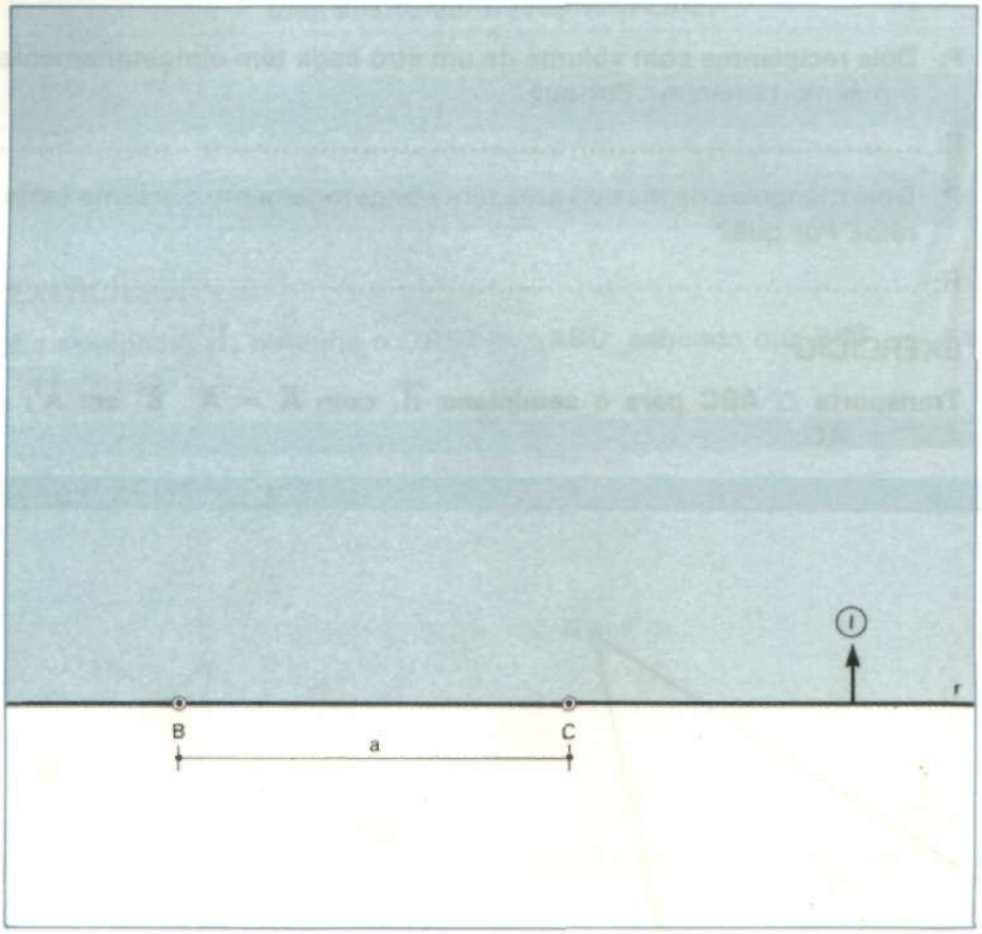


281 **Qual é o conceito de posição?**

Não existe posição absoluta. Só existe POSIÇÃO RELATIVA a um referencial. Por exemplo, o farol esquerdo de um carro não altera sua posição relativa ao carro — que é o REFERENCIAL — quando o veículo percorre uma trajetória qualquer.

282 **Qual é o nosso referencial?**

Somente desenhamos no plano de desenho (papel, lousa, ...) e poderemos convencionar, por exemplo, o seguinte:



283 Uma bijeção entre todos os pontos do semiplano $\overrightarrow{rI}$ e um par ordenado de CIRCUNFERÊNCIAS ($\overline{B}$; c) e ($\overline{C}$; b) onde ($\overline{B}$; c) é a 1ª e onde os comprimentos **a**, **b** e **c** precisam satisfazer a relação:

Você vai entender. Faça o exercício do nº 285.

Em Geometria Euclidiana não há sinal, mas colocamos $|b - c|$ para indicar que é o maior menos o menor.

$$|b - c| \leqslant a \leqslant (b + c)$$

284 **Para que serve isso?**

Poderemos determinar a posição de qualquer figura.

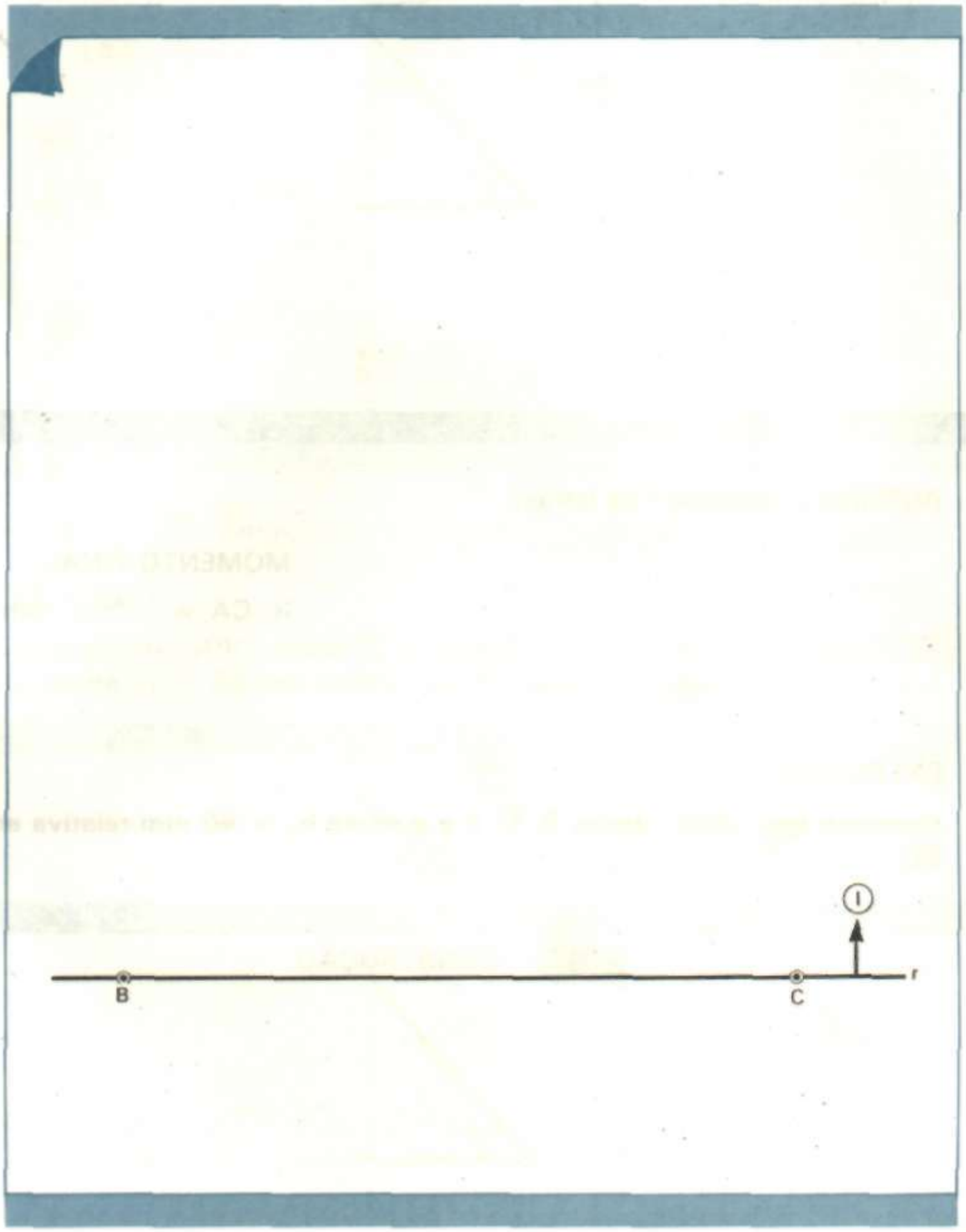
285 EXERCÍCIO:

Desenhe o $\triangle$RST e a circunferência ($\overline{X}$; r) que contém seus vértices.

Dados: $\overline{R} \rightarrow (\overline{B};\ 19)$ e $(\overline{C};\ 65)$ mm

$\overline{S} \rightarrow (\overline{B};\ 66)$ e $(\overline{C};\ 58)$ mm

$\overline{T} \rightarrow (\overline{B};\ 70)$ e $(\overline{C};\ 21)$ mm



R: $\overline{X} \rightarrow (\overline{B};\ ...42...)$ e $(\overline{C};\ ...40...)$ mm; r = ...30... mm.

286 Os comprimentos **c** e **b** chamam-se COORDENADAS de cada ponto e, se convencionarmos um sinal POSITIVO para o semiplano $\overrightarrow{rI}$ e NEGATIVO para o semiplano oposto (o de baixo, no desenho), então poderemos abranger todo o plano do desenho.

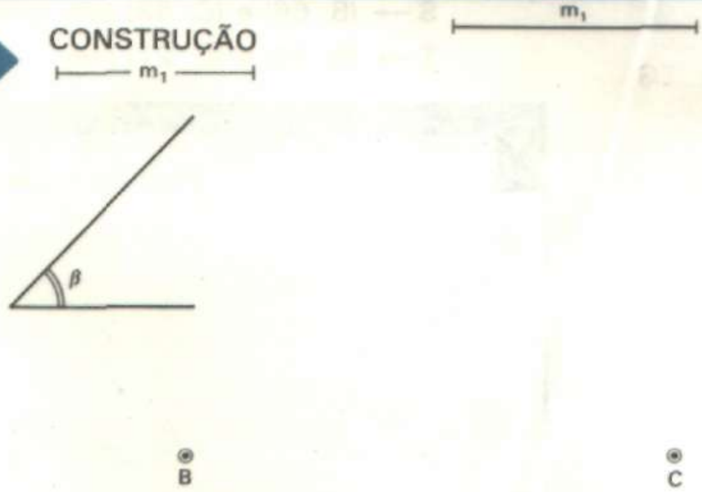
No nº 507 estudaremos as coordenadas cartesianas.

287 EXERCÍCIO:

Construir um △ABC, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, β e a mediana m_1 relativa ao lado $\overline{BC}$.

EG

CONSTRUÇÃO



ROTEIRO ("desenhe" as letras):

MOMENTO FINAL:

R: CA = ...45... mm.

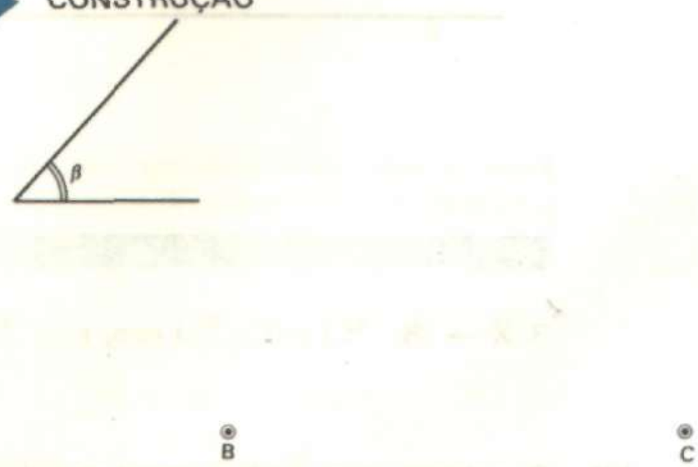
Sempre ressalte a resposta com traço mais forte, mas fino.

288 EXERCÍCIO:

Construir um △ABC, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, β e a altura h_1 = 40 mm relativa ao $\overline{BC}$.

EG

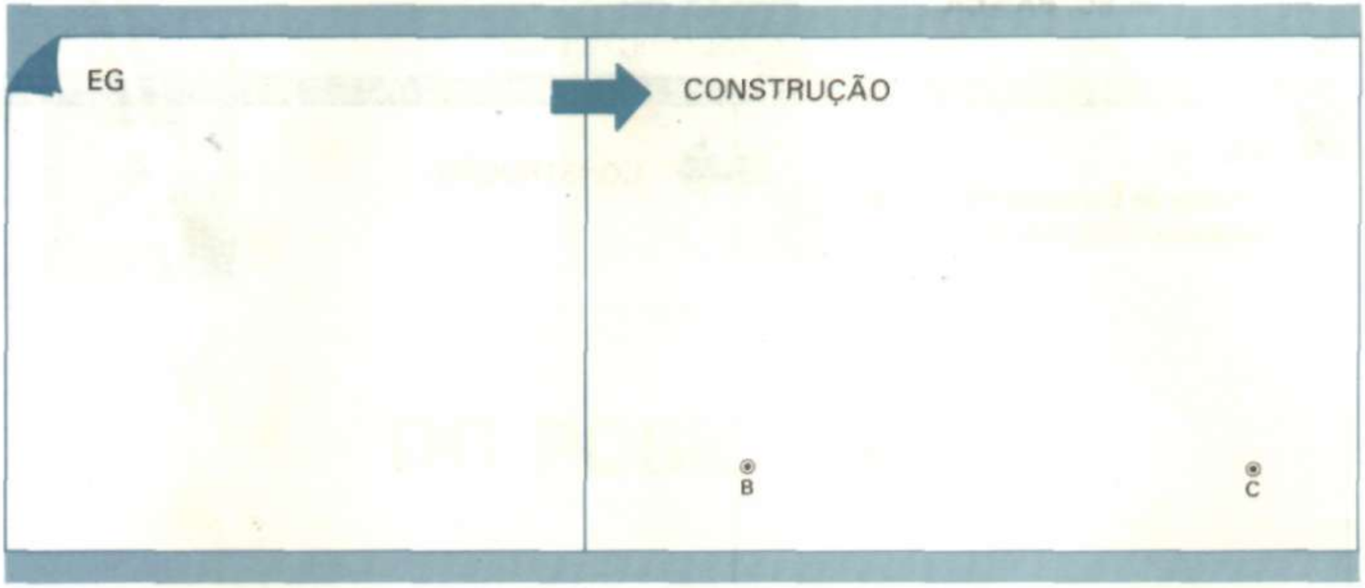
CONSTRUÇÃO



R: BA = ...54... mm.

289 EXERCÍCIO:

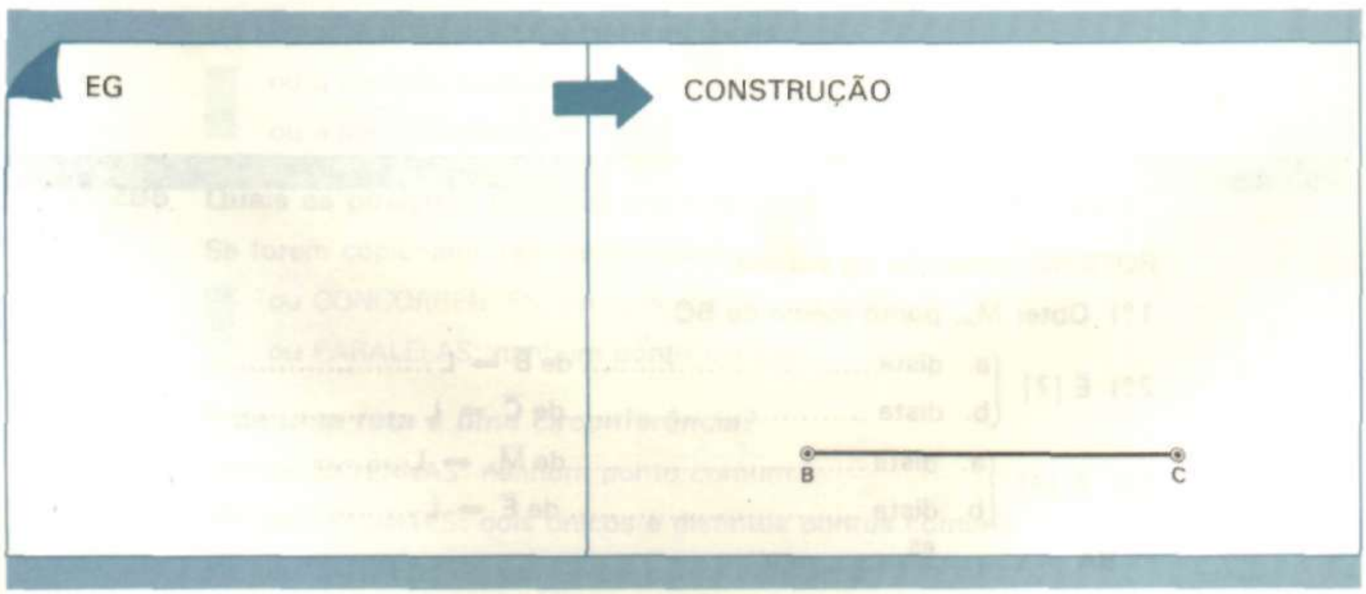
Construir um $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, a altura $h_1 = 26$ mm e a mediana $m_1 = 55$ mm relativas ao $\overline{BC}$ e tal que $BA < CA$.



R: CA = ...85..... mm.

290 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, a mediana $m_3 = 28$ mm relativa ao $\overline{BA}$ e a altura $h_1 = 30$ mm relativa ao $\overline{BC}$. $B\hat{C}A$ é agudo.



ROTEIRO (preencha os vazios):

1º) Ponto .... [?] $\begin{cases} \text{a. dista } \ldots\ldots\ldots \text{ de } \overline{C} \Rightarrow L \ldots\ldots\ldots \\ \text{b. dista } \ldots\ldots\ldots \text{ de } \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow L \ldots\ldots\ldots \end{cases}$

2º) .... é ponto médio de $\overline{BA} \Rightarrow$ acha-se $\overline{A}$.

R: CA = ...50..... mm.

291 EXERCÍCIO:

Construir o $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, o raio $r_C = 33$ mm da circunferência circunscrita (que contém os vértices) e a mediana $m_1 = 45$ mm relativa ao $\overline{BC}$. $BA > CA$.

EG

Chame de $\overline{E}$ o centro da circunferência CIRCUNSCRITA.

CONSTRUÇÃO

B C

ROTEIRO (preencha os vazios):

1º) Obter $\overline{M}_A$, ponto médio de $\overline{BC}$.

2º) $\overline{E}$ [?] a. dista .... de $\overline{B}$ ⇒ L ....
b. dista .... de $\overline{C}$ ⇒ L ....

3º) $\overline{A}$ [?] a. dista .... de $\overline{M}_A$ ⇒ L ....
b. dista .... de $\overline{E}$ ⇒ L ....

R: BA = ...65......... mm.

292 IMPORTANTE:

A circunferência ($\overline{E}$; r_c) é uma linha que estava "latente" e foi "revelada" graças às duas propriedades do ponto $\overline{E}$. Numa cópia, a ordenação é o BUSÍLIS.

Busílis. S.m.
O ponto principal da dificuldade em resolver uma coisa, o xis da questão.
Aurélio.

CAPÍTULO

2

René Descartes
(1650 – 1596 = 54a)

DG POSICIONAL

I PRELIMINARES

293 O que significa posicional?

"Posicional. Adj. 2g. De, ou relativo à posição." AURÉLIO.

294 Qual posição?

Há somente duas posições determináveis:

ou a posição relativa a um REFERENCIAL

ou a posição relativa ENTRE SI de duas figuras.

Pode-se considerar uma das figuras como o referencial da outra.

295 Quais as posições relativas entre si de duas "distintas" retas?

Se forem coplanares (do mesmo plano):

ou CONCORRENTES: um único ponto comum

ou PARALELAS: nenhum ponto comum.

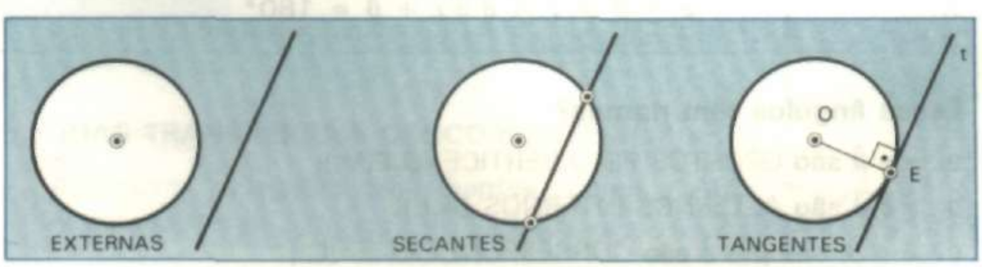
296 E de uma reta e uma circunferência?

ou EXTERNAS: nenhum ponto comum

ou SECANTES: dois únicos e distintos pontos comuns

ou TANGENTES: um único ponto comum $\overline{E}$.

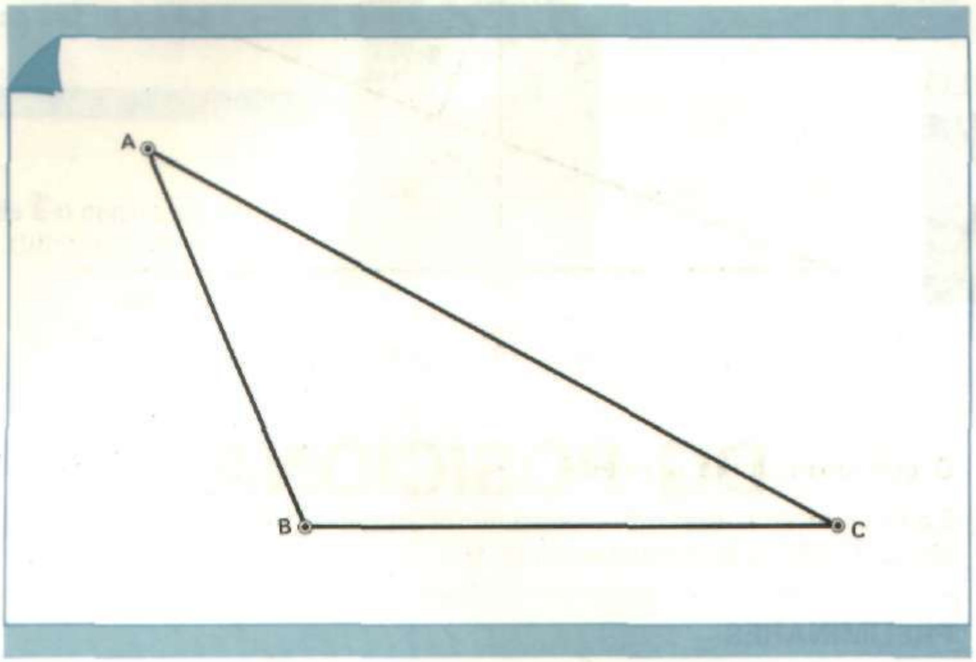
$\overline{E}$ é chamado ponto de tangência.



$\overline{OE} \perp t$

297 EXERCÍCIO:

Desenhe a circunferência inscrita, que tangencia os três lados do △ABC.

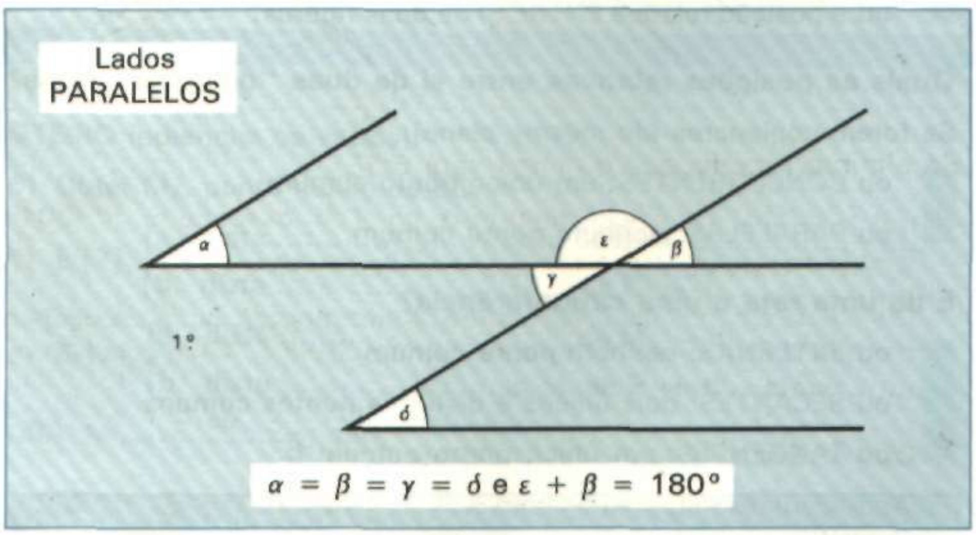


298 Devo obter os três pontos de tangência?

É obrigatório obter o 1.º, para determinar o comprimento do raio. Convém obter os outros dois para conferir a precisão do desenho.

299 Quais as posições relativas entre si de dois ângulos?

Apenas são notáveis dois casos:



alternos internos

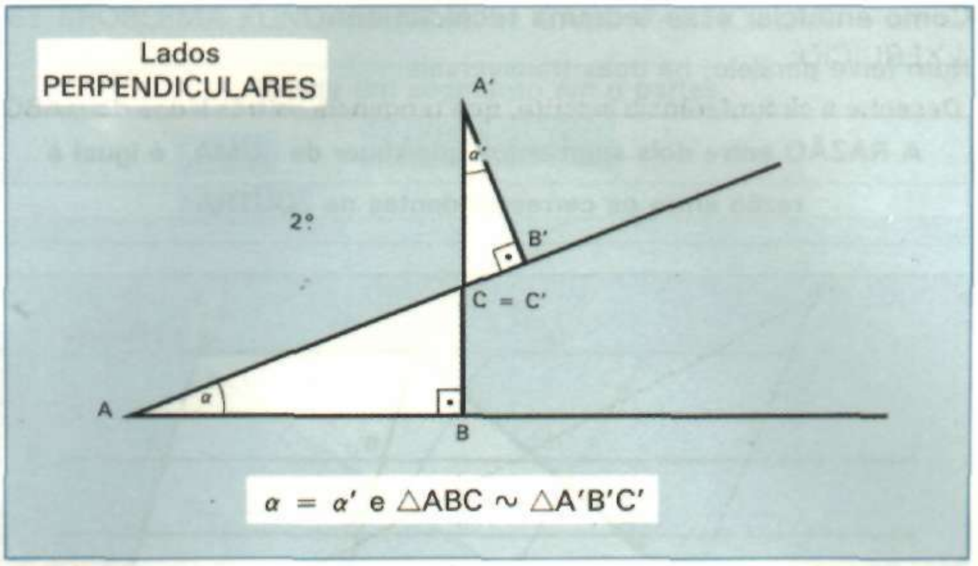
300 Esses ângulos têm nomes?

a. $\hat{\gamma}$ e $\hat{\beta}$ são OPOSTOS PELO VÉRTICE **(O.P.V.)**.

b. $\hat{\gamma}$ e $\hat{\delta}$ são ALTERNOS-INTERNOS **(A.I.)**.

c. $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$; são $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$ são CORRESPONDENTES **(C.)**

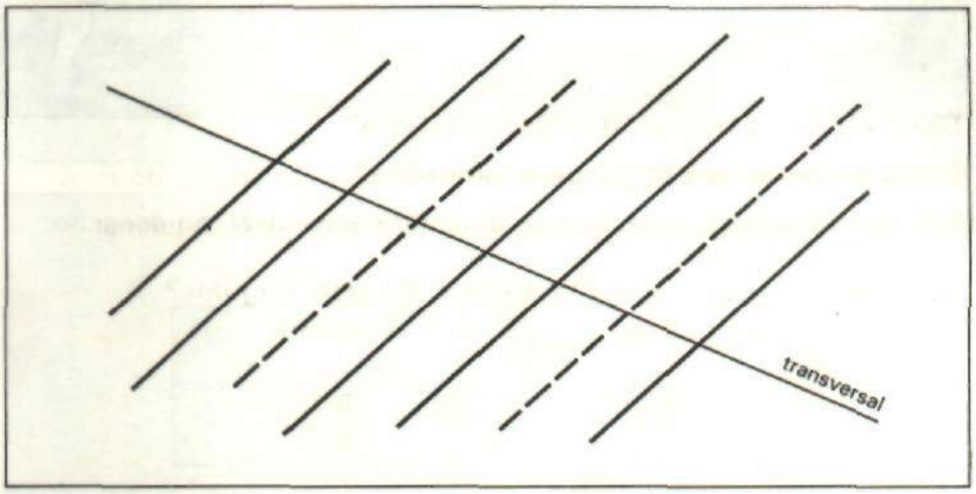
301



302 **O que é um** feixe paralelo?

É o conjunto das (de todas) retas de um mesmo plano e que têm a MESMA DIREÇÃO (são paralelas entre si).

Figuras de um mesmo plano chamam-se coplanares.



TRANSVERSAL de um feixe paralelo é qualquer reta — genérica ou particular — que é CONCORRENTE com as do feixe.

303 **Há alguma propriedade que nos será útil?**

Sim, o TEOREMA DE TALES num feixe paralelo (desenho no n.º 304):

a. **DUAS TRANSVERSAIS** (1.ª e 2.ª; 2.ª e 3.ª; 1.ª e 3.ª; ...):

O feixe determina uma bijeção entre os seus pontos; por qualquer ponto de uma reta passa (é "latente") uma só reta do feixe que determina o ponto correspondente na outra.

b. **DUAS TRANSVERSAIS PARALELAS** (2.ª e 3.ª):

Aparecem paralelogramos com A'B' = A''B''; B'C' = B''C''; A'C' = = A''C''; ...

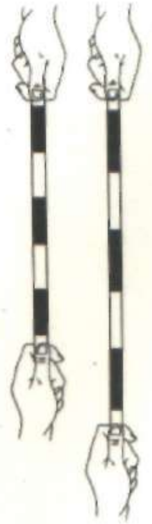
c. **DUAS TRANSVERSAIS CONCORRENTES** (1.ª e 2.ª):

Aparecem triângulos semelhantes, como △ABB' ~ △ACC' ~ △ADD' ~ ...

304 Como enunciar esse teorema tecnicamente?

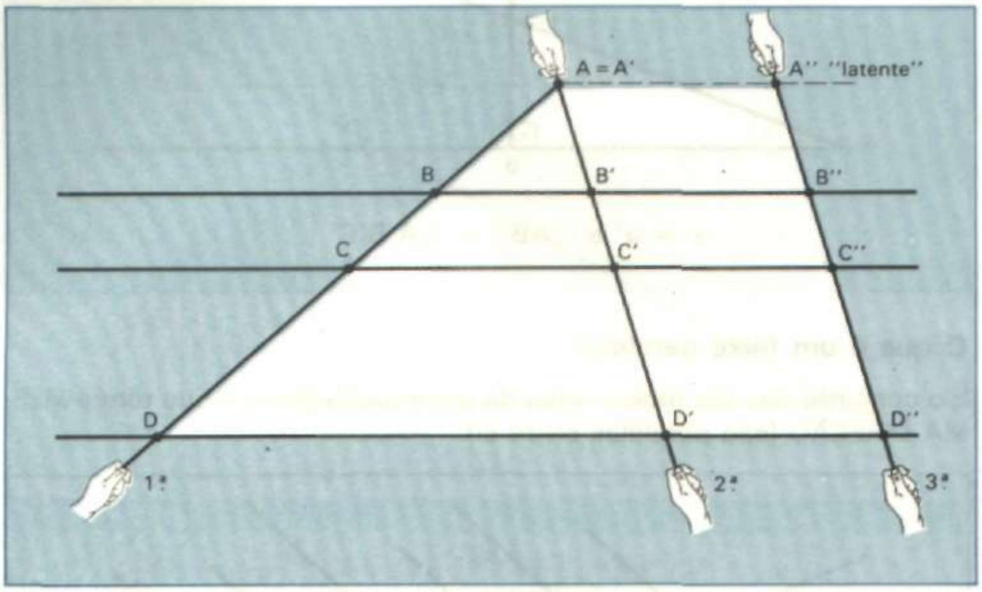
Num feixe paralelo, há duas transversais.

A RAZÃO entre dois segmentos quaisquer de UMA é igual à razão entre os correspondentes na OUTRA.



Esticando ou encolhendo o elástico:

A PROPORÇÃO NÃO SE ALTERA



Proporção é uma relação abstrata!

305 Como enunciar em linguagem simbólica?

Até adquirir prática, escreva inicialmente conforme o esquema:

UMA		OUTRA
$\dfrac{BC}{CD}$	$=$	$\dfrac{B'C'}{C'D'}$

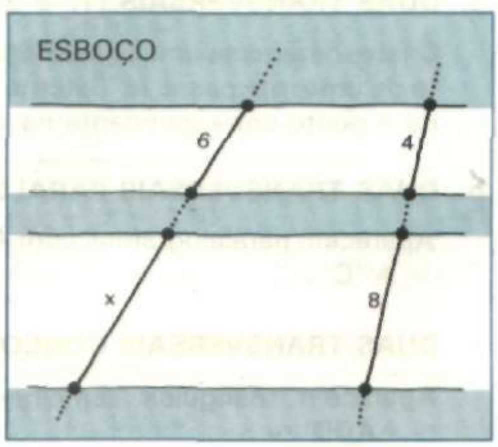
Depois de ter escrito assim, aplique qualquer uma das propriedades das proporções, pois as medidas são NÚMEROS.

306 Exemplo:

Obtenha o valor numérico de x.

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{8} \Rightarrow x = \frac{6 \times 8}{4} = 12$$

(todos na mesma unidade)

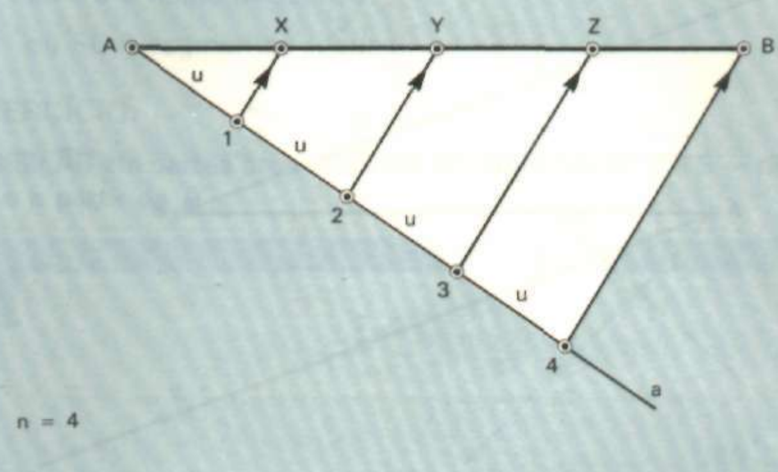


307 6º PROBLEMA FUNDAMENTAL — CASO PARTICULAR:

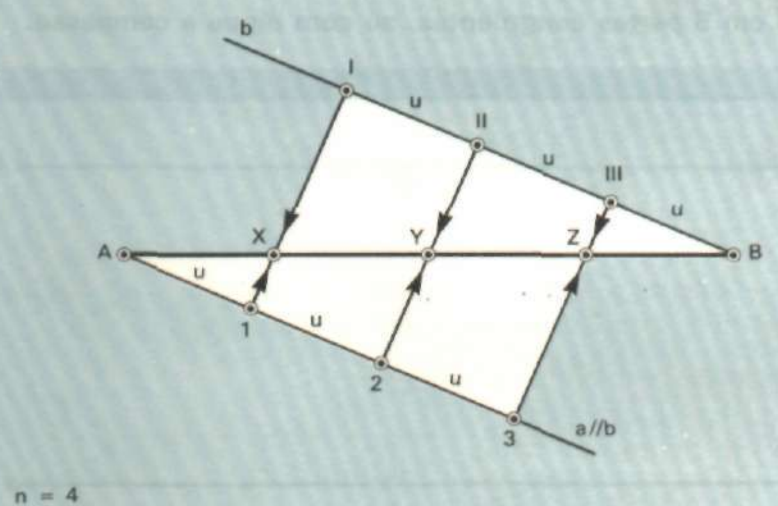
n ≠ zero é um número inteiro e positivo.

Dividir um segmento em n partes CONGRUENTES

SEGMENTOS CONGRUENTES ⇔ MEDIDAS IGUAIS



PARALELAS COM ESQUADROS



SÓ RÉGUA e COMPASSO

Em "grafiquês", as flechas indicam a ORDEM em que os pontos são obtidos.

308 A reta $\overleftrightarrow{a}$ e o segmento $\overline{u}$ são arbitrários?

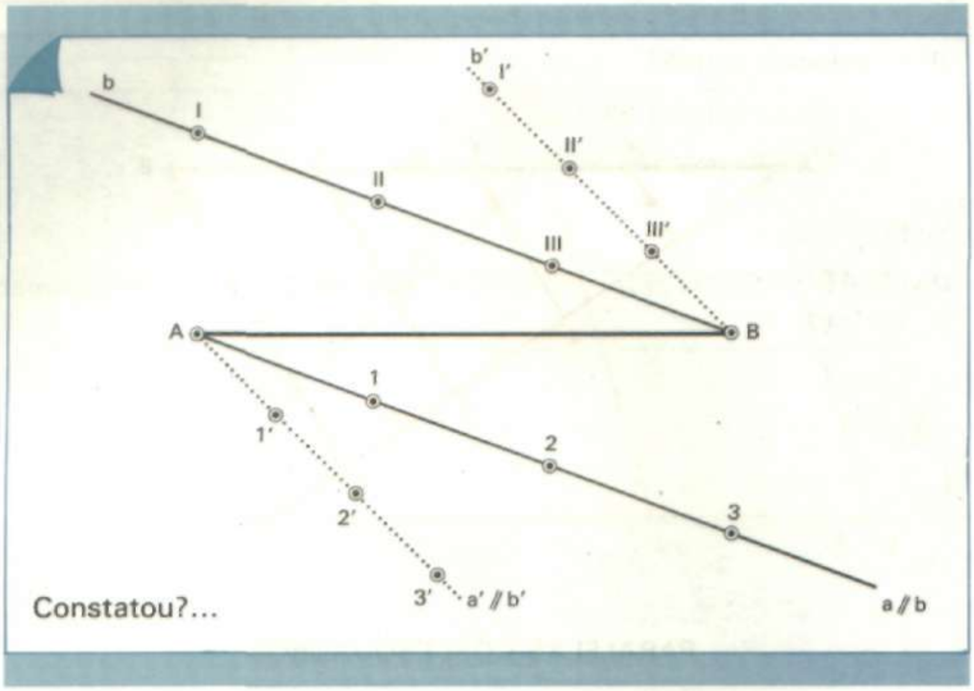
Sim... mas convenientes para obter $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, ... bem precisos.

309 Acredito que são arbitrários, mas não me convenci...

Isso é normal... Vamos fazer uma experiência gráfica: no desenho a seguir, ligue 1 com I, 2 com II, ... e ligue 1′ com I′, 2′ com II′, ... e constate que uma boa teoria não falha...

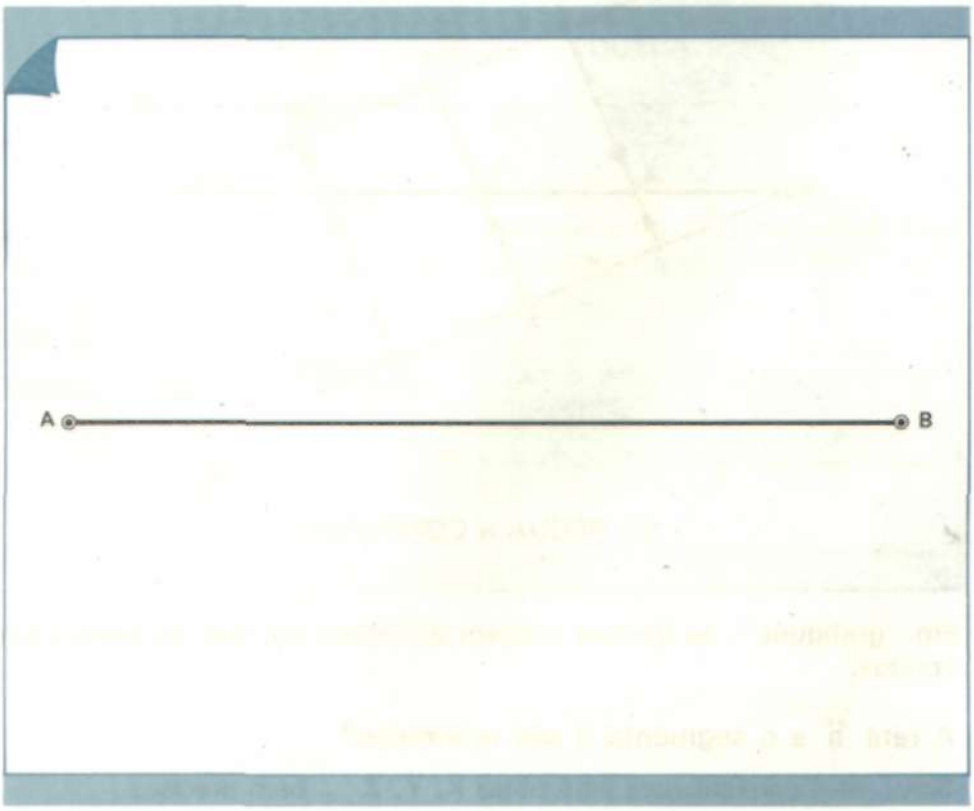
Você tem esse direito porque nós não demonstramos. Isso porque a demonstração está além do que cabe neste livro.

Ligue árabes com romanos...



310 EXERCÍCIO:

Divida $\overline{AB}$ em 5 partes congruentes, só com régua e compasso.



311 6.º PROBLEMA FUNDAMENTAL — CASO GERAL:

Dividir um segmento em **n** partes

PROPORCIONAIS

Razão de dois segmentos é um número: razão de suas medidas na mesma unidade.

312 **Proporcionais a quê?**

ou SÓ a números (dados)

ou SÓ a segmentos (dados)

313 EXERCÍCIO:

Dividir $\overline{AB}$ em partes proporcionais aos números 3, 2 e 5 — nessa ordem — e a partir de A.

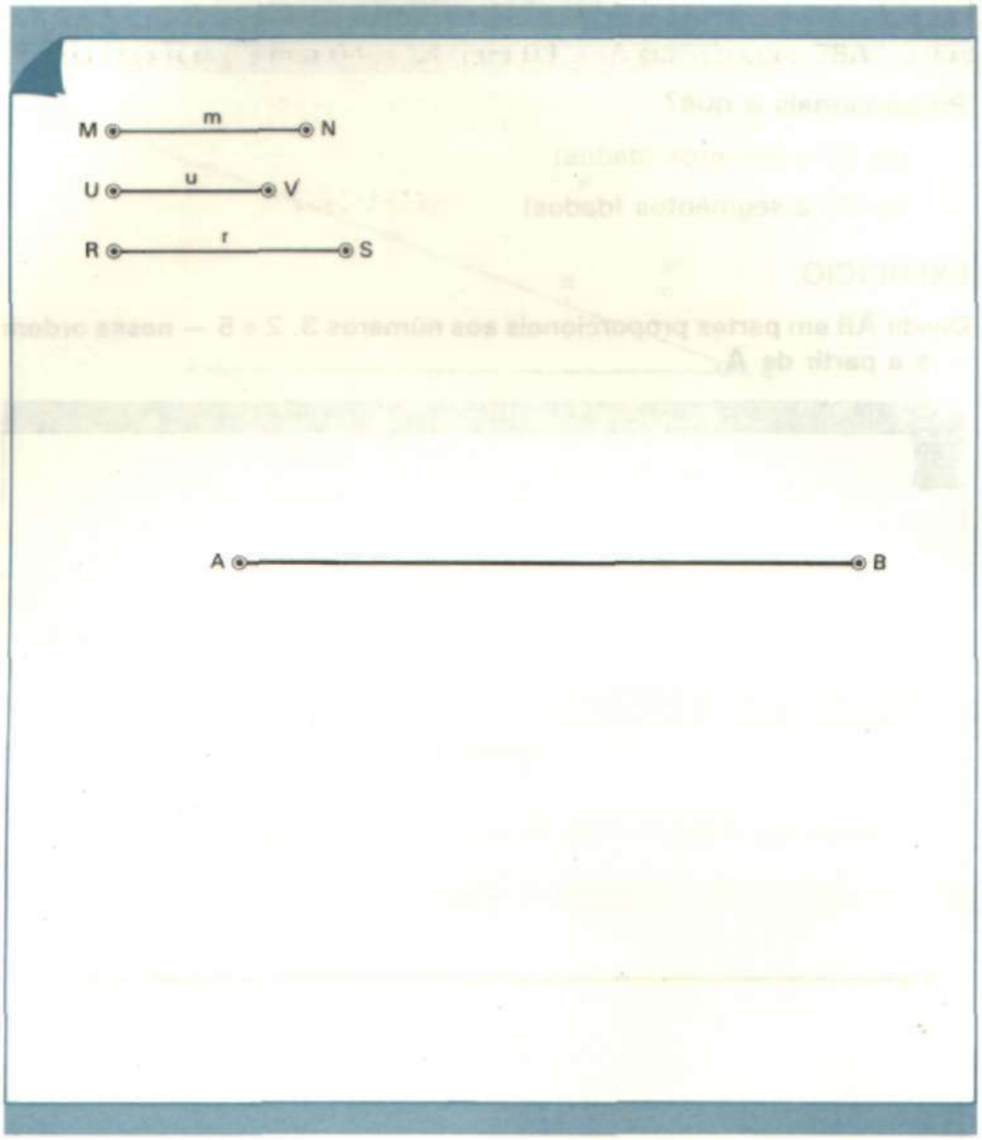
314 **Como fazer para conferir?**

Divida a medida de $\overline{AB}$ por 10, pois 3 + 2 + 5 = 10; compute e meça os segmentos obtidos.

A graduação pode ser usada para conferir.

315 EXERCÍCIO:

Dividir $\overline{AB}$ em partes proporcionais aos segmentos $\overline{MN}$, $\overline{UV}$ e $\overline{RS}$ — nessa ordem — e a partir de $\overline{A}$.



316 **Uma** boa **notícia:**

Recair em problema anterior é um procedimento conveniente em todas as matérias exatas.

São as regras do jogo...

Você, que já exercitou o suficiente o uso exclusivo da régua e do compasso, poderá daqui em diante usar o JOGO DE ESQUADROS, mas tão-somente para:

- traçar paralelas e/ou
- traçar perpendiculares.

317 Depois de uma pausa, que nos forneceu subsídios para continuar, prosseguiremos com exercícios de aplicação do MF.

318 EXERCÍCIO:

Sendo $\overline{I}$ e $\overline{J}$ os pontos que dividem $\overline{BC}$ na proporção $\overline{BI}:\overline{IJ}:\overline{JC}::2:3:1$, construir o $\triangle ABC$ sabendo que $AI = 60$ mm, $AJ = 40$ mm e que $\overline{A}$ está em $\vec{r}$.

EG

CONSTRUÇÃO

Raciocinar é desemaranhar o fio da meada que tem duas pontas; pode-se começar por qualquer uma delas.

RACIOCÍNIO:

O QUE SE QUER?

R: ....

COMO OBTER $\overline{A}$?

R: $\overline{A}$ [?] $\begin{cases} \text{a. DISTA .... de } \overline{I} \Rightarrow \overline{A} \text{ está no ....} \\ \text{b. DISTA .... de } \overline{J} \Rightarrow \overline{A} \text{ está no ....} \end{cases}$

ROTEIRO (sumário):

....

....

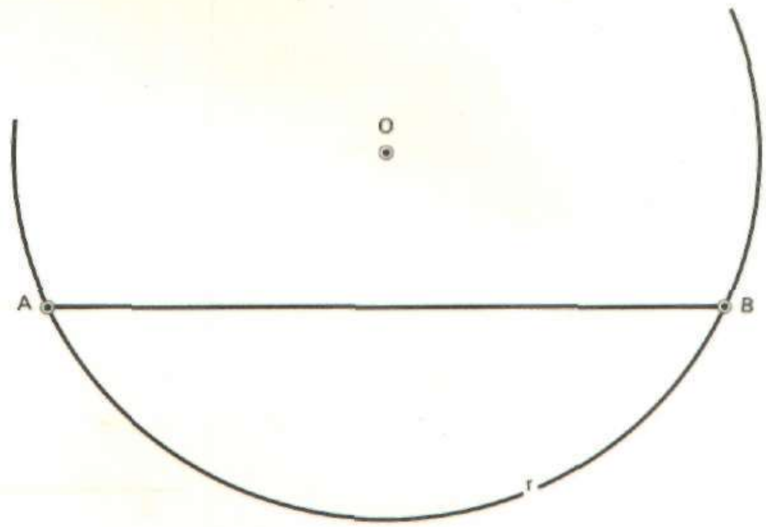
....

319 EXERCÍCIO:

Chamamos de raio ao segmento e à sua medida.

Dadas a circunferência (O; r) e a sua corda $\overline{AB}$, pede-se um raio $\overline{OP}$ que seja dividido por $\overline{AB}$ na razão PX : XO = 2 : 3.

EG | CONSTRUÇÃO



RACIOCÍNIO:

Raciocínio

QUAL PONTO PROCURAR?

R: ....

O QUE SE SABE DELE?

R: ....

ROTEIRO:

1.º) Acha-se $\overline{Y}$ em $\overline{AO}$ tal que AY : YO = ...

2.º) $\overline{X}$ [?] { a. Está em $\overline{AB}$ (dista zero de $\overleftrightarrow{AB}$).
b. Dista YO (foi obtido) de $\overline{O}$ ⇒ L ....

Há dois $\overline{X}$ e, portanto, dois $\overline{P}$...

MOMENTO FINAL

Obtém-se $\overline{X}$ e $\overline{X}'$ ("clandestino") tais que:

R: AX = ...23..... mm e AX' = ...65..... mm.

320 *Antes de prosseguir com exercícios do MF e de LG, mais subsídios:*

321 7º PROBLEMA FUNDAMENTAL:

Incluímos neste problema:
a. Submúltiplos de 90° (45°; 22°30';...) e
b. Soma e diferença dos anteriores (105° = 90° + 15°;...)

ou seja:

Múltiplos de 7° 30'

Só com régua e compasso, construir

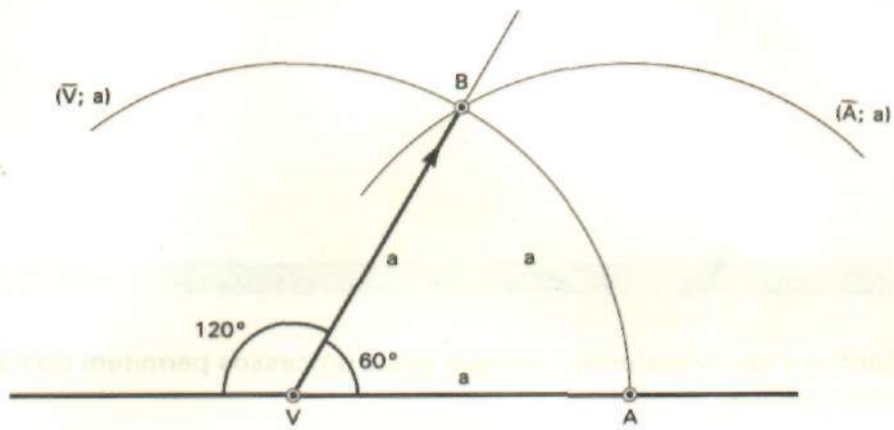
ÂNGULOS MÚLTIPLOS DE 7° 30'

322 PROBLEMA BÁSICO:

Construir um ângulo de 60°.

Em linguagem gráfica:

o suplemento sempre sai pela "culatra"...



Constrói-se um △ eqüilátero.

"Atirou no que viu e acertou no que não tinha visto..."

Na verdade, o SEQT é uma "inclinação" (conceito abstrato). Hoje seria a tangente do ângulo (Trigonometria).

Na Mesopotâmia, o ângulo de 60° foi escolhido como UNIDADE de medida de ângulos. Os babilônios só conheciam os números racionais (que podem ser postos na forma de frações) e, por isso, só usavam o SISTEMA SEXAGESIMAL (não o decimal) para aproveitar o fato de 60 ser divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 e 30 — e isso produziu muitas frações. Então, esse ângulo foi dividido em 60 graus, um grau em 60 minutos e um minuto em 60 segundos; não prosseguiram — ainda bem — porque não tinham instrumentos com tal precisão.

O 10, coitado, só é divisível por 2 e 5...

Os egípcios usavam o SEQT e, apesar disso, construíram as pirâmides!... No entanto, isso já era uma Proto-Trigonometria.

323

Traçando bissetrizes, somando e subtraindo ângulos, consegue-se construir qualquer ângulo múltiplo de 7°30', ou seja: 15°; 22° 30'; 30°; 45°;...

Outros ângulos podem ser construídos com régua e compasso e serão estudados no livro 2.

324 EXERCÍCIO:

Construa um ângulo de 150°.

Sai pela "culatra" do de 30°...

Confira o seu transferidor, porque estes processos permitem ótima precisão gráfica.

325 EXERCÍCIO:

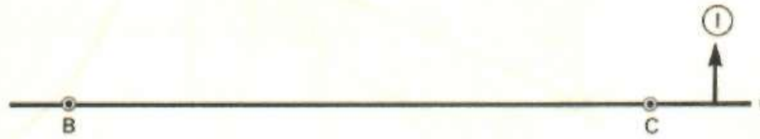
Construa um ângulo de 105° = 90° + 15°.

326 EXERCÍCIO:

No $\overrightarrow{r l}$, construir o $\triangle ABC$, com $AC = 50$ mm e sabendo que a mediana $\overline{AM_A}$ forma o ângulo $A\hat{M}_AC$ com 75°.

EG

CONSTRUÇÃO



ROTEIRO:

Uma qualquer construção fundamental:

Redação, digo, roteiro nota dez!

NÃO DEVE SER "espalhafatosamente" desenhada e
NÃO CONVÉM descrever — no roteiro — as operações feitas;
isso seria "encher lingüiças"...

EXEMPLO — no caso, basta o seguinte:

1.º) Acha-se $\overline{M_A}$, ponto médio de $\overline{BC}$.

2.º) Constrói-se $C\hat{M}_As$ (escreva s no desenho) com 75°.

3.º) $\overline{A}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está em } \overrightarrow{M_As} \text{ (semi-reta)} \\ \text{b. dista 50 mm de } \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \in (\overline{C};\ 50 \text{ mm}). \end{cases}$

Atente para a sofisticação

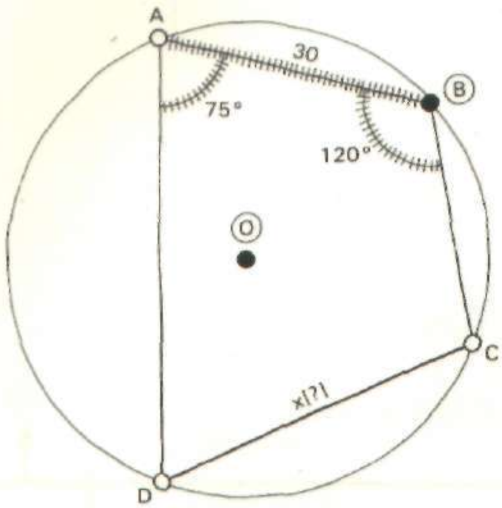
MOMENTO CRUCIAL:

R: AB = ...65..... mm.

327 EXERCÍCIO:

Abaixo temos o EG de um problema que estava escrito num idioma qualquer. Qual o valor de x em mm?

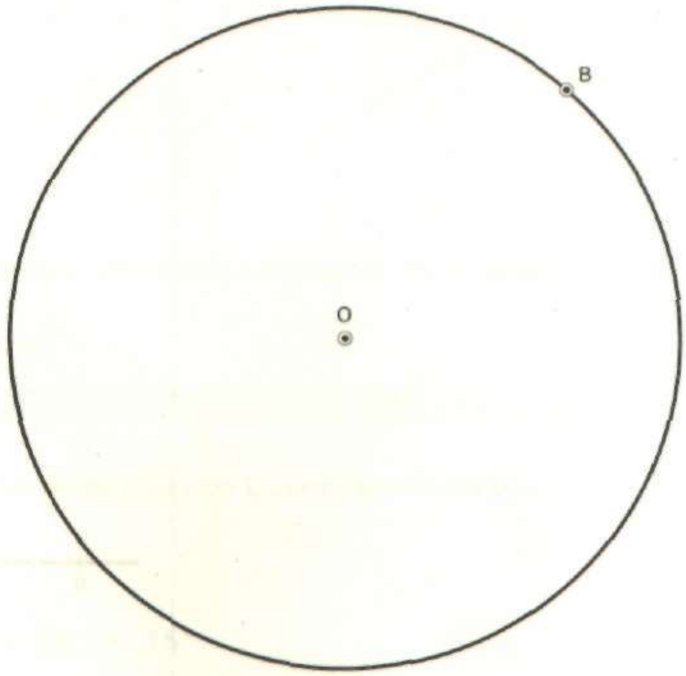
EG



Comprimento em mm.

R: x = ...50.... mm.

CONSTRUÇÃO



328 ROTEIRO (capriche nas letras):

QUEM SABE É CONCISO; QUEM NÃO SABE...

....

....

....

....

....

....

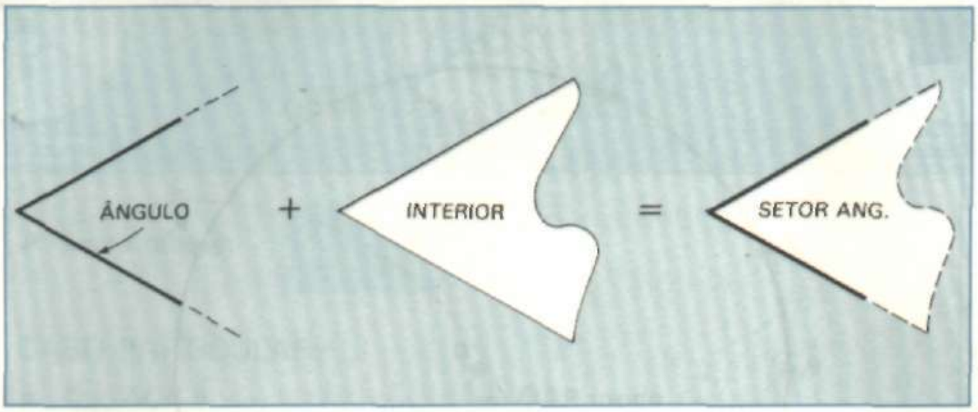
329 Procure sempre aproveitar linhas já traçadas, para não ACUMULAR ERROS GRÁFICOS.

II ARCO CAPAZ DE UM ÂNGULO

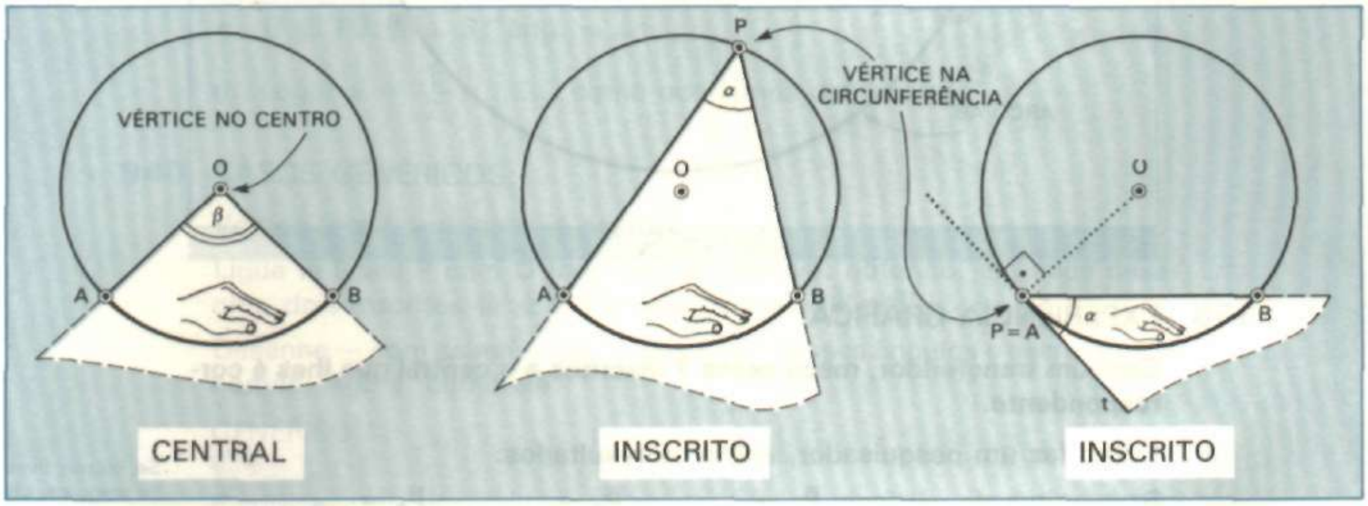
330 Qual a diferença entre ângulo **e** setor angular?

Resposta gráfica:

Ângulo é a união *de duas semi-retas de mesma origem* (é o vértice).



331 Que arco um ângulo determina numa circunferência?



332 Traduzindo para o Português Técnico:

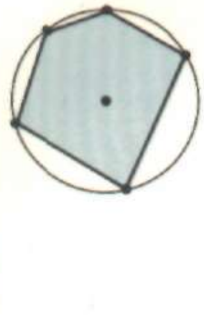
É somente aquele (☞):

> cujas EXTREMIDADES estão nos lados e
> *cujos outros pontos estão no* INTERIOR
> do ângulo.

A reta $\overleftrightarrow{t} \perp \overline{OA}$ em A = P é tangente à circunf.

333 Por que se diz ângulo inscrito?

Tal como em polígonos: quando, e somente quando, TODOS os vértices estão na circunferência; o ângulo só tem UM vértice...



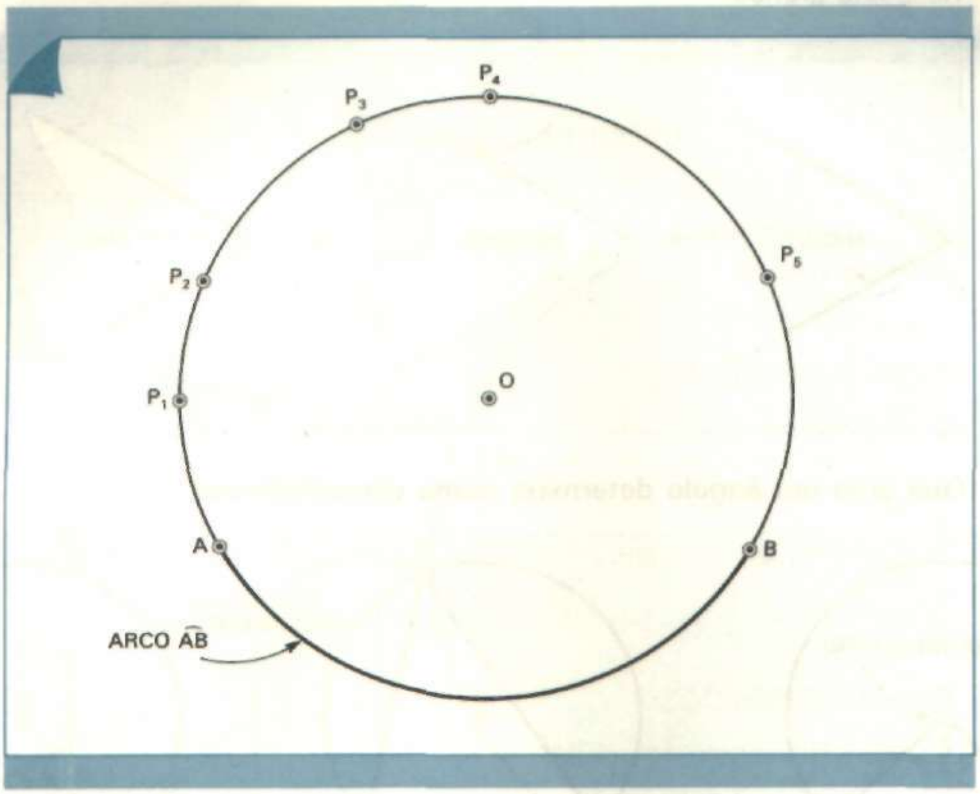
334 Numa circunferência, o que são ângulos correspondentes?

Infinitos: tantos quantos precisarmos.

São aqueles — um único central e infinitos inscritos — que determinam o MESMO ARCO.

335 EXERCÍCIO:

Desenhe o central e os inscritos de vértices $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$, $\overline{P}_5$, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ que determinam o arco $\widehat{AB}$.



Mais um "chapéu":

336 EXPERIÊNCIA GRÁFICA:

Com um transferidor, meça esses 7 inscritos e o central que lhes é correspondente.

Como faz um pesquisador, anote os resultados:

Se Edison tivesse preguiça, não teria inventado a lâmpada.

R: Inscritos de vértices: $\overline{P}_1 \rightarrow$ ....; $\overline{P}_2 \rightarrow$ ....; $\overline{P}_3 \rightarrow$ ....;
$\overline{P}_4 \rightarrow$ ....; $\overline{P}_5 \rightarrow$ ....; $\overline{A} \rightarrow$ .... e $\overline{B} \rightarrow$ ....
Central AOB = ...

337 **Você confia "piamente" nesses resultados ou prefere compreender o porquê?**

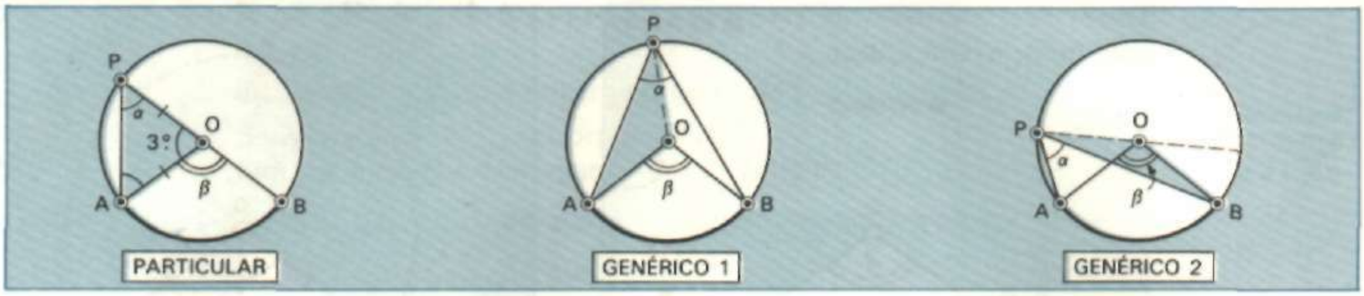
O menino Albert Einstein, curioso como todos nós fomos, optou pela Matemática após dois eventos:

— Perguntou ao seu tio Jacob por que a agulha de uma bússola apontava sempre para o mesmo lugar e este lhe respondeu que "lá era o Norte"... Einstein retrucou: "ISSO NÃO É RESPOSTA!..."

— Encantou-se com um livro de Geometria, à moda antiga, com demonstrações e tudo o mais.

Algum futuro grande homem estará lendo este livro? Quem sabe?

338 DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA:



A nossa tese é: $\alpha = \frac{1}{2}\beta$

339 CASO PARTICULAR:

a. O $\triangle$AOP é .... $\Rightarrow$ OÂP mede ....
(a lápis, escreva α no desenho)

b. No $\triangle$AOP: 2α + 3° âng. = ...
c. O $\in \overline{PB}$: β + 3° âng. = ...

$$\left.\begin{array}{l} \text{b. No } \triangle AOP\text{: } 2\alpha + 3^{\circ}\text{ âng.} = \ldots\ldots\ldots \\ \text{c. } O \in \overline{PB}\text{: } \beta + 3^{\circ}\text{ âng.} = \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,\alpha = \ldots\ldots\ldots$$

d. Logo: $\alpha = \frac{1}{2}$ ...., como queríamos demonstrar.

340 CASOS GENÉRICOS:

Vamos recair num caso já aceito?

Ligue (a lápis) $\overline{P}$ com $\overline{O}$ (nos dois desenhos), obtendo, em cada desenho, dois inscritos ($\hat{\alpha}'$ e $\hat{\alpha}''$) e dois centrais ($\hat{\beta}'$ e $\hat{\beta}''$).

Desenhe — com calma — os "arquinhos" desses ângulos e escreva seus nomes. Agora, complete:

GENÉRICO 1:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = \frac{1}{2}\ \ldots\ldots \\ \alpha'' = \frac{1}{2}\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha' + \alpha'' = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}(\beta' + \beta'') \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}\ \ldots\ldots}$$

c.q.d.

$\alpha' > \alpha''$ GENÉRICO 2:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = \frac{1}{2}\ \ldots\ldots \\ \alpha'' = \frac{1}{2}\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha' - \alpha'' = \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}(\beta' - \beta'') \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}\ \ldots\ldots}$$

Você está gostando da Geometria?

341 E quando um dos lados do ângulo inscrito é tangente à circunferência?

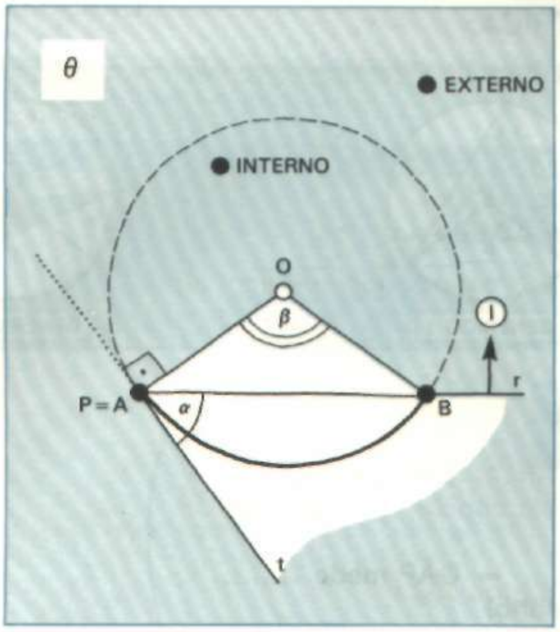
Se você quer mesmo saber, então é porque está gostando e reciprocamente.

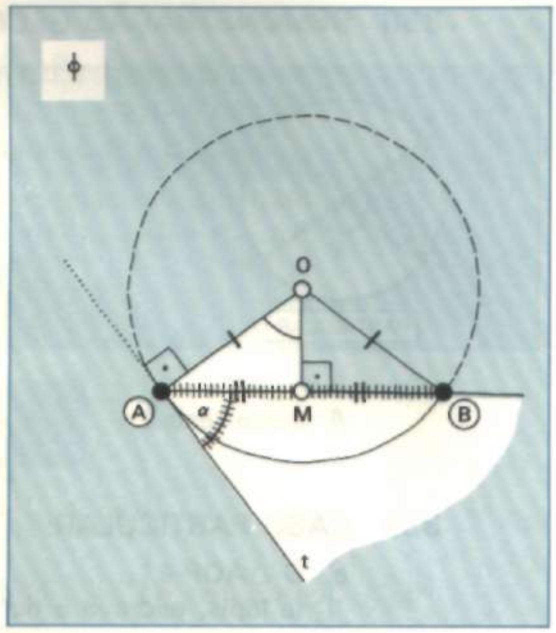
Vire a página que está explicado, mas por que você não tenta antes sozinho?

342

Maiúsculas gregas:

Θ teta Φ fi





Queremos chegar à tese: $\alpha = \dfrac{1}{2}\beta$

343

Tudo o que pode e convém, então deve ser feito.

É normalmente chamado de artifício.

RACIOCÍNIO:

Pt.m. $\overline{AB}$ significa: ponto médio de $\overline{AB}$.

No desenho Θ o que pode ser feito? Pode-se obter o ponto médio $\overline{M}$ e ligá-lo com $\overline{O}$.

Convém? Vejamos (desenho ϕ):

Só consulte o número de referência se precisar.

a. $\overline{M}$ é pt.m. $\overline{AB}$ ═{n.º 259}⟹ $\left\{ \begin{array}{l} \overline{OM} \perp \text{..........} \text{ e} \\ \overline{OM} \text{ é .... do } A\hat{O}B \end{array} \right.$

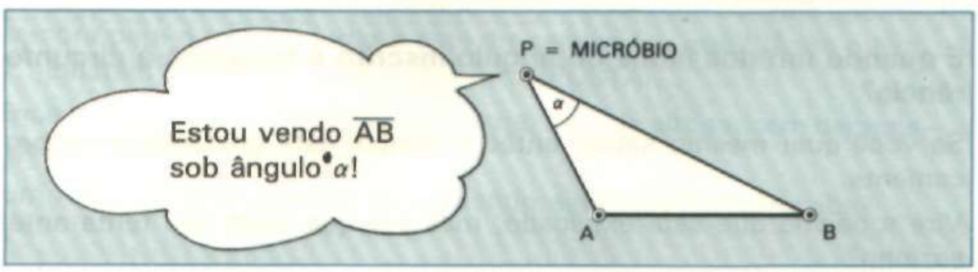
isto é: AOM $= \dfrac{1}{2}$ ....

b. $A\hat{O}M$ e $t\hat{A}B$ têm lados respectivamente

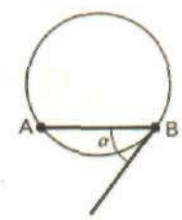
Perpendiculares, ═{n.º 257}⟹ $\boxed{\alpha = \text{..........}}$

c.q.d.

344 "MATÉRIA" NOVA:



345 COMPLETE:



a. No semiplano $\overline{rI}$, todos os pontos do arco tracejado vêem (enxergam) $\overline{AB}$ sob ângulo ....

b. Inclusive $\overline{A}$ e $\overline{B}$, que enxergam de soslaio...

c. Somente eles têm essa propriedade?
Sim, os externos enxergam $\overline{AB}$ sob ângulos

.... do que α e os internos sob ângulos

.... do que α.

346 BATIZADO (definição) :

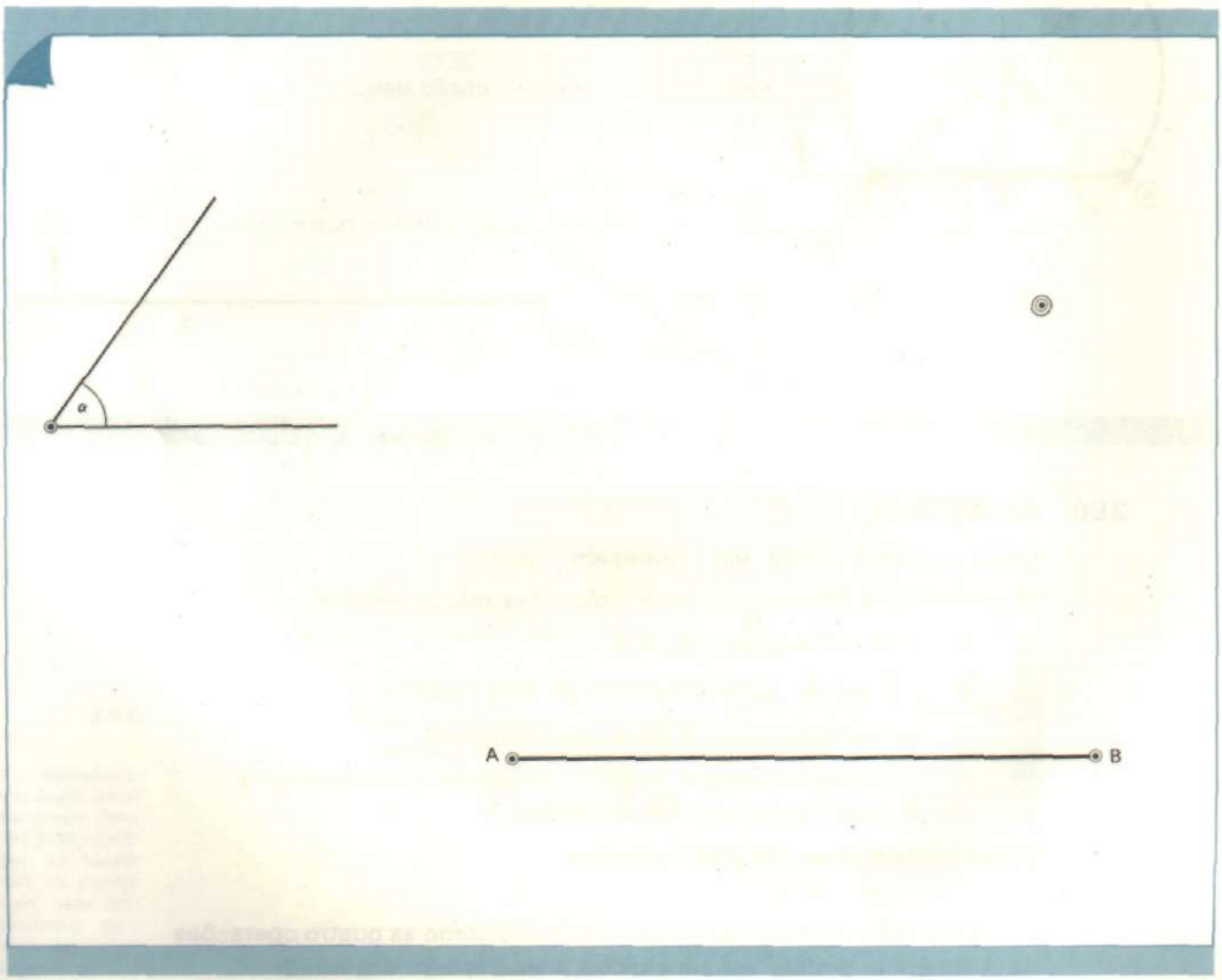
Chamamos o ângulo e a sua medida de α.

Esse ARCO chama-se: ARCO CAPAZ do ângulo, α, sobre $\overline{AB}$.

347 **Construção do arco capaz, dados $\overline{AB}$ e α**

Os desenhos da Geometria podem ser EG do DG.

Onde está escrito Φ ''leia'' EGT e copie esse enunciado gráfico na região *abaixo*:



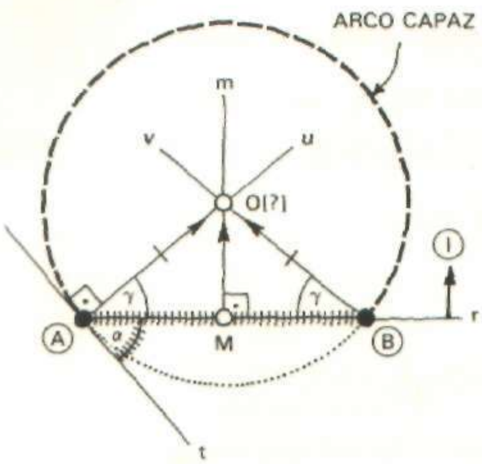
348 Como se trata de um problema muito importante, vamos deixar a construção bem clara:

349

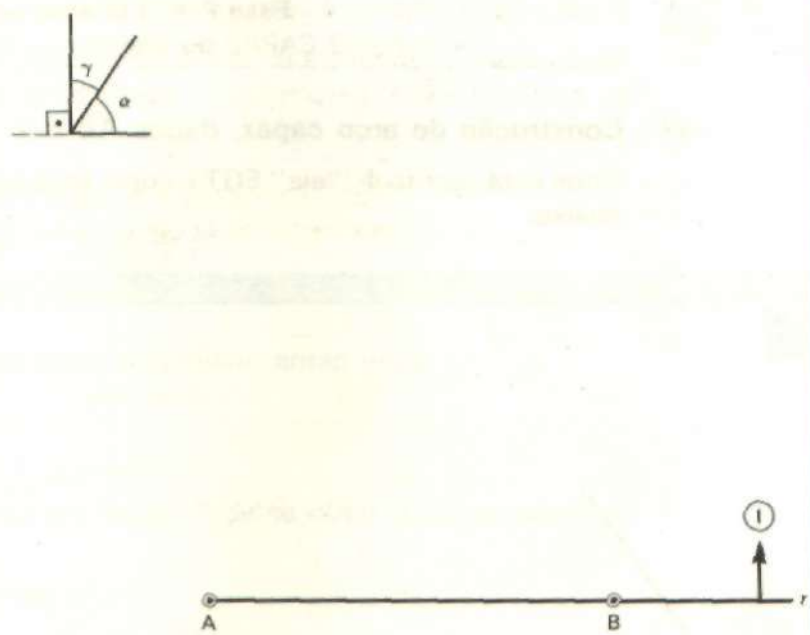
8.º PROBLEMA FUNDAMENTAL:

Em $\overline{r\text{I}}$, construir em $\overline{AB}$ o ARCO CAPAZ **de α.**

EGT



CONSTRUÇÃO



350 RACIOCÍNIO:

Observe o EGT acima, em "grafiquês" castiço...

Queremos $\overline{O}$ e poderemos copiar três retas que o contêm:

- $\overleftrightarrow{m}$ = **L3** é a mediatriz de $\overline{AB}$;
- $\overleftrightarrow{u} \perp \overleftrightarrow{t}$ em $\overline{A}$, pode ser obtida de dois modos:
  - ou transportamos $\hat{\alpha}$ (dado graficamente)
  - ou transportamos $\hat{\gamma} \cong 90° - \hat{\alpha}$ (obtido graficamente) e $\overleftrightarrow{v}$, que forma com $\overrightarrow{BA}$ um ângulo $\hat{\gamma}$.

Como bastam duas, há três caminhos.

351 Em DG os OITO problemas fundamentais são como as quatro operações na Aritmética: podem ser concluídos, mas convém decorá-los.

352 ROTEIRO SUGERIDO PARA $\hat{\alpha}$ DADO GRAFICAMENTE:

1.º) Transporta-se $\hat{\alpha}$ para BÂt, copiando $\overleftrightarrow{t}$.

2.º) Copia-se $\overleftrightarrow{u} \perp \overleftrightarrow{t}$.

3.º) Traça-se (copia-se) $\overleftrightarrow{m}$, obtendo (copiando) $\overline{O}$.

4.º) Traça-se o arco ($\overline{O}$; OA) de $\overline{A}$ até $\overline{B}$. Fim.

353 SUGESTÃO QUANDO $\hat{\alpha}$ É DADO PELA MEDIDA ($n \times 7{,}5°$).

Múltipla de 7°30′.

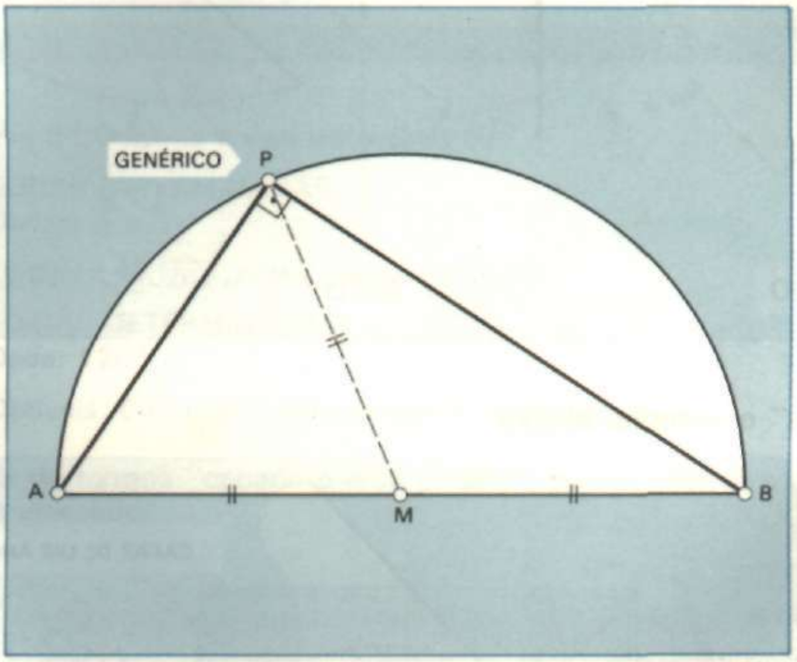
$\overline{O} = \overleftrightarrow{u} \cap \overleftrightarrow{v}$, pois pode-se construir $\hat{\gamma}$ (de medida $90° - \alpha$) já na posição certa.

354 **E quando o ângulo é reto ($\alpha = 90°$)?**

Nesse caso, $\overleftrightarrow{u}$ encontra $\overleftrightarrow{m}$ em $\overline{M}$ e o arco capaz é a semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e, para traçá-la, basta obter $\overline{M}$.

$\overline{M}$ é pt.m. $\overline{AB}$.

355 **Todo ângulo reto é inscritível numa semicircunferência e reciprocamente.**

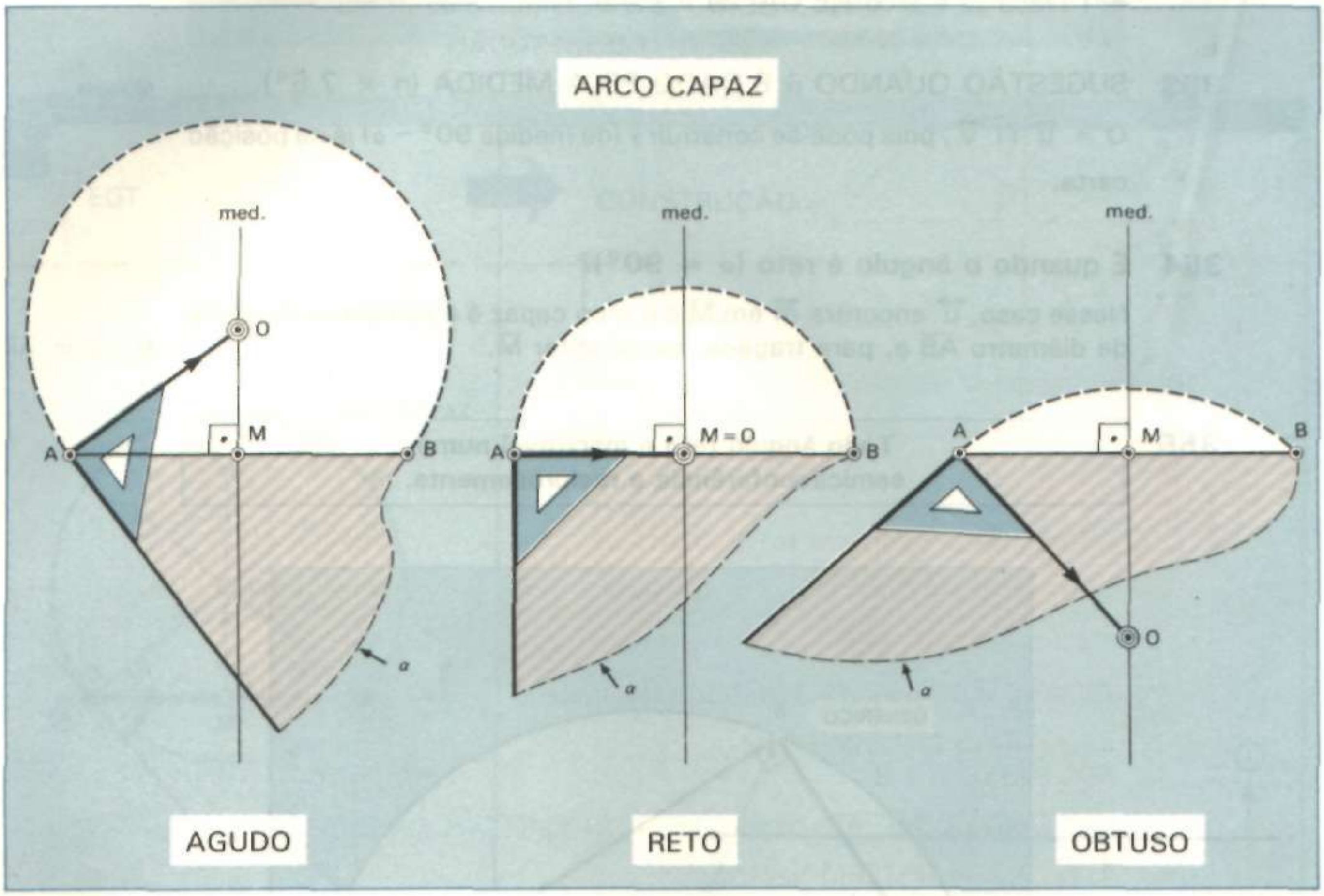


356 **Num $\triangle$ retângulo, a mediana $\overline{PM}$ (raio) é metade da hipotenusa $\overline{AB}$ (diâmetro).**

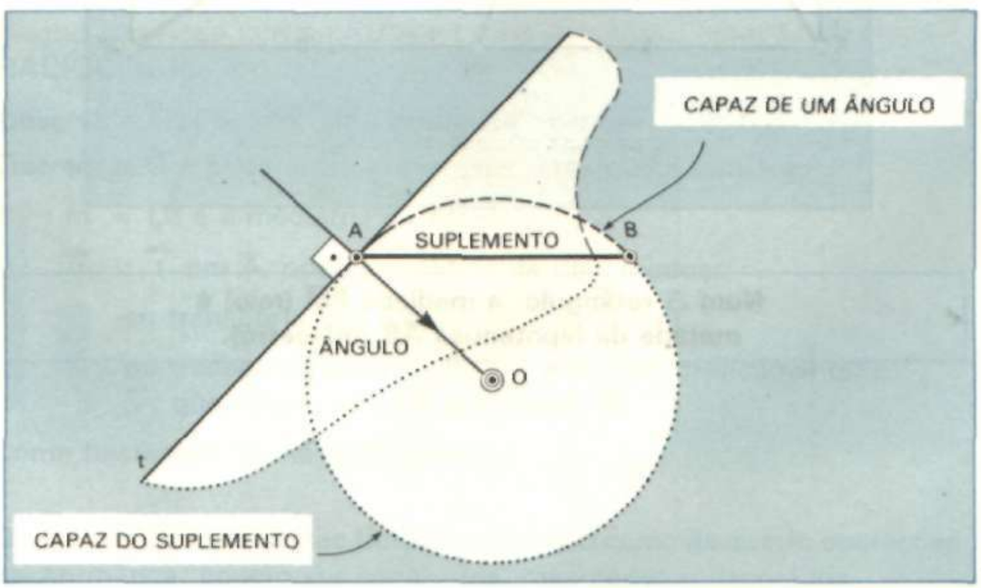
Na Mesopotâmia, muito antes dos gregos Tales, Pitágoras e Euclides, os babilônios já conheciam essa propriedade; convém você também saber...

357 **E para $\hat{a}$ obtuso ($> 90°$)?**

Tanto faz $\hat{a}$ ser agudo, reto ou obtuso;
a construção é exatamente a mesma:

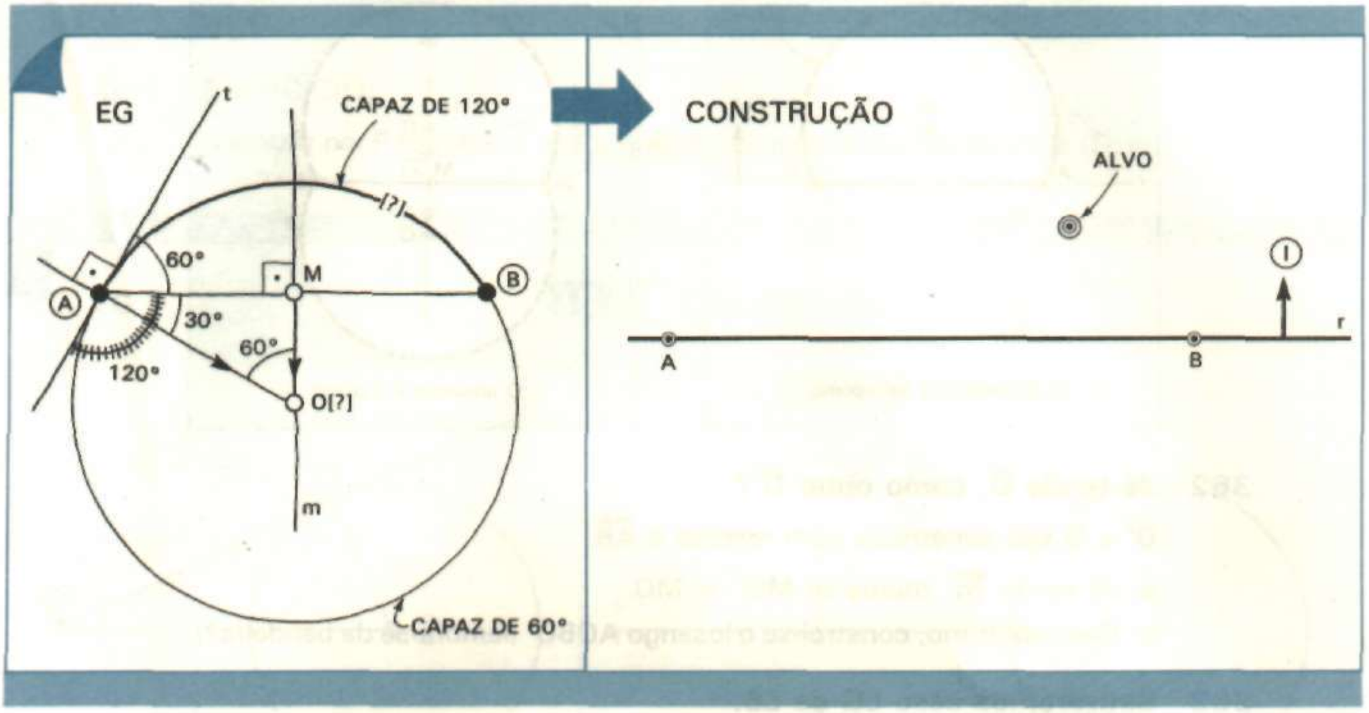


358 **"Leia" o desenho abaixo:**



359 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rI}$, construa em $\overline{AB}$ o arco capaz de 120°.



No cérebro, a visão e o raciocínio estão muito entrosados. Se enxergarmos entenderemos melhor.

Observe o EG acima e veja (raciocine) que:

a. FIGURAS DETERMINADAS:

Dadas: $\overline{A}$ e $\overline{B}$

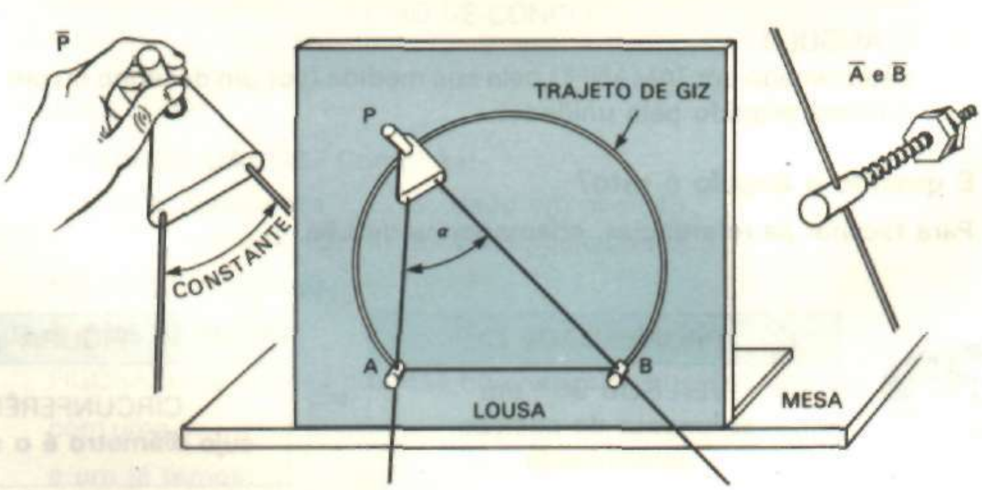
Obtíveis: $\overline{M}$, $\overleftrightarrow{m}$,... mas queremos $\overline{O}$ [?].

b. MEDIDAS DETERMINADAS:

Dada: 120°

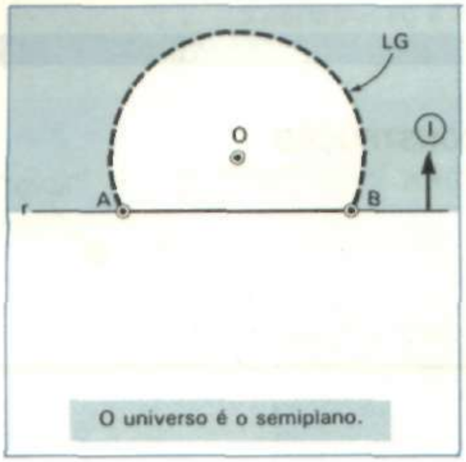
Obtíveis: 60° e 30° (são as que convém obter).

360 **Depois de termos "caçado o arco pedido", vamos assistir a um desenho animado:**

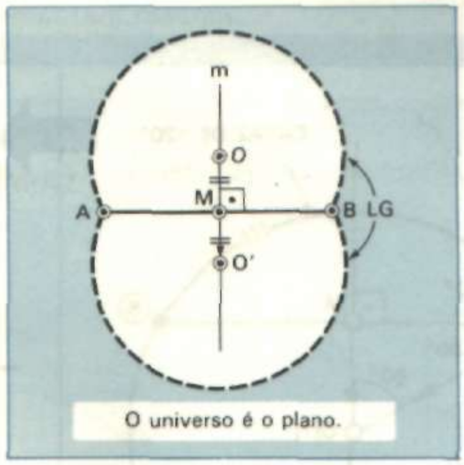


361 **O arco capaz é um lugar geométrico?**

No semiplano $\overrightarrow{rI}$, sim; mas, no plano todo, o LG é o PAR de arcos capazes:



O universo é o semiplano.



O universo é o plano.

362 **Já tendo $\overline{O}$, como obter $\overline{O'}$?**

$\overline{O'}$ e $\overline{O}$ são simétricos com relação à $\overleftrightarrow{AB}$.

a. Já tendo $\overleftrightarrow{m}$, marca-se MO' = MO.

b. Caso contrário, constrói-se o losango AOBO' (lembra-se da bandeira?).

363 **Batizaremos esse LG de L5.**

É mais um LG — que faz parte da TM — que convém decorar.

L5

PROPRIEDADE C		FIGURA φ
VER um **segmento determinado sob ângulo determinado.**	⟺	**PAR DE ARCOS CAPAZES**

364 **Determinados como?**

- SEGMENTO
  determinado (ou dado ou obtido) em POSIÇÃO, no plano de desenho e

- O ÂNGULO
  determinado em TAMANHO pela sua medida (por um desenho ou um *número seguido pela unidade*).

365 **E quando o ângulo é reto?**

Para facilitar as referências, chamaremos de L5a.

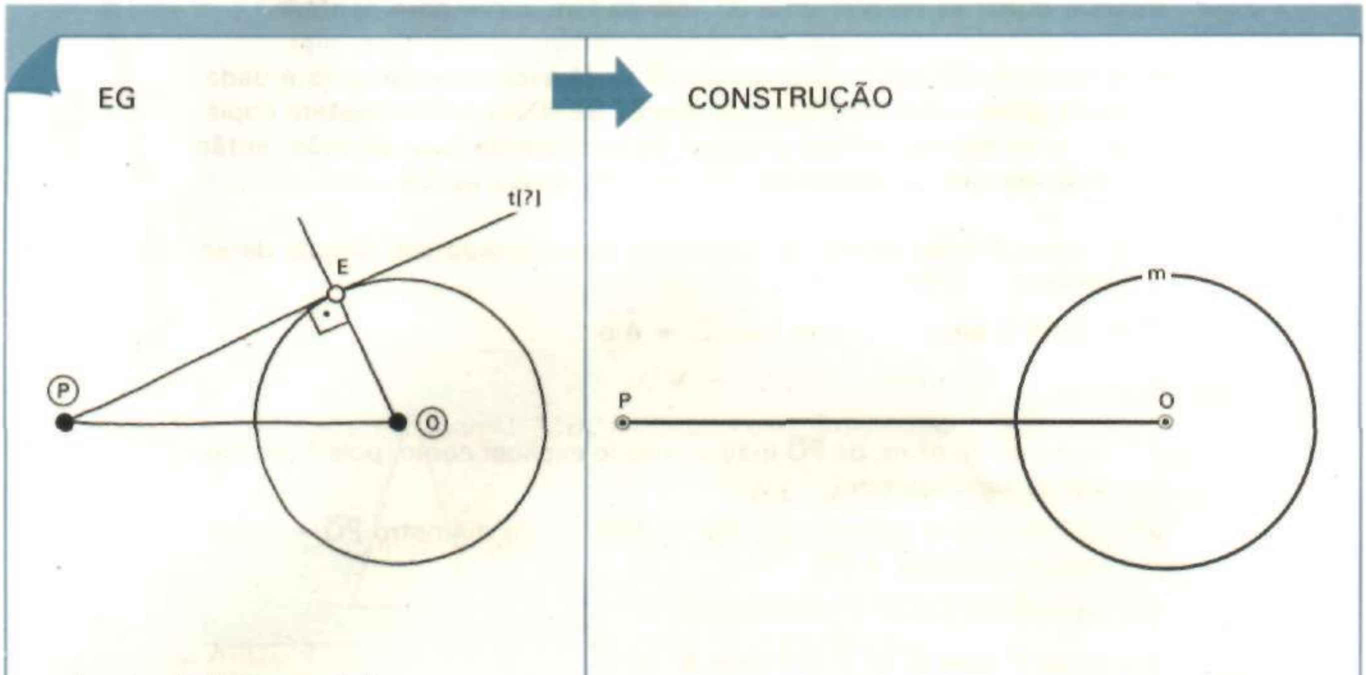
L5a

PROPRIEDADE C		FIGURA φ
VER SOB **90°** um **segmento de posição determinada.**	⟺	CIRCUNFERÊNCIA **cujo diâmetro é o segmento.**

366 Vamos agora retomar a nossa viagem pela estrada principal e sempre contando com nossos "anjos da guarda", MF e LG, para nos guiar na missão de caçadores de pontos escondidos ("latentes", invisíveis) no plano de desenho; haveremos de "matá-los", "revelando-os" e tornando-os visíveis!...

367 EXERCÍCIO:

Conduzir por $\overline{P}$ as retas $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$, que são tangentes à circunferência ($\overline{O}$; m).



A relação "tangência" é indicada pelo ângulo reto.

"Mais vale ensinar a pescar do que dar um peixe."
Provérbio chinês.

> Cada problema é um pretexto para mostrar
> COMO SE CONCLUI.

368 RACIOCÍNIO:

Fio da meada.

a. **QUAIS OS DADOS**? Complete:

FIGURAS: segmento ...., dado em posição .
circunf. ($\overline{O}$; m) também posicionada.

RELAÇÃO: tangência.

b. **O QUE SE QUER**?

FIGURA: uma (tantas quantas houver) reta, que só pode ser traçada com uma .... e, para isso, precisamos ajustá-la em dois .... e um já temos: ....

A régua não é automática... Nós é que precisamos encostá-la em 2 pontos.

c. Qual ponto particular convém procurar?

R: ....

d. Como se procura um ponto?

ou COPIANDO duas .... que o contêm

ou ACHANDO duas .... geométricas que definem um LG.

369 **Bastam duas; se houver uma 3.ª, ela poderá servir para conferir.**

370 e. A circunf. ($\overline{O}$; m) — que contém $\overline{E}$ — já está copiada, pois é dada. Você já viu outra linha que contém $\overline{E}$? Se já viu, então bastará copiá-la... e se não viu, então procure! Se o problema tiver solução, então há de ser um LG; pesquise um por um, do L1 ao L5...

371 f. O ponto $\overline{E}$ está vendo um segmento determinado sob ângulo determinado?

R: Sim! E vê .... sob .... ⇒ é o ....

372 ROTEIRO:

1.º) Acha-se $\overline{M}$, pt.m. de $\overline{PO}$ (não é preciso explicar como, pois é um problema fundamental).

2.º) Constrói-se a circunf. ($\overline{M}$; MP = MO) — de diâmetro $\overline{PO}$ —; convencionaremos: $\phi\ \overline{PO}$.

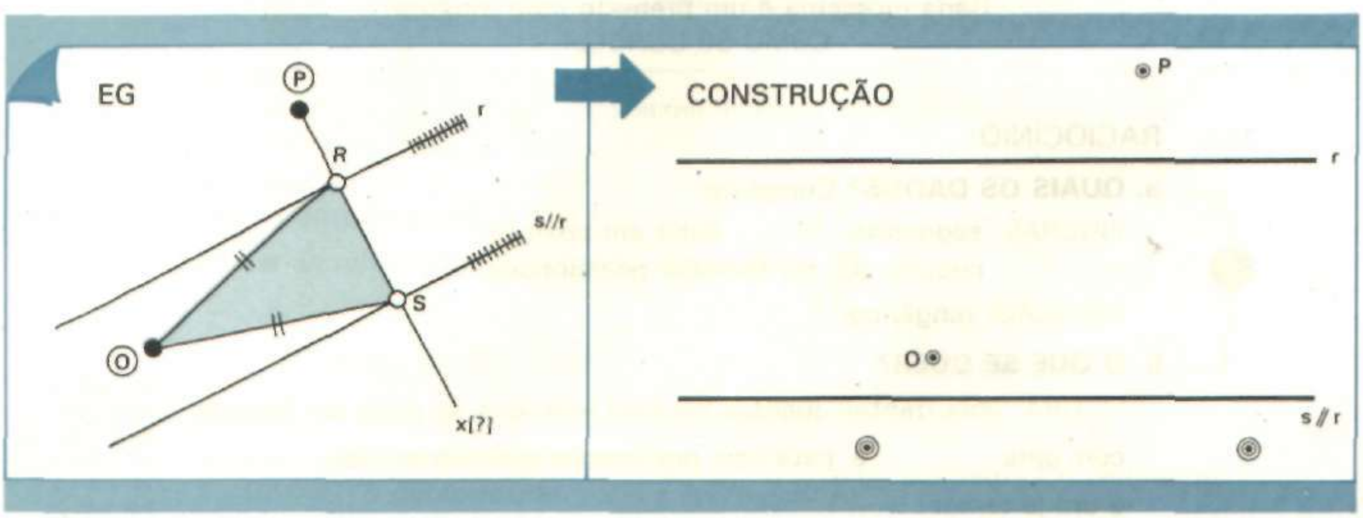
3.º) Acham-se $\overline{E}$ e $\overline{E'}$ (''clandestino'').

4.º) Ligar $\overline{P}$ com $\overline{E}$ ⇒ $\overleftrightarrow{t}$ e $\overline{P}$ com $\overline{E'}$ ⇒ $\overleftrightarrow{t'}$.

373 No próximo exercício, leia apenas o enunciado e tente resolver sozinho, antes de ler o restante. Você precisa andar de bicicleta sozinho...

374 EXERCÍCIO:

Traçar por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$ que encontra $\overleftrightarrow{r}$ em $\overline{R}$ e $\overleftrightarrow{s}$ em $\overline{S}$, de modo que OR = OS.



375 ORIENTAÇÃO (dos autores):

a. Para desenhar o EG, começamos desenhando um $\triangle ORS$ isósceles genérico e depois acrescentamos os dados: $\overline{O}$, $\overline{P}$, $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$ e indicamos visualmente a igualdade OR = OS.

Essa igualdade obrigatoriamente deverá ser útil (é uma das coisas que se sabem....); se não for útil, então será um dado supérfluo...

Um dos membros de uma quadrilha é caolho. Qual membro a polícia vai tentar prender primeiro?
Por quê? Porque ele tem uma propriedade particular.

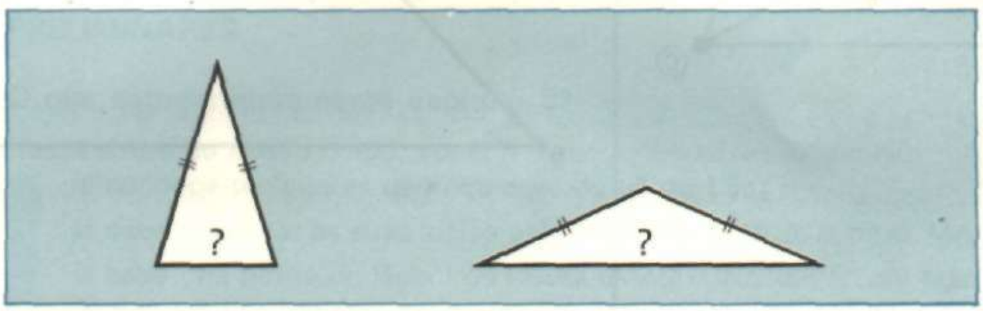
b. Você já sabe que:

1.º) Precisa achar mais um ponto de $\overleftrightarrow{x}$.

2.º) Não adiantará procurar pontos genéricos; como obtê-los se não têm propriedades que os distinguem dos outros? De $\overline{R}$ e de $\overline{S}$ vimos uma só propriedade: $\overline{R}$ está em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{S}$ está em $\overrightarrow{s}$. Esse é o busílis: *QUAL PONTO DE $\overleftrightarrow{x}$ PROCURAR?*

376 RACIOCÍNIO:

O que será que um $\triangle$ isósceles genérico tem e que os triângulos não isósceles não têm?



Vamos pensar?

Em classe é mais fácil usar este sistema de ensino.

Há de ser uma propriedade ligada a um ponto de $\overleftrightarrow{x}$, pois é isso que queremos...

Se você já achou, então pare de ler... mas, se não achou:

Não queira lembrar de frases, fórmulas... use o seu discernimento, "leia" o desenho.

377 Se você não "bolou" este, "bolará" outros; este curso ainda não terminou...

378 $\overline{M}$, pt.m. da base $\overline{RS}$ do $\triangle$ isósceles é o único ponto de $\overleftrightarrow{x}$ que pode ser — de início — obtido (desenhe-o no EG):

Pt.m.: ponto médio.

ROTEIRO:

$\overline{M}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Eqüidista de } \overleftrightarrow{r} \text{ e de } \overleftrightarrow{s} \Rightarrow \text{L4a.} \\ \text{b. Vê } \overline{OP} \text{ sob } 90° \Rightarrow \text{L5a.} \end{cases}$

Execute a construção e acerte os alvos.

379 Você está gostando dos desafios? Então tente sozinho o próximo.

c. **Qual ponto particular convém procurar?**

R: ....

d. Como se procura um ponto?

ou COPIANDO duas .... que o contêm

ou *ACHANDO* duas .... geométricas que definem um LG.

369 **Bastam duas; se houver uma 3.ª, ela poderá servir para conferir.**

370 e. A circunf. ($\overline{O}$; m) — que contém $\overline{E}$ — já está copiada, pois é dada. Você já viu outra linha que contém $\overline{E}$? Se já viu, então bastará copiá-la... e se não viu, então procure! Se o problema tiver solução, então *há de ser um LG; pesquise um por um, do L1 ao L5...*

371 f. O ponto $\overline{E}$ está vendo um segmento determinado sob ângulo determinado?

R: Sim! E vê .... sob .... ⇒ é o ....

372 ROTEIRO:

1.º) Acha-se $\overline{M}$, pt.m. de $\overline{PO}$ (não é preciso explicar como, pois é um problema fundamental).

2.º) Constrói-se a circunf. ($\overline{M}$; MP = MO) — de diâmetro $\overline{PO}$ —; convencionaremos: $\phi\ \overline{PO}$.

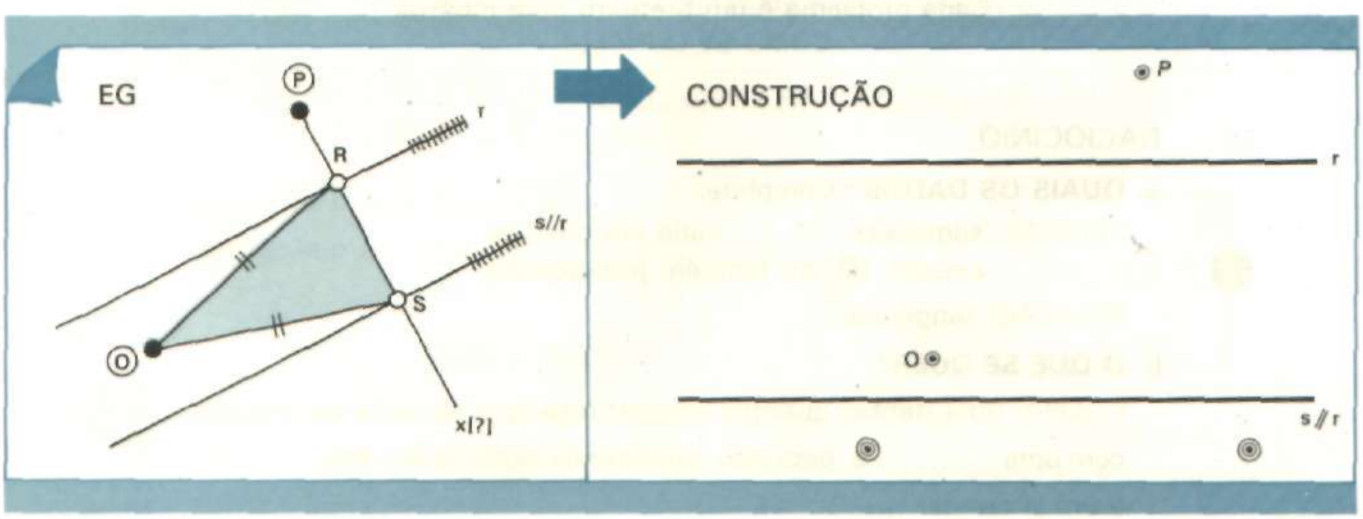
3.º) Acham-se $\overline{E}$ e $\overline{E}'$ ("clandestino").

4.º) Ligar $\overline{P}$ com $\overline{E}$ ⇒ $\overleftrightarrow{t}$ e $\overline{P}$ com $\overline{E}'$ ⇒ $\overleftrightarrow{t}'$.

373 No próximo exercício, leia apenas o enunciado e tente resolver sozinho, antes de ler o restante. Você precisa andar de bicicleta sozinho...

374 EXERCÍCIO:

Traçar por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$ que encontra $\overleftrightarrow{r}$ em $\overline{R}$ e $\overleftrightarrow{s}$ em $\overline{S}$, de modo que OR = OS.



375 ORIENTAÇÃO (dos autores):

a. Para desenhar o EG, começamos desenhando um $\triangle ORS$ isósceles genérico e depois acrescentamos os dados: $\overline{O}$, $\overline{P}$, $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$ e indicamos visualmente a igualdade OR = OS.

Essa igualdade obrigatoriamente deverá ser útil (é uma das coisas que se sabem....); se não for útil, então será um dado supérfluo...

Um dos membros de uma quadrilha é caolho. Qual membro a polícia vai tentar prender primeiro? Por quê? Porque ele tem uma propriedade particular.

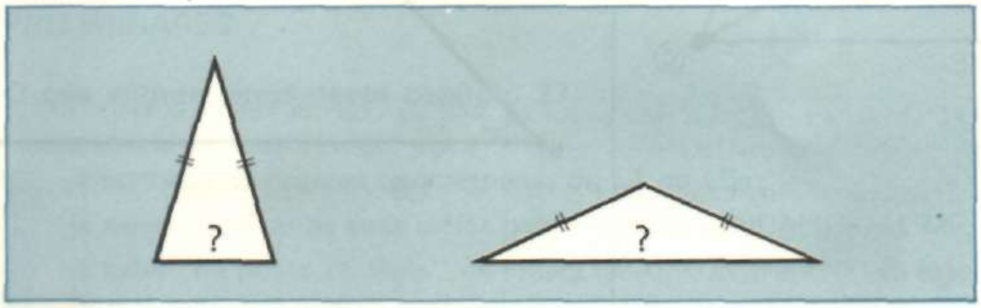
b. Você já sabe que:

1.º) Precisa achar mais um ponto de $\overleftrightarrow{x}$.

2.º) Não adiantará procurar pontos genéricos; como obtê-los se não têm propriedades que os distinguem dos outros? De $\overline{R}$ e de $\overline{S}$ vimos uma só propriedade: $\overline{R}$ está em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{S}$ está em $\overrightarrow{s}$. Esse é o busílis: QUAL PONTO DE $\overleftrightarrow{x}$ PROCURAR?

376 RACIOCÍNIO:

O que será que um $\triangle$ isósceles genérico tem e que os triângulos não isósceles não têm?



Vamos pensar?

Em classe é mais fácil usar este sistema de ensino.

Há de ser uma propriedade ligada a um ponto de $\overleftrightarrow{x}$, pois é isso que queremos...

Se você já achou, então pare de ler... mas, se não achou:

Não queira lembrar de frases, fórmulas... use o seu discernimento, ''leia'' o desenho.

377 Se você não ''bolou'' este, ''bolará'' outros; este curso ainda não terminou...

378 $\overline{M}$, pt.m. da base $\overline{RS}$ do $\triangle$ isósceles é o único ponto de $\overleftrightarrow{x}$ que pode ser — de início — obtido (desenhe-o no EG):

Pt.m.: ponto médio.

ROTEIRO:

$$\overline{M}\ [?] \begin{cases} \text{a. Eqüidista de } \overleftrightarrow{r} \text{ e de } \overleftrightarrow{s} \Rightarrow \text{L4a.} \\ \text{b. Vê } \overline{OP} \text{ sob } 90^\circ \Rightarrow \text{L5a.} \end{cases}$$

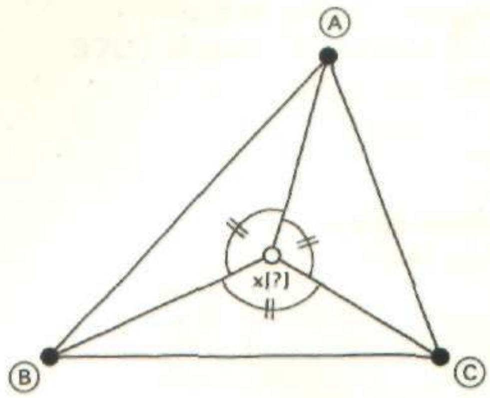
Execute a construção e acerte os alvos.

379 Você está gostando dos desafios? Então tente sozinho o próximo.

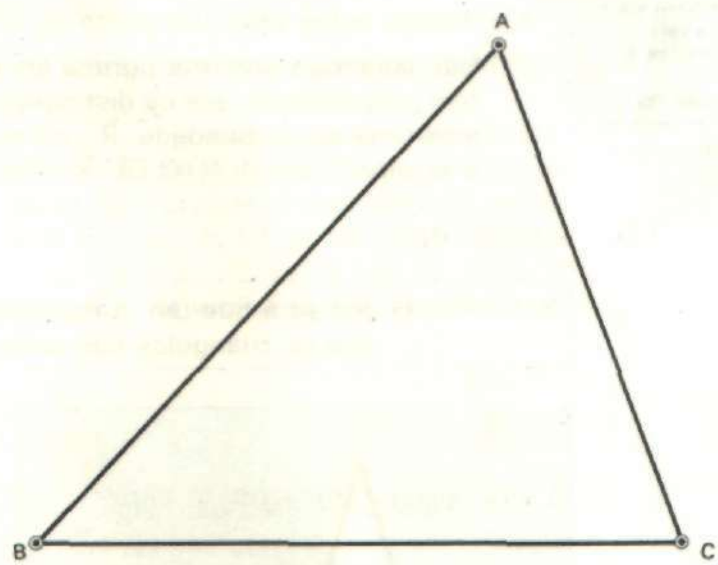
380 EXERCÍCIO:

Obtenha o ponto $\overline{X}$ que vê os três lados do $\triangle$ABC sob ângulos congruentes entre si.

EG



CONSTRUÇÃO



381 ORIENTAÇÃO (complete para aprender o MF):

DADOS:

FIGURAS: pontos ....

retas ....

RELAÇÕES: congruência de três ângulos; quais ângulos?

R: ....

MEDIDAS: nenhuma...; nenhuma?!...

382 ROTEIRO:

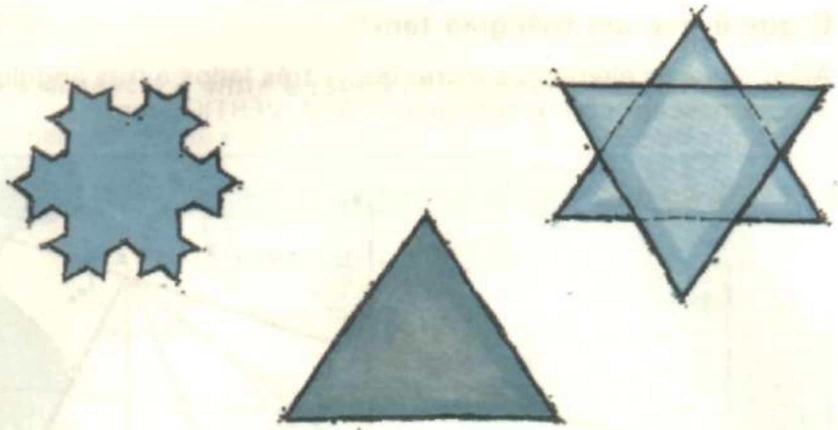
$\overline{X}$ [?] { a. Vê $\overline{BC}$ sob .... ⇒ L ....
b. Vê $\overline{AB}$ sob .... ⇒ L ....

Para conferir, é melhor transportar um dos ângulos sobre os outros dois; *construir o 3.º arco capaz é muito trabalhoso.*

R: BX = ...57.... mm.

CAPÍTULO

3



TRIÂNGULOS

I PRELIMINARES

383 **O que estudaremos neste capítulo 3?**

Nesta altura do nosso curso, você

já conhece os lugares geométricos, do L1 ao L5a; $\notin$: não pertence

já sabe organizar as suas idéias pelo MÉTODO FUNDAMENTAL MF;

já sabe "na ponta do lápis" os PROBLEMAS FUNDAMENTAIS (são 8) e já conhece muitas propriedades das figuras geométricas.

PROBLEMAS FUNDAMENTAIS:

1º) $\perp$ por $\overline{P} \notin \overleftrightarrow{r}$.

2º) $\perp$ por $\overline{M} \in \overleftrightarrow{r}$.

3º) Bissetriz.

4º) $/\!\!/$ por $\overline{A} \notin \overleftrightarrow{r}$.

5º) Transporte de $\hat{a}$.

6º) Dividir $\overline{AB}$.

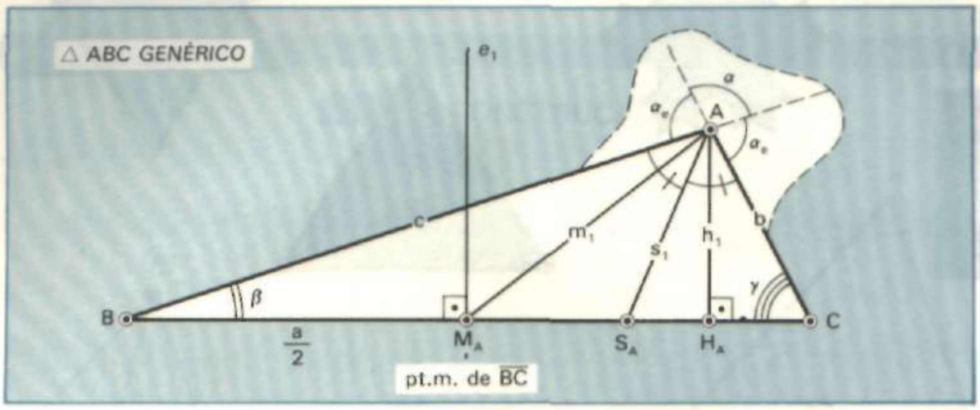
7º) Ângulos n. 7,5°.

8º) Arco capaz.

384 Neste capítulo 3 faremos um estudo específico dos triângulos. Você aprenderá novas propriedades e poderá praticar mais a aplicação do MF e dos LGs em novos problemas.

385 **O que é que um triângulo tem?**

Além dos seis elementos inerentes — três lados e três ângulos internos — que nascem com o triângulo, CADA VÉRTICE tem:



Ceviana é qualquer segmento com uma extremidade num vértice e com a outra (pé) no lado oposto.

ÂNGULOS EXTERNOS:

Cada vértice tem dois; como têm a mesma medida, costuma-se dizer: "o" ângulo externo α_e.

Chamemos de *mediana ao segmento* $\overline{AM_A}$ e à sua medida $AM_A = m_1$.

MEDIANA: $AM_A = m_1$ ($BM_B = m_2$ e $CM_C = m_3$).

BISSETRIZ: $AS_A = s_1$ ($BS_B = s_2$ e $CS_C = s_3$).

ALTURA: $AH_A = h_1$ ($BH_B = h_2$ e $CH_C = h_3$).

Dizendo-se apenas bissetriz, subentende-se que seja a de um ângulo interno.

Idem, para os outros elementos.

Estas três — cevianas particulares — são segmentos, mas:

MEDIATRIZ (L3): é reta $\overleftrightarrow{e_1}$, $\overleftrightarrow{e_2}$ e $\overleftrightarrow{e_3}$).

PÉ: os pontos M_A, S_A e H_A; M_B, S_B e H_B;... chamam-se **pés** das respectivas cevianas.

r_i; r_c: raios da inscrita e da circunscrita.

Inscrita: tangente aos lados.
Circunscrita: contém os vértices.

386 **O que há de notável sobre as mediatrizes?**

O ponto $\overline{E}$, comum a duas quaisquer, está também na 3ª. Simbolicamente:

Imagine o ponto $\overline{E}$.

$$\boxed{\overline{E} = \overleftrightarrow{e_1} \cap \overleftrightarrow{e_2}\} \text{ H.} \Rightarrow \text{T.} \{\overline{E} \in \overleftrightarrow{e_3}}$$

387 **Será mesmo?...**

SE você aceitou propriedades anteriores,
ENTÃO vai ter que aceitar a tese.

Em DG não estamos obedecendo à ordenação correta da Geometria.

Quer confirmar isso? Vamos lá...

Partamos de H., que chegaremos a T.:

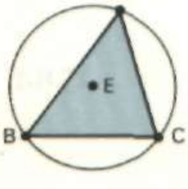
Veja bem quem é $\overleftrightarrow{e_1}$, quem é $\overleftrightarrow{e_2}$ e quem é $\overleftrightarrow{e_3}$.

$$\overline{E} = \overleftrightarrow{e_1} \cap \overleftrightarrow{e_2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{E} \in \overleftrightarrow{e_1} \overset{[L3]}{\Longrightarrow} EB = EC \\ \overline{E} \in \overleftrightarrow{e_2} \overset{[L3]}{\Longrightarrow} EB = EA \end{array}\right\} \Rightarrow EC = EA \overset{[L3]}{\Longrightarrow} \overline{E} \in \overleftrightarrow{e_3}$$

c.q.d.

388 **O ponto $\overline{E}$ tem nome?**

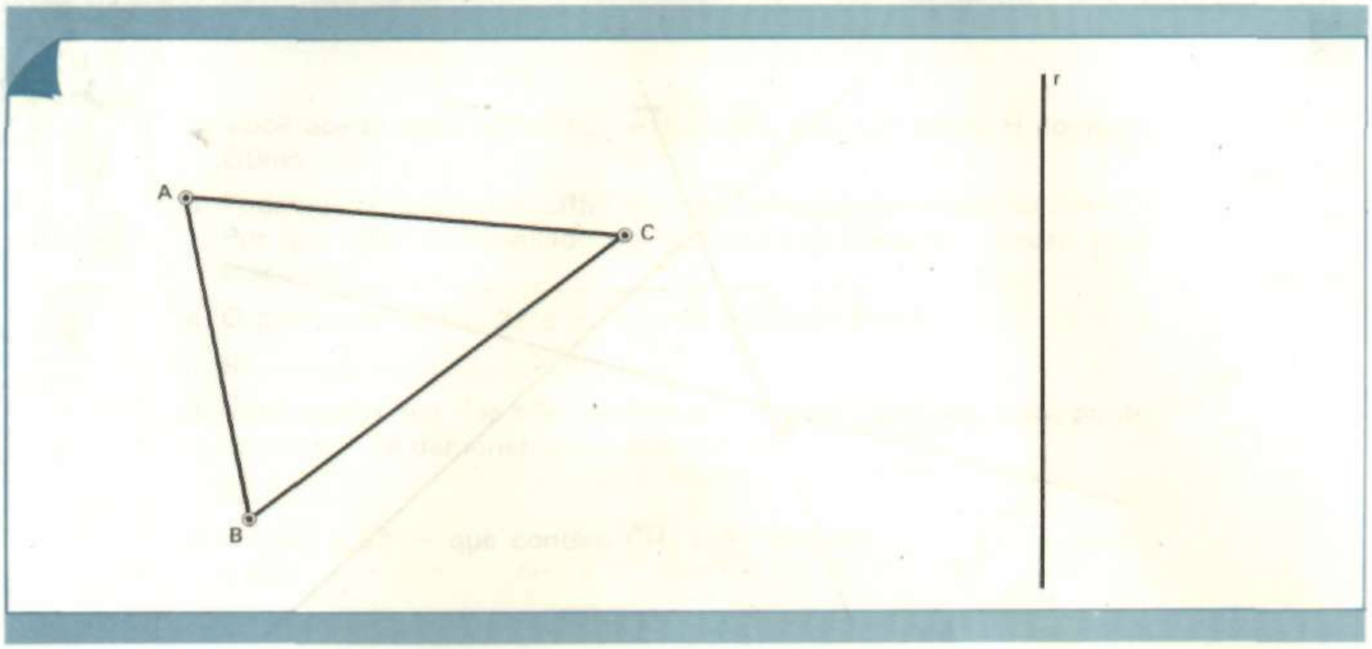
CIRCUNCENTRO, centro da circunf. circunscrita, aquela que contém os três vértices.



389 EXERCÍCIO:

Obtenha a distância d entre a reta $\overleftrightarrow{r}$ e o circuncentro $\overline{E}$ do $\triangle$ABC.

Em problemas como este é desnecessário desenhar o EG; basta imaginá-lo.



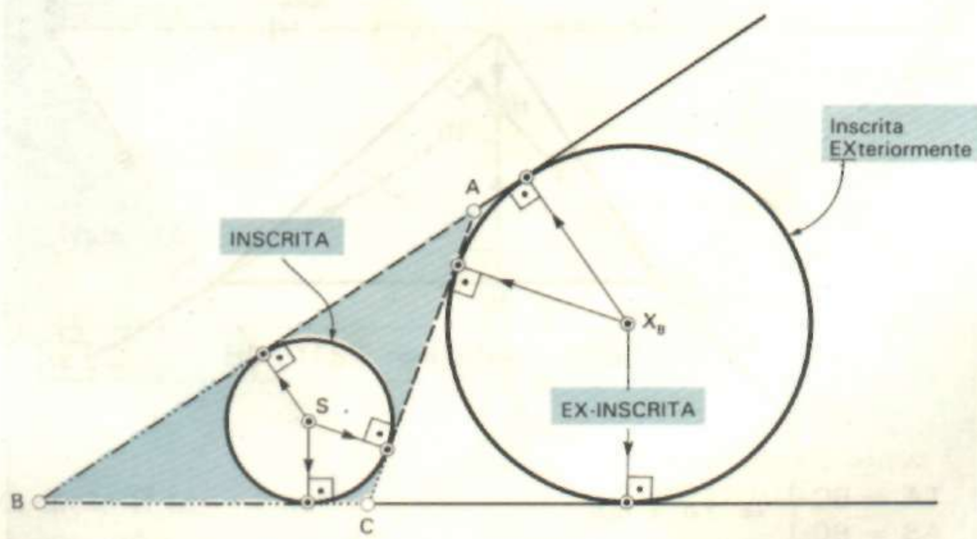
R: ...84... mm.

390 Qual a notabilidade das bissetrizes?

Há 4 (quatro e somente quatro) pontos: $\overline{S}$, $\overline{X}_A$, $\overline{X}_B$ e $\overline{X}_C$ eqüidistantes (L4) das retas que contêm os lados de um $\triangle$; a demonstração se assemelha à anterior.

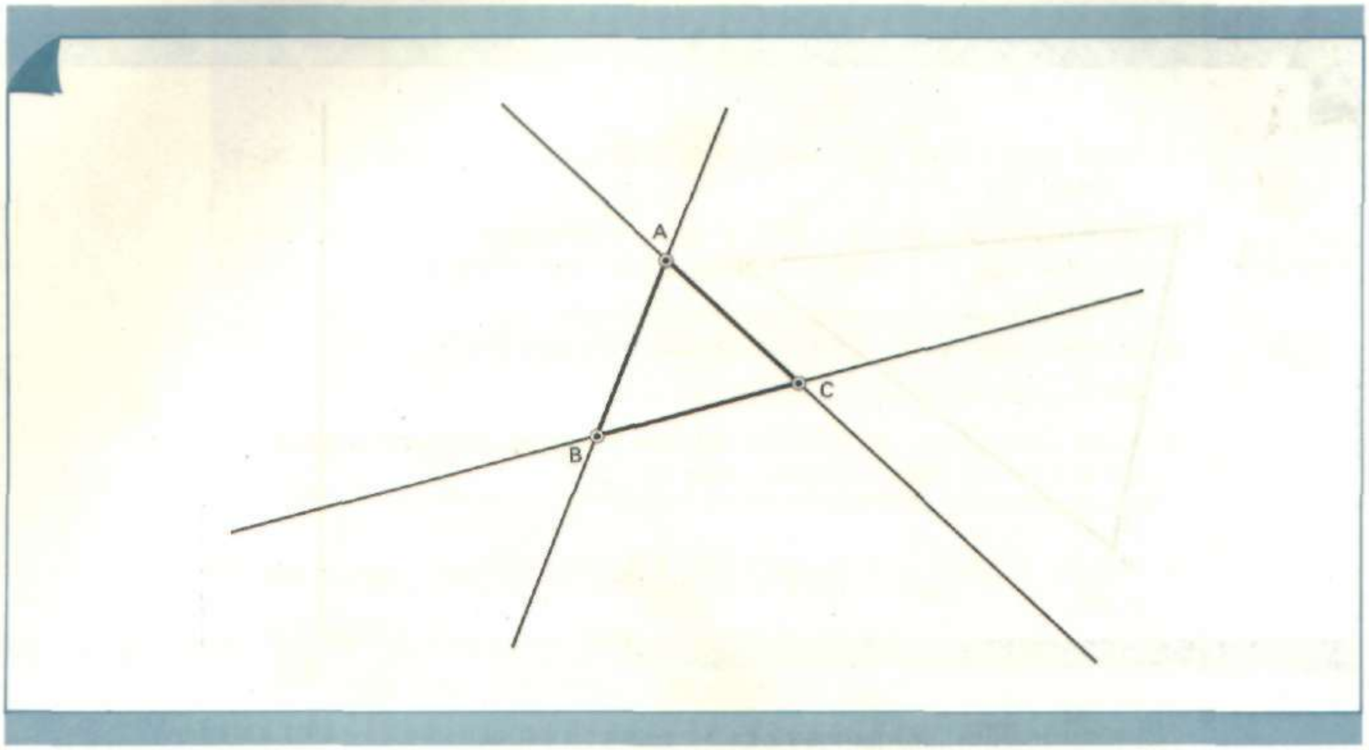
Por que a letra S para as bissetrizes? Pronuncie "bissetrizes" em voz alta que você ouvirá sibilos e entenderá por quê...

Atente para a "voz" do desenho:



391 EXERCÍCIO:

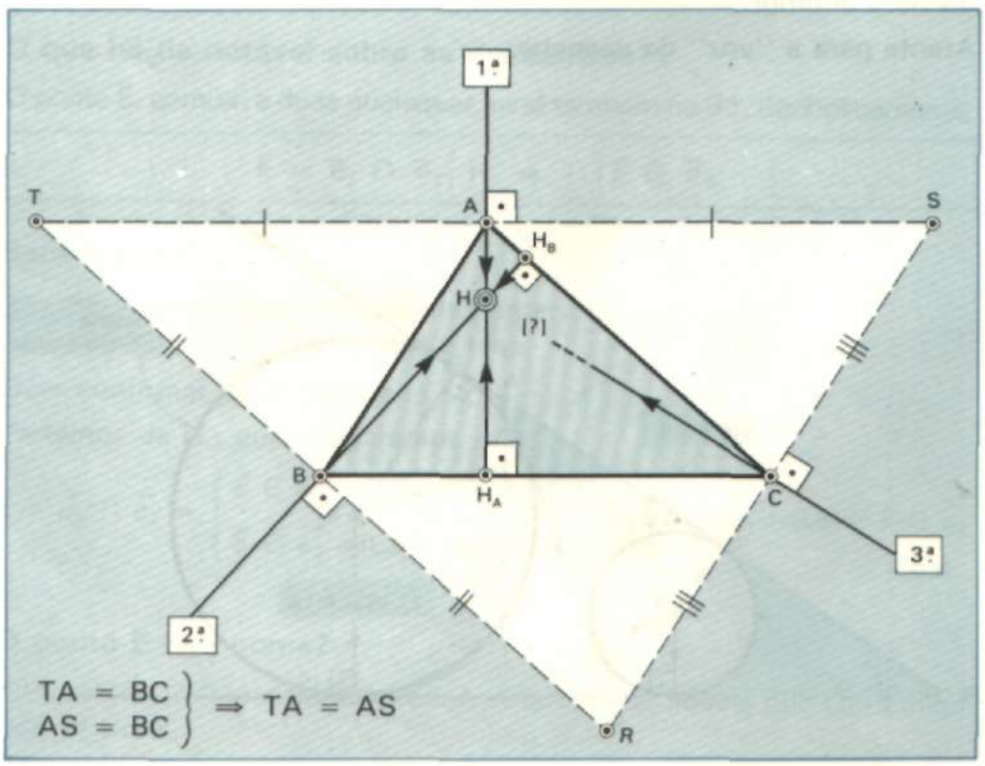
Traçar as quatro circunferências tangentes às três retas dadas abaixo.



392 As alturas têm um único ponto comum?

As retas (1.ª, 2.ª e 3.ª) que as contêm, sim.

Altura, em francês, escreve-se "hauteur".



393 Fui aconselhado a sempre perguntar:

POR QUÊ?

a. Você aceita que, no $\triangle ABC$, $\overleftrightarrow{AH_A}$ e $\overleftrightarrow{BH_B}$ têm um ponto $\overline{H}$ comum? Ótimo.

b. Podemos considerar o $\triangle RST$ com os lados paralelos aos do $\triangle ABC$? Por que não? O Postulado de Euclides nos garante... Agora você responde:

NÃO DÁ PARA DISCUTIR COM QUEM SABE GEOMETRIA...

c. O que as retas 1.ª, 2.ª e 3.ª são do triângulo RST?

R: ....

d. Você aceita que "as três mediatrizes do $\triangle RST$ têm um único ponto comum"? Já demonstramos isso (n.º 387)...

R: ....

e. ENTÃO a 3.ª — que contém $\overline{CH_C}$ (não desenhada) — passa por $\overline{H}$! c.q.d.

394 Num curso de DG, por que demonstrar?

QUEM SABE RACIOCINAR,
CONCLUI O QUE PODE SER CONCLUÍDO.

Num PROBLEMA:

DADOS $\Longrightarrow$[TM]$\Longrightarrow$ RESPOSTA

Num TEOREMA:

HIPÓTESE $\Longrightarrow$[TM]$\Longrightarrow$ TESE

"Entre espíritos iguais e postos nas mesmas condições, o que conhece Geometria é superior aos outros e possui especial vigor."

Pascal (1662-1623 = 39a.).

Em sua curta vida foi físico, matemático e escritor. Estudou a natureza humana. Disse: "o coração tem razões que a razão desconhece". Inventou uma máquina de calcular...

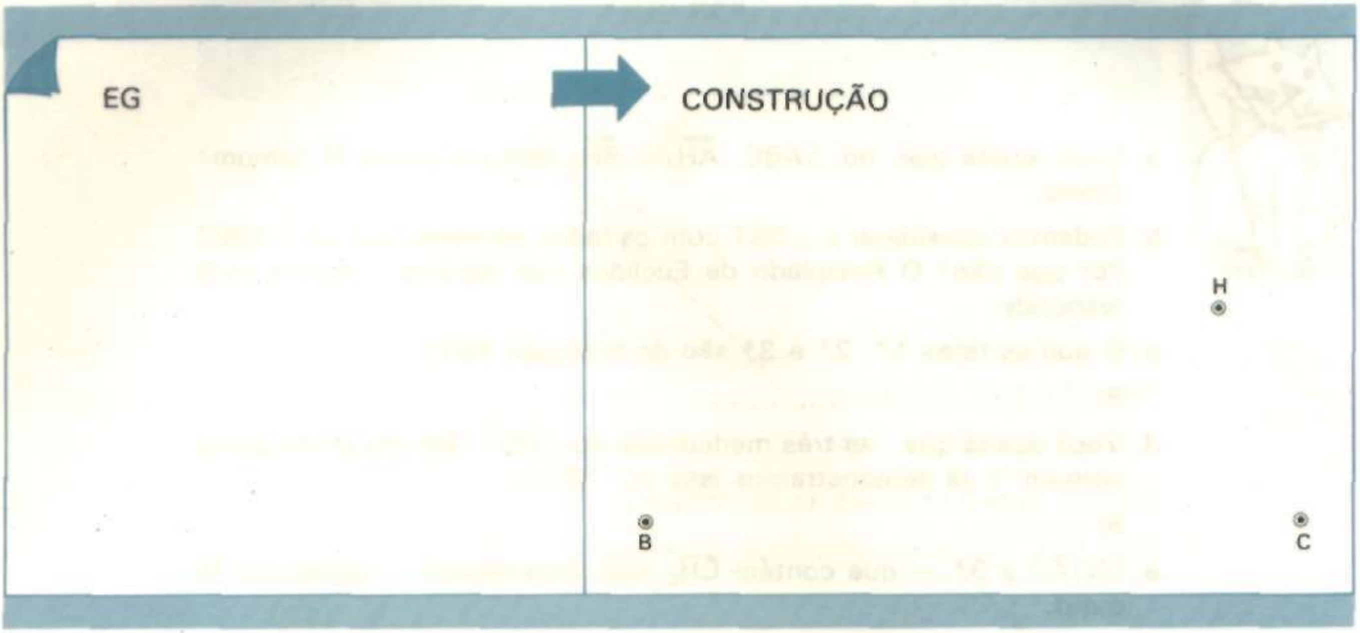
395 O ponto $\overline{H}$ tem nome?

"Orto" indica ângulo reto (ortogonal).

Ortocentro.

396 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle ABC$, dados os vértices $\overline{B}$ e $\overline{C}$ e seu ortocentro $\overline{H}$.



Simplesmente copie o EG.

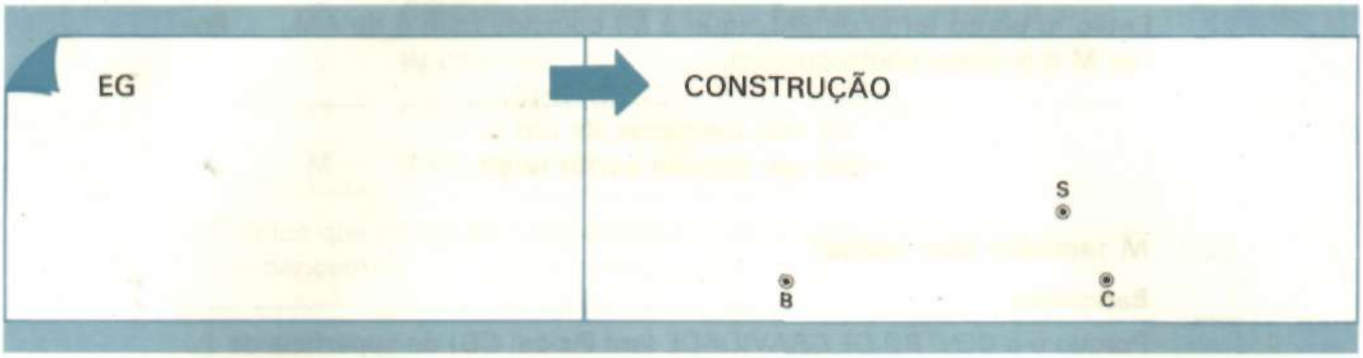
R: BA = ...78..... mm.

397 EXERCÍCIO:

Obter o ortocentro $\overline{H}$ do $\triangle ABC$, do qual temos $\overline{M}_A$, $\overline{M}_B$ e $\overline{M}_C$, pontos médios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

398 EXERCÍCIO:

Obter o vértice $\overline{A}$ do $\triangle ABC$, do qual são dados $\overline{B}$, $\overline{C}$ e o incentro $\overline{S}$.



Desenhe o EG e copie-o.

R: BA = ...65....... mm.

399 **Vamos agora estudar as medianas?**

Sim, mas depois de uma pílula geométrica.

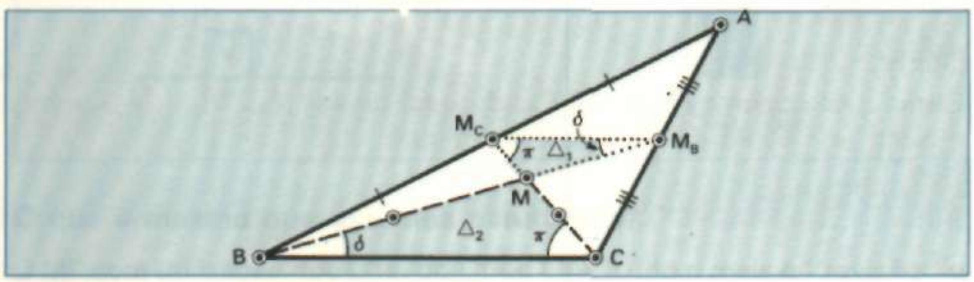
400 NOMENCLATURA:

401

Numa tradução livre, a palavra

Teorema

em grego significa: Agora "eu vi"! (com espanto). Pensem nisso...



Os ângulos π são A.I., bem como os ângulos δ. (n.º 300)

TEOREMA (complete):

a. Tales ═[n.º 257]⇒ $M_CM_B = \frac{1}{2}$ ....

b. $\triangle_2 \sim \triangle_1$ na razão $(\triangle_2 : \triangle_1)$ k = ... (*)

402 c. Complete o esquema:

	OPOSTOS AO π	OPOSTOS AO δ	
LADOS DO $\triangle_2$	——	= ——	= k ═[*]⇒ ....
LADOS DE $\triangle_1$			

d. Logo: BM = 2 . ... e

CM = 2 . ...

e. Se duas ($\overline{BM_B}$ e $\overline{CM_C}$) têm o mesmo ponto terço $\overline{M}$,
Então as três têm o mesmo ponto terço $\overline{M}$.

403 **Falta pouco para ficar bem claro...**

É isso que significa o termo analogamente.

O que fizemos com $\overline{BM_B}$ e $\overline{CM_C}$ não pode ser repetido para — por exemplo — $\overline{BM_B}$ e $\overline{AM_A}$?

Então, o ponto terço de $\overline{BM_B}$ (que é $\overline{M}$) coincide com o de $\overline{AM_A}$ ... Então $\overline{M}$ é o único ponto comum.

As três medianas de um △ têm um mesmo ponto terço.

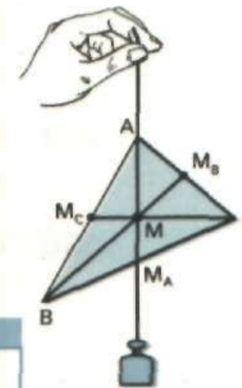
É o ponto terço mais próximo do lado do que do vértice.

404 **$\overline{M}$ também tem nome?**

Baricentro.

"Bari" significa peso, gravidade.

Porque é o CENTRO DE GRAVIDADE **(em Física: CG) da superfície do △.**



Se pendurarmos por $\overline{B}$ ou por $\overline{C}$, o fio continuará passando por $\overline{M}$. Se espetarmos um alfinete em $\overline{M}$, o triângulo ficará em equilíbrio indiferente *(na posição que o colocarmos ele ficará sem se mover)*.

405 EXERCÍCIO:

Construir um △ABC, dados:

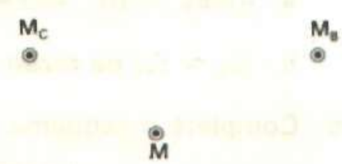
$\overline{M}$: o baricentro,

$\overline{M_B}$: o ponto médio de $\overline{AC}$ e

$\overline{M_C}$: o ponto médio de $\overline{AB}$.

EG

CONSTRUÇÃO



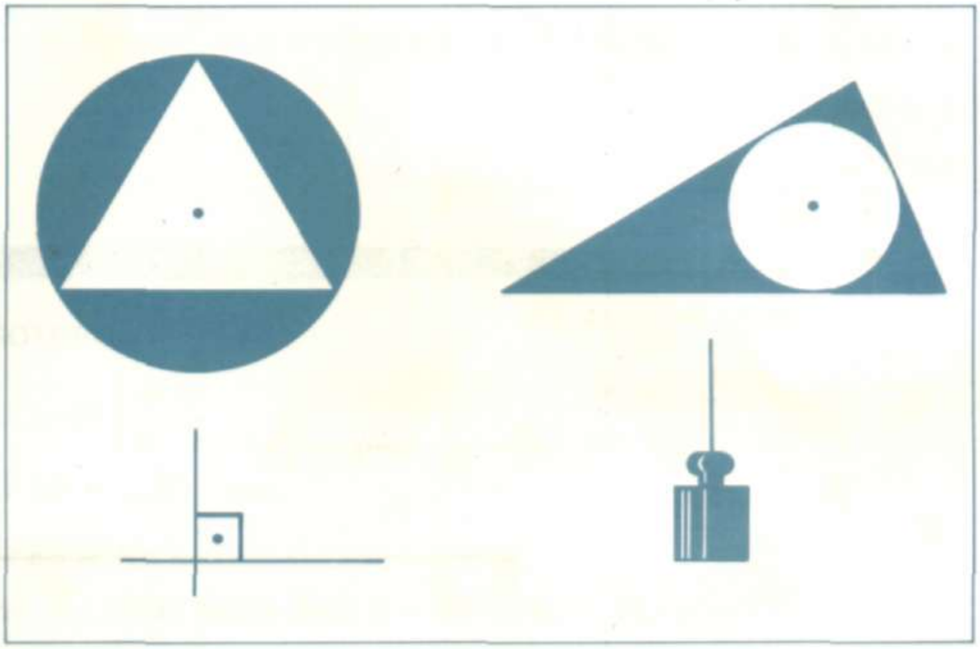
R: AC = ...67... mm.

406 Quantos centros tem um triângulo?

Além dos três ex-incentros, tem quatro centros:

$\overline{E}$	**CIRCUN-CENTRO** ⟶	**MEDIATRIZES (L3)**
$\overline{S}$	**IN-CENTRO** ⟶	**BISSETRIZES (L4)**
$\overline{H}$	**ORTO-CENTRO** ⟶	**ALTURAS**
$\overline{M}$	**BARI-CENTRO** ⟶	**MEDIANAS**

O único que divide as "respectivas" numa RAZÃO DETERMINADA (2:1) é o baricentro.



407 O que é mesmo que estamos estudando?

O MF com utilização dos LGs, do L1 ao L5a. Tudo o mais é "revisão" de Geometria.

408 Mais exercícios?

Sim; em cada um deles, copie o EG ponto por ponto e na ordem que for possível.

Se as propriedades (LG) de um ponto procurado forem evidentes, ótimo; caso contrário, pesquise-as uma por uma:

Distância determinada de ponto determinado?, etc.

Quando não der para obter o ponto que se quer, procura-se um ponto auxiliar que possa ser obtido...

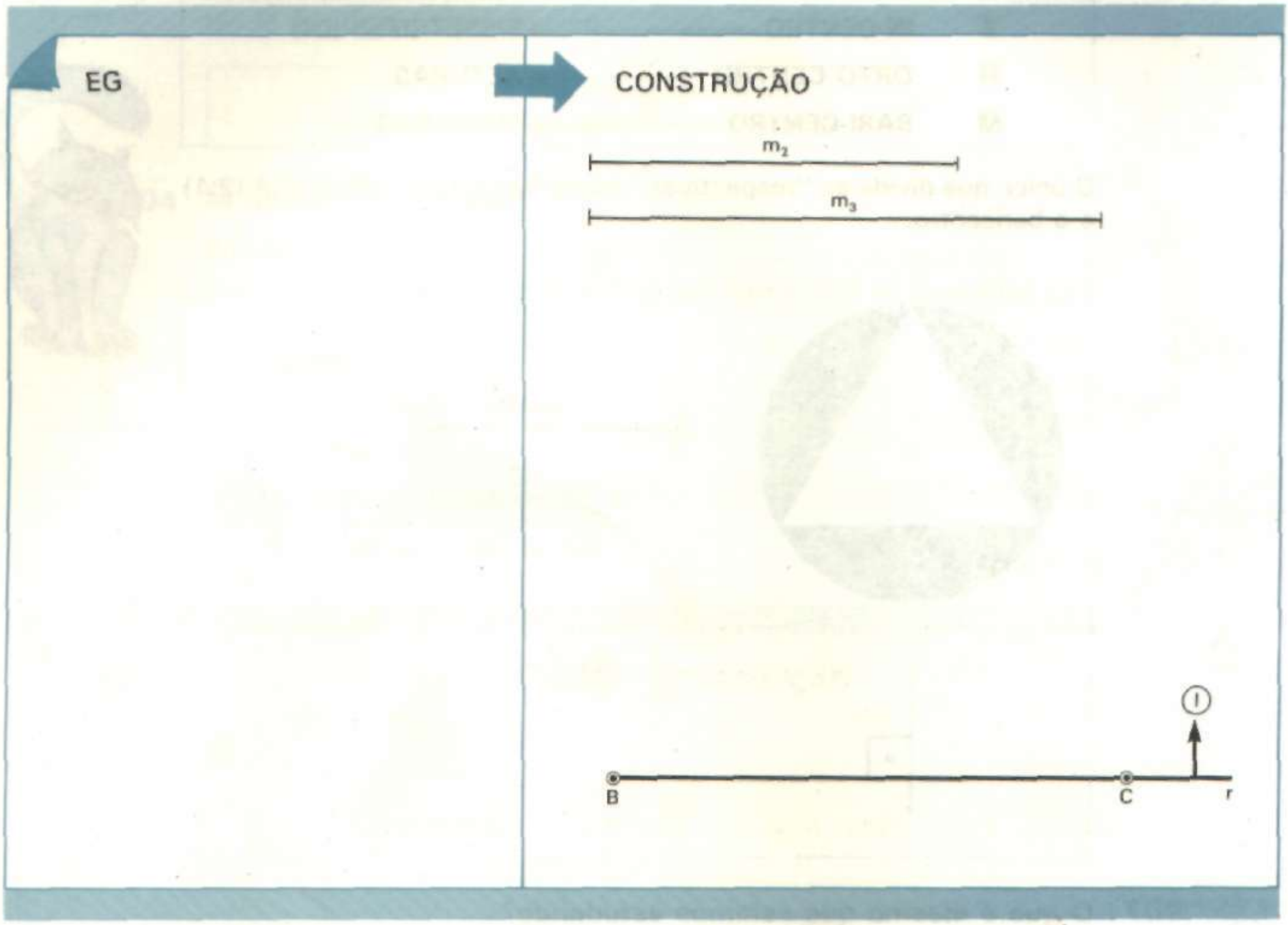
409 CONSELHO:

> À medida que for "matando" pontos auxiliares, você pode preencher as respectivas "bolinhas" e, se quiser, rodear as suas letras.

Mas isso dificultará um estudo posterior do problema.

410 EXERCÍCIO (usaremos sempre a notação do nº 385):

No semiplano $\overrightarrow{rI}$, construa o $\triangle ABC$, dados os vértices $\overline{B}$ e $\overline{C}$ e as medianas relativas aos lados não dados: m_2 e m_3.



ROTEIRO:

.... [?] $\begin{cases} \text{a. Dista } \frac{2}{3}. \text{ .... de .... } \Rightarrow \text{ L ....} \\ \text{b. Dista } \frac{2}{3}. \text{ .... de .... } \Rightarrow \text{ L ....} \end{cases}$

R: AB = ...57... mm.

411 NOTA:

A rigor é proibido – em DG – medir as medianas e computar 2/3 de cada (nº 403).

Mesmo que suas medidas tivessem sido dadas, as normas do DG mandam:

1.º) desenhar $\overline{m}_2$ e $\overline{m}_3$ com as medidas dadas e

2.º) obter os pontos terços graficamente e com régua e compasso; é o 6.º problema fundamental.

412 EXERCÍCIO:

Em $\overleftrightarrow{rl}$, construir um $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $b = 39$ mm e $m_2 = 57$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

.... [?] { a. .... ⇒ L ....
b. .... ⇒ L ....

R: AB = ...60... mm.

413 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rl}$, $\triangle ABC$ dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\beta = 30°$ e $h_1 = 28$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

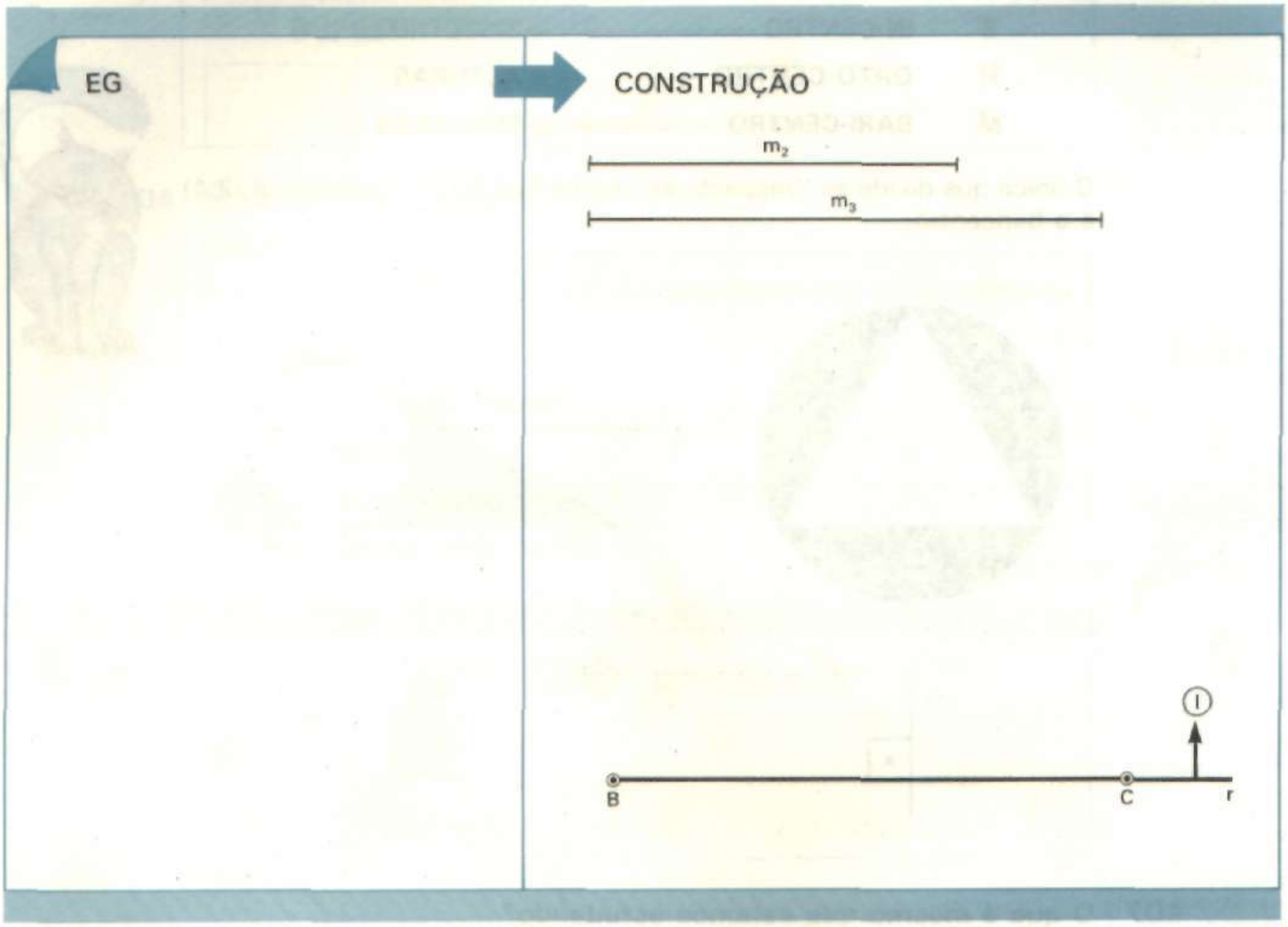
ROTEIRO:

.... [?] { a. ....
b. .... ⇒ L ....

R: AB = ...57... mm.

410 EXERCÍCIO (usaremos sempre a notação do n.º 385):

No semiplano $\overrightarrow{rI}$, construa o △ABC, dados os vértices $\overline{B}$ e $\overline{C}$ e as medianas relativas aos lados não dados: m_2 e m_3.



ROTEIRO:

.... [?] { a. Dista $\frac{2}{3}$. .... de .... ⇒ L ....
b. Dista $\frac{2}{3}$. .... de .... ⇒ L .... }

R: AB = ...57.... mm.

411 NOTA:

A rigor é proibido — em DG — medir as medianas e computar 2/3 de cada (n.º 403).

Mesmo que suas medidas tivessem sido dadas, as normas do DG mandam:

1.º) desenhar $\overline{m}_2$ e $\overline{m}_3$ com as medidas dadas e

2.º) obter os pontos terços graficamente e com régua e compasso; é o 6.º problema fundamental.

412 EXERCÍCIO:

Em $\overleftrightarrow{r}$, construir um $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $b = 39$ mm e $m_2 = 57$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

.... [?] { a. .... ⇒ L ....
b. .... ⇒ L ....

R: AB = ...60... mm.

413 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{r}$, $\triangle ABC$ dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\beta = 30°$ e $h_1 = 28$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

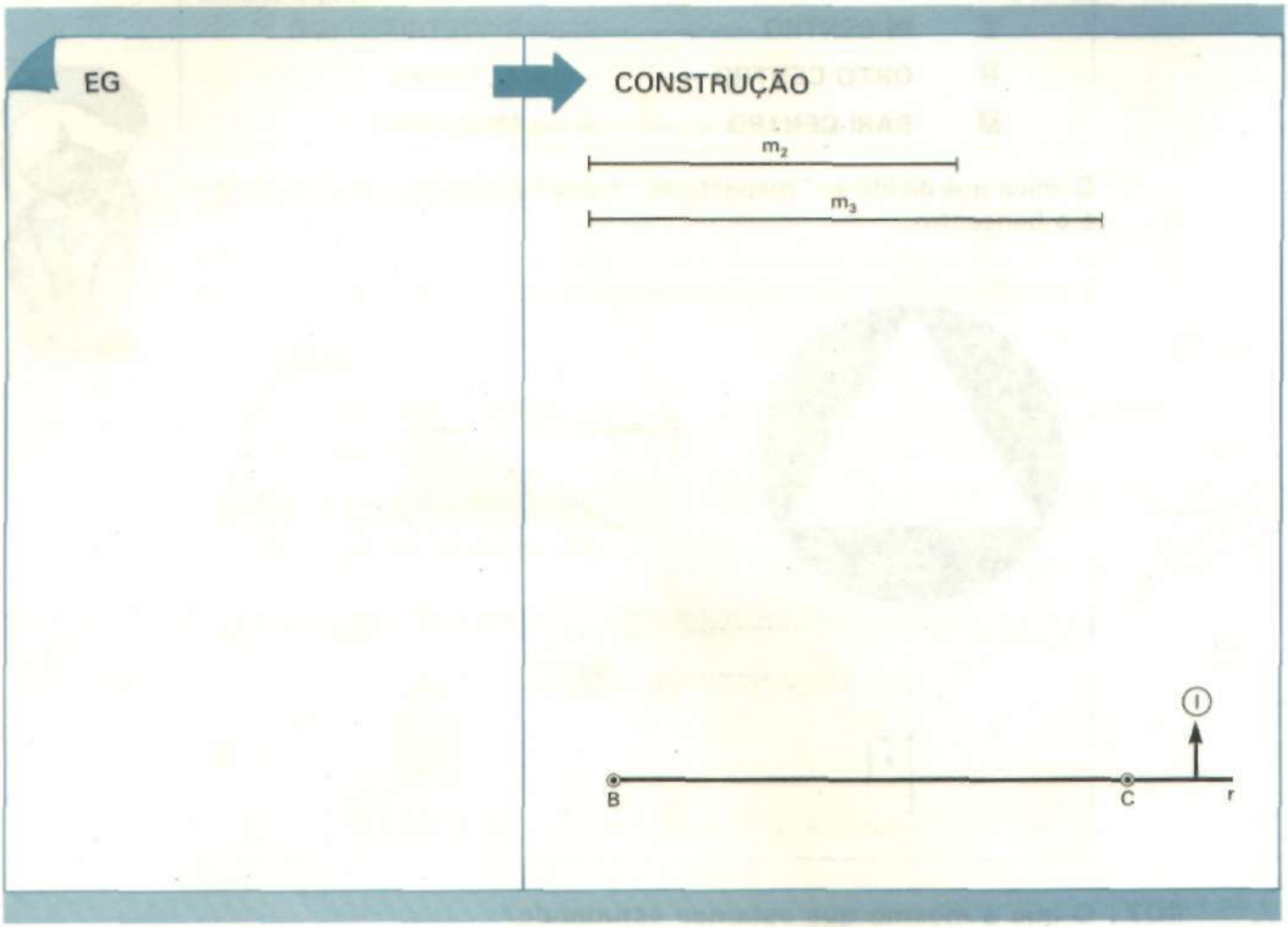
ROTEIRO:

.... [?] { a. ....
b. .... ⇒ L ....

R: AB = ...57... mm.

410 EXERCÍCIO (usaremos sempre a notação do nº 385):

No semiplano $\overrightarrow{rI}$, construa o $\triangle ABC$, dados os vértices $\overline{B}$ e $\overline{C}$ e as medianas relativas aos lados não dados: m_2 e m_3.



ROTEIRO:

.... [?] $\begin{cases} \text{a. Dista } \frac{2}{3}. \text{ .... de .... } \Rightarrow \text{ L ....} \\ \text{b. Dista } \frac{2}{3}. \text{ .... de .... } \Rightarrow \text{ L ....} \end{cases}$

R: AB = ...57... mm.

411 NOTA:

A rigor é proibido — em DG — medir as medianas e computar 2/3 de cada (nº 403).

Mesmo que suas medidas tivessem sido dadas, as normas do DG mandam:

1.º) desenhar $\overline{m}_2$ e $\overline{m}_3$ com as medidas dadas e

2.º) obter os pontos terços graficamente e com régua e compasso; é o 6.º problema fundamental.

412 EXERCÍCIO:

Em $\overleftrightarrow{rl}$, construir um $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $b = 39$ mm e $m_2 = 57$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

.... [?] a. .... ⇒ L ....
b. .... ⇒ L ....

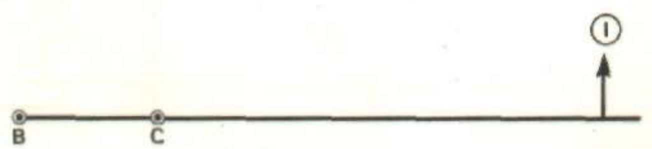
R: AB = ...60... mm.

413 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rl}$, $\triangle ABC$ dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\beta = 30°$ e $h_1 = 28$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO



ROTEIRO:

.... [?] a. ....
b. .... ⇒ L ....

R: AB = ...57... mm.

414 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rI}$, $\triangle ABC$ retângulo, dada a hipotenusa $\overline{BC}$ e o cateto $c = 55$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

.... [?] { a. .... ⇒ L ....
b. .... ⇒ L ....

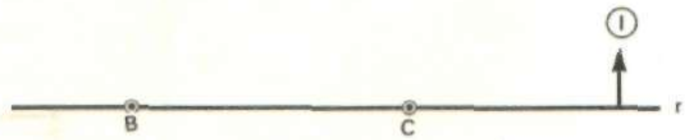
R: AC = ...25..... mm.

415 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rI}$, $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\alpha = 60°$, $m_1 = 30$ mm e $BA < CA$.

EG

CONSTRUÇÃO



ROTEIRO:

.... [?] { a. .... ⇒ L ....
b. .... ⇒ L ....

R: BA = ...28..... mm.

416 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rl}$, $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $c = 42$ mm e $m_2 = 30$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

$\overline{M}_B$ [?] { a. Dista .... de $\overline{B}$ $\Rightarrow$ L ....
b. Dista.......... de $\overline{M}_A$ $\Rightarrow$ L ....

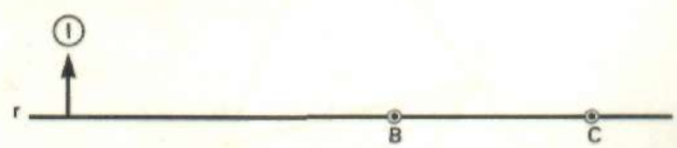
R: AC = ...78..... mm.

417 EXERCÍCIO (em $\overrightarrow{rl}$):

$\triangle ABC$, dado $\overline{BC}$, $m_2 = 27$ mm, $h_1 = 33$ mm e AB > AC.

EG

CONSTRUÇÃO



ROTEIRO:

$\overline{M}_B$ [?] { a. Dista .... de $\overline{B}$ $\Rightarrow$ L ....
b. Dista.......... da reta $\overline{BC}$ $\Rightarrow$ L ....

R: AB = ...37..... mm.

414 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rI}$, $\triangle ABC$ retângulo, dada a hipotenusa $\overline{BC}$ e o cateto $c = 55$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

.... [?] $\begin{cases} \text{a. ....} & \Rightarrow \text{L ....} \\ \text{b. ....} & \Rightarrow \text{L ....} \end{cases}$

R: AC = ...25.... mm.

415 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rI}$, $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\alpha = 60°$, $m_1 = 30$ mm e $BA < CA$.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

.... [?] $\begin{cases} \text{a. ....} & \Rightarrow \text{L ....} \\ \text{b. ....} & \Rightarrow \text{L ....} \end{cases}$

R: BA = ...28.... mm.

416 EXERCÍCIO:

Em $\overrightarrow{rl}$, $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$, $\overline{C}$, $c = 42$ mm e $m_2 = 30$ mm.

EG

CONSTRUÇÃO

ROTEIRO:

$\overline{M}_B$ [?] { a. Dista .... de $\overline{B}$ $\Rightarrow$ L ....
b. Dista.......... de $\overline{M}_A$ $\Rightarrow$ L ....

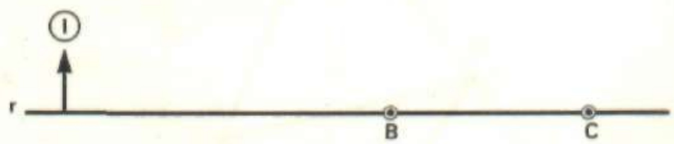
R: AC = ...78... mm.

417 EXERCÍCIO (em $\overrightarrow{rl}$):

$\triangle ABC$, dado $\overline{BC}$, $m_2 = 27$ mm, $h_1 = 33$ mm e $AB > AC$.

EG

CONSTRUÇÃO



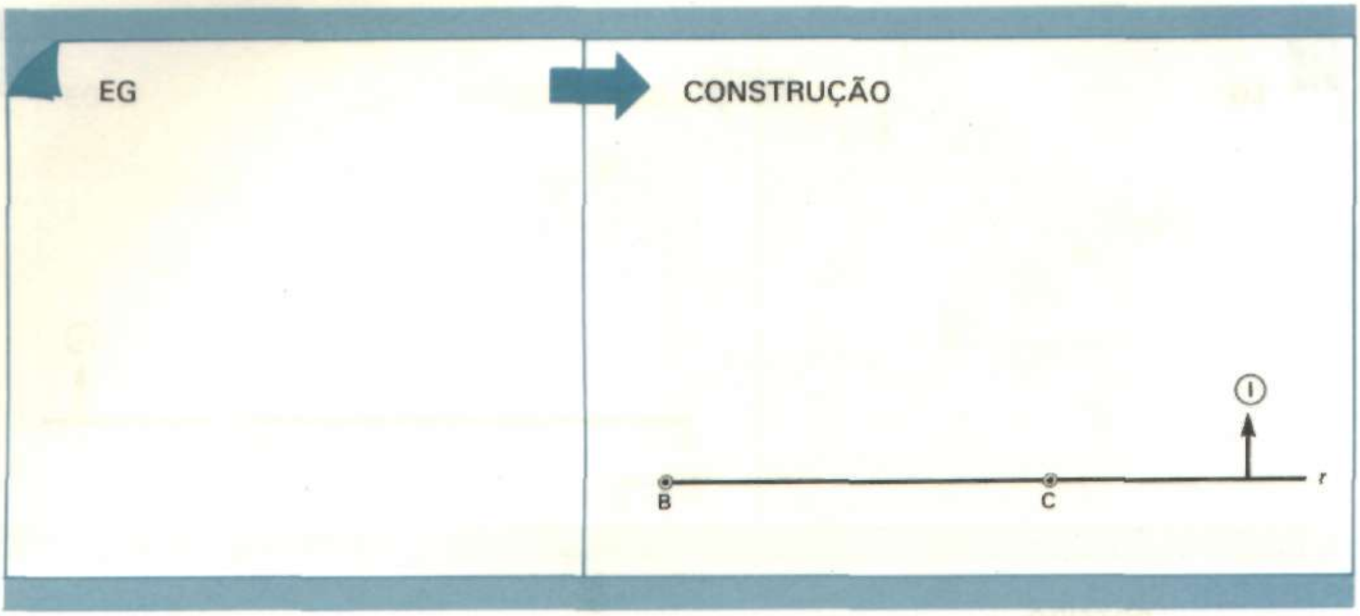
ROTEIRO:

$\overline{M}_B$ [?] { a. Dista .... de $\overline{B}$ $\Rightarrow$ L ....
b. Dista.......... da reta $\overline{BC}$ $\Rightarrow$ L ....

R: AB = ...37... mm.

418 EXERCÍCIO (no universo $\overrightarrow{r\mathrm{I}}$):

$\triangle$ABC, dado $\overline{BC}$, α = 45° e m_2 = 53 mm.



ROTEIRO:

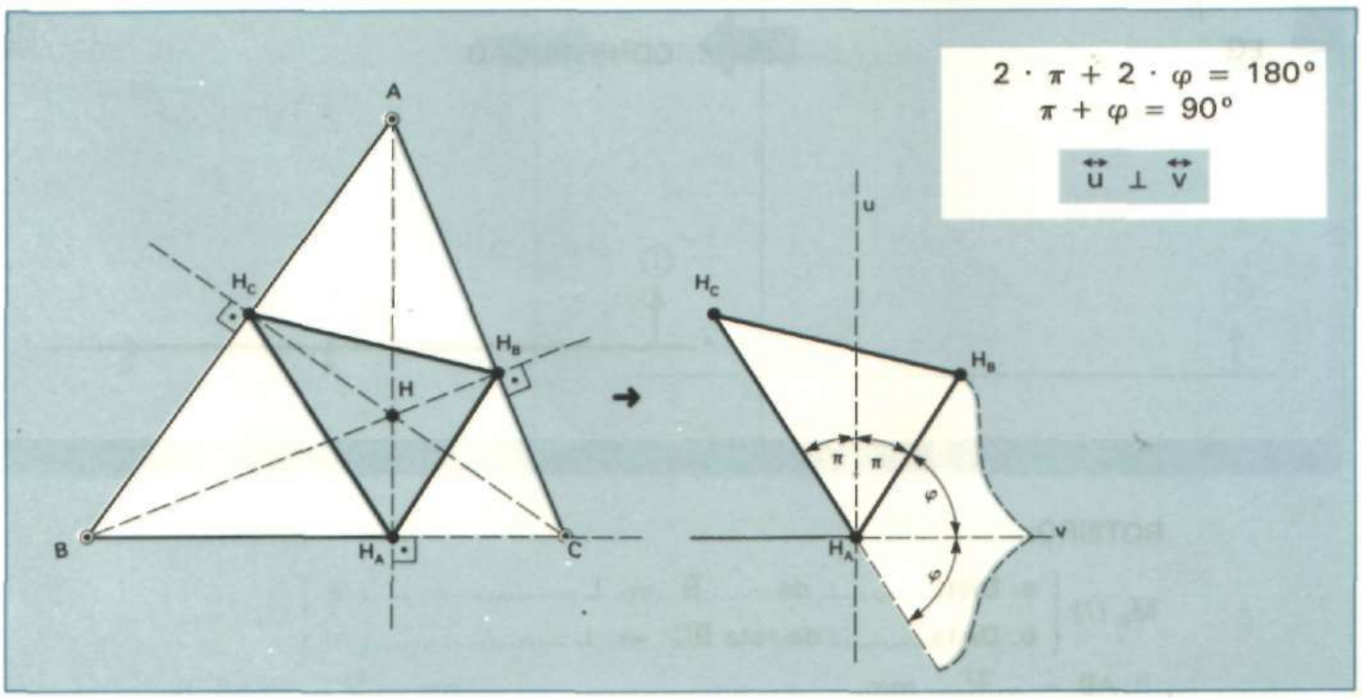
$\overline{M}_B$ [?] { a. .... de B ⇒ L ....
b. Vê $\overline{M_AC}$ sob .... ⇒ L ....

R: AB = ...71... mm.

419 **Ouvi falar em** triângulo órtico... **o que é?**

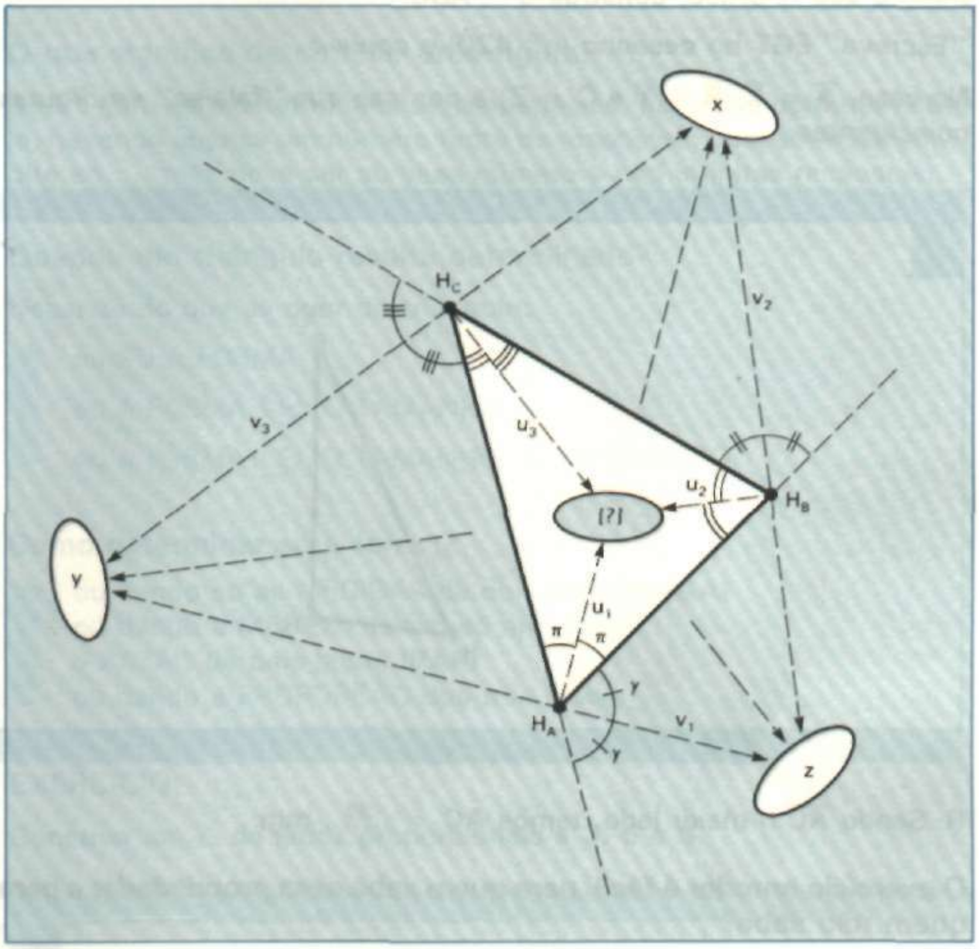
Orto = reto, direito, ...

É o △ cujos vértices $\overline{H}_A$, $\overline{H}_B$ e $\overline{H}_C$ são os pés das alturas. Vamos estudá-lo, mas antes (veja bem):



420 Triângulo órtico:

Chamaremos de geômetra G quem primeiro descobriu essa propriedade do △ órtico. Não se sabe quanto tempo utilizou estudando o assunto.



"Esses geômetras maravilhosos e suas propriedades geométricas."

Vamos raciocinar organizadamente passo a passo?

Nós traçamos as bissetrizes $\overleftrightarrow{u_1}$, $\overleftrightarrow{u_2}$ e $\overleftrightarrow{u_3}$. Nós traçamos as perpendiculares.

a. Consideremos — por hipótese — as retas $\overleftrightarrow{u_1}$, $\overleftrightarrow{u_2}$ e $\overleftrightarrow{u_3}$, feitas bissetrizes; portanto as retas $\overleftrightarrow{v_1} \perp \overleftrightarrow{u_1}$, $\overleftrightarrow{v_2} \perp \overleftrightarrow{u_2}$ e $\overleftrightarrow{v_3} \perp \overleftrightarrow{u_3}$ também serão bissetrizes, certo?

b. Pelo L4, só há quatro pontos $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ e [?] eqüidistantes das retas que contêm os lados do $\triangle H_AH_BH_C$, certo?

Quais são esses pontos? Entenda bem:

[?] é também o ortocentro △XYZ.

$\overline{X}$, $\overline{Y}$ e $\overline{Z}$ são os EX-INCENTROS do $\triangle H_AH_BH_C$ e
[?] é o INCENTRO do △ órtico $H_AH_BH_C$.

c. O △XYZ é genérico? Então o que vale para ele, vale para qualquer △.

421 "Assim falou o Geômetra G":

O △XYZ também é genérico.

As bissetrizes de um triângulo $H_AH_BH_C$ órtico são alturas do seu △XYZ e reciprocamente. c.q.d.

Cada △ tem um único órtico e reciprocamente.

Você captou o significado exato dessa mensagem? Aceitou essa propriedade?

422 EXERCÍCIO:

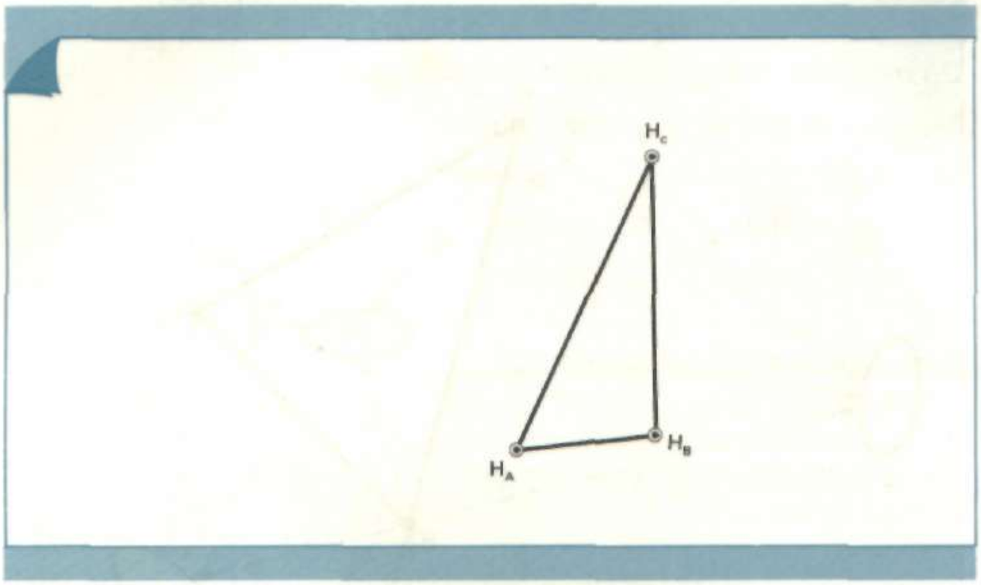
Dado o seu △ órtico, construir o △ ABC.

"Escreva" EGT no desenho (n.º 420) e copie-o.

No caso, $\overline{A} = \overline{X}$, $\overline{B} = \overline{Y}$ e $\overline{C} = Z$; é por isso que "fala-se" em figuras coincidentes...

Mais uma vez um desenho de Geometria tornou-se EG de DG.

Roteiro:
1.º) Traçam-se as bissetrizes do △ órtico.
2.º) Traçam-se as perpendiculares, que determinarão os vértices do △ABC.



R: Sendo $\overline{AC}$ o maior lado, temos AC = ..85.. mm.

423 O exercício anterior é fácil para quem sabe essa propriedade; e para quem não sabe?

Será quase impossível resolvê-lo; no curto prazo de uma prova, ninguém consegue concluir sozinho tal propriedade.

Por outro lado, bastará saber a propriedade de cor, mesmo não tendo compreendido o porquê, que resolve-se a questão...

> Numa prova esse problema examinará tão-somente se o estudante sabe a propriedade mas não examinará se o estudante sabe ou não DG.

Nos rodapés de tratados de Geometria há dezenas de propriedades...

Em qualquer matéria há questões desse tipo, que só examinam minúcias, detalhes,...

Convém transcrever o que já vimos no n.º 223:

COINCIDÊNCIA	⇒	**CONGRUÊNCIA**	⇒	**SEMELHANÇA**
(=)		**(≅)**		**(∼)**

e completar com o que mostramos do n.º 272 ao n.º 282:

POSIÇÃO	⇒	**TAMANHO**	⇒	**FORMA**
(determinada)		**(determinado)**		**(determinada)**

As recíprocas (⇐) são falsas.

II DETERMINAÇÃO DE TRIÂNGULOS

424 O que significa determinar uma figura?

Determinar: ou dar ou obter.

Uma figura está determinada se, e apenas se, os dados permitem obtê-la, havendo apenas um número finito de respostas: uma só, duas só,..., oito só,..., mas deve ser só esse número e não infinitas respostas.

425 Quando um triângulo resulta determinado?

Depende do que se quer do triângulo:

ou SÓ A FORMA
ou A FORMA (E) O TAMANHO
ou A FORMA (E) O TAMANHO (E) A POSIÇÃO.

426 Como determinar só a forma?

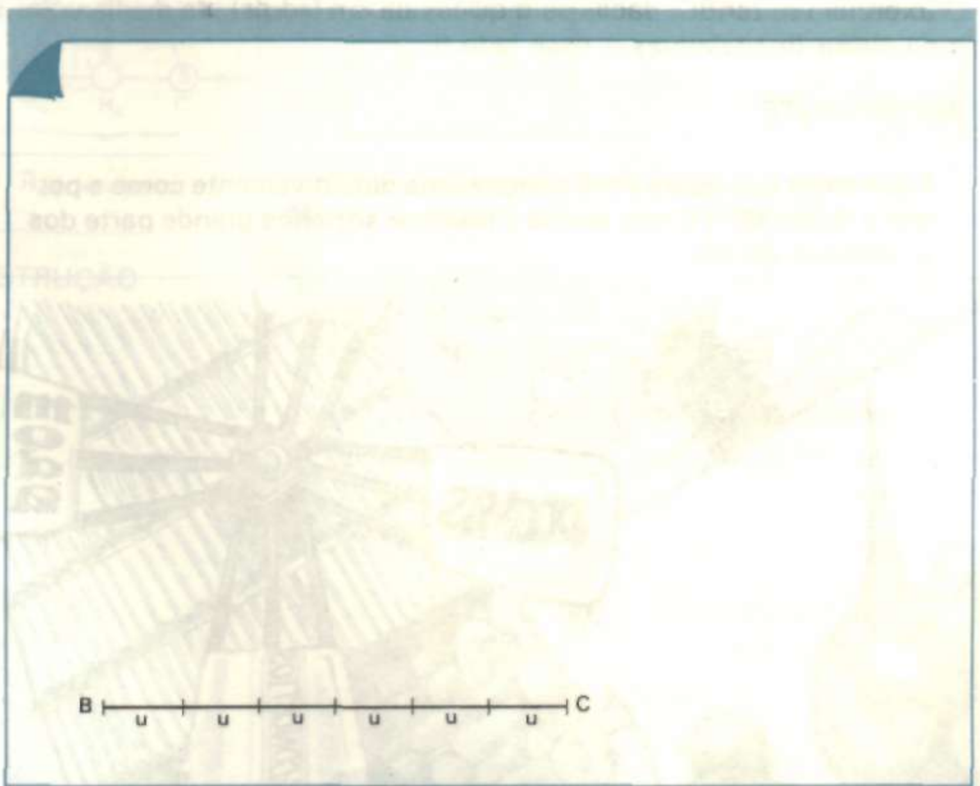
Se precisar, releia o n.º 220.

ou dando só as MEDIDAS de dois ângulos (AA)
ou dando a MEDIDA de um só ângulo e a RAZÃO de dois lados (RAR)
ou dando a PROPORÇÃO dos três lados.

427 EXERCÍCIO:

Construa um △ de lados proporcionais a 3, 5 e 6.

$\bar{u}$ é arbitrário... Trace os arcos ($\bar{B}$; 3u) e ($\bar{C}$; 5u).



R: Meça (transferidor) o menor ângulo = ...30.... graus.

428 **Como determinar o** tamanho **de um △?**

Determinado o tamanho, estará determinada também a forma (tendo os lados, obtêm-se os ângulos).

Há muitos exemplos — que veremos daqui a pouco — assim resumidos:

Dando só as MEDIDAS **de 3 elementos.**

O numeral 3 substitui a expressão: "três e somente três".

Subentende-se que estamos nos referindo às medidas...

Esses elementos podem ser 3 dos seguintes: lados (a, b, c); ângulos internos (α, β, γ); ângulos externos (α_e, β_e, γ_e); alturas (h_1, h_2, h_3); medianas (m_1, m_2, m_3); raio da circunscrita (r_c); raio da inscrita (r_i);... e manteremos essa notação.

Nunca escreveríamos, por exemplo:

$\boxed{\cancel{a \perp b}}$

n.º ⊥ n.º ?

429 **Como determinar a** posição **de um △?**

Para determinar a posição — relativa ao plano do desenho — é obrigatório dar também a posição de figuras relacionadas de algum modo com o △.

Por exemplo: $\overline{B}$, $\overline{C}$ e duas medidas;

$\overline{B}$, $\overline{C}$ e $\overline{H}$ (ortocentro);... como, aliás, já fizemos em exercícios anteriores.

430 **Enunciado simbólico ES:**

Poremos "em evidência" a expressão

"Construir um △ABC, dadas as medidas de"

e enunciaremos apenas os dados.

Por exemplo **am_1h_1** lê-se:

"Construir um △ABC, dadas as medidas de um lado(a), da mediana (m_1) e da altura (h_1) relativas a esse lado."

431 IMPORTANTE:

Esperamos que agora você compreenda definitivamente como e porque a dupla MF-LG nos auxilia a resolver sozinhos grande parte dos problemas de DG.

432 Resolveremos juntos — detalhadamente — alguns exemplos para você captar a "teoria". Esperamos que você resolva sozinho os exercícios.

433 EXEMPLO: **$\beta h_1 m_1$** $\beta = 60°$; $h_1 = 50$ mm; $m_1 = 53$ mm.

O MF "ACONSELHA":

434 **1º MOMENTO:**

Interpretar o enunciado, agora simbólico.

DADOS: β (de vértice $\overline{B}$); h_1 e m_1 relativos ao lado $\overline{BC}$.

O QUE SE QUER?

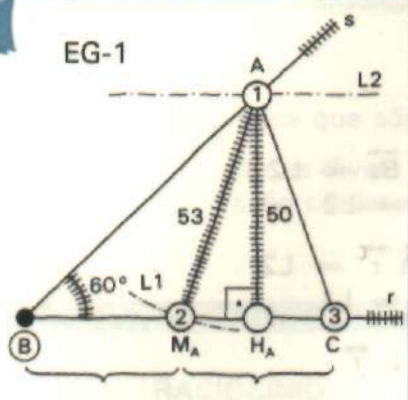
Apenas o tamanho do △ABC; a posição não foi pedida porque não pode ser obtida...

435 **2º MOMENTO:**

Desenhar o EG

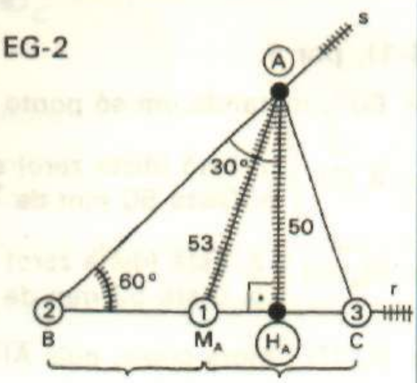
Começa-se desenhando uma só resposta (△ABC) — basta para achar o caminho.

EG-1

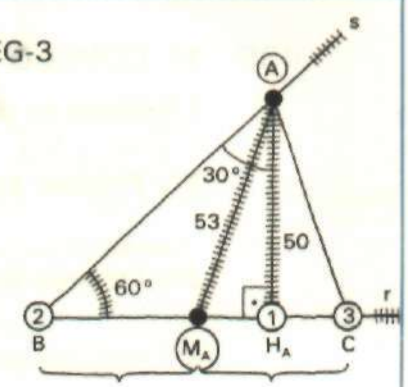


$\overline{H}_A$ é facultativo.

EG-2



EG-3



CONSTRUÇÃO

CONSTRUÇÃO

CONSTRUÇÃO

436 **3º MOMENTO (Raciocínio):**

Não é só porque está a mão livre.

> *No EG, o $\triangle ABC$ não tem o tamanho certo porque* não tem as medidas certas. Bastará copiá-lo com instrumentos e acertando as medidas.

437 **Como começar a cópia?**

Obviamente por um dos três dados. Há 3 começos...

438 **Depois do começo, como continuar?**

> É aqui que entram em cena os LGs!

O próximo ponto será "morto" quando, e só quando, obtivermos duas linhas que o contêm.

439 **1º COMEÇO (EG-1), por β:**

Cada ponto morto fica determinado e funciona como dado. Vai-se "enchendo" as bolinhas.

1º) Copia-se rBs = 60°, matando um só ponto $\overline{B}$.

2º) Próximo ponto: $\overline{A}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está } \textit{(dista zero)} \text{ em } \overrightarrow{Bs} \Rightarrow \text{L2} \\ \text{b. Dista 50 mm de } \overleftrightarrow{r} \Rightarrow \text{L2} \end{cases}$

3º) Próximo ponto: $\overline{M}_A$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está } \textit{(dista zero)} \text{ em } \overleftrightarrow{r} \Rightarrow \text{L2} \\ \text{b. Dista 53 mm de } \overline{A} \Rightarrow \text{L1} \end{cases}$

4º) Próximo ponto: $\overline{H}_A$ [?] $\{$ Mera cópia, pois $\overline{AH_A} \perp \overleftrightarrow{r}$

5º) Próximo ponto: $\overline{C}$ [?] $\{$ Mera cópia, pois $M_AC = M_AB$.

440 **2º COMEÇO (EG-2), por h_1:**

1º) Copia-se $\overline{AH_A}$ com 50 mm e copia-se 90° $\Rightarrow$ $\overline{A}$, $\overline{H}_A$ e $\overleftrightarrow{r}$.

A partir do próximo ponto, entram em cena os LGs.

2º) Próximo ponto: $\overline{B}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está em } \overleftrightarrow{r}. \\ \text{b. Copia-se } \overleftrightarrow{s} \text{ formando 30° com } \overleftrightarrow{r}. \end{cases}$ "Matam-se" numa só "cajadada" dois pontos.

3º) Próximo ponto: $\overline{M}_A$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está em } \overleftrightarrow{r}. \\ \text{b. Dista 53 mm de } \overline{A}. \end{cases}$

Não esquecer que queremos os vértices.

4º) Próximo ponto: $\overline{C}$ [?] $\{$ Copia-se, pois $M_AC = M_AB$.

441 **3º COMEÇO (EG-3), por m_1:**

1º) COPIA-SE $\overline{AM_A}$, 53 mm, matando-se dois pontos $\overline{A}$ e $\overline{M}_A$

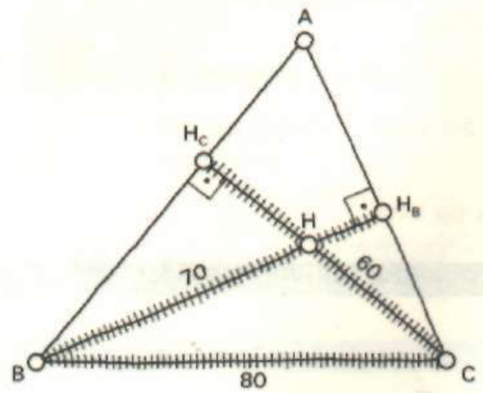
2º) Próximo ponto: $\overline{H}_A$ [?] $\begin{cases} \text{a. Dista 50 mm de } \overline{A} \Rightarrow \text{L1} \\ \text{b. Vê } \overline{AM_A} \text{ sob 90°} \Rightarrow \text{L5a.} \end{cases}$

Prossegue-se como no anterior.

442 EXEMPLO: **$a\ h_2\ h_3$** $a = 80$; $h_2 = 70$; $h_3 = 60$.

Daqui em diante, os comprimentos — dados e pedidos — serão sempre em mm.

EG	CONSTRUÇÃO



indica que são alturas

$\overline{H}$ não as divide numa razão predeterminada.

RACIOCÍNIO:

A nossa meta é copiar os vértices.

Há três começos:

- ou por $BC = a = 80$ mm
- ou por $BH_B = h_2 = 70$ mm
- ou por $CH_C = h_3 = 60$ mm

$\left.\begin{matrix} BH_B = h_2 = 70 \text{ mm} \\ CH_C = h_3 = 60 \text{ mm} \end{matrix}\right\}$ são análogos.

ROTEIRO (começando a CÓPIA por $BC = a$):

1.º) $BC = a$ nos permite copiar $\overline{B}$ e $\overline{C}$ ("rodeie-os" e preencha suas "bolinhas").

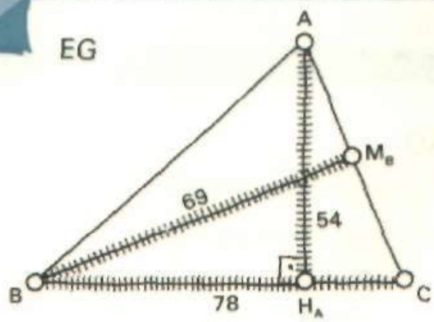
$$2.^\circ \text{ e } 3.^\circ\text{) Próximo} \begin{cases} \text{ou } \overline{H}_B\ [?] \begin{cases} a.\ \text{Vê } \overline{BC} \text{ sob } 90^\circ \Rightarrow L5a \\ b.\ \text{Dista 70 de } \overline{B} = L1 \end{cases} \\ \text{ou } \overline{H}_C\ [?] \begin{cases} a.\ \text{Vê } \overline{BC} \text{ sob } 90^\circ \Rightarrow L5a \\ b.\ \text{Dista 60 de } \overline{C} \Rightarrow L1 \end{cases} \end{cases}$$

4.º) Próximo: $\overline{A} = \overleftrightarrow{BH_C} \cap \overleftrightarrow{CH_B}$

R: AB = ..74.. mm.

443 EXEMPLO: **a h_1 m_2** a = 78; h_1 = 54; m_2 = 69.

EG



Mesmo "especialistas" fazem rascunho antes de desenhar o EG definitivo.

CONSTRUÇÃO

ORIENTAÇÃO:

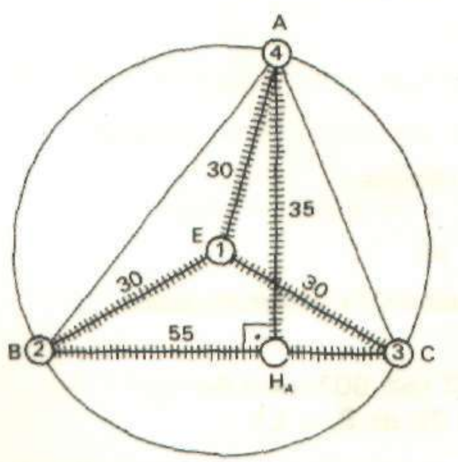
Depois de $\overline{B}$ e $\overline{C}$, copie $\overline{M_B}$ [?] { a. Dista 69 de $\overline{B}$; b. Dista .... de $\overleftrightarrow{BC}$ }

R: AB = ...79... mm.

444 EXEMPLO: **a h_1 r_C** a = 55; h_1 = 35; r_C e 30.

(r_C = raio da circunscrita).

EG



"O RAIO É IMANTADO E BARATO."

CONSTRUÇÃO

$\overline{H_A}$ fica "vivo", pois não foi pedido.

R: AB = ...58... mm.

445 **Por que são dadas três medidas?**

Para determinar só o TAMANHO ⇒ a FORMA, mas a POSIÇÃO NÃO, pelo menos uma das medidas dadas deve (obrigatoriamente) ser um COMPRIMENTO e:

A sintaxe técnica nos propicia mensagens curtas, precisas e, portanto, mais compreensíveis.

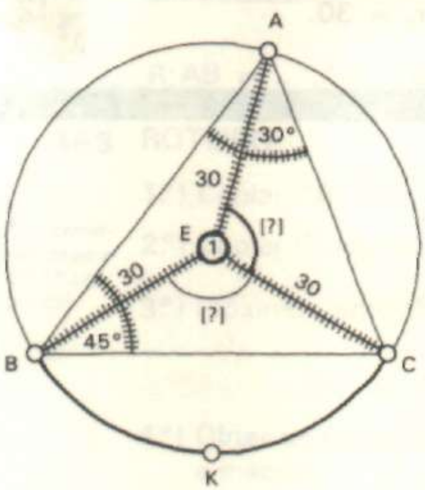
> **SE iniciarmos a cópia por esse comprimento, já "mataremos" dois pontos e**
>
> **ENTÃO o próximo ponto (vértice ou auxiliar), para ser "morto", necessita de duas linhas que decorrem dos outros dois dados.**

446 **É sempre assim?**

Antes fosse... mas há casos onde convém iniciar a cópia por outro caminho.

447 EXEMPLO: $\alpha\ \beta\ r_c$ $\alpha = 30°$; $\beta = 45°$, $r_c = 30$ mm.

EG



O RAIO CONTINUA SENDO "IMANTADO" E "BARATO"...

CONSTRUÇÃO
Comece pela circunferência.

R: AB = ...58... mm.

448

Um EG bem-feito m-o-s-t-r-a (visualmente) a resolução.

Lendo-se boa literatura, aprende-se a se expressar num idioma. "Lendo-se" um bom EGT, aprende-se "grafiquês".

É a "famosa" linguagem gráfica, visual, concisa, precisa e universal e que atinge diretamente o intelecto e o coração dos aficionados.

449 RACIOCÍNIO: **como obter a resposta a partir dos dados?**

Para que serve a Geometria? O ângulo $B\hat{A}C$ é .... na circunferência e o seu central correspondente é .... que mede ....

Analogamente, $A\hat{E}C$ mede ....

ROTEIRO:

1.º) Copia-se a circunf. ($\overline{E}$; 30 mm).

$\overline{K}$ é arbitrário na perfeita acepção do termo... (Não há nenhum "conveniente".)

2.º) Com centro $\overline{K}$ arbitrário dessa circunf., traça-se ($\overline{K}$; 30 mm) "matando" $\overline{B}$ e $\overline{C}$, pois $B\hat{E}C$ resulta em 60°.

3.º) Constrói-se $C\hat{B}A$ com 45° "matando" o "último dos moicanos" $\overline{A}$.

CONFERIR:

"Milagrosamente" $B\hat{A}C$ resulta em 30°!...

450 **Estou me tornando um aficionado...**

Ótimo. Vá, então, passear de bicicleta — pedalando sozinho — e resolva os próximos exercícios.

451 EXERCÍCIO: $\alpha\ \mathbf{m_2 r_c}\ \alpha = 30°$; $m_2 = 37$; $r_c = 30$.

EG | CONSTRUÇÃO

Permita-nos uma "mãozinha":

M_B vê $\overline{EC}$ sob ....

AB = ...58..... mm. A'B = ...37..... mm.

452 EXERCÍCIO: $a\ \beta\ r_i$ $a = 80$; $\beta = 45°$; $r_i = 20$

(r_i = raio da inscrita de centro $\overline{S}$).

EG	CONSTRUÇÃO

R: AB = ...77....... mm.

453 ROTEIRO:

Entendeu? Os LGs começam a ser úteis a partir do 1º próximo ponto!

1.º) Copiar $C\hat{B}s$ com 45°.

2.º) Copiar $\overline{C}$ marcando BC = 80 mm.

3.º) Próximo ponto: $\overline{S}$ [?]
- a. Eqüidista de $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{Bs}$ ⇒ L4.
- b. Dista 20 mm de $\overleftrightarrow{BS}$ ⇒ L2.

4.º) Obter os pontos de tangência $\overline{K}$ em $\overrightarrow{BC}$ e $\overline{L}$ em $\overrightarrow{Bs}$ antes de traçar a inscrita.

5.º) Agora recaímos num problema anterior:
Para copiar $\overline{A}$ deveremos copiar $\overleftrightarrow{Ca}$, tangente à inscrita pelo ponto $\overline{C}$;
próximo ponto: 3º ponto de tangência $\overline{J}$.

$\overline{J}$ [?]
- a. Está na inscrita ⇒ L1
- b. Dista CK de $\overline{C}$ ⇒ L1

Deixa o $\overline{J}$ vendo $\overline{SC}$ sob 90°...

6.º) Desenhar o △ABC com traço mais forte, mas o mais fino possível.

454 ***Como determinar triângulos particulares?***

Enunciando-se que o $\triangle ABC$ é:

RETÂNGULO em $\overline{A}$ equivale a **DAR** $\alpha = 90°$;

ISÓSCELES equivale a dar AC = BC e

EQÜILÁTERO equivale a dar $\alpha = \beta = 60°$ ou dar a:b:c :: 1:1:1.

Vou tentar...

455 **Posso** FORMULAR **problemas?**

Pode, mas antes convém saber que:

- **a.** Alguns, como o $s_1s_2s_3$, não podem ser resolvidos só com régua e compasso.
- **b.** Alguns nem se sabe se podem ou não, porque ninguém os resolveu... ainda.

456 **Puxa! Eu pensei que o DG estava morto...**

Foi assassinado pelos modismos, mas vamos ressuscitá-lo. Hans Seybold, em julho de 1988, na Conferência Internacional de Munique, Alemanha, declarou:

"Deveremos ensinar Geometria e Desenho com régua e compasso (*sic*) aos nossos estudantes; a experiência mostra que eles aprenderão, se aprenderem que isso os ajudará a solucionar os problemas reais da Engenharia".

Hans Seybold, do Instituto de Matemática da Universidade de Munique, Alemanha, é especialista em computação gráfica.

457 **Algo mais?**

Sim, três advertências:

- **a.** Há problemas que empregam lugares geométricos que serão estudados no livro 2.
- **b.** No curto prazo de uma prova, ninguém consegue resolver sozinho — por exemplo — o $h_1\ h_2\ h_3$, que emprega um processo específico (só para esse problema).
- **c.** Lembre-se que os dados precisam ser compatíveis entre si. Por exemplo, não existe triângulo com a = 20 mm, b = 30 mm e c = 50 mm, pois não está satisfeita a relação $|b-c| < a < (b + c)$.

458 *Para finalizar este capítulo II, resolva os seguintes exercícios, mas apenas*

desenhando o EG e

escrevendo o roteiro.

459 EXERCÍCIO: $am_1\ h_1$

EG

ROTEIRO:

460 EXERCÍCIO: $\alpha\ s_1\ h_1$

EG

ROTEIRO:

461 EXERCÍCIO: $h_1\ m_1\ r_C$

EG

ROTEIRO:

462 EXERCÍCIO: $a\ \beta\ m_3$

EG

ROTEIRO:

463 EXERCÍCIO: $a\ m_1\ r_C$

EG

ROTEIRO:

464 **Lembrete do código gráfico:**

Sem revogar nenhum dispositivo anterior, adite-se que, no EG:

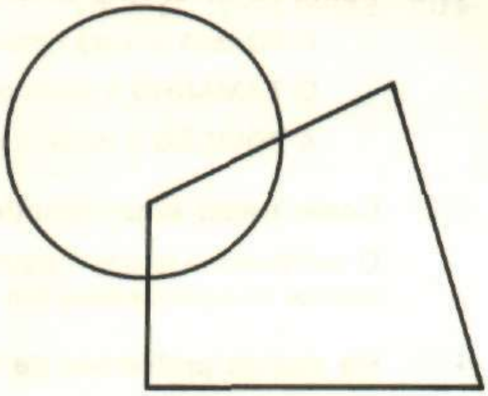
- ● *''bolinhas'' cheias: representam pontos ''**mortos**''*
- ○ ''bolinhas'' vazias: pontos ainda não obtidos.

Os pontos dados já nascem ''cheios'' e, na medida em que forem ''morrendo'', suas ''bolinhas'' poderão ir sendo preenchidas, se convier.

Isso somente em EG descartáveis, porque dificulta um posterior estudo da resolução.

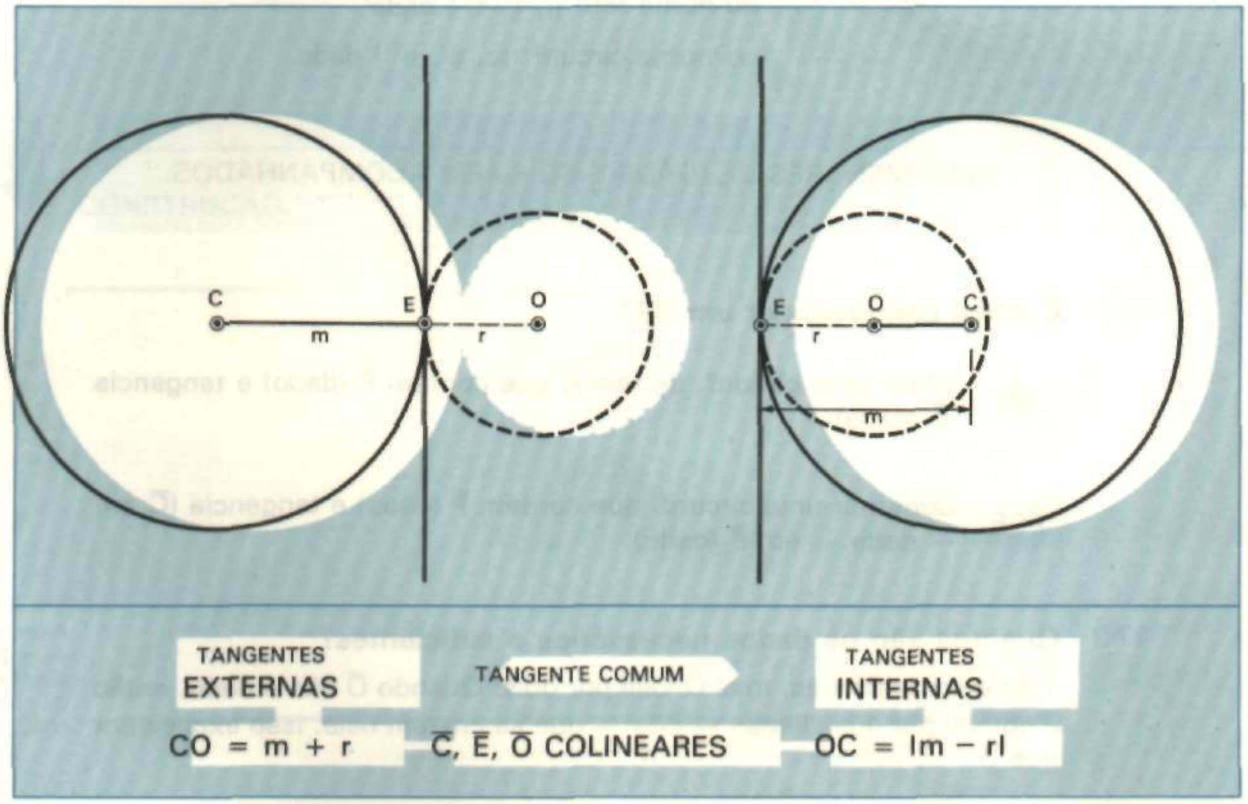
CAPÍTULO

4



CIRCUNFERÊNCIAS E QUADRILÁTEROS

I CIRCUNFERÊNCIAS



465 Estou vislumbrando uma reta quase invisível...

É a reta $\overleftrightarrow{t}$ — tangente comum — que sempre acompanha circunferências tangentes e fica "latente" até ser "revelada" para ajudar em algum problema.

466 **Como se determina uma circunferência?**

A **FORMA** já está determinada.

O **TAMANHO** é dado pelo raio **r**.

A **POSIÇÃO** é dada pelo centro $\overline{O}$.

Desde a Antigüidade é considerada a forma perfeita.

467 **Como traçar uma circunferência procurada?**

O compasso é inerte; ''alguém'' precisará acertar a sua abertura (raio), espetar sua ponta-seca (no centro) e movimentá-lo...

468 **Há muitos problemas de determinação?**

Sim, e para podermos dar enunciados simbólicos — ES — vamos codificar:

O — Centro da circunf. procurada.

r — Raio da circunf. procurada ($\overline{O}$; r).

P, P', P'' — Pontos da circunf. ($\overline{O}$; r) procurada.

t, t', t'' — Retas tangentes à ($\overline{O}$; r).

C, C', C'' (de raios **m, m', m''**) — Circunferências tangentes à ($\overline{O}$; r).

E, E', E'' — Pontos de tangência, que devem sempre estar:

ou numa reta (t, t', t'') dada

ou numa circunf. (c, c', c'') dada.

''SÃO MENORES DE IDADE E SÓ SAEM ACOMPANHADOS.''

469 **É difícil compreender um ES?**

rPt — Obter uma circunf. de raio **r**, que contém $\overline{P}$ (dado) e tangencia $\overleftrightarrow{t}$ (dada).

PCE — Construir uma circunf. que contém $\overline{P}$ (dado) e tangencia ($\overline{C}$; m) — dada — em $\overline{E}$ (dado).

470 **Quantos são os dados necessários e suficientes?**

Três e somente três, mas $\overline{O}$ vale por dois! Quando $\overline{O}$ não é dado, então é obtível por duas linhas — LGs — que se cruzam nele. Isso explica por que 3.

A mente humana detesta exceções e sempre dá um ''jeitinho''...

471 **Vamos resolver problemas?**

Sim, mas não os óbvios como **Or, OP, Ot, OC, rPP', rtE, rCE, PP'P''** e **tt't''**, alguns dos quais nós até já resolvemos anteriormente.

Convém você resolvê-los no seu rascunho, como ''aperitivos''...

472 EXERCÍCIO: rPt

MEMORANDO (que deve ser lembrado...):

m e r sempre se atraem.

a. Comece o EG por uma das respostas.

b. Os raios r, m são "imantados" e "baratos".

c. Queremos o tamanho e a posição da incógnita; não esqueça das "clandestinas".

EG

CONSTRUÇÃO

Para conferir a precisão:

R: OO' = ...58.... mm.

473 EXERCÍCIO: rtt′

AVISO:

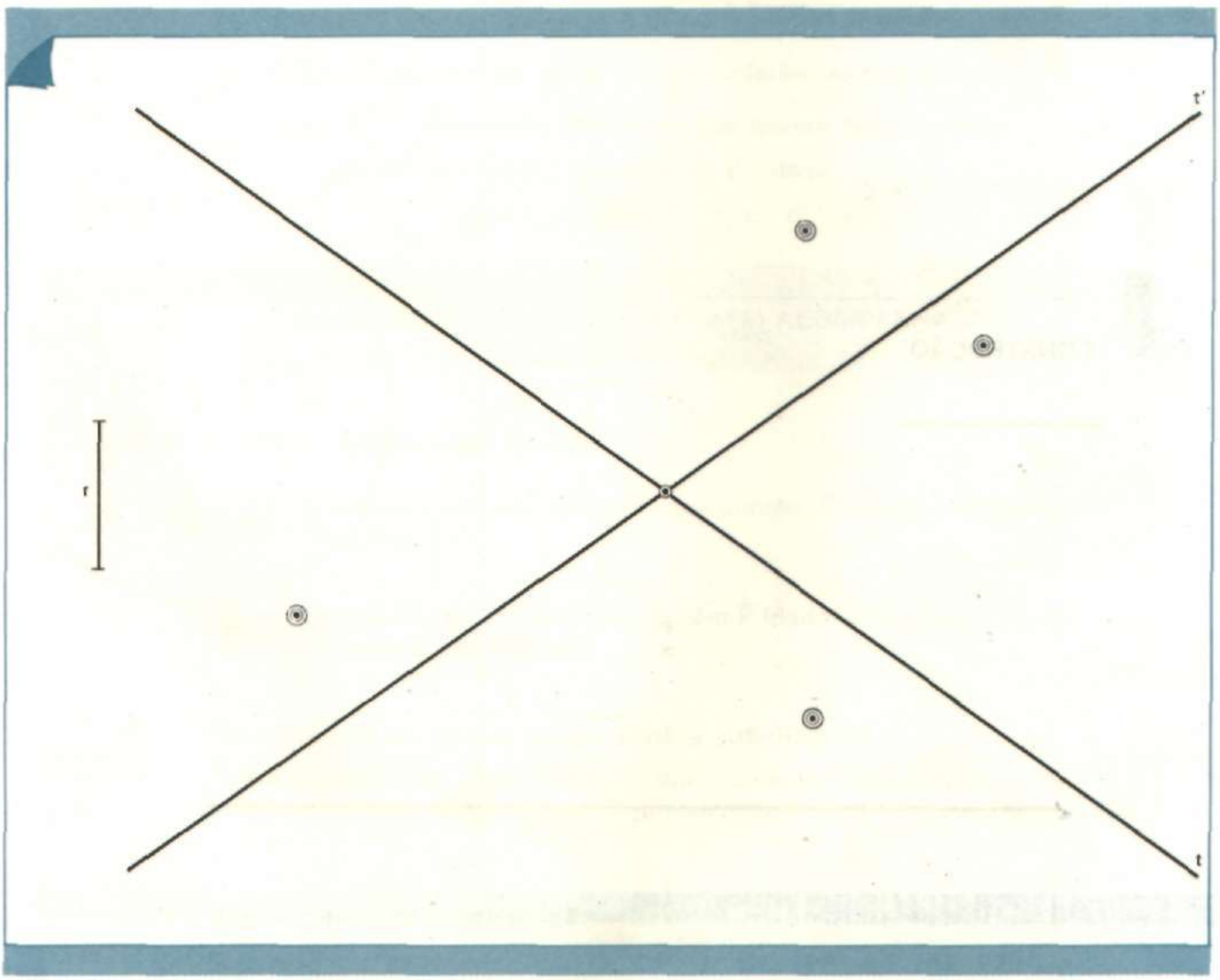
474

Simplificações são convenientes e devem ser feitas, mas espontaneamente.

SE você estiver pronto para elas,
ENTÃO as verá sozinho e reciprocamente.

SE você não estiver preparado,
ENTÃO para que "dar matéria"?

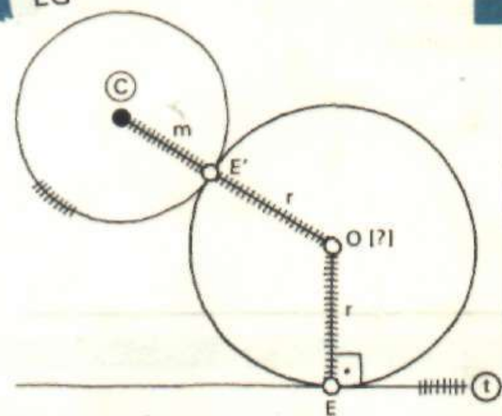
Para forçá-lo a decorar?



Com arma e munição ruins e sem treino não dá para caçar pontos...

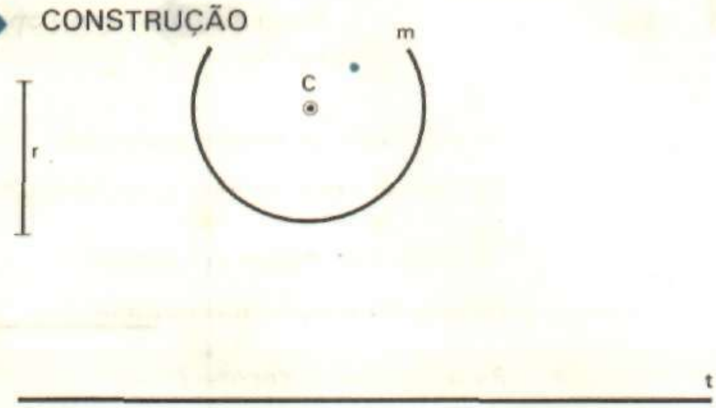
475 EXERCÍCIO: rtC

EG



m e r se atraem.

CONSTRUÇÃO

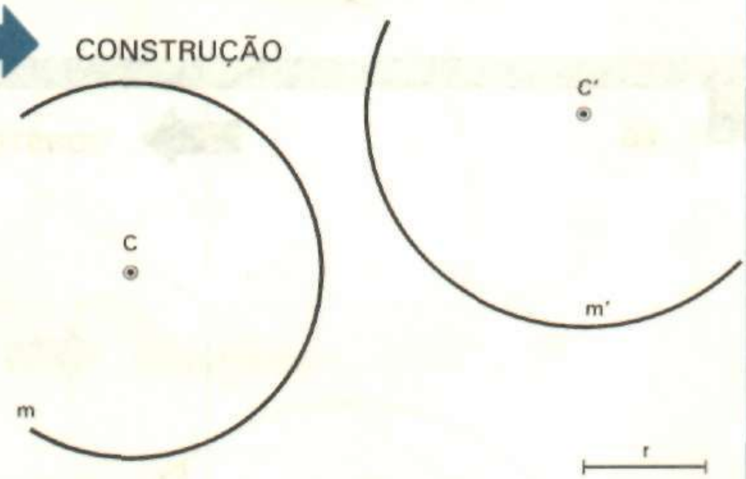


R: OO' = ...60....... mm.

476 EXERCÍCIO: rCC'

EG

CONSTRUÇÃO



R: OO' = ...59....... mm.

ROTEIRO:

....

....

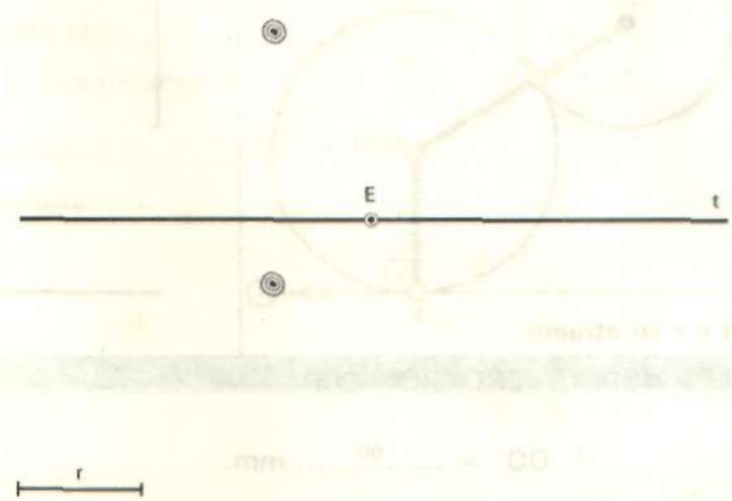
....

....

477 EXERCÍCIO: Etr

EG

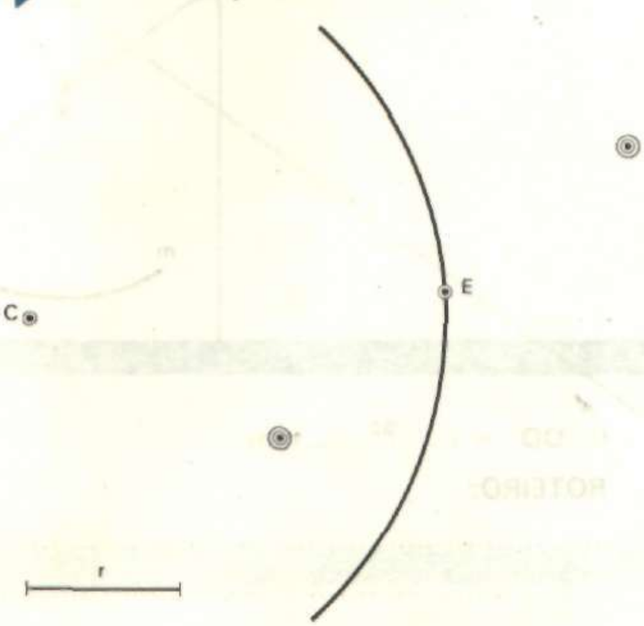
CONSTRUÇÃO



478 EXERCÍCIO: ECr

EG

CONSTRUÇÃO



479 EXERCÍCIO: EtP

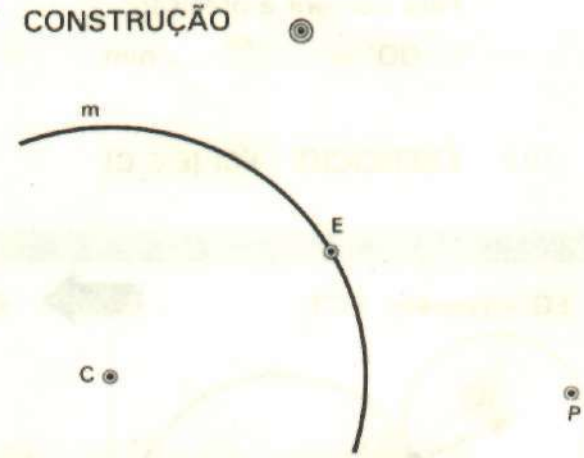
EG

CONSTRUÇÃO

480 EXERCÍCIO: ECP

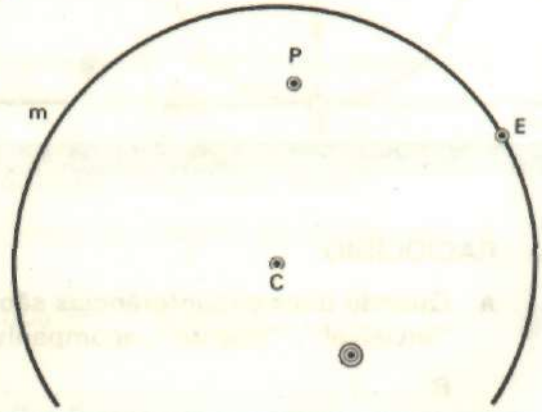
EG

CONSTRUÇÃO



EG

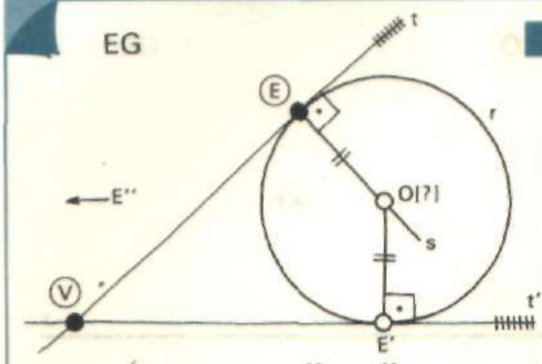
CONSTRUÇÃO



OU **use o EG de cima**
(é o tal de analogamente)
OU **desenhe outro...**

481 EXERCÍCIO: Ett'

EG



$\overline{O}$ [?] {a. Está em $\overleftrightarrow{s} \perp \overleftrightarrow{t}$
b. Eqüidista de $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t}'$

CONSTRUÇÃO

Um bom jeito de obter os pontos de tangência $\overline{E}'$ e $\overline{E}''$ em $\overleftrightarrow{t}'$ é marcar VE' = VE'' = VE.

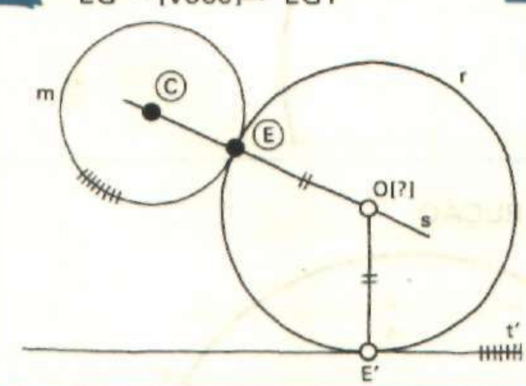
R: VE = ...30...... mm.

Para conferir a precisão:

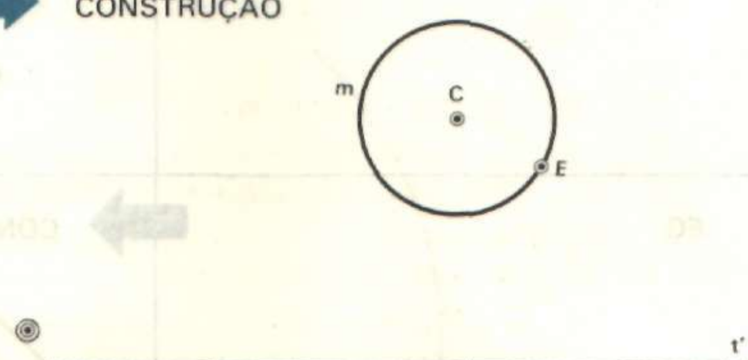
R: OO' = ...66...... mm.

482 EXERCÍCIO: ECt [E ∈ C]

EG ⫤você⊨ EGT



CONSTRUÇÃO



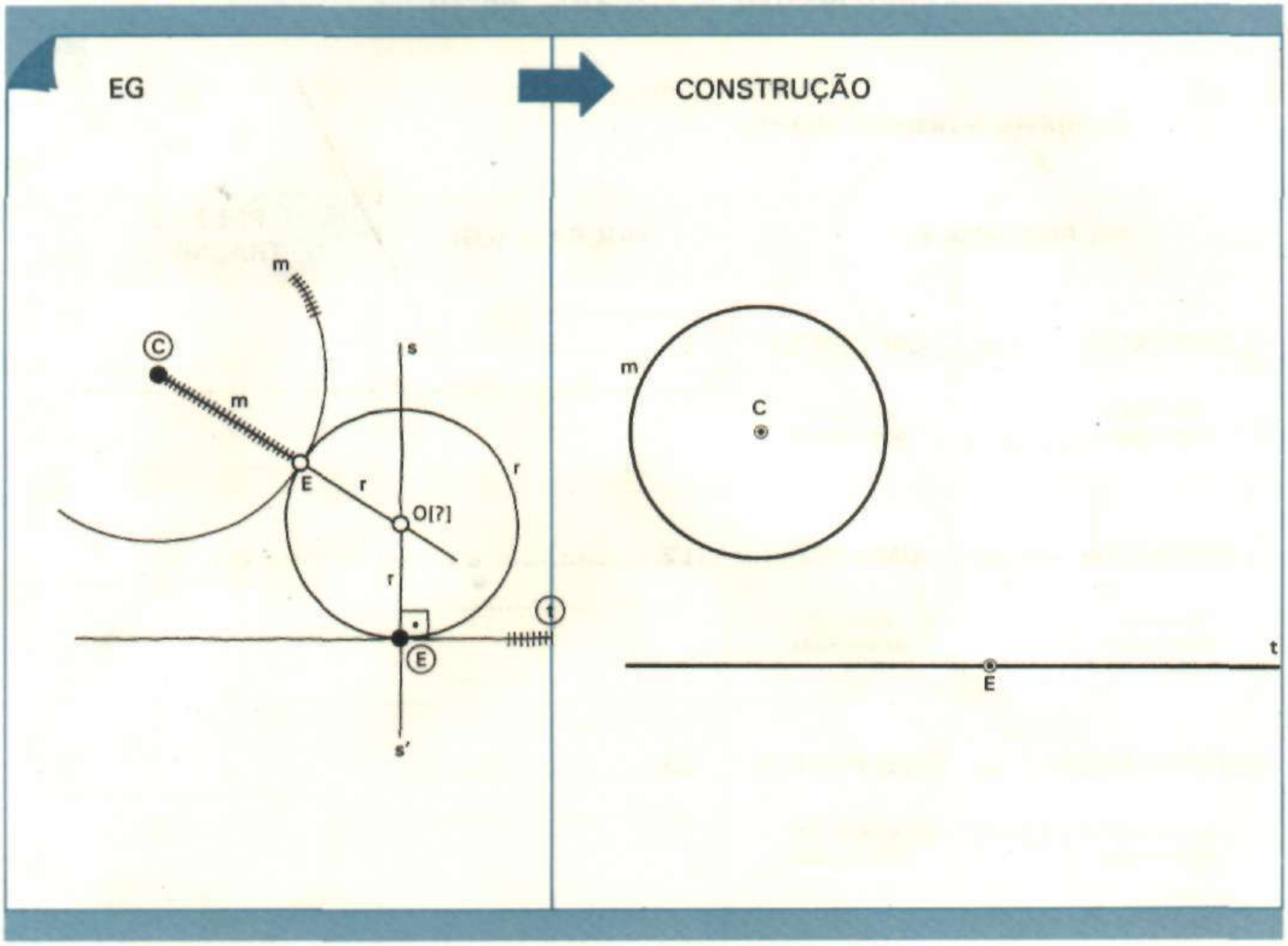
RACIOCÍNIO:

a. Quando duas circunferências são tangentes entre si, há alguma reta "invisível", "latente", acompanhando-as e esperando ser útil? Qual?

R: ....

b. Desenhe-a no EGT e recaia no Ett'... R: OO' = ...73...... mm

483 EXERCÍCIO: EtC [$E \in t$]



R: r = ...17....... mm.

RACIOCÍNIO (resmungando...):

Estamos admitindo que ninguém, podendo aprender a concluir, prefere ser robotizado.

a. $\overline{O}$ [?] dista r [?] de $\overline{E}$ (dado)... não é *LG obtível* e não é obtível porque r não é conhecido, não está determinado ainda!

b. [$\overline{O}$] dista [r (?) + m (dado)] de $\overline{C}$ (dado), mas o LG — que seria o L1 — não pode ser copiado ainda.

c. $\overrightarrow{Es} \perp \overleftrightarrow{t}$ pode — e deve — ser copiada e já é uma linha que passa por $\overline{O}$. Falta apenas uma só linha... que tem que ser um LG!

d. L1?...; L2?...; L3?...Será que $\overline{O}$ eqüidista de dois pontos determinados? $\overline{C}$ é dado, haverá algum **obtível**?... Por outro lado:

e. É impossível resolver sem usar todos os dados e ainda não usei m (dado); o que faço com m?

f. Juntando as duas pontas: marque ER = m em $\overrightarrow{Es'}$...

$$\overline{O}[?]\begin{cases} \text{a. Está em } \overrightarrow{Es} \\ \text{b. Eqüidista (m + r) de } \overline{C} \text{ e } \overline{R} \text{ (obtido)} \Rightarrow \text{L3} \end{cases}$$

É por isso que raciocinar equivale a desemaranhar um fio com duas pontas:

O que se sabe

Raciocínio

O que se quer

484 **É por "coisas" assim que insistimos:**

DETERMINAR ⟺ ou DAR ou OBTER

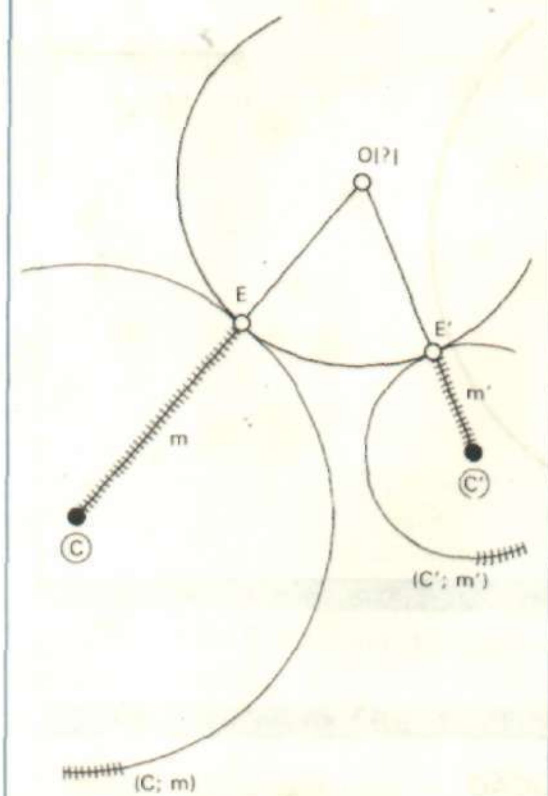
485 **Complete o resumo abaixo:**

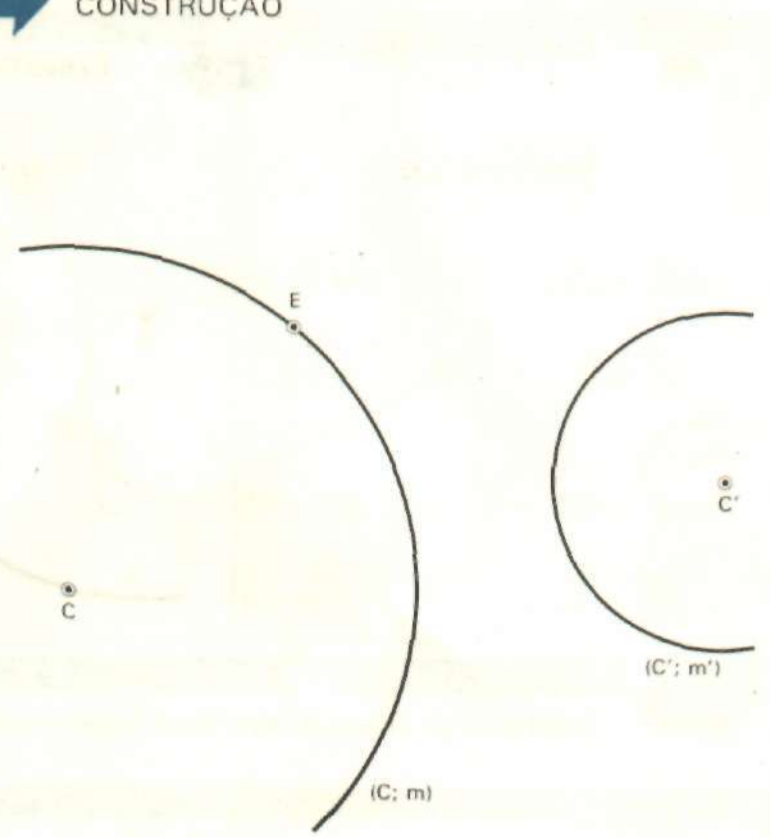
PROPRIEDADE ℂ			FIGURA φ (LG)	PODE-SE TRAÇAR φ?
DISTÂNCIA TAMANHO determinado	de	UM PONTO POSIÇÃO determinada	L1:	....
DISTÂNCIA TAMANHO determinado	de	UMA RETA POSIÇÃO determinada	L2:	....
EQÜIDISTÂNCIA IGUALDADE determinada	de	DOIS PONTOS POSIÇÕES determinadas	L3:	....
EQÜIDISTÂNCIA IGUALDADE determinada	de	DUAS RETAS POSIÇÕES determinadas	L4:	....
VER SOB ÂNGULO TAMANHO determinado	um	SEGMENTO POSIÇÃO determinada	L5:	....

486 **Qual a teoria mínima — TM — do DG?**

TM = MF + LG + Geometria

487 **Aplique a TM do DG resolvendo sozinho o próximo problema:**





R: r = ...35...... mm.

RACIOCÍNIO:

$\overline{O}$ [?] *está em* $\overrightarrow{CE}$. *Procure outra linha — LG — que passe por ele:*

$\overline{O}$ [?] será eqüidistante de dois pontos que sejam determinados? Ou da- *do (como* $\overline{C}$'*) ou obtível como* [?]? *Procure... para que* m *precisa ser* dado?

ROTEIRO *(só o como, sem o porquê):*

1º) Marca-se $\overline{R}$ em $\overline{EC}$ tal que ER = m'.

2º) Traça-se a mediatriz — L3 — de $\overline{RC'}$, obtendo $\overline{O}$ em $\overrightarrow{CE}$.

3º) Acha-se $\overline{E}$' ligando $\overline{O}$ com $\overline{C}$'.

4º) Traça-se a resposta ($\overline{O}$; r), c.q.c.

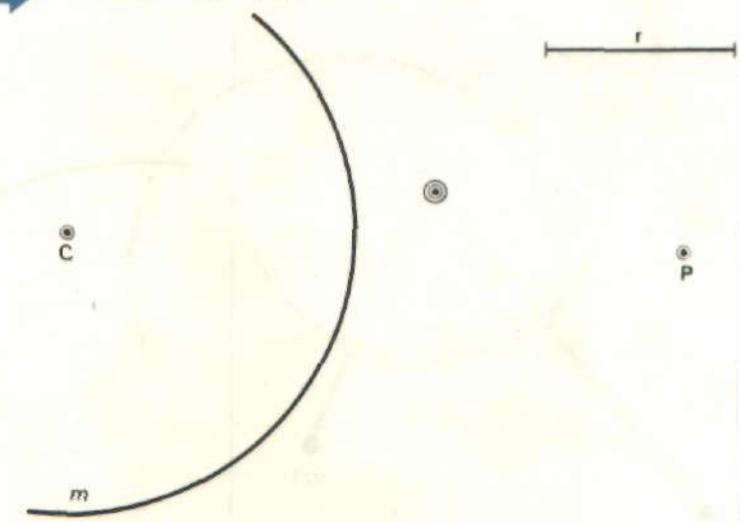
c.q.c. = como queríamos construir.

489 **rPC**

Você resolve sozinho $\Longleftrightarrow$ já está bom.

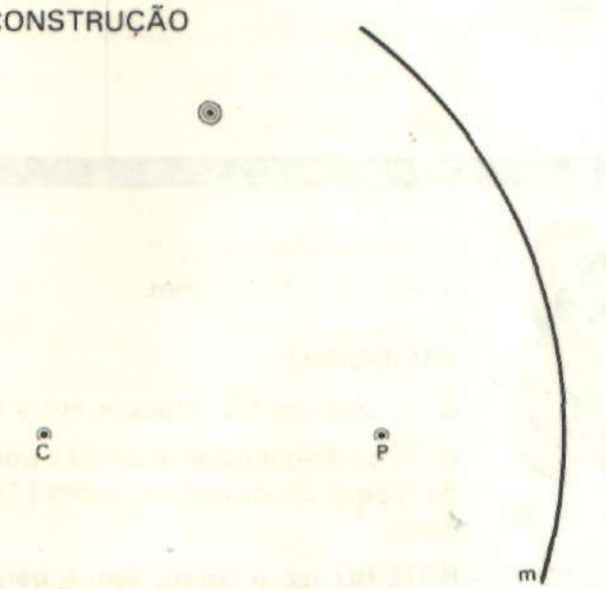
EG

CONSTRUÇÃO



ou novo EG ou ANALOGAMENTE
(ou e/ou...)

CONSTRUÇÃO



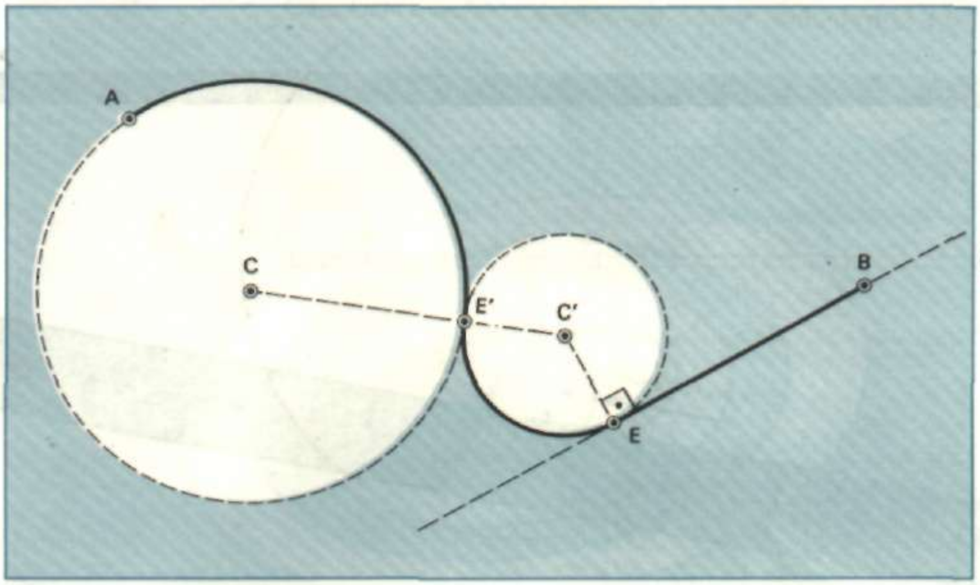
490 **Há outros problemas?**

Sim. No livro 2.

491 **O que significa** concordância?

É um *"termo técnico"*:

CONCORDÂNCIA = TANGÊNCIA + SUAVIDADE.



De $\overline{B}$ até $\overline{A}$ está havendo concordância em $\overline{E}$ e em $\overline{E}'$ (onde há uma inflexão).

Uma linha cheia e uma tracejada não são concordantes entre si.

492 **Tem utilidade?**

a. Arquitetura: abóbadas sobre vãos como janelas, portas, etc.

b. Engenharia Civil: *antigamente havia concordância circular entre uma* curva e as retas de estradas; com o aumento da velocidade dos veículos, hoje a concordância tornou-se mais sofisticada.

c. Engenharia Mecânica: em desenhos de polias com correias, de juntas, etc.

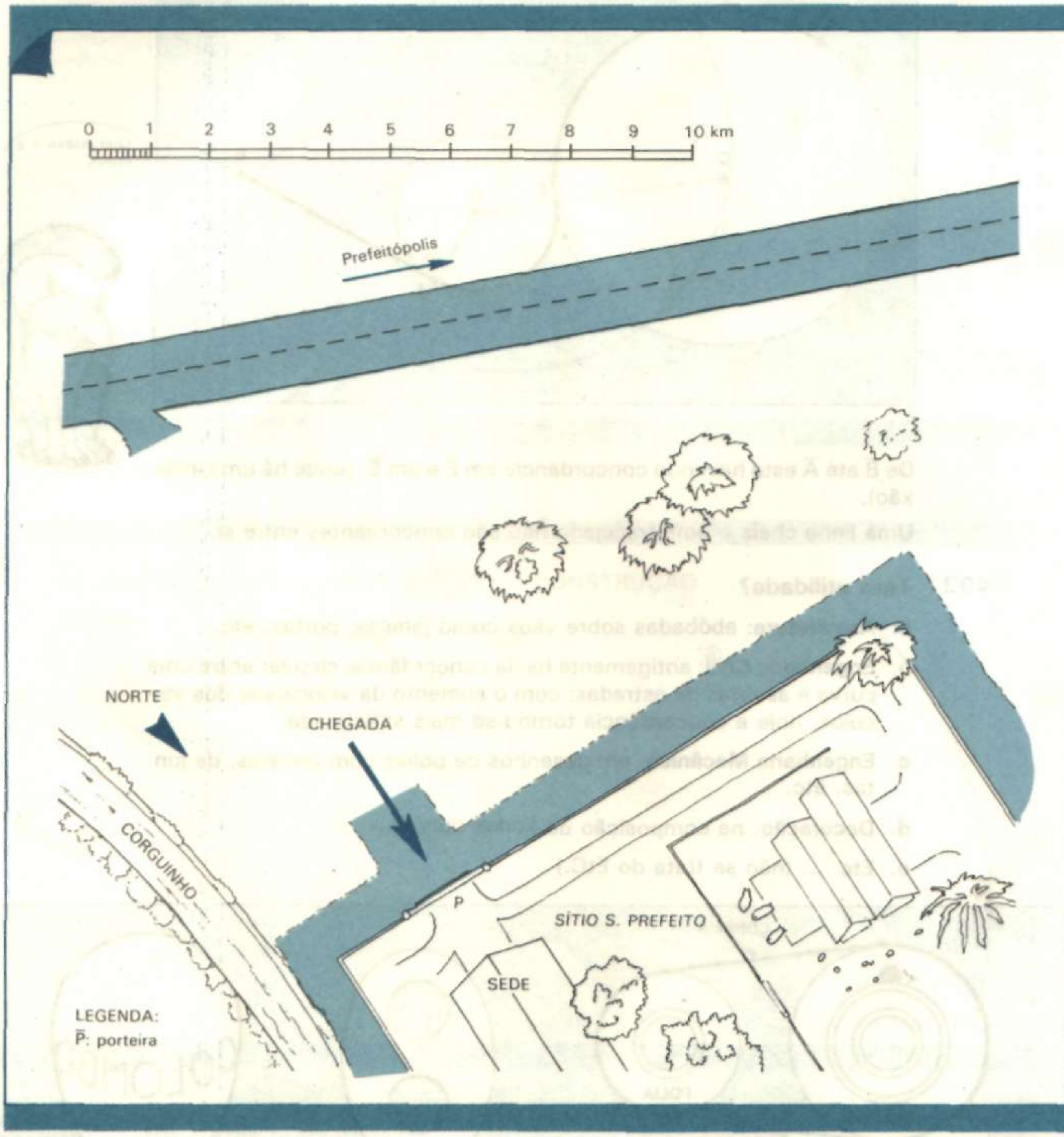
d. Decoração: na composição de lindas curvas...

e. Etc. ... (não se trata do EtC.)

493 **Estou curioso a respeito daquele "etc."...**

São problemas. Resolva o seguinte (desenhe o EG à parte):

O prefeito quer chegar suavemente, adentrando perpendicularmente à porteira da sede. Qual é o raio, em metros, da nova estrada circular a ser construída, vindo da cidade?



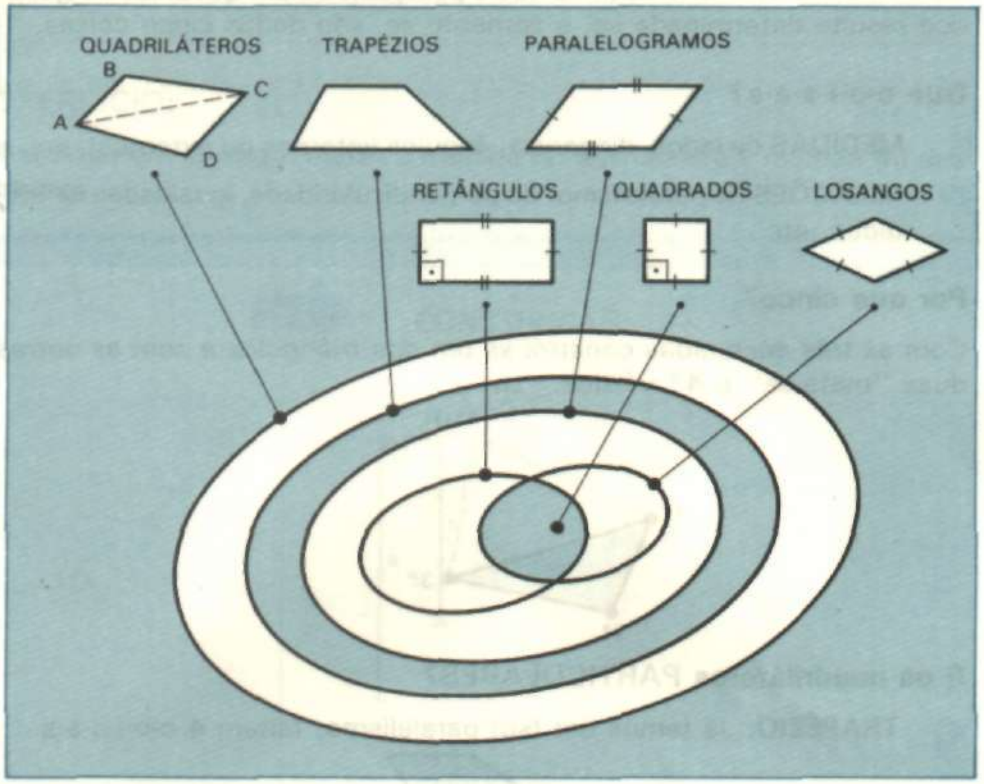
R: Raio = ...4 000.... m.

II QUADRILÁTEROS

494

Código gráfico:

indicam paralelas



Também em quadriláteros: nch.

Notação Cíclica Horária.

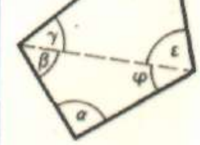
Os matemáticos que propuseram a Teoria dos Conjuntos sabiam o que estavam fazendo.

495

Cada um desses quadriláteros é:
genérico no seu subconjunto e é
particular no conjunto "superior".

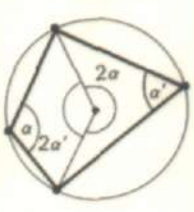
496 **Cada diagonal reparte um quadrilátero em** DOIS **triângulos.**

Por isso, a soma dos 4 ângulos internos é 360°.



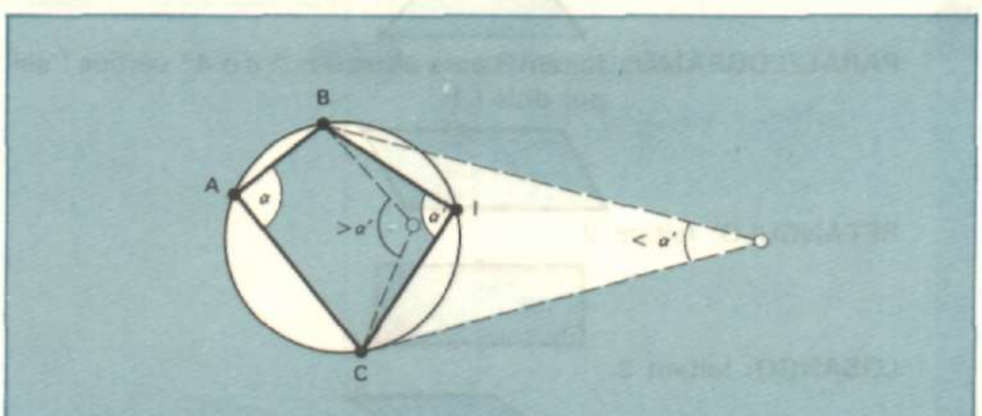
$\alpha + (\beta + \gamma) + \delta + (\varepsilon + \varphi)$ somam 360°

497



$2\alpha' + 2\alpha = 360°$

$\boxed{\alpha' + \alpha = 180°}$



Por 3 vértices passa uma e uma só circunferência. Se, e apenas se, ela contiver o 4º vértice (I), o quadrilátero ABIC será inscritível e conclui-se:

ABIC INSCRITÍVEL ⇐(α e α' INSCRITOS)⇒ $\alpha + \alpha' = 180°$

Todo retângulo (= quadrado) é inscritível, pois os ângulos opostos são suplementares.

498 **Como determinar um quadrilátero?**

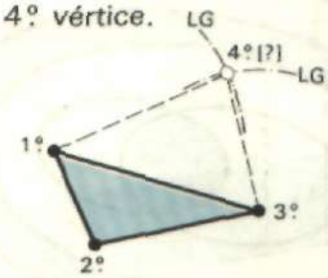
A FORMA ⇒ TAMANHO, (mas não a posição), de um quadrilátero genérico resulta determinada se, e somente se, são dadas cinco coisas.

499 **Que c-o-i-s-a-s?**

- MEDIDAS de lados, diagonais, ângulos (internos ou externos), etc. e
- RELAÇÕES de paralelismo, de perpendicularidade, igualdades de medidas, etc.

500 ***Por que cinco?***

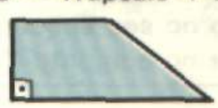
Com as três adequadas constrói-se um dos triângulos e com as outras duas "mata-se" o 4º *vértice.*



501 **E os quadriláteros** PARTICULARES?

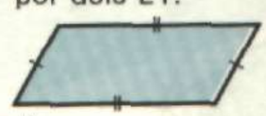
TRAPÉZIO: Já temos um (só) paralelismo; faltam 4 c-o-i-s-a-s...

TRAPÉZIO RETÂNGULO = Trapézio + Ângulo reto: faltam 3 coisas.



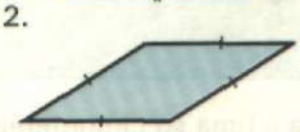
TRAPÉZIO ISÓSCELES = Trapézio + Uma igualdade: faltam 3 coisas.

PARALELOGRAMO: faltam 3 para obter um △ e o 4º vértice "sai" por dois L1.



RETÂNGULO: faltam 2.

LOSANGO: faltam 2.



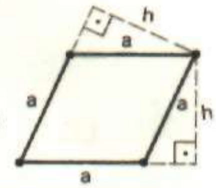
QUADRADO: falta 1 (comprimento).

502 **Agora nós perguntamos: e um inscritível?**

R: Falta .... porque ....

....

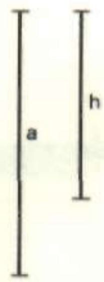
503 EXERCÍCIO:



Construir um losango, dadas a medida (a) dos lados e a medida (h) das alturas.

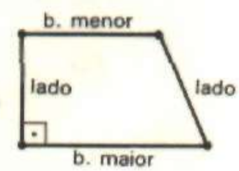
EG

CONSTRUÇÃO



R: Diagonal maior = ...65....... mm.

504 EXERCÍCIO:



Obter o desenho de um trapézio retângulo de base maior 60 mm e lados 20 e 30 mm.

EG

CONSTRUÇÃO

R: Diagonal maior = ...63....... mm.

505 EXERCÍCIO:

Construir um paralelogramo de diagonais 80 e 60 mm e que formam 30° entre si.

EG

CONSTRUÇÃO

R: *Lado maior = ...67...... mm.*

506 EXERCÍCIO:

Construir o quadrilátero inscritível ABCD (nch) com AB = 50 mm; BC = 54 mm; ADC = 120° e AD = DC.

EG

CONSTRUÇÃO

Comece o EG pela circunscrita e "encaixe" ABCD.

R: Raio da circunf. circunscrita = ...30...... mm.

507 COORDENADAS CARTESIANAS:

A posição de um ponto no plano de desenho resulta determinada por duas coordenadas cartesianas x e y (números reais).

$$\overline{P} = (x;\ y)u$$

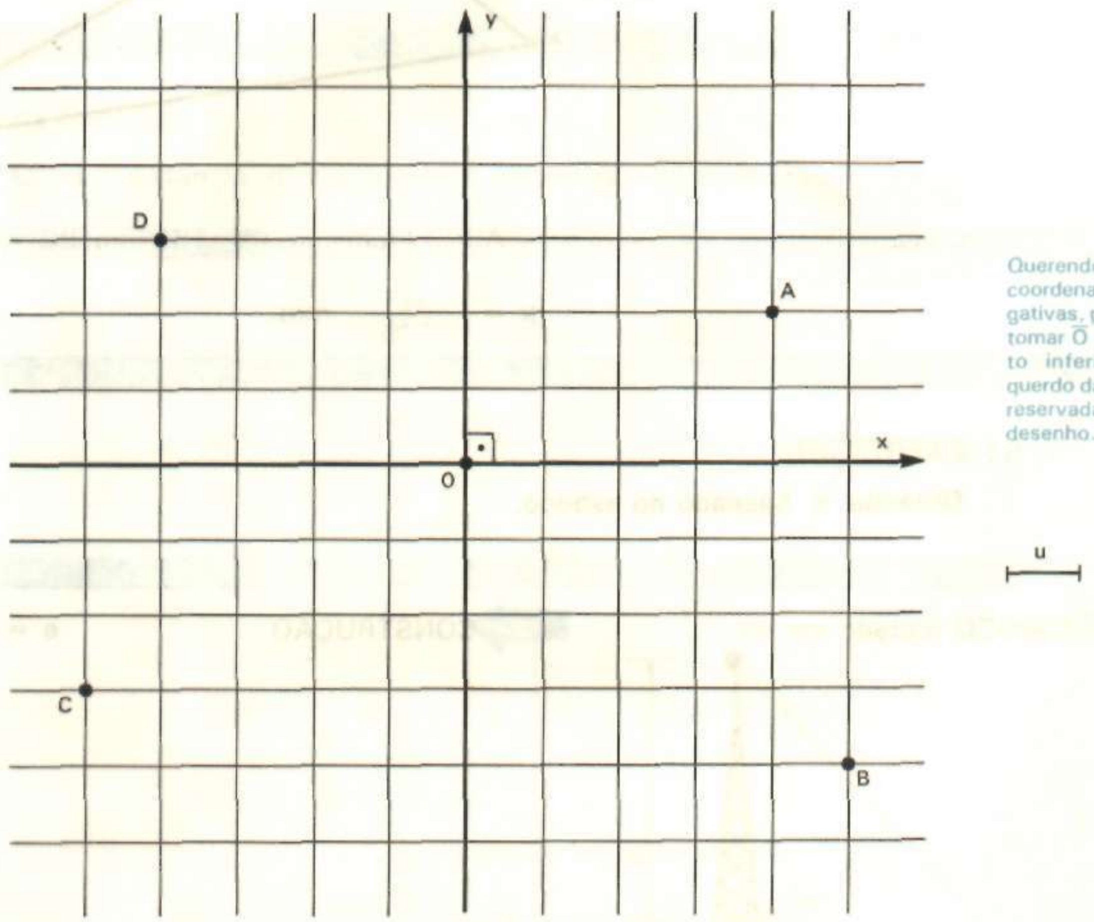
x chama-se ABSCISSA, sendo POSITIVA para a DIREITA.

y chama-se ORDENADA, sendo POSITIVA para CIMA.

u é a unidade, em geral mm.

O é a origem.

$$\overleftrightarrow{x} \perp \overleftrightarrow{y}$$



Querendo evitar coordenadas negativas, pode-se tomar $\overline{O}$ no canto inferior esquerdo da região reservada para o desenho.

Exemplos:

A = (4; 2) u

B = (5; −4) u

C = (−5; −3) u

D = (−4; 3) u

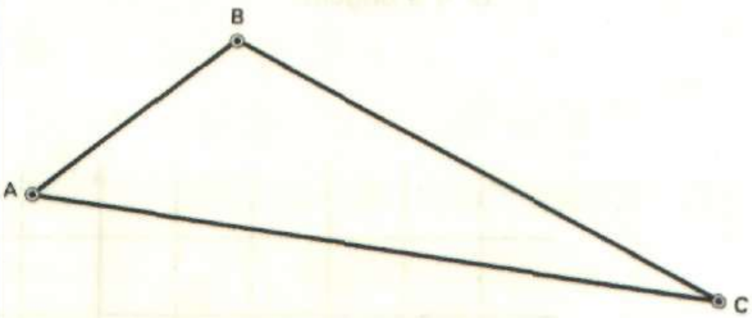
508 Daremos agora uma série de exercícios abrangendo a matéria deste livro 1, mas sem indicar a qual ou quais assuntos se referem. É isso que sucede na vida profissional.

509 EXERCÍCIO:

Ache a distância do circuncentro $\overline{E}$ ao incentro $\overline{S}$ do $\triangle ABC$.

ROTEIRO:

CONSTRUÇÃO

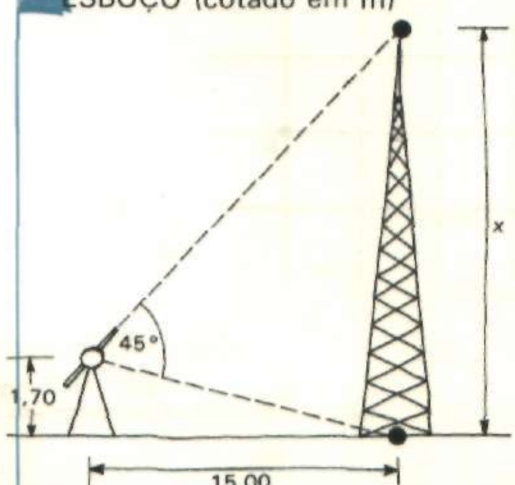


R: = ...37.... mm.

510 EXERCÍCIO:

Obtenha x baseado no esboço.

ESBOÇO (cotado em m)



CONSTRUÇÃO

e = 1:200

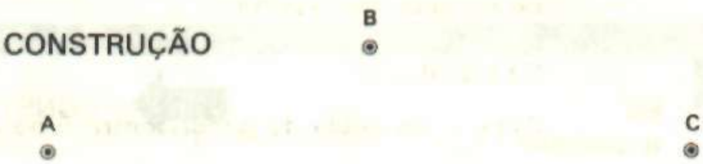
R: = ...12.... m.

511 EXERCÍCIO:

Obtenha x na escala do desenho.

EG

CONSTRUÇÃO



R: x = ...84... mm.

512 EXERCÍCIO:

Obter a distância d e o ângulo α na posição de equilíbrio.

ESBOÇO
(cotado em m)

CONSTRUÇÃO

Roldanas de diâmetros desprezíveis.
Desprezar também atrito, peso dos fios, etc.

Escala de comprimentos:

Escala de forças:

R: d = ...4,2... m e α = ...76°...

513 EXERCÍCIO:

Qual o valor decimal do co-seno de um ângulo cujo seno vale $\frac{3}{5}$?

EG
u qualquer

CONSTRUÇÃO

R: ......0,8......

514 EXERCÍCIO:

Um topógrafo mediu AB = 52 m, $\overline{BC}$ = 73 m, ∢ABC = 75° e ∢BCD = 60°. Quanto medem os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ do terreno, sabendo que BD = 78 m?

ESBOÇO
(em m e em graus)

CONSTRUÇÃO
Escala 1:200.

R: AD = ...28.... m e CD = ...78.... m.

515 OBSERVAÇÃO:

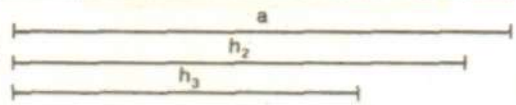
Para resolver o problema seguinte lembre-se de que o $\triangle ABC$ é genérico e recorde a nomenclatura de triângulos.

516 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle ABC$, dados: $BC = a$ e as alturas internas $BH_B = h_2$ e $CH_C = h_3$.

EG

CONSTRUÇÃO

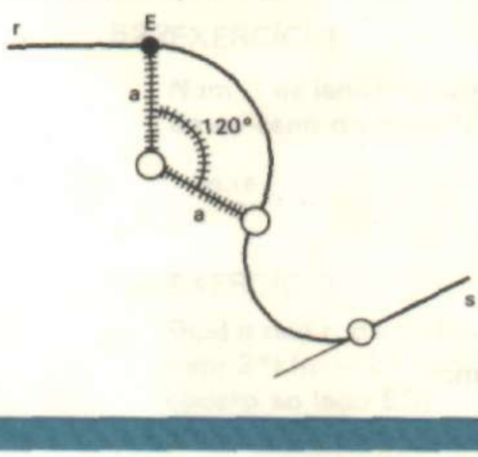


R: AB = 63 mm.

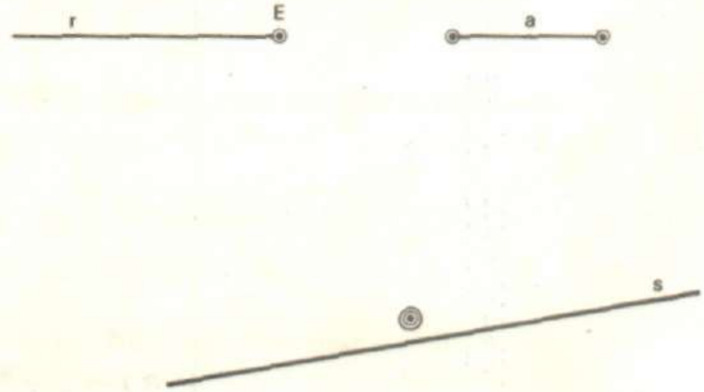
517 EXERCÍCIO:

Desenhar a concordância da semi-reta $\overrightarrow{Er}$ com a reta $\overleftrightarrow{s}$, com os dados abaixo:

EG (complete-o):



CONSTRUÇÃO



518 EXERCÍCIO:

As cordas $\overline{PX}$ (da ⊙ maior) e $\overline{PY}$ são colineares; o pt.m. de $\overline{PX}$ dista m de $\overline{A}$. Qual o comprimento de $\overline{PY}$?

EG

CONSTRUÇÃO

R: PY = ...38..... mm.

519 EXERCÍCIO:

O centro de uma ⊙ vê a corda $\overline{AB}$ sob ∢ $\hat{a}$. Qual é o comprimento do raio dessa ⊙?
Dados: AB = 39 mm e α = 45°.

EG

CONSTRUÇÃO

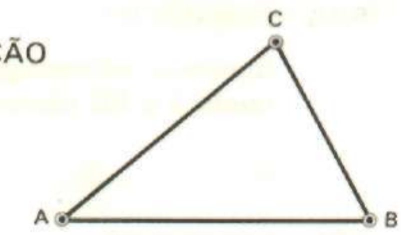
R: r = ...50..... mm.

520 EXERCÍCIO:

Qual o raio r_C da ⊙ circunscrita ao △XYZ, que é semelhante ao △ABC na razão $\frac{5}{7}$, sendo o △ABC o 1º considerado.

ROTEIRO

CONSTRUÇÃO



R: r_c = 29,4 mm.

521 EXERCÍCIO:

a $r_c h_2$ (h_2 é o comprimento de $\overline{BH_B}$; considere apenas a altura interna).

EG

ROTEIRO

Para serem resolvidos em folhas avulsas.

522 EXERCÍCIO:

Num △ de lados na proporção 4:5:6, qual é o valor decimal aproximado do co-seno do maior ângulo?

R: 0,16

523 EXERCÍCIO:

Qual o raio r_c da ⊙ circunscrita num △ABC, sabendo que: 1º) BC = 50 mm; 2º) h_1 = 27 mm (altura relativa ao lado $\overline{BC}$); 3º) α = 75° (ângulo oposto ao lado $\overline{BC}$).

R: ....

524 EXERCÍCIO:

Trace por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$, de modo que os pontos médios dos dois segmentos determinados entre $\overleftrightarrow{r}$ // $\overleftrightarrow{s}$ e entre $\overleftrightarrow{s}$ // $\overleftrightarrow{t}$ distem m entre si.

R: ....

525 EXERCÍCIO:

Construa um retângulo ABCD, com os vértices na ⊙ dada, com $\overline{AB}$ contendo $\overline{S}$ e $\overline{BC}$ contendo $\overline{R}$.

R: ....

526 EXERCÍCIO:

Obtenha a distância entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ **e o ponto** $\overline{P}$**.**

$\overline{A}$ = (−60; O) mm; $\overline{B}$ = (0; 30 mm)

$\overline{P}$ = (30; 30) *mm.*

R: Distância = ...14....... mm.

527 EXERCÍCIO:

Obter na circunferência ($\overline{O}$; OP) os pontos $\overline{X}$ e $\overline{X}'$ que vêem o raio $\overline{OP}$ sob 75°.

$\overline{O}$ = (O; O) mm; $\overline{P}$ = (60; O) mm.

R: $\overline{X}$ = (...52....; ....30....) mm e $\overline{X}'$ = (....52....; ....−30....) mm.

528 EXERCÍCIO:

Obter o circuncentro $\overline{E}$ de um △ABC, tendo seu baricentro $\overline{M}$ e os pontos médios $\overline{M}_C$ e $\overline{M}_B$ dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

$\overline{M}$ = (O; O) mm; $\overline{M}_C$ = (−30; −40) mm;

$\overline{M}_B$ = (−30; 20) mm.

R: $\overline{E}$ = (....−30....; ....20....) mm.

529 EXERCÍCIO:

Três circunferências de mesmo raio x são tangentes entre si e tangentes internamente à circunf. ($\overline{O}$; 70 mm), sendo $\overline{O}$ = (O; O). Obter x.

R: x = ...32....... mm.

530 **Conclusão do Livro 1:**

Esperamos ter contribuído para a sua formação técnico-científica, incentivando-o *a concluir sozinho as resoluções dos problemas de* DG. Fizemos o que nos foi possível fazer.

Nos outros livros que seguem este volume, procuraremos completar a sua formação básica em Desenho.