2

DESENHO GEOMÉTRICO

MARMO

CARLOS MARMO E NICOLAU MARMO

editora scipione

editora scipione

DIRETORIA
Luiz Esteves Sallum
Maurício Fernandes Dias
Vicente Paz Fernandez
Patrícia Fernandes Dias
José Gallafassi Filho
Antonio Nicolau Youssef
Joaquim Nascimento

GERÊNCIA EDITORIAL
Aurelio Gonçalves Filho

RESPONSABILIDADE EDITORIAL
Valdemar Vello

REVISÃO
chefia - Sâmia Rios
assistência - Miriam de Carvalho Abões
preparação - Irene Hikichi
revisão - Eloiza Helena Rodrigues,
Claudia Blanco Padovani e Dráusio de Paula

GERÊNCIA DE PRODUÇÃO
Gil Naddaf

ARTE
chefia - Antonio Tadeu Damiani
coordenação geral - Sérgio Yutaka Suwaki
assistência de arte - Edson Haruo Toyota
capa e miolo - Ulhôa Cintra Comunicação Visual
ilustrações - Ricardo Henrique e Maurício Negro
pesquisa iconográfica - Alice Reiko Haga

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
José Antonio Ferraz

COMPOSIÇÃO E ARTE-FINAL
Diarte Editora e Comercial de Livros
coordenação geral - Nelson S. Urata
coordenação de arte-final - Silvio Vivian
coord. de composição - Armando F. Tomiyoshi
composição - Maria Aparecida de Souza e
Laurencio Mendes Vilela
arte-final - Marta de Souza, Rogério Sardella e
Jorge L. Barriunuevo

IMPRESSÃO E ACABAMENTO
Artes Gráficas e Editora Parâmetro Ltda.

Editora Scipione Ltda.
MATRIZ
Praça Carlos Gomes, 46
01501-040 São Paulo SP
DIVULGAÇÃO
Rua Fagundes, 121
01508-030 São Paulo SP
Tel. (011) 239 1700
Telex (11) 26732
Caixa Postal 65131

1995

ISBN 85-262-1869-7

03-4
03

Dedicamos o presente curso de Desenho Geométrico aos professores que permaneceram lecionando esta matéria durante os últimos vinte anos e, também, aos nossos alunos, com os quais tanto aprendemos.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

3 POLÍGONOS REGULARES 87

CAPÍTULO

4 HOMOTETIA 121

CAPÍTULO

1

Retrato de Luca Pacioli, pintura de Jacopo del Barbari (c. 1506).

DG MODERNO

I REVISÃO DO LIVRO 1

"Como tornar mais eficientes os cientistas de amanhã." Tema de um congresso em Princeton, EUA, 1988.

001 Para melhorar a formação dos estudantes, há modernamente um consenso mundial de que a Geometria e o Desenho devem ser estudados — com seriedade — no Secundário.

São matérias essencialmente formativas, com reduzidos apelos à memória e que desenvolvem a CRIATIVIDADE científica, que é a capacidade de concluir conhecimentos.

"Deveremos ensinar desenho com régua e compasso aos nossos jovens." Hans Seybold, especialista em Computação Gráfica da Universidade de Munique, Alemanha, 1988.

002 **Por que o DG é matéria** formativa?

Porque tem uma TEORIA MÍNIMA (TM) muito pequena, que consiste de:

TM é o conjunto de conhecimentos necessários e suficientes para que se possa *concluir sozinho* o restante da matéria.

- MÉTODO FUNDAMENTAL **(MF)**
- LUGARES GEOMÉTRICOS **(LG)**
- GEOMETRIA DO PLANO **(GP)**

TM = MF + LG + GP

003 **Qual é o MF?**

É o seguinte:

1.º) Após interpretar o enunciado verbal, desenha-se o ENUNCIADO GRÁFICO (EG) mostrando:

- uma das respostas e
- todos os dados e

obedecendo ao Código Gráfico (Livro 1; n.º 133).

2.º) Começa-se a cópia definitiva desse EG por um dos dados, já ''matando'' (copiando) certos pontos. ''Pré-ver'' qual o melhor começo.

3.º) Prossegue-se ''matando'' o próximo ponto (ou resposta ou auxiliar); ''mata-se'' um ponto desenhando duas linhas (LG) que se cruzam nele. Continuamos a cópia até obter a resposta; obter também as possíveis ''clandestinas'' (que não foram desenhadas no EG).

1º momento: Interprete o texto.
2º momento: Desenhe o EG no rascunho.
3º momento: É o raciocínio que se faz para descobrir como copiar.
4º momento: Escreva o roteiro para guiá-lo durante a construção.
5º momento: Desenhe, com precisão. Momento final: Confira a resposta: errar é humano, mas não conferir é irresponsabilidade...

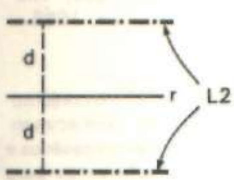
004 Quais os LGs já estudados no livro 1?

L1: LG dos pontos que distam **d** de $\overline{O}$.

É a .... de centro ...... e raio ....

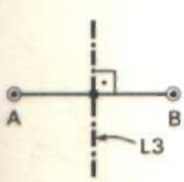
L2: LG dos pontos que distam **d** de $\overleftrightarrow{r}$.

É o par de retas .... à $\overleftrightarrow{r}$ e distantes ...... de $\overleftrightarrow{r}$.



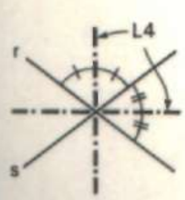
L3: LG dos pontos eqüidistantes de $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

É a reta .... de $\overline{AB}$.



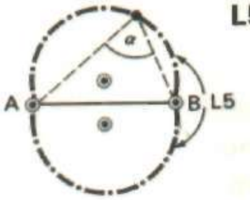
L4: LG dos pontos eqüidistantes de $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$ concorrentes.

É a quadra de .... dos ângulos $\widehat{rs}$.



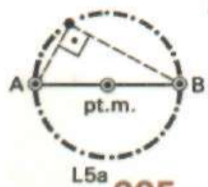
L4a: LG dos pontos eqüidistantes de $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$ paralelas.

É a reta .... e eqüidistante de $\overleftrightarrow{r}$ e de $\overleftrightarrow{s}$.



L5: LG dos pontos que enxergam $\overline{AB}$ sob ângulo $\hat{\alpha}$.

É o par de .... de $\hat{\alpha}$ construídos sobre $\overline{AB}$.



L5a: *LG dos pontos que vêem $\overline{AB}$ sob 90°.*

É a circunferência de .... $\overline{AB}$. *Seu centro é o pt.m. de $\overline{AB}$.*

005 Há outros LGs?

Sim, muitos e neste livro 2 estudaremos outros LGs importantes.

006 E quanto à GP?

A parte da GP incluída na TM do DG consiste de SETE PROPOSIÇÕES **que serão designadas P0, P1, P2, P3, P4, P5 e P6; já estudamos as quatro primeiras no livro 1 e citaremos, em seguida, em quais números.**

As três restantes serão apresentadas neste livro 2 e você as concluirá sozinho (guiado por nós), pois a nossa principal intenção é ENSINAR COMO CONCLUIR **resoluções e demonstrações.**

007 Resumo das proposições já vistas:

Os n.^{os} referem-se ao livro 1:

PO — **Os três teoremas sobre uma corda** ***de uma circunferência.*** — n.º 259

P1 — **Como estabelecer a proporção ordenada dos lados homólogos em** TRIÂNGULOS SEMELHANTES. — n.^{os} 218 a 221 e n.º 402

P2 — TEOREMA DE TALES **num △ e num feixe paralelo.** — n.º 256 e n.^{os} 302 a 305

P3 — ÂNGULOS INSCRITOS **numa circunferência.** — do n.º 330 ao n.º 343

008 **Essa TM não é tão "mínima"...**

Ocorre que você precisa mesmo saber essas sete proposições para empregá-las nas outras partes da Matemática (Geometria Euclidiana, Geometria Analítica, Trigonometria, etc.), na Física, em outras matérias e nas profissões...

009 **Algo mais para rever?**

Sim. Apesar de poderem ser concluídos, quando necessários, convém decorar os OITO PROBLEMAS FUNDAMENTAIS que comparecem como auxiliares na resolução de problemas mais complexos. São os seguintes, com seus nºs do livro 1:

1º) Traçar por $\overline{B} \notin \overleftrightarrow{r}$ a reta $\overleftrightarrow{x} \perp \overleftrightarrow{r}$ (nº 188).

2º) Traçar por $\overline{M} \in \overleftrightarrow{r}$ a reta $\overleftrightarrow{x} \perp \overleftrightarrow{r}$ (nº 192).

3º) Traçar a bissetriz de um ângulo (nº 193).

4º) Traçar por $\overline{A} \notin \overleftrightarrow{r}$ a reta $\overleftrightarrow{x} /\!/ \overleftrightarrow{r}$ (nº 195).

5º) Transportar um ângulo (nº 226).

6º) Dividir um segmento em partes congruentes ou proporcionais (nºs 307 e 311).

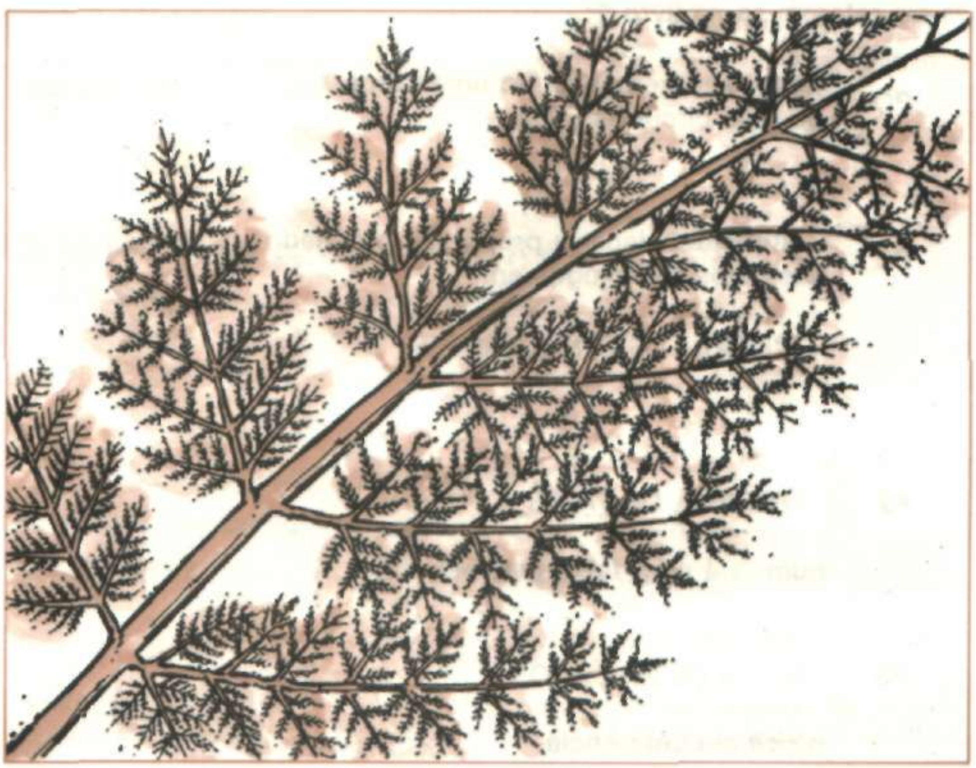
7º) Construir ângulos múltiplos de 7°30' (nº 321).

8º) Construir um arco capaz (nºs 349 a 362).

010 **O estudo deste livro 2 deve, assim, ser precedido pelo do livro 1.**

011 O nosso próximo segmento versará sobre proporções e achamos interessante precedê-lo com um breve histórico:

A Natureza é regida por LEIS HARMÔNICAS até hoje ainda pouco compreendidas.



A bem recente Geometria Fractal — que considera dimensões fracionárias — está estudando fenômenos ainda não devidamente equacionados como, por exemplo, de Dinâmica dos Fluidos, de Biologia, no Estudo das Populações (Ecologia, Geografia, Genética...), etc. É um campo onde o auxílio dos computadores é indispensável. O Homem criou esses instrumentos de trabalho baseado na idéia de que TUDO PODE SER EQUACIONADO; o seu funcionamento baseia-se no Sistema Binário com apenas dois algarismos: o zero (não) e o um (sim). No entanto já se cogita em introduzir um terceiro (talvez) para que mais se assemelhem ao cérebro humano.

Há perto de seis milênios a Matemática começou a organizar os conceitos naturais de número (quantos?), de grandeza (quanto?), de forma (ângulos), de sons (Harmonia Musical), de posições relativas (Artes Plásticas, Arquiteturas...) e de cores.

Demócrito afirmava que a menor partícula de matéria era o átomo (indivisível), que a vida se originou na lama primitiva, que havia outros mundos, etc.

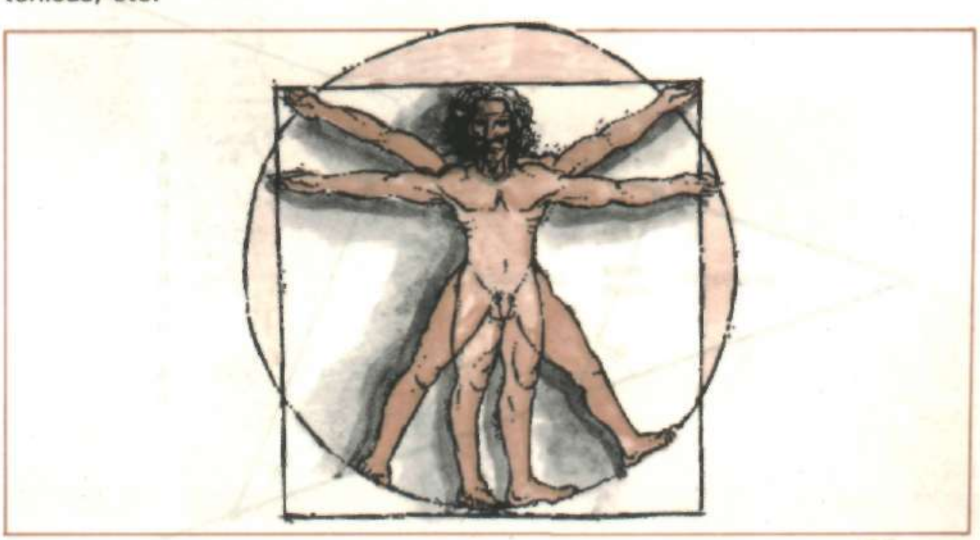
No Egito, na Mesopotâmia (Babilônia), em Eblá (Síria), na Índia, na China e em outros centros menores, esses assuntos eram estudados conforme as tendências culturais, as necessidades e as ferramentas disponíveis em cada região. Os egípcios, com seus papiros, eram mais geômetras; os babilônios, com suas "tabuinhas" de barro, mais algébricos, etc.

Por volta do século V a.C., na "Idade Heróica da Matemática", os povos do Mediterrâneo fizeram uma Revolução Cultural após a derrota dos ricos invasores persas. "Prefiro saber os porquês a ganhar o Reino da Pérsia", disse Demócrito.

Enfrentando os DOGMAS da época — a História se repete —, Anaxágoras afirmou que o Sol não era uma divindade e por essa heresia foi preso; não tivesse sido professor do grande herói e político Péricles — a História se repete —, não teria saído da cadeia... Anaxágoras escreveu um *best-seller* sobre a natureza que era vendido em Atenas por uma dracma.

Bebendo em fontes egípcias e babilônias, os gregos compilaram conhecimentos. Surgiram as escolas JÔNIA (Tales) e PITAGÓRICA.

Pitágoras (570 a.C.) influenciou Platão que declarou que "os números são os mais alto grau de conhecimento". Foram estudadas dez proporções notáveis, entre as quais a HARMÔNICA, a DIVINA ou ÁUREA e a MÉDIA GEOMÉTRICA, encontradas nas figuras geométricas, nas notas musicais, na geometria dos seres vivos (flores, organismos marinhos e até nos seres humanos), nas obras arquitetônicas, etc.



HARMONIA MUSICAL

quinta quinta

12 : 9 :: 8 : 6

quarta quarta

oitava

Frei Luca de Bologna (século XV) escreveu até um tratado sobre a proporção divina, ilustrado pelo grande Leonardo da Vinci. E agora vamos estudar essas proporções...

II SEGMENTOS PROPORCIONAIS

012 O que é uma proporção?

SEGMENTOS → | EXTREMOS | | ← NÚMEROS

$$\bar{a} : \bar{b} :: \bar{c} : \bar{d} \iff \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

MEIOS

Sendo **a, b, c e d**

- **ou** TODOS **segmentos**
- **ou** TODOS **números, medidas dos segmentos.**

013

4ª PROPORCIONAL: **dados 3, obter o 4º.**

É obrigatório informar qual 4º se quer:

ou $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$ **ou** $y = \dfrac{b \cdot c}{a}$ **ou** $z = \dfrac{a \cdot c}{b}$.

014 PROBLEMA:

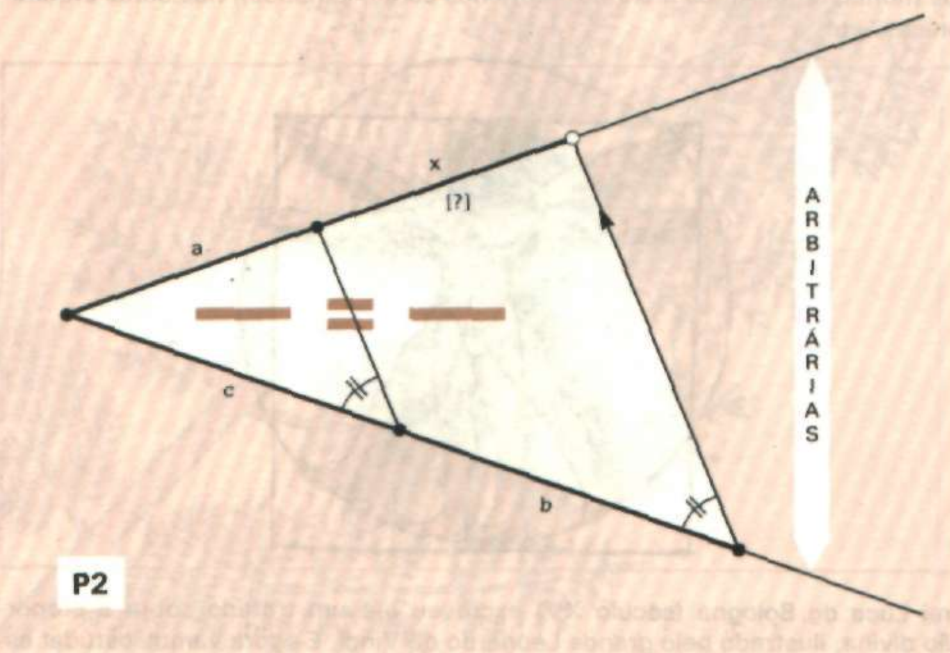
DADOS **a, b, c,**
OBTER $x = \dfrac{a \cdot b}{c}$.

Mais um "ovo" (de codorna).

$$x = \frac{a \cdot b}{c} \iff \frac{a}{c} = \frac{x}{b}$$

x no 2º membro

Multiplicar "em cruz".



● = dado
○ = obtível

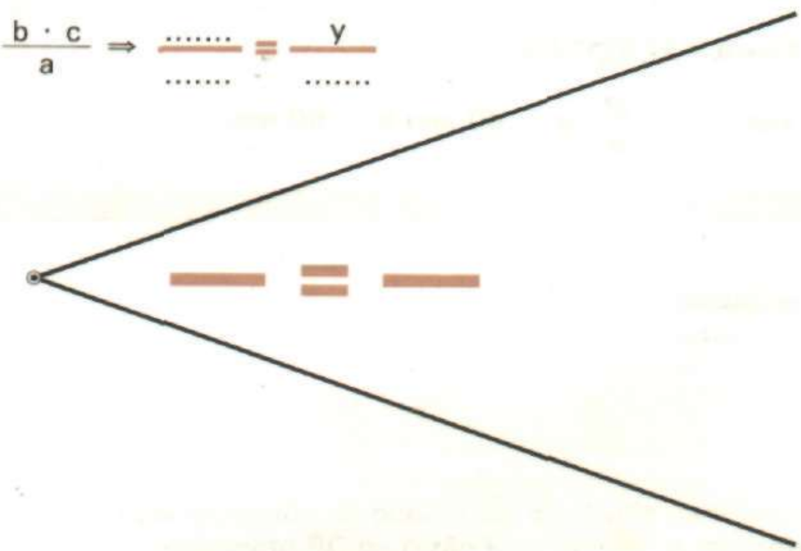
Código: a flecha indica a ordem de obtenção dos pontos.

Que "ovinho" conveniente!

015 EXERCÍCIO:

Dados a = 40 mm, b = 50 mm e c = 35 mm, obter $y = \dfrac{b \cdot c}{a}$.

$$y = \frac{b \cdot c}{a} \Rightarrow \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{y}{\dots\dots}$$



R: y = ...44....... mm.

016 EXERCÍCIO:

Dados a = 40 mm, b = 50 mm e c = 35 mm, obter $z = \dfrac{a \cdot c}{b}$.

$$z = \frac{a \cdot c}{b} \Rightarrow \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

R: z = ...28....... mm.

017 É óbvio (Tales) que os quatro podem ser "encostados" no vértice do ângulo.

018 **3ª PROPORCIONAL: dados 2, obter o 3º.**

É obrigatório saber qual se quer:

ou $x = \frac{a^2}{b}$ ou $y = \frac{b^2}{a}$.

019 EXERCÍCIO PARA EXERCITAR...:

Dados $\bar{a}$ e $\bar{b}$, obter $x = \frac{a^2}{b}$, a = 40 mm b = 50 mm

$x = \frac{a^2}{b} \Rightarrow \frac{.......}{.......} = \frac{.......}{.......}$

R: x = ...32...... mm.

020 EXERCÍCIO **(não é castigo...):**

Dados os mesmos $\bar{a}$ e $\bar{b}$, obter agora $y = \frac{b^2}{a}$.

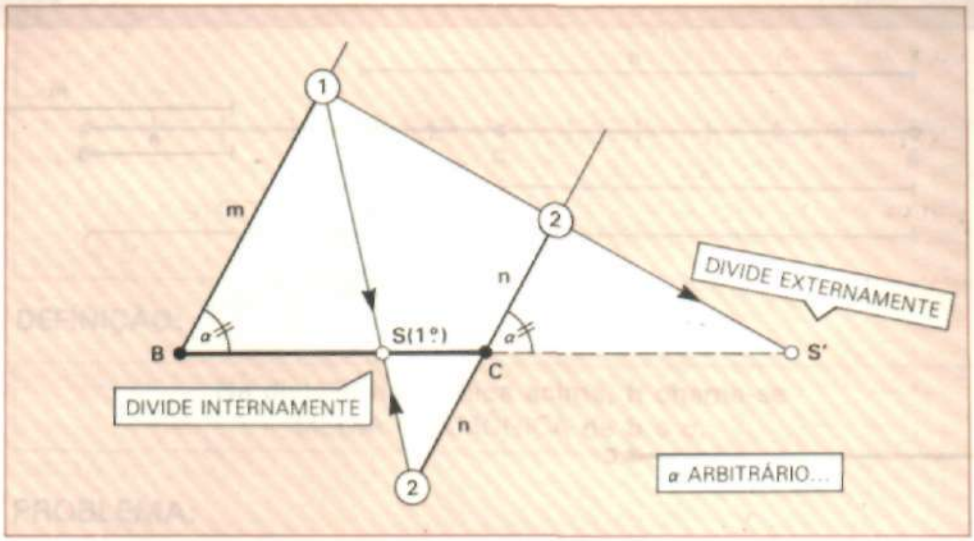
$y = \frac{b^2}{a} \Rightarrow \frac{.......}{.......} = \frac{.......}{.......}$

R: y = ...62,5....... mm.

021 DIVISÃO HARMÔNICA

Compare mensagens

Linguagem gráfica ⇒



$\overline{S}$ "divide" de longe...

$\overline{S}$ e $\overline{S'}$ chamam-se conjugados harmônicos de $\overline{B}$ e $\overline{C}$.

Linguagem técnica ⇒

O par ordenado de pontos ($\overline{S}$; $\overline{S}$') divide harmonicamente o segmento $\overline{BC}$ na razão k = m/n se, e somente se, SB : SC = S'B : S'C = m : n = k.

Linguagem esquemática ⇒

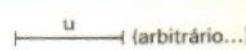
O MESMO

$$\frac{SB}{SC} = \frac{S'B}{S'C}$$

O MESMO

022 EXERCÍCIO:

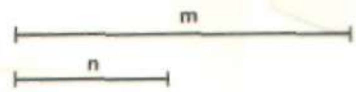
Dividir harmonicamente $\overline{BC}$ na razão 3/2.



R: BS = ...30... mm; BS' = ...150... mm.

023 EXERCÍCIO:

Dividir harmonicamente $\overline{BC}$ na razão $k = m/n$.



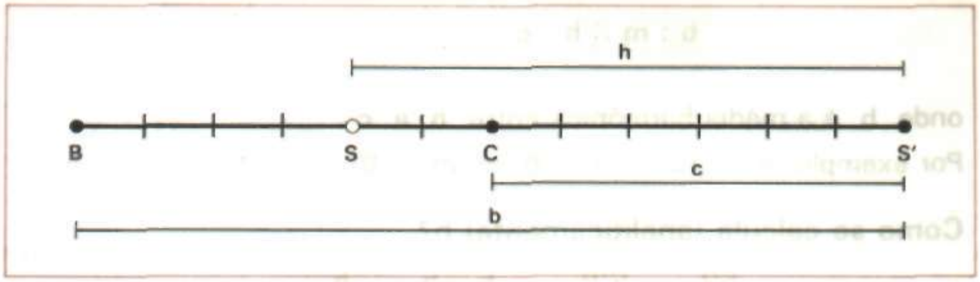
R: BS = ...34... mm; BS' = ...91... mm.

024 EXERCÍCIO:

DADOS $\overline{B}$, $\overline{S}$ e $\overline{C}$,

OBTER o 4º harmônico $\overline{S}'$ de $\overline{BC}$.

025 MÉDIA HARMÔNICA

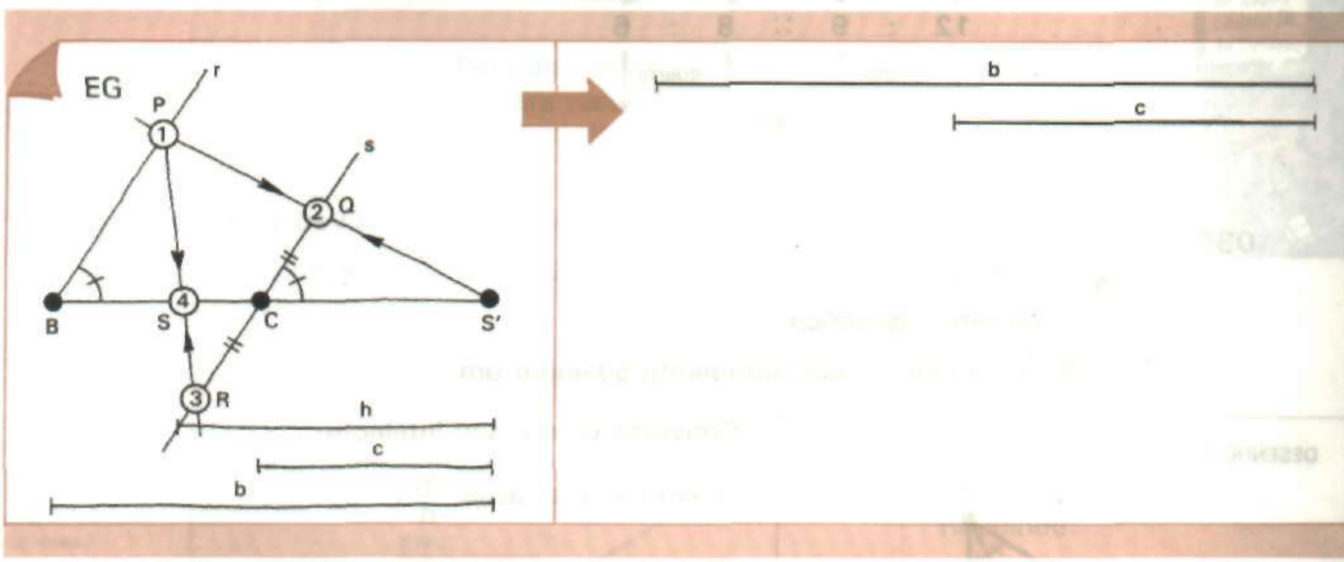


DEFINIÇÃO:

Na divisão harmônica acima, h chama-se
MÉDIA HARMÔNICA **de b e c.**

026 PROBLEMA:

Dados **b** e **c**, obter sua média harmônica **h**.



ROTEIRO:

1º) BS' = b e CS' = c.

2º) $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{s}$.

3º) $\overline{P}$ qualquer em $\overleftrightarrow{r}$.

4º) $\overleftrightarrow{PS'}$ determina $\overline{Q}$ em $\overleftrightarrow{s}$.

5º) CR = CQ e $\overleftrightarrow{RP}$ determinam $\overline{S}$ e h = SS'.

027 Por que se chama média harmônica?

Acreditando que tudo é regido por números, Pitágoras e seus discípulos estudaram a harmonia musical num monocórdio, instrumento com uma só corda e um cavalete móvel, que permite dividi-la numa razão qualquer.

Como esse sábio deve ter "vibrado" ao constatar que toda a harmonia musical estava condensada numa proporção numérica!

028 Qual proporção?

Sendo b = 2c e **m** a média aritmética de **b** e **c**:

$$\mathbf{b : m :: h : c}$$

$m = \frac{b+c}{2}$

onde **h** *é a média harmônica entre* **b** *e* **c** .

Por exemplo: b = 12 e c = 6 ⇒ m = 9

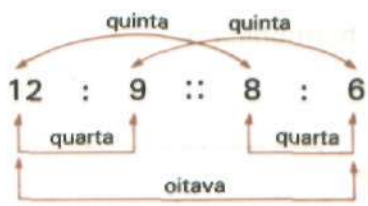
029 Como se calcula (analiticamente) h?

Do nº 021 $\Rightarrow \frac{SB}{SC} = \frac{S'B}{S'C} \Rightarrow \frac{b-h}{h-c} = \frac{b}{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow bc - hc = hb - bc \Rightarrow 2bc = h\,(b + c) \Rightarrow$

Pode-se obter *h* por 4ª proporcional.

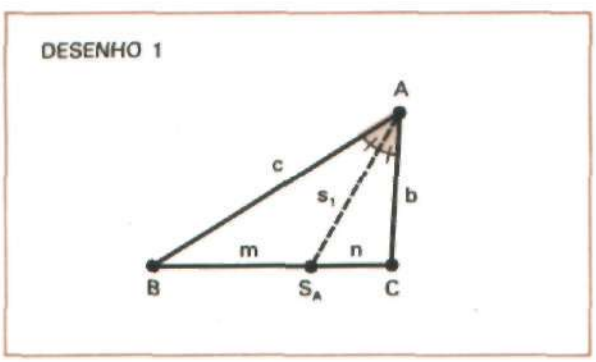
$\Rightarrow \boxed{h = \frac{2bc}{b+c}}$. No exemplo: $h = \frac{2 \times 12 \times 6}{12 + 6} = 8$



030

P4 BISSETRIZES *de um △ genérico.*

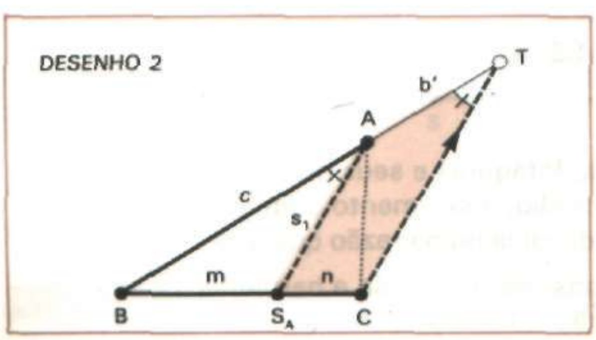
O △ABC é genérico e absolutamente qualquer um.



Converse com o seu intelecto:

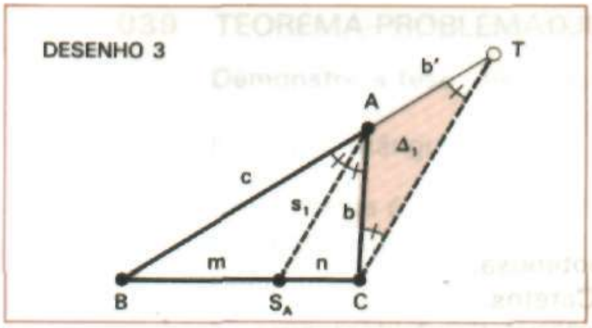
Quanto vale a razão $\frac{m}{n}$?

$$\frac{m}{n} = ?$$



O seu intelecto (Tales) responde:
sendo $\overline{CT} \parallel \overline{S_AA}$, *temos:*

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b'}$$



Como o $\triangle_1$ é isósceles (2 dos ângulos assinalados são alternos-internos e os outros 2 são correspondentes), conclui-se que $b' = b$, logo:

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} \quad \text{c.q.d.}$$

031 "Isso" é uma demonstração?

Sim, e não é um "bicho-de-sete-cabeças"...

032 Eu poderia concluí-la sozinho?

A finalidade principal deste curso é ENSINAR exatamente "ISSO" e não apenas dar matéria...

033 Como devo proceder para concluir sozinho?

Lembre-se sempre — em qualquer matéria — de que:

> Para demonstrar um teorema ou
> para resolver um problema
> deve-se RECAIR na TEORIA MÍNIMA (TM).

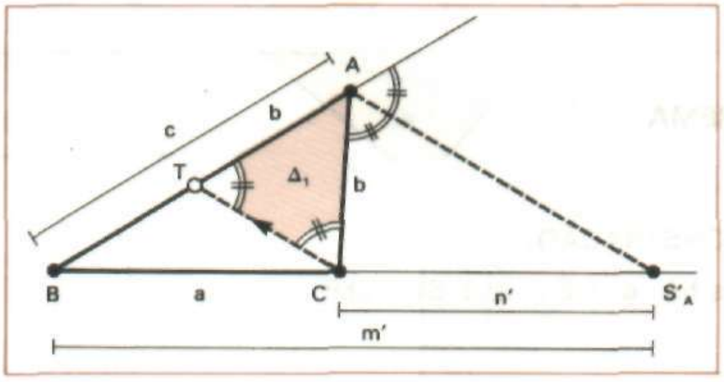
034 Como devo fazer para recair?

Olhe o desenho 1: entre as pouquíssimas coisas — cabíveis — que podem ser feitas, faça aquela (desenho 2) que convém ser feita para recair.

PODE e CONVÉM $\Longleftrightarrow$ DEVE

"Mutatis mutandis. [Lat.] Mudado o que deve ser mudado, i.é., com a devida alteração dos pormenores."
Aurélio

E quanto à bissetriz externa de Â?



Reunindo:

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$$

"Mutatis mutandis" é o nosso analogamente...

035 Reunindo as proposições P4 num único enunciado:

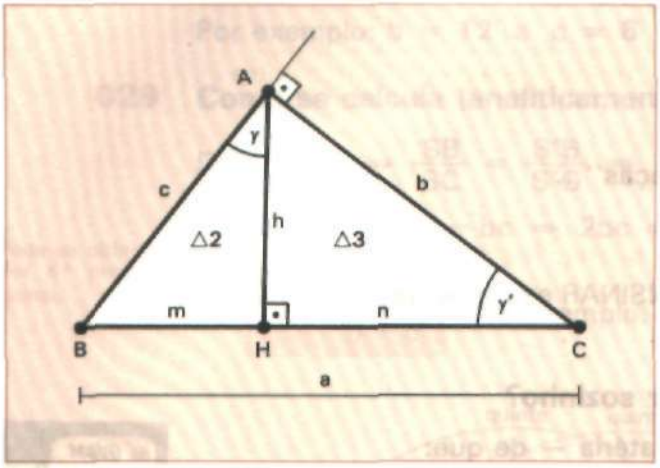
A moda não nos deve obrigar a esquecer a sabedoria acumulada pela Humanidade.

> Num $\triangle$ genérico as bissetrizes interna e externa de um ângulo dividem harmonicamente o lado oposto na razão dos lados do ângulo.

III RELAÇÕES MÉTRICAS NUM △ RETÂNGULO

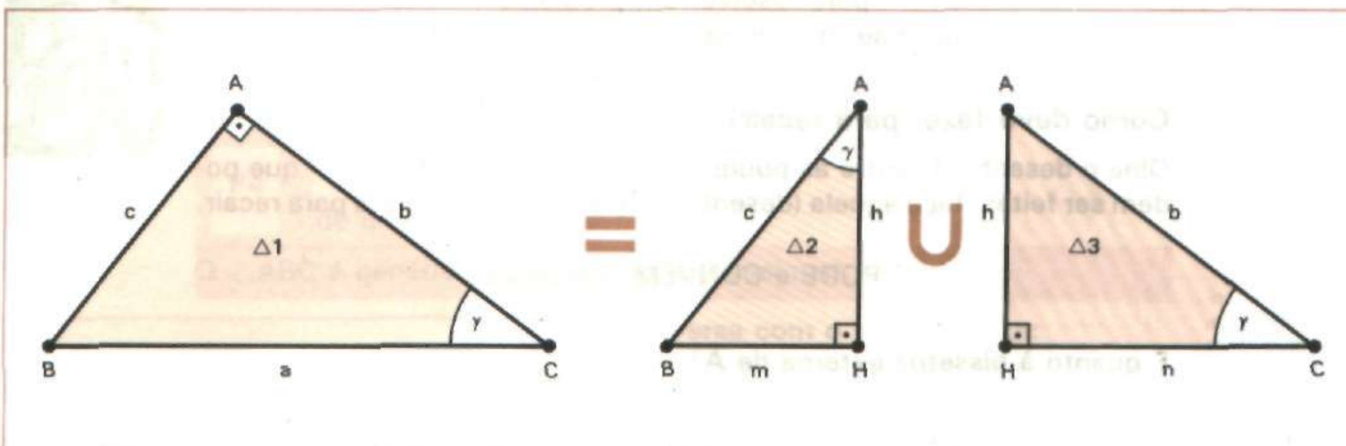
036 **P5** RELAÇÕES MÉTRICAS

num △ retângulo genérico.



a - Hipotenusa.
b, c - Catetos.
h - Altura relativa à hipotenusa.
m, n - Projeções ortogonais na hipotenusa dos respectivos catetos.
$\gamma = \gamma'$ - Por terem lados respectivamente perpendiculares entre si.

037 Você percebeu que há três triângulos?



038 PROBLEMA-TEOREMA:

Quanto vale c^2 ?

RESOLUÇÃO-DEMONSTRAÇÃO:

Em quais triângulos há **c** ? É O QUE SE QUER...

Complete:

△.....∼△..... [P1]⇒ $\dfrac{\text{LADOS DO △.....}}{\text{LADOS DO △.....}}$ $\dfrac{.....}{.....} = \dfrac{.....}{.....}$ $\xrightarrow[\text{CONCLUI-SE}]{}$ $c^2 =$ .....

HOMÓLOGOS = MESMO LUGAR = OPOSTOS A ÂNGULOS **IGUAIS.**

039 TEOREMA-PROBLEMA:

Demonstre a tese $b^2 = a \cdot n$.

Em quais triângulos há b, a, n ?

Um teorema é até mais fácil do que um problema, porque temos ONDE queremos chegar: na TESE...

Deveremos chegar à tese a partir do QUE SE SABE.

No caso, sabe-se que os triângulos são retângulos e semelhantes entre si.

Complete:

$\triangle.....\sim\triangle.....$ ⫤[P1]⟹ $\dfrac{\text{LADOS DO }\triangle.....}{\text{LADOS DO }\triangle.....}$ ⟹ $\dfrac{.....}{.....} = \dfrac{.....}{.....}$ $\xrightarrow{\text{CONCLUI-SE}}$ .... c.q.d.

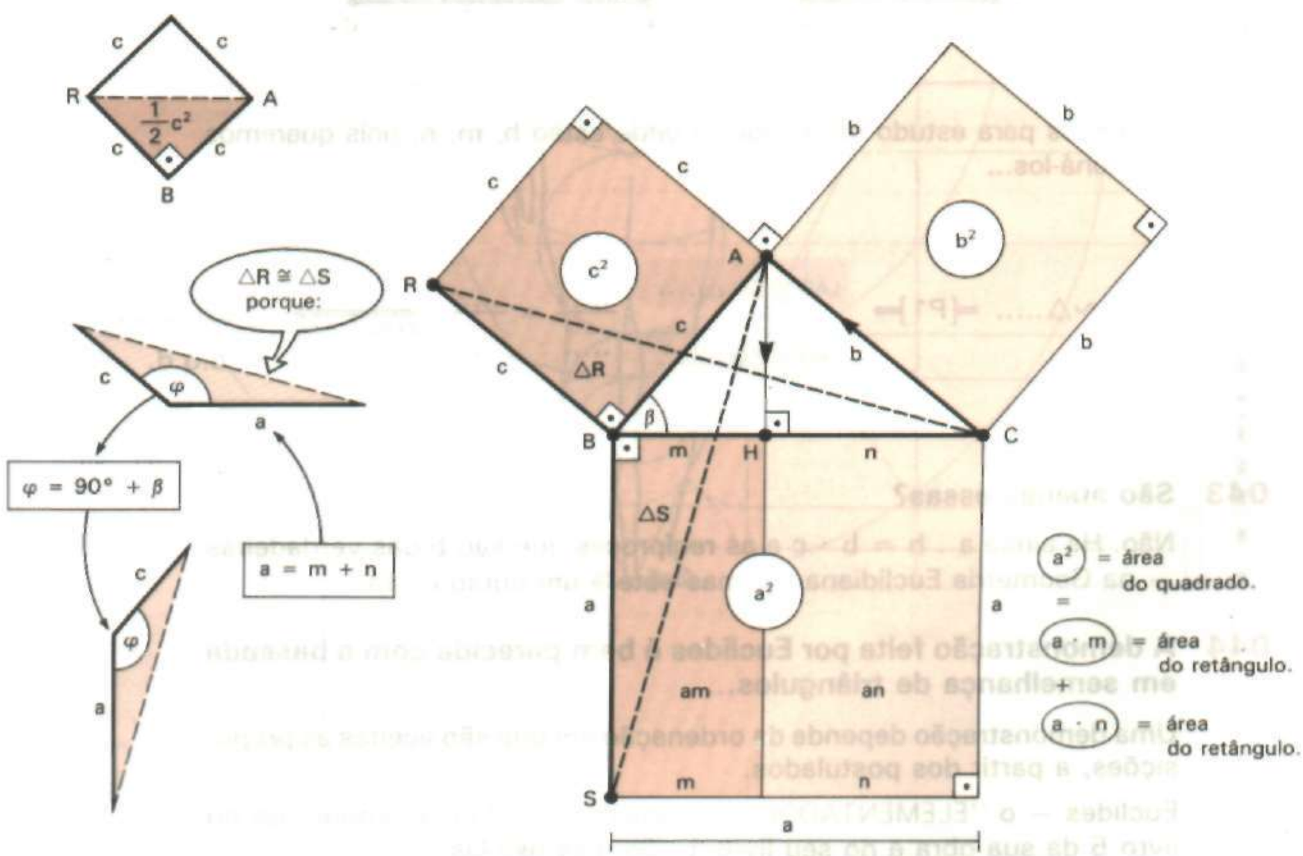
040 QUESTÃO (?):

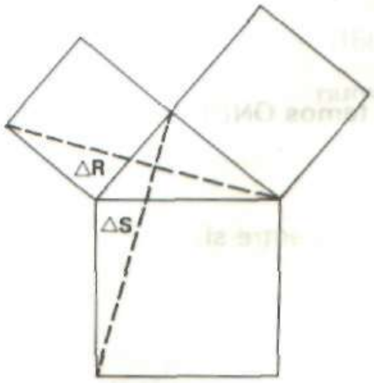
Quanto vale $b^2 + c^2$?

$\left.\begin{aligned} b^2 &= \text{.........} \cdot \text{.........} \\ c^2 &= \text{.........} \cdot \text{.........} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$ $\boxed{b^2 + c^2 = \text{.........}}$ TEOREMA DE PITÁGORAS

041 Como se demonstrava esse teorema na Antiguidade?

No livro 1 de os *ELEMENTOS*, Euclides demonstrou assim:





1º) [LAL] $\Rightarrow$ $\triangle R \cong \triangle S$ $\Rightarrow$ **mesma ÁREA(*)** (mesma base e alturas iguais)

2º) $\triangle$**RBA** e $\triangle$**R** têm a mesma ÁREA = $\mathbf{\frac{1}{2}\, c^2}$

3º) $\triangle$**SBH** e $\triangle$**S** têm a mesma ÁREA = $\mathbf{\frac{1}{2}\, am}$

$\left.\right\}$ [*] $\Rightarrow$ $\mathbf{c^2 = am}$

4º) **Analogamente, no lado direito do desenho** $\Rightarrow$ $\mathbf{b^2 = an}$

5º) Somando AS FIGURAS $\Rightarrow$ $\mathbf{a^2 = am + an}$

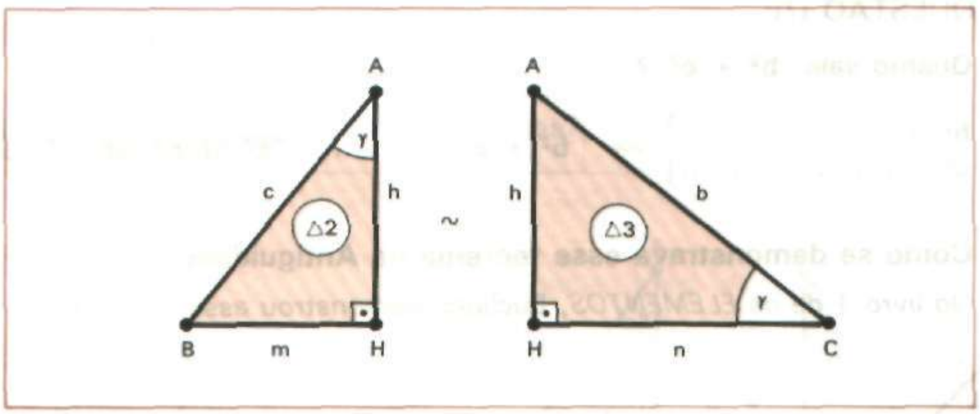
6º) Reunindo $\Rightarrow$ $\mathbf{a^2 = c^2 + b^2}$ c.q.d.

042 Demonstre que $h^2 = m \cdot n$.

O QUE SE SABE

(RACIOCÍNIO)

O QUE SE QUER



Tomamos para estudo os triângulos onde estão **h, m, n,** pois queremos relacioná-los...

$\triangle$.....$\sim\triangle$..... =[P1]$\Rightarrow$ LADOS DO $\triangle$..... / LADOS DO $\triangle$..... $\frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$ $\xrightarrow[\text{CONCLUI-SE}]{}$ .... c.q.d.

043 **São apenas essas?**

Não. Há ainda a . h = b · c e as **recíprocas** que são todas verdadeiras — na Geometria Euclidiana —, mas este é um curso de DG.

044 **A demonstração feita por Euclides é bem parecida com a baseada em semelhança de triângulos...**

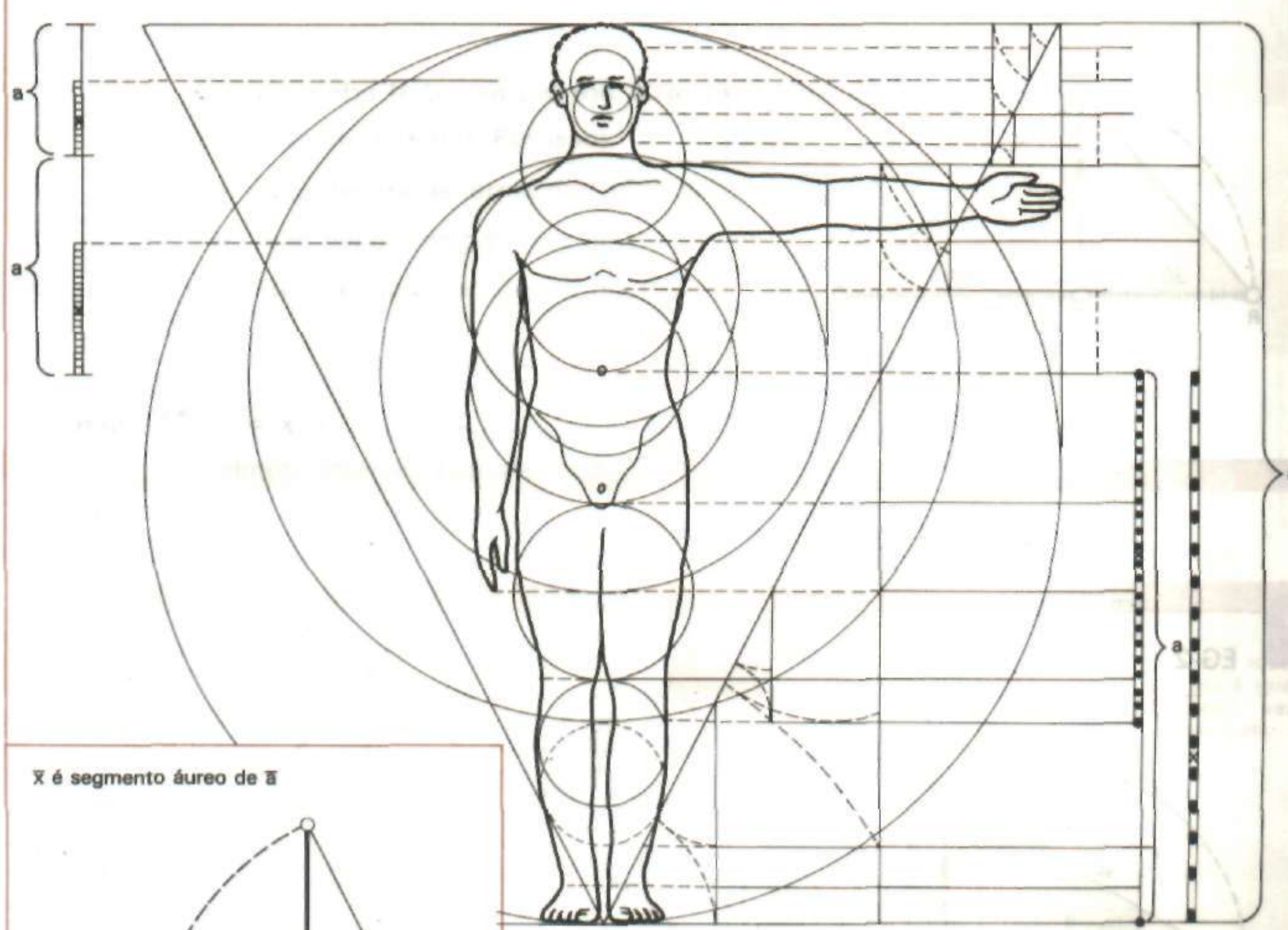
Uma demonstração depende da ordenação em que são aceitas as proposições, a partir dos postulados.

Euclides — o "ELEMENTADOR" — somente estudou as proporções no livro 5 da sua obra e no seu livro 1 não quis usá-las.

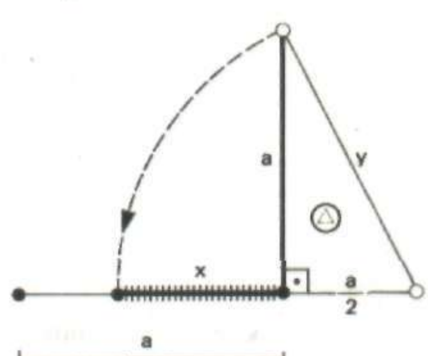
045 Gostaria de saber mais sobre essa obra.

Os *Elementos*, de Euclides de Alexandria, consta de treze livros. Teve mais de mil edições, sendo certamente a obra de Matemática mais editada e nesse aspecto — talvez — só perde para a Bíblia. Foi muito modificada. Felizmente foram encontradas edições árabes traduzidas do original e a obra foi restaurada, voltando ao seu brilho original. É interessante notar que Euclides não se ateve só à Geometria e fez incursões até na Óptica. De fato, todos os ramos do conhecimento estão entrosados entre si e separá-los torna-os compartimentos fechados. Pitágoras, Platão e outros contribuíram até para a música, e um exemplo dessa entrosagem foi o grande gênio universal Leonardo da Vinci.

Segundo
A. Zeising
Leipzig, Alemanha, 1854.



$\overline{x}$ é segmento áureo de $\overline{a}$



046 Como empregar essas reações no DG?

MÉDIA GEOMÉTRICA = MÉDIA PROPORCIONAL

x chama-se média geométrica ou média proporcional de **a** e **b**.

PROPORÇÃO

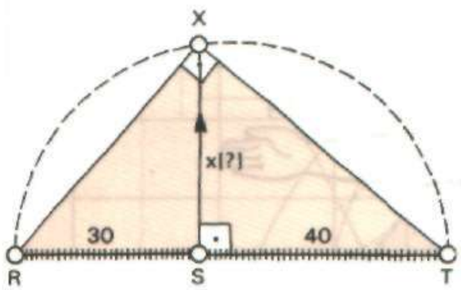
$$\mathbf{a : x = x : b \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = a \cdot b \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot b}}$$

MEIOS — MÉDIA GEOMÉTRICA

047 EXERCÍCIO:

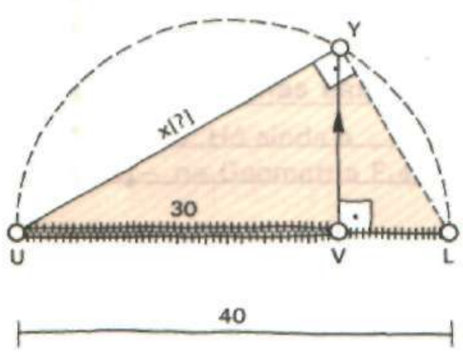
Dados a = 30 mm e b = 40 mm, obter $x = \sqrt{a \cdot b}$.

EG-1



R: x ≃ 34,6 mm.

EG-2



R: x ≃ 34,6 mm.

048 **Roteiro para copiar o EG-1 (um processo):**

1º) Copie RS = 30 mm e ST = 40 mm, "matando" $\overline{R}$, $\overline{S}$ e $\overline{T}$.

2º) $\overline{X}$[?] $\begin{cases} \text{a. Está na perpendicular (mera cópia).} \\ \text{b. Vê } \overline{RT} \text{ sob } 90° \implies \text{L5a.} \end{cases}$

O L5a é a semicircunferência de diâmetro $\overline{RT}$.

O quê?... Não sabe traçá-la?... O centro é no pt.m. de $\overline{RT}$, que se obtém traçando a mediatriz...

Se sabia, então desculpe...

049 **Roteiro para copiar o EG-2 (outro processo):**

1º) Copie UV = 30 mm e UL = 40 mm.

2º) $\overline{Y}$[?] $\begin{cases} \text{a. Está na perpendicular.} \\ \text{b. Vê } \overline{UL} \text{ sob } 90° \implies \text{L5a.} \end{cases}$

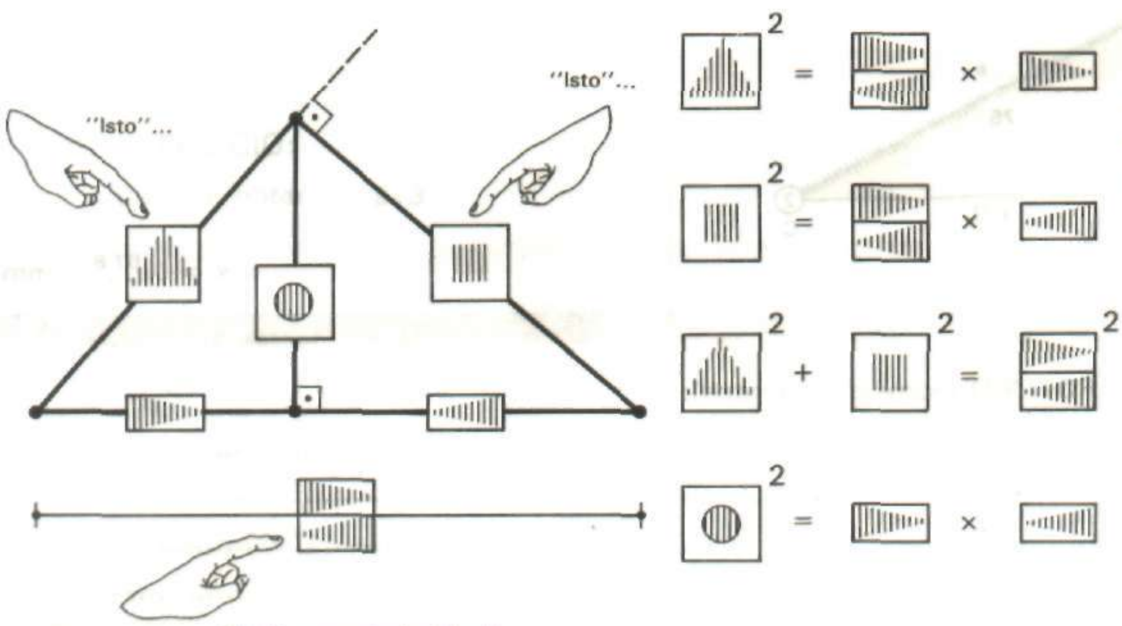
050 **Eu não tinha feito porque me atrapalhei com as letras!**

Isso é muito comum. Por isso:

A linguagem visual atinge diretamente o intelecto.

a. Não decore as letras da "fórmula".
b. Não decore as palavras do texto.
c. Decore, sim, decore, as figuras.

051 Os símbolos representam as medidas dos segmentos. São lidos "ISTO" e simultaneamente aponta-se aquela a que estamos nos referindo no desenho da figura.



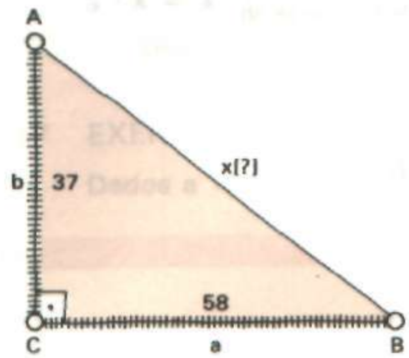
"Isto" ao quadrado é igual...

"Isto" ao quadrado é igual a "isto" vezes "isto"; etc.

052 EXERCÍCIO:

Dados a = 58 mm e b = 37 mm, obter $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

EG

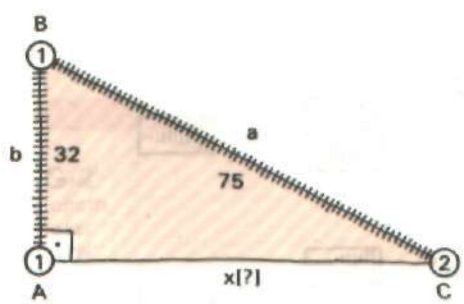


R: x ≃ ...68,7... mm.

053 EXERCÍCIO:

Dados a = 75 mm e b = 32 mm, obter $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (a > b).

EG



R: x ≃ ...67,8... mm.

ROTEIRO (nomeie os pontos):

....

....

....

....

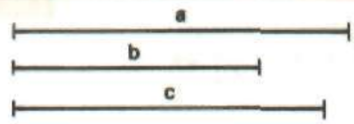
....

054 **EXERCÍCIO:**

Dados $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$, obter $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

Recai-se nos dois anteriores.

RASCUNHO:

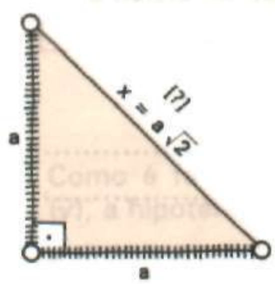


R: $x =$ ....36,5 mm.

055 **EXERCÍCIO:**

Dado $\overline{a}$, obter $\overline{x} \cong \overline{a}\sqrt{2}$.

EG



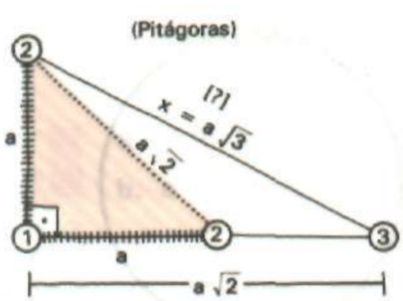
$\overline{AB} \cong \overline{a} \Leftrightarrow AB = a$

R: $x =$ ....35,5 mm.

056 **EXERCÍCIO:**

Dado $\overline{a}$, obter $\overline{x} \cong \overline{a}\sqrt{3}$.

EG

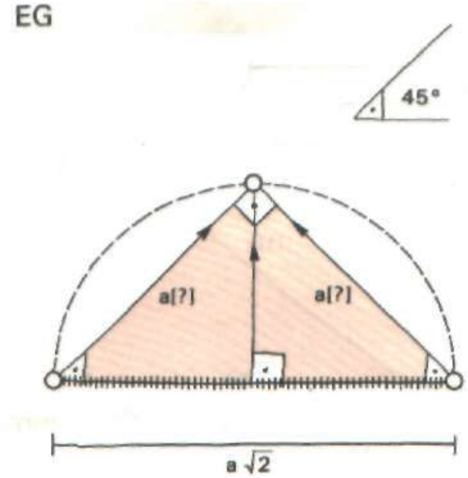


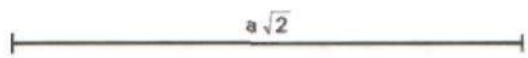
R: $x =$ ....43,5 mm.

057 EXERCÍCIO:

Dado $\overline{a}\sqrt{2}$, obter $\overline{a}$.

EG





R: a ≃ ...47... mm.

058

> **Há vários começos. Nem sempre o 1º caminho que se divisa é o melhor. Convém pesquisar...**

ROTEIRO:

....

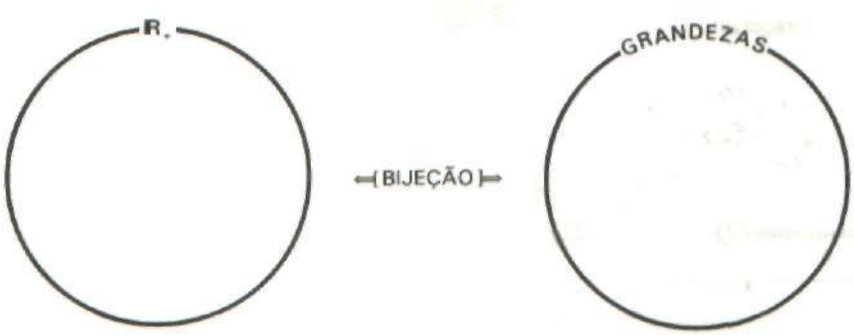
....

....

....

059 Euclides estudou as figuras relacionando-as entre si. A Geometria Moderna estabelece uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{R}_+$ dos números reais não negativos e as grandezas das figuras, mediante o conceito de MEDIDA. Passa então a estudar as figuras estudando as suas medidas, que são NÚMEROS.

Como o zero não tem sinal, "não negativos" significa "positivos com o zero".



IV OPERAÇÕES COM SEGMENTOS

060 Em DG, as únicas operações possíveis com segmentos são as seguintes:

a. SOMA ⇒ DIFERENÇA de segmentos.
Exemplo:
Dados $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, obter $\overline{x} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$.

b. PRODUTO ⇒ QUOCIENTE de segmentos por números. Exemplo:
Dado $\overline{a}$, obter $\overline{x} = 3 \cdot \overline{a}$ e $\overline{y} = \frac{1}{5}\,\overline{a}$.

c. 4ª ⇒ 3ª PROPORCIONAL (nºs 013 e 018).

d. MÉDIA GEOMÉTRICA (nº 046).

e. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS (do nº 052 ao nº 057).

061 PROBLEMAS COM ENUNCIADOS ALGÉBRICOS:

Note como a linguagem algébrica é concisa e precisa. Substitui longos textos.

Dados $\overline{a}$ e $\overline{b}$, obter $x = \dfrac{\overbrace{\sqrt{a \cdot b}}^{y} \cdot \overbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}^{z}}{\underbrace{a + b}_{s}}$.

Como é fácil compreender, trata-se de obter uma média geométrica ($\overline{y}$), a hipotenusa ($\overline{z}$) de um △ retângulo de catetos $\overline{a}$ e $\overline{b}$, uma soma ($\overline{s}$) e depois a 4ª proporcional $x = \frac{y \cdot z}{s}$.

062 **Então posso inventar problemas?**

Dado $\overline{x}$ obter $1/\overline{x}$ (não pode).

Pode, mas cuidado porque não é qualquer expressão algébrica que pode ser resolvida graficamente. Poderá se, e somente se:

Dado $\overline{x}$, obter $(\overline{x})^2$ (não pode), etc.

a. **$\overline{x}$ for segmento;**

b. **a expressão recair nas do nº 060.**

063 $\overline{x}$ é SEGMENTO ↔ RECAI.

V PROCEDIMENTO ALGÉBRICO

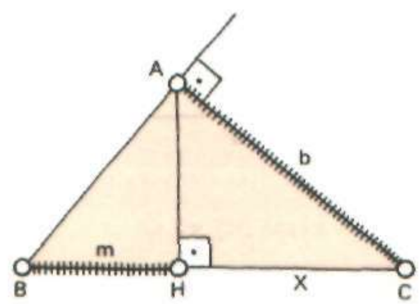
064 É mais um "ajudante" do MF.

Como sempre, vamos explicá-lo utilizando exemplos.

065 PROBLEMA:

Construir um △ retângulo, dados um cateto $\overline{b}$ e a projeção ortogonal $\overline{m}$ do outro cateto na hipotenusa.

EG



R: AB = ...31.... mm.

066 RACIOCÍNIO PELO MÉTODO ALGÉBRICO:

Qual comprimento convém obter para tornar possível a cópia?

Essa é a pergunta que sempre deveremos nos fazer.

Estude o EG... Vamos procurar, por exemplo, HC = x? Escreva "x" no EG.

067 CÁLCULO (ANALÍTICO) DE **x**:

Num △ retângulo —[P5]⟹ $b^2 = x\,(x + m) \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = x^2 + mx \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + mx - b^2 = 0$

Poderíamos ter escolhido outro segmento: $\overline{AB}$ ou $\overline{AH}$.

Dessa equação decorre que $x = \frac{1}{2}\,(-m \pm \sqrt{m^2 + 4b^2}\,)$.

Ajeitando para recair: $x = \frac{1}{2}\,(-m \pm \sqrt{m^2 + (2b)^2}\,)$ (*)

A resposta "clandestina" deve ser abandonada, não só porque $\overline{x}'$ é negativo mas também porque $\overline{x}' > \overline{b}$.

068 RESOLUÇÃO GRÁFICA DA EXPRESSÃO (*):

Como $\overline{x}$ é segmento, tem que ser possível recair. nº 063

ROTEIRO:

1º) Acha-se $y = \sqrt{m^2 + (2b)^2}$, que é a hipotenusa de um △ retângulo de catetos $\overline{m}$ e $2\overline{b}$.

2º) De $\overline{y}$ subtrai-se graficamente $\overline{m}$ e obtém-se $\overline{z}$. $z = (-m + y)$

3º) $\overline{x}$ será metade de $\overline{z}$.
Daqui para diante, voltamos ao MF: $x = \frac{1}{2} z$

4º) Copiam-se BH = m e HC = x, "matando" $\overline{B}$, $\overline{H}$ e $\overline{C}$.

5º) $\overline{A}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está na perpendicular por } \overline{H}. \\ \text{b. Dista b de } \overline{C} \Rightarrow \text{L1.} \end{cases}$

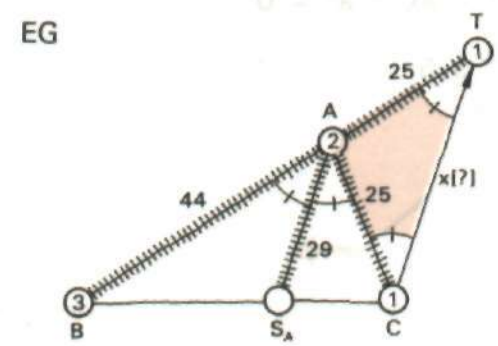
069

Há problemas — em geral difíceis — onde a aplicação exclusiva do MF não é suficiente para nos levar à resposta.

070 PROBLEMA:

Construir um △ABC, dados b = 25 mm, c = 44 mm e a bissetriz s_1 = 29 mm relativa ao $\overline{BC}$.

EG



R: BC = 33,5 mm.

No EG os pontos "vazios" são numerados
na ordenação em que serão copiados.

RACIOCÍNIO:

Você sabe que há reflexos condicionados? Foram estudados por Pavlov...

Desenhando no EG apenas o △ABC, não seria possível copiá-lo. Como a resposta tem que ser obtida a partir dos dados e um deles é uma bissetriz, fomos compelidos a nos lembrar do P4 (nº 030) e traçar $\overline{CT} \parallel \overline{S_AA}$. Que bom se obtivéssemos $\overline{x}$...

CÁLCULO DE **x**:

$$\triangle BCT \cong \triangle BS_AA \xRightarrow{[P1]} \frac{x}{29} = \frac{44 + 25}{44} \Rightarrow x = \frac{29 \times 69}{44}$$

(4ª proporcional)

ROTEIRO:

Um problema termina quando se acha a resposta, sabia? A resposta é o $\triangle ABC$...

1º) Acha-se a 4ª proporcional $x\,mm = \dfrac{29\,mm \times 69\,mm}{44\,mm}$.

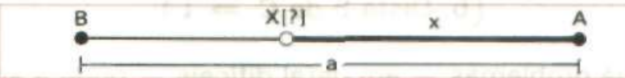
2º) Começa-se copiando $\overline{CT} \cong \overline{x}$, "matando" $\overline{C}$ e $\overline{T}$.

3º) O próximo será $\overline{A}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Dista 25 de } \overline{C} \Rightarrow L1. \\ \text{b. Dista 25 de } \overline{T} \Rightarrow L1. \end{cases}$

4º) O próximo será $\overline{B}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está em } \overrightarrow{TA} \text{ (mera cópia).} \\ \text{b. } AB = 44\,mm \text{ (mera cópia).} \end{cases}$

Não esquecer de ligar $\overline{A}$ com $\overline{B}$; $\overline{B}$ com $\overline{C}$ e $\overline{C}$ com $\overline{A}$ em traço forte. $\overline{S}_A$ não precisa.

071 SEGMENTO ÁUREO



DEFINIÇÃO:

Cada comprimento (a) tem um só segmento áureo (x).

$\overline{AX}$ chama-se SEGMENTO ÁUREO **de $\overline{AB}$ se, e somente se, $(AX)^2 = (AB) \cdot (XB)$.**

AX é média geométrica entre AB (o todo) e XB (a diferença).

CÁLCULO DE **x**:

Pela definição: $x^2 = a \cdot (a - x)$ (*) $\Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$

Então: $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$

Ajeitando para resolver graficamente:

$$x = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2};\ x' = -\left(\frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}\right)$$

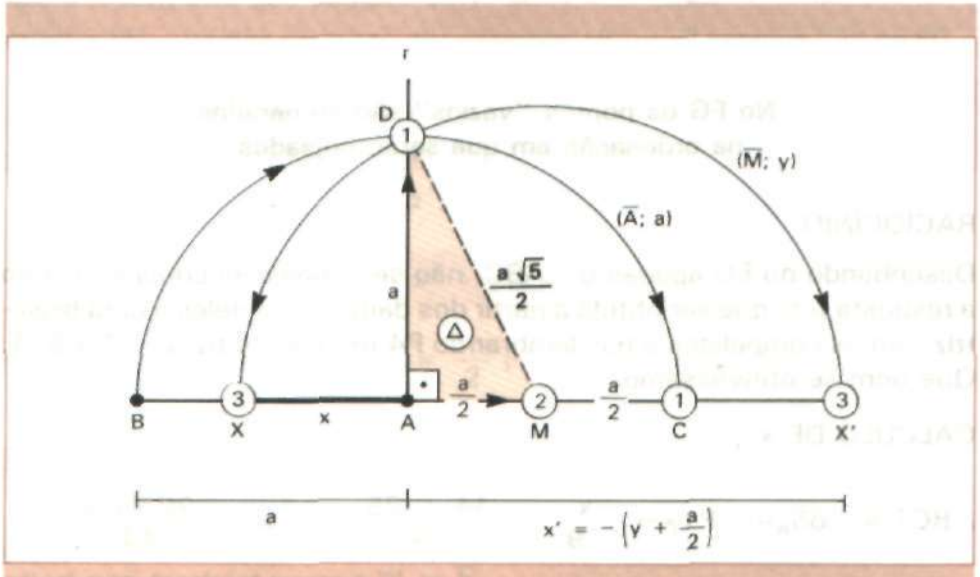
$\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ é hipotenusa de um $\triangle$ de catetos a e $\dfrac{a}{2}$.

De fato: $y^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

$y^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

$y = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

CONSTRUÇÃO GRÁFICA:



Computando, temos: $x = 0{,}618a$, chamado de número divino.

0-365-403-4

"Média e extrema": x : AB :: XB : x

EXTREMOS

ROTEIRO:

1º) $\overrightarrow{Ar} \perp \overline{AB}$. 2º) $(\overline{A}; a) \Rightarrow \overline{D}$ e $\overline{C}$.

3º) $\overline{M}$ é pt.m. de $\overline{AC}$. 4º) $(\overline{M}; y) \Rightarrow \overline{X}$ e $\overline{X}'$.

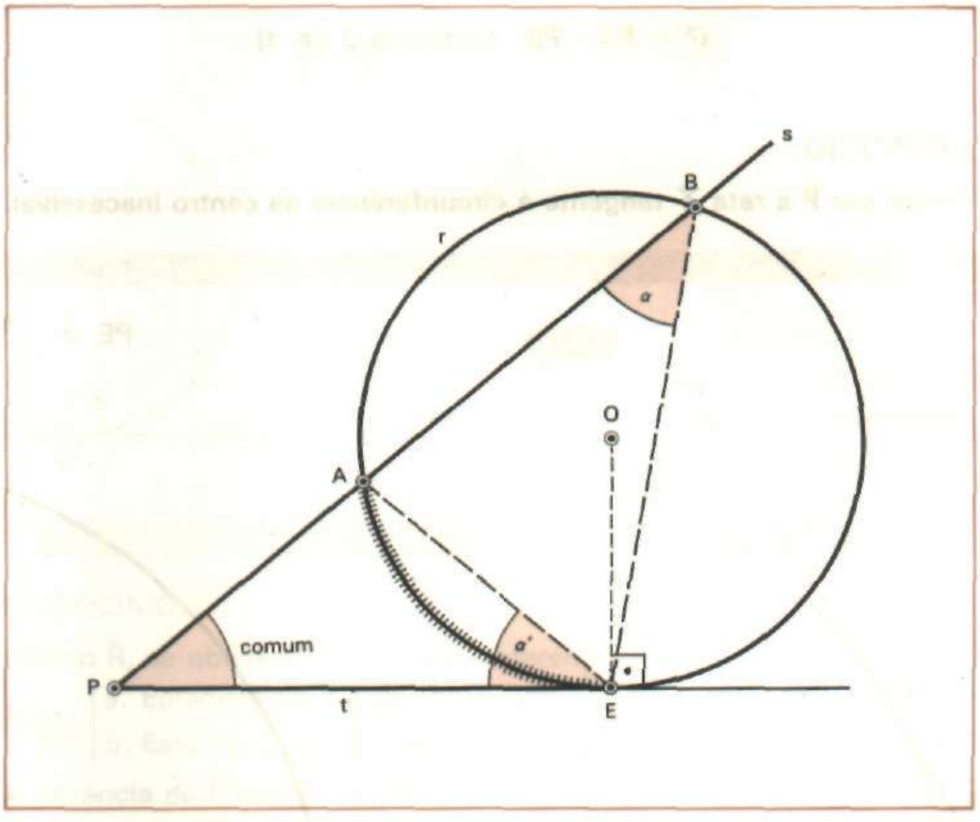
NOMENCLATURA:

$\overline{X}$ divide internamente e $\overline{X}'$ divide externamente $\overline{AB}$ em "média extrema razão".

072 Para completar a parte da Geometria que faz parte da TM do DG, só falta a P6.

073 P6 POTÊNCIA DE PONTO

É a última das [P]...



$\overline{P}$, $(\overline{O}; r)$ e $\overline{PE}$ são fixos no plano de desenho e $\overrightarrow{Ps}$ é uma das infinitas secantes genéricas que passam por $\overline{P}$. Quanto valerá o produto

$$\mathbf{PA} \cdot \mathbf{PB} = [?]$$

O que diz o seu bom senso? Nada?

Vamos então "calibrar" esse bom senso.

a. Os ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}'$ [P3] são .... na circunf. $(\overline{O}; r)$ e determinam nela o mesmo .... $\widehat{AE}$, logo α = ... Então:

b. os triângulos PAE e PEB têm $\alpha = \alpha'$ e um ângulo comum, logo [AA] são .... entre si.

[AA] é um dos critérios de semelhança de triângulos.

c. Pela P1 poderemos concluir que:

LADOS DO △ PAE	....	=	....	→ **PA · PB = ...**
LADOS DO △ PEB	....		....	**É constante!...**

074 **Esse produto chama-se** POTÊNCIA DO PONTO
$\overline{P}$ com relação à circunferência ($\overline{O}$; r).

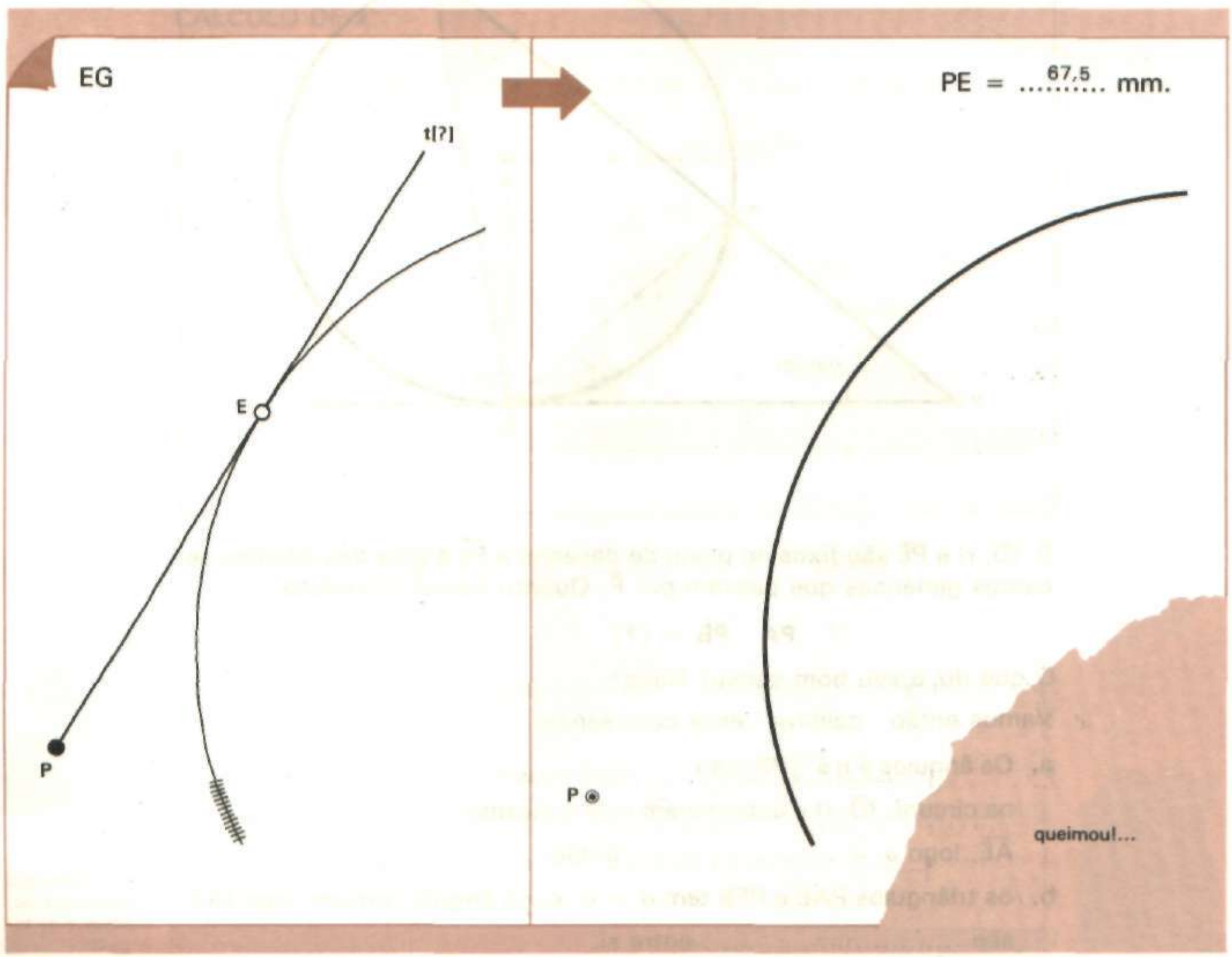
Chama-se "potência" porque:

$$t^2 = PA \cdot PB$$ (potência 2 de t).

Se P ∈ ○, então a potência é zero e reciprocamente.

075 EXERCÍCIO:

Traçar por $\overline{P}$ a reta $\overleftrightarrow{t}$ tangente à circunferência de centro inacessível.



RACIOCÍNIO:

Qual comprimento você gostaria de obter?

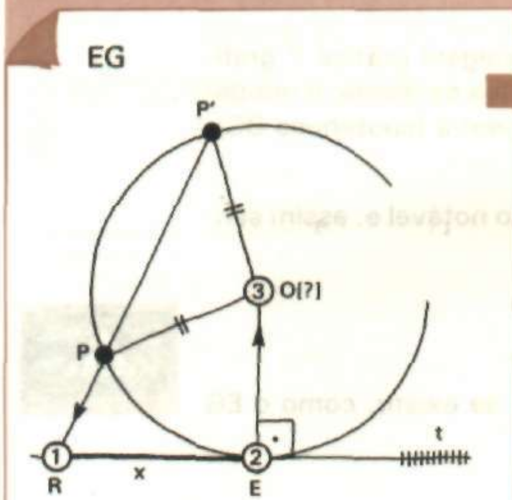
PE = x? Certo, x^2 = PA · PB. Então:

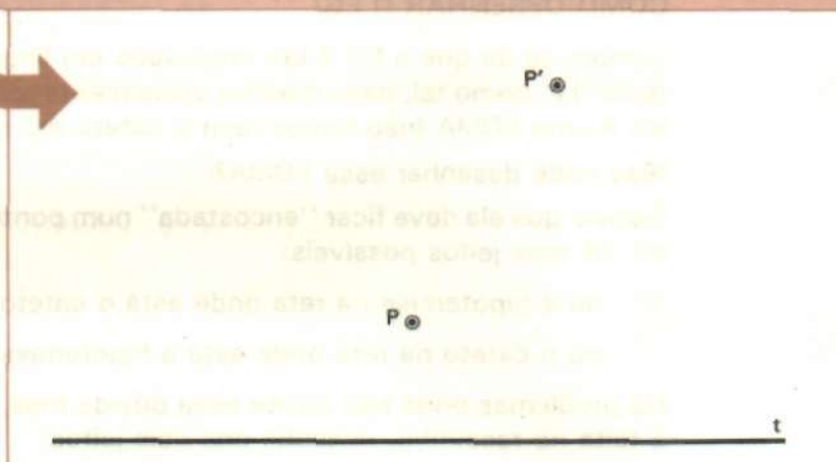
ROTEIRO:

1º) Trace a secante $\overrightarrow{Ps}$ qualquer, ache PA, PB e x = $\sqrt{PA \cdot PB}$. 2º) Obtenha $\overline{E}$. 3º) Ligue $\overline{P}$ com $\overline{E}$.

076 EXERCÍCIO: **PP't** (PROBLEMA CLÁSSICO)

Construir uma circunf. ($\overline{O}$; r) passando por $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ e tangenciando $\overleftrightarrow{t}$.





R: 1ª resposta (menor): r = ..24.. mm; 2ª: r' = ..62.. mm.

RACIOCÍNIO:

Obtido $\overline{R}$, se obtivermos x, então obteremos:

$$\overline{O}\,[?]\begin{cases}\text{a. Eqüidista de } \overline{P} \text{ e de } \overline{P}' \Rightarrow \text{L3.}\\ \text{b. Está na } \perp \text{ por } \overline{E} \text{ (mera cópia).}\end{cases}$$

A potência de $\overline{R}$ relativa à ($\overline{O}$; r) é:

x^2 = RP · RP' ⇒ x é média geométrica entre RP e RP'.

Obtido **x**, marca-se RE = RE' = x (2 respostas)

077 Há problemas onde basta desenhar o EG e simplesmente copiá-lo. Por exemplo:

078 EXERCÍCIO **(resolva numa folha avulsa):**

Uma reta é tangente comum interna às circunferências ($\overline{O}$; r) e ($\overline{C}$; m). A distância entre os pontos de tangência é de 60 mm.

Dados r = 33 mm e OC = 80 mm, obter m.

R: m = ... mm.

079 O que são esses procedimentos?

O DG é uma "omelete" de MF e LG, temperada com Geometria e feita com "ovos de Colombo".

080 Qual o próximo "ovo"? Estou com fome de saber...

Para explicar esse "ovo", resolveremos juntos o seguinte

081 PROBLEMA:

Construir um △ retângulo ABC, dados um cateto AB = 30 mm e a soma = 55 mm do outro cateto (AC) com a hipotenusa.

COMO DESENHAR O EG:

Lembre-se de que o EG é um enunciado em linguagem gráfica ("grafiquês") e, como tal, deve mostrar visualmente todos os dados, e um deles é uma SOMA (não temos nem o cateto AC nem a hipotenusa BC).

Mas onde desenhar essa SOMA?

É óbvio que ela deve ficar "encostada" num ponto notável e, assim sendo, há dois jeitos possíveis:

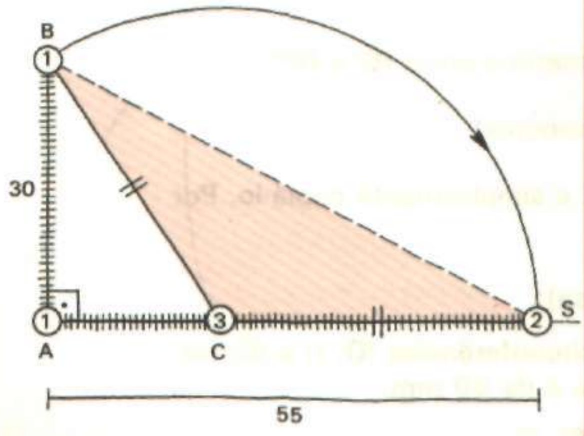
A soma também é "imantada" e "barata"...

- ou a hipotenusa na reta onde está o cateto
- ou o cateto na reta onde está a hipotenusa.

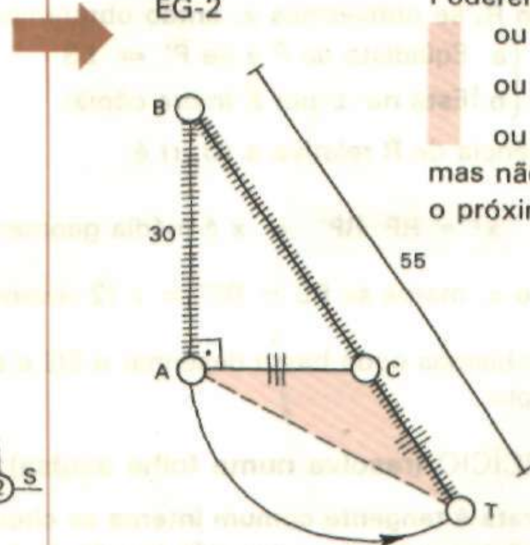
Há problemas onde não existe essa dúvida mas, se existir, como o EG é feito no rascunho, desenhe dos dois jeitos:

- ou num mesmo desenho
- ou em dois (EG-1 e EG-2) como fizemos:

EG-1



EG-2



Poderemos iniciar:

- ou pelo ângulo reto
- ou por $\overline{AB}$
- ou por $\overline{BT}$

mas não dará para obter o próximo ponto...

Não dá para copiar o EG-2; copie, então, o EG-1 na região abaixo:

ROTEIRO:

1º) Desenhe um ângulo reto.

2º) Marque AB = 30 mm.

3º) Marque AS = 55 mm.

4º) C [?] $\begin{cases} \text{a. Está em } \overline{AS}. \\ \text{b. Eqüidista de } \overline{A} \text{ e } \overline{S}. \end{cases}$

SEMPRE aparece um △ ISÓSCELES

porque BC = SC ou AC = TC.

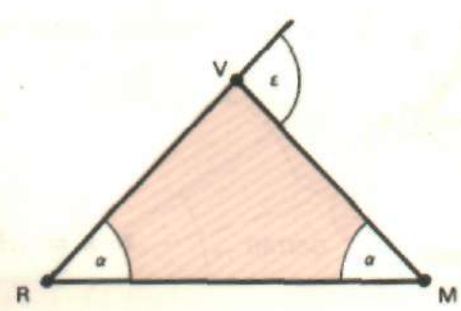
R: BC = ...36.... mm.

082 **Vamos batizar esse "ovo" de "ovo isósceles"?**

083 *Sim, porque a resolução baseia-se numa propriedade do △ isósceles:*

ou $\overline{V}$ eqüidista de $\overline{R}$ e $\overline{M}$ ⇒ L3

ou $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon$ (copia-se α quando é dado ε).

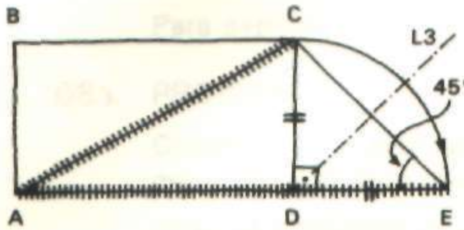


084 EXERCÍCIO:

Construir um retângulo de diagonal 70 mm e perímetro 184 mm.

Perímetro é a soma dos quatro lados.

EG



Use o SEMIPERÍMETRO.

R: Lado maior ≃ ...64... mm.

ROTEIRO (só o **como** sem o **porquê**):

1. Marque AE = 92 mm → A e E
2. C { a) L1 (A, 70 mm) b) $\overleftrightarrow{EC}$ (45°) 3. D { a) L3 b) $\overleftrightarrow{AE}$
4. Completar

085 E quando um dos dados é uma diferença?

"Encostando-a", também se revela um

△ ISÓSCELES.

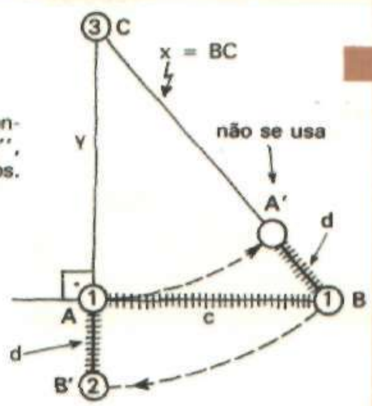
A diferença também é "imantada" e "barata". Pode ser encostada em mais do que um lugar.

086 EXEMPLO:

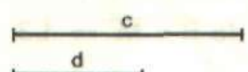
Construir um △ retângulo com um cateto medindo c, dada a diferença $\overline{d}$ entre a hipotenusa $\overline{x}$ e outro cateto $\overline{y}$.

EG

Não sabendo onde "encostar", faça dos 2 jeitos.



$\overline{A'}$ não dá, mas $\overline{B'}$ dá para copiar.



R: x ≃ ...34,9... mm; y ≃ ...17,9... mm.

ROTEIRO:

1º) "Mate" $\overline{A}$ e $\overline{B}$, pois AB = c (dada).

2º) Copie o ângulo reto.

3º) Copie $\overline{B}'$, pois AB' = d (dada).

4º) O próximo é $\overline{C}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está em } \overleftrightarrow{AC}. \\ \text{b. Eqüidista de } \overline{B}' \text{ e } \overline{B} \Rightarrow \text{L3}. \end{cases}$

Resolvemos graficamente o sistema:

$$\left.\begin{matrix} x^2 = y^2 + c^2 \\ d = x - y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = \frac{c^2 - d^2}{2d} \text{ com } c > d.$$

Calcule x e confira suas respostas gráficas.

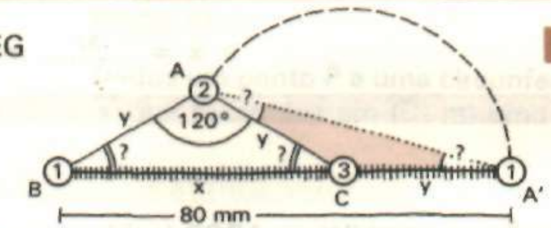
087 EXEMPLO:

(*) até aqui já foi dada a forma do △.

Construir um △ isósceles com um ângulo interno de 120° (*), base $\overline{x}$, lados $\overline{y}$ e tal que a soma $(\overline{x} + \overline{y})$ tenha 80 mm.

x e y não foram dados, mas (x + y) sim.

EG



Encostamos a soma de modo a obter os valores dos ângulos do △ isósceles.

R: x ≃ ...51... mm; y ≃ ...29... mm.

RACIOCÍNIO:

Você saberia obter x e y analiticamente?

Uma vez "revelado", tornado visível o △ isósceles, poderemos copiar, passar a limpo o EG:

ROTEIRO:

Lembra-se do espião?

1º) *Copia-se* $\overline{BA}'$ *com 80 mm, "matando"* $\overline{B}$ e $\overline{A}'$.

2º) Copia-se BÂ'A com 15° } "matando" $\overline{A}$.

3º) Copia-se A'B̂A com 30° }

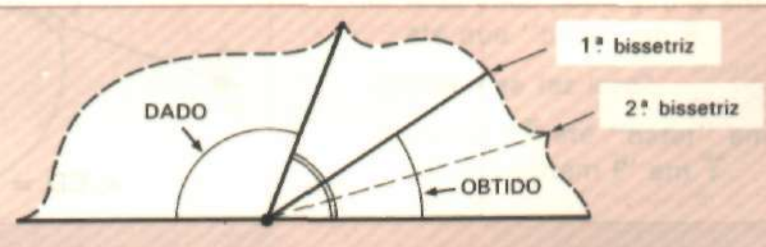
4º) "Mata-se" $\overline{C}$ de vários modos: ou L3 ou 15° ou ...

5º) Resposta: △ABC.

Destaque sempre a resposta com traço forte e fino.

088 E se o ângulo dado não fosse múltiplo de 7°30'?

Então teríamos que obter graficamente os ângulos do △ isósceles:



Roteiro:
1º) Prolonga-se o lado do ângulo dado.
2º) 1ª bissetriz.
3º) 2ª bissetriz.

089 EXERCÍCIO:

(*) foi dada a forma.

Num losango, um ângulo interno mede 30°(*) e as diagonais somam 90 mm. Obter o comprimento x dos lados.

EG

R: x = ...37.... mm.

090 EXERCÍCIO:

Uma circunferência de raio x é circunscrita ao quadrilátero ABCD (nch). Obter x, dados: AB = 15 mm, BC = 26 mm, ABC = 120° e a soma AD + DC = 61 mm. A seguir, obter CD.

A circunscrita contém os vértices do polígono.

EG

R: CD = ...22... mm.

VII PROCEDIMENTOS AUXILIARES

091 Por que auxiliares?

Porque auxiliam o MF e, portanto, nos auxiliam.

092 Quais são esses procedimentos?

Há vários, mas neste livro 2 somente daremos uma idéia dos seguintes:

ROTAÇÃO,

SIMETRIA e

TRANSLAÇÃO.

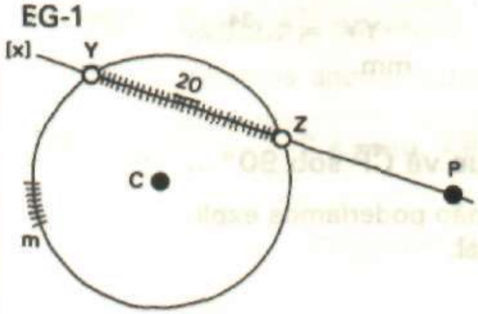
093 Qual é o procedimento da rotação?

Como fazemos sempre, queremos explicar o procedimento e não apenas o problema.

PROBLEMA:

Dados um ponto $\overline{P}$ e uma circunferência ($\overline{C}$; m), conduzir por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$ que determina em ($\overline{C}$; m) uma corda de 20 mm.

EG-1



• DADOS ○ PROCURADOS

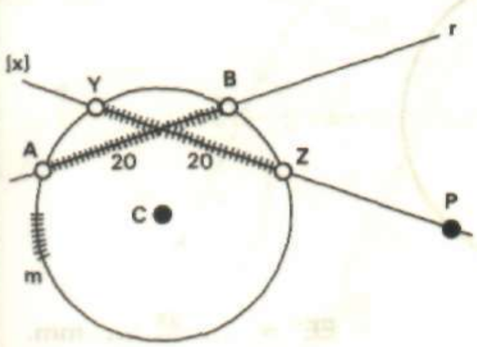
Empregando o MF — que se aplica em todos os problemas — desenhamos o EG-1.

Já tendo $\overline{P}$, resta obter mais um ponto — de $\overleftrightarrow{x}$[?] — para encostar a régua.

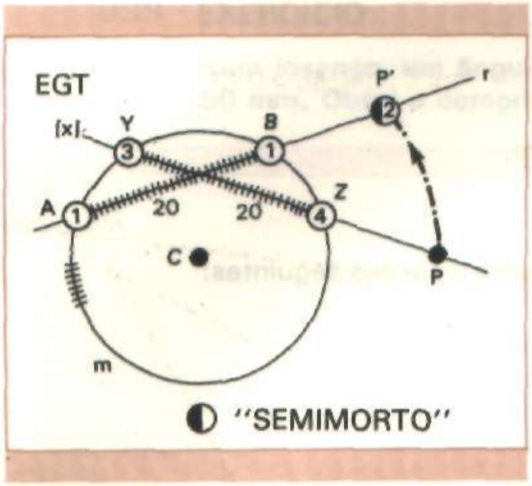
$\overline{Y}$[?] $\begin{cases} \text{a. Está em } (\overline{C};\ m). \\ \text{b. } [?]. \end{cases}$

$\overline{Z}$[?] $\begin{cases} \text{a. Está em } (\overline{C};\ m). \\ \text{b. } [?]. \end{cases}$

EG-2



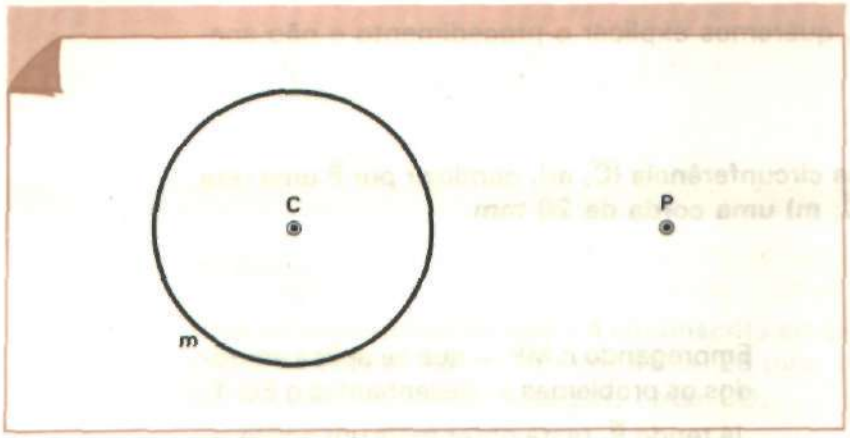
- **Você sabe desenhar uma corda arbitrária de AB = 20 mm?**
- Mas $\overleftrightarrow{r}$ não passa por $\overline{P}$...
- Mas você pode girá-la em torno de $\overline{C}$ até que "bata" em $\overline{P}$...
- Como se faz isso?
- Girando $\overline{P}$ até "bater" em $\overleftrightarrow{r}$; o arco ($\overline{C}$; CP) obtém $\overline{P}'$ em $\overleftrightarrow{r}$.



- O que resulta de bom?
- **Obtivemos o comprimento AP' que é igual ao YP.**

$$\overline{Y}[?]\begin{cases} a.\ \text{Está em } (\overline{C};\ m). \\ b.\ \textit{Dista AP' de } \overline{P} \Rightarrow L1. \end{cases}$$

- *A trajetória de* $\overline{P}$ *é LG?*
- Sim, dos pontos que distam PC de $\overline{C}$.
- Ficou um EGT!... Vou copiar:



- Copie também a "clandestina" $\overleftrightarrow{Y'Z'} = \overleftrightarrow{x}'$, pois

DE UMA RETA SÓ PODEREMOS PEDIR A POSIÇÃO.

Há duas posições possíveis para a reta $\overleftrightarrow{x}$ procurada.

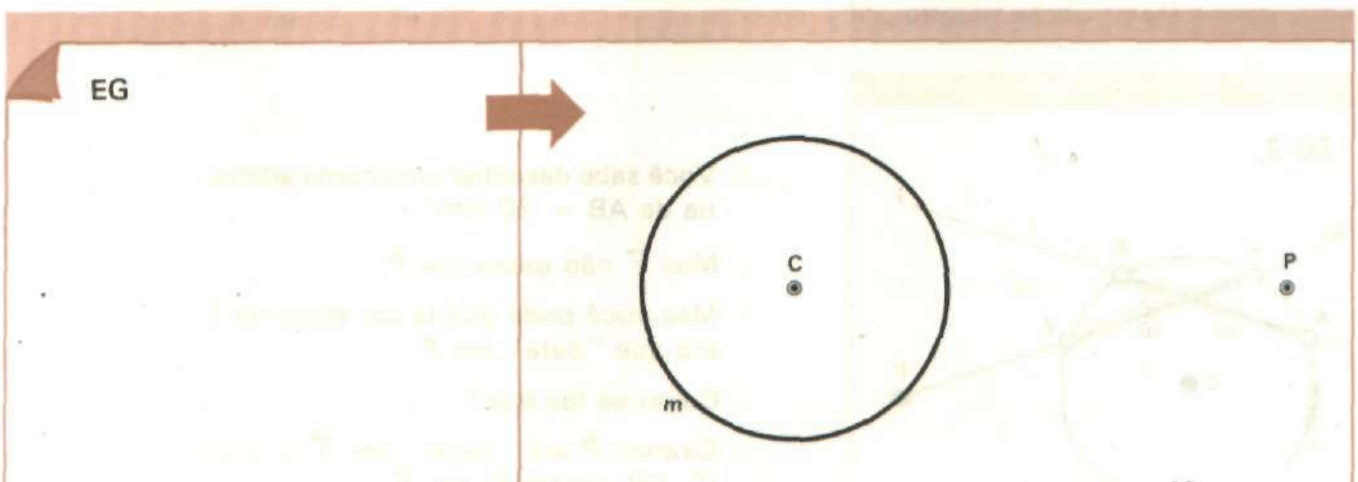
R: YY' = ...34.... mm.

094 **Poderíamos ter obtido o pt.m. da corda $\overline{YZ}$, que vê $\overline{CP}$ sob 90°...**

Você já está vendo as coisas... Poderíamos, mas não poderíamos explicar o método — que é a nossa finalidade principal.

095 EXERCÍCIO DE ROTAÇÃO:

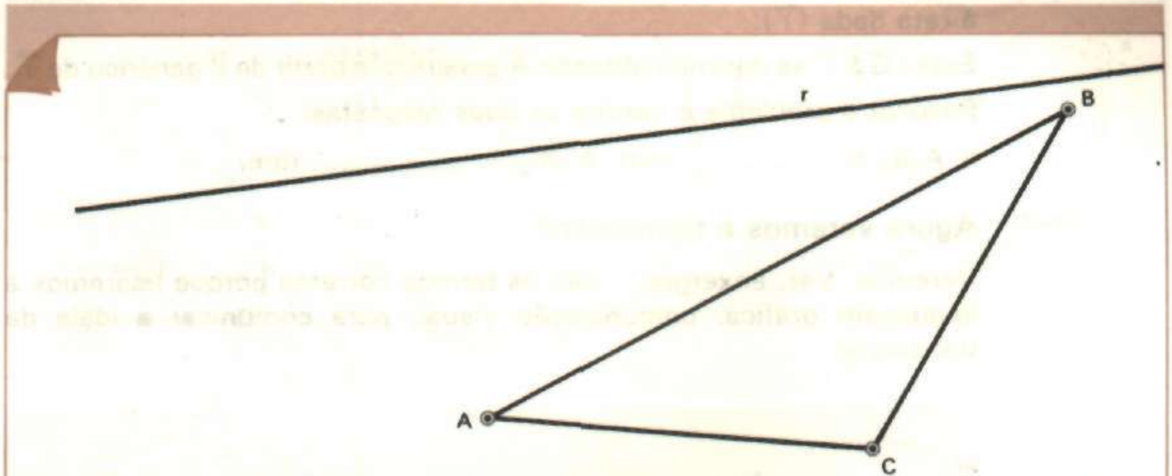
Trace por $\overline{P}$ as retas tangentes à $(\overline{C};\ m)$ nos pontos $\overline{E}$ e $\overline{E'}$ (não dados).



R: EE' = ...38...... mm.

096 EXERCÍCIO:

Gire o $\triangle ABC$ no sentido anti-horário, em torno de $\overline{A}$, para a posição $AB'C'$, com $\overline{B}'$ em $\overleftrightarrow{r}$, sem deformá-lo.

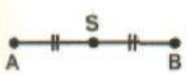


R: CC' = ...2........ mm.

Quando se manda girar uma figura, deve-se determinar (dar ou obter) o ângulo de giro. Caso contrário, ela continuará girando sem parar...

097 Como é a simetria?

Veremos apenas simetria com relação a um ponto.



$\overline{S}$ é pt.m. $\overline{AB}$ ⇔ $\overline{A}$ e $\overline{B}$ simétricos com relação ao $\overline{S}$.

FIGURAS SIMÉTRICAS ⇔ { BIJEÇÃO **entre** / PONTOS **simétricos.**

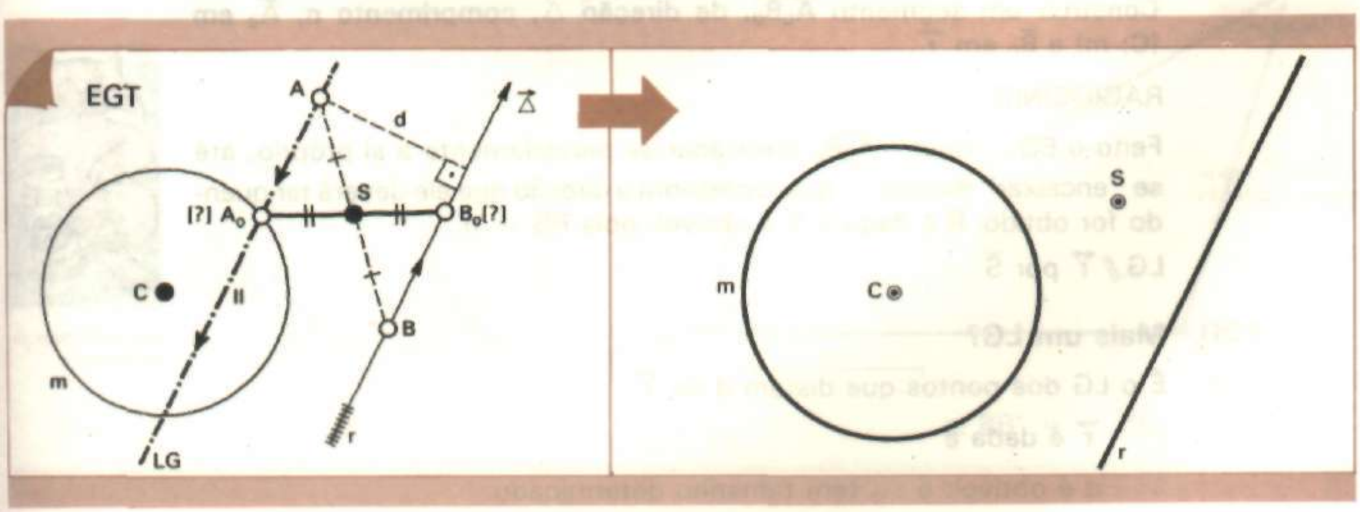
Bijeção: nº 059.

098 PROBLEMA EXEMPLAR:

Exemplar: que serve de modelo, de exemplo.

Obter um segmento $\overline{A_0B_0}$, de pt.m. $\overline{S}$, com $\overline{A}_0$ em $(\overline{C};\ m)$ e $\overline{B}_0$ em $\overleftrightarrow{r}$.

Um: tantos quantos houver; queremos o tamanho e a posição.



RACIOCÍNIO **(desenho animado):**

Cada direção $\overleftrightarrow{\triangle}$ tem sentidos ditos opostos: $\overrightarrow{\triangle}$ e $\overleftarrow{\triangle}$.

"Veja" com a mente um segmento genérico $\overline{AB}$ móvel — sempre com pt.m. $\overline{S}$ — cuja extremidade $\overline{B}$ percorre $\overleftrightarrow{r}$ no sentido $\overrightarrow{\triangle}$. A extremidade $\overline{A}$ percorrerá também uma reta, LG dos pontos de distância obtível (d) à reta dada ($\overleftrightarrow{r}$).

Analogamente, se $\overline{A}$ percorresse a circunf. ($\overline{C}$; m), então $\overline{B}$ percorreria a circunf. ($\overline{C'}$; m), sendo $\overline{C'}$ simétrico de $\overline{C}$. Desenhe ($\overline{C'}$; m) para conferir.

Esse LG // $\overleftrightarrow{r}$ se desenha obtendo $\overline{A}$ genérico, a partir de $\overline{B}$ genérico de $\overleftrightarrow{r}$.

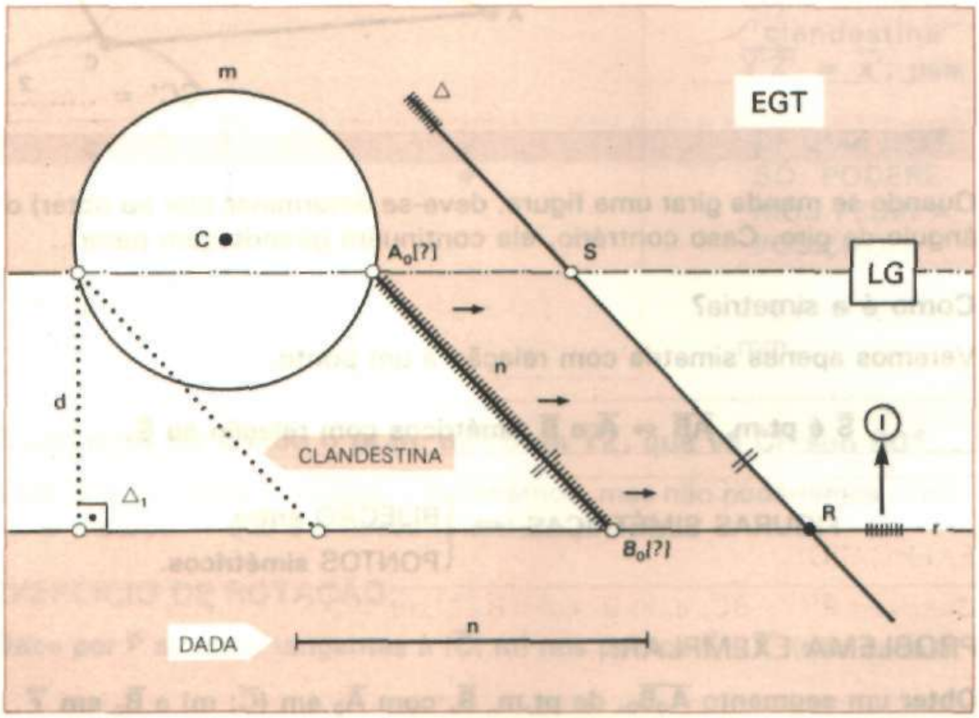
Resolva o problema e confira as duas respostas:

R: A_0B_0 = ... mm; $A'_0B'_0$ = ... mm.

099 **Agora veremos a** translação?

Veremos. Ver, enxergar,... são os termos corretos porque usaremos a linguagem gráfica, comunicação visual, para comunicar a idéia de translação.

EXEMPLO DE EGT



TRADUÇÃO

Construir um segmento $\overline{A_0B_0}$, de direção $\overleftrightarrow{\triangle}$, comprimento n, $\overline{A_0}$ em (C; m) e $\overline{B_0}$ em $\overleftrightarrow{r}$.

RACIOCÍNIO:

A reta $\overleftrightarrow{\triangle}$ representa a direção $\overline{\triangle}$.

Feito o EG, "vê-se" $\overline{A_0B_0}$ transladar-se paralelamente a si próprio, até se "encaixar" na reta $\overleftrightarrow{\triangle}$, que representa a direção que ele deverá ter quando for obtido. $\overline{R}$ é dado e $\overline{S}$ é obtível, pois RS = n.

LG // $\overleftrightarrow{r}$ por $\overline{S}$.

São enfoques diferentes...

100 **Mais um LG?**

É "metade" de um L2.

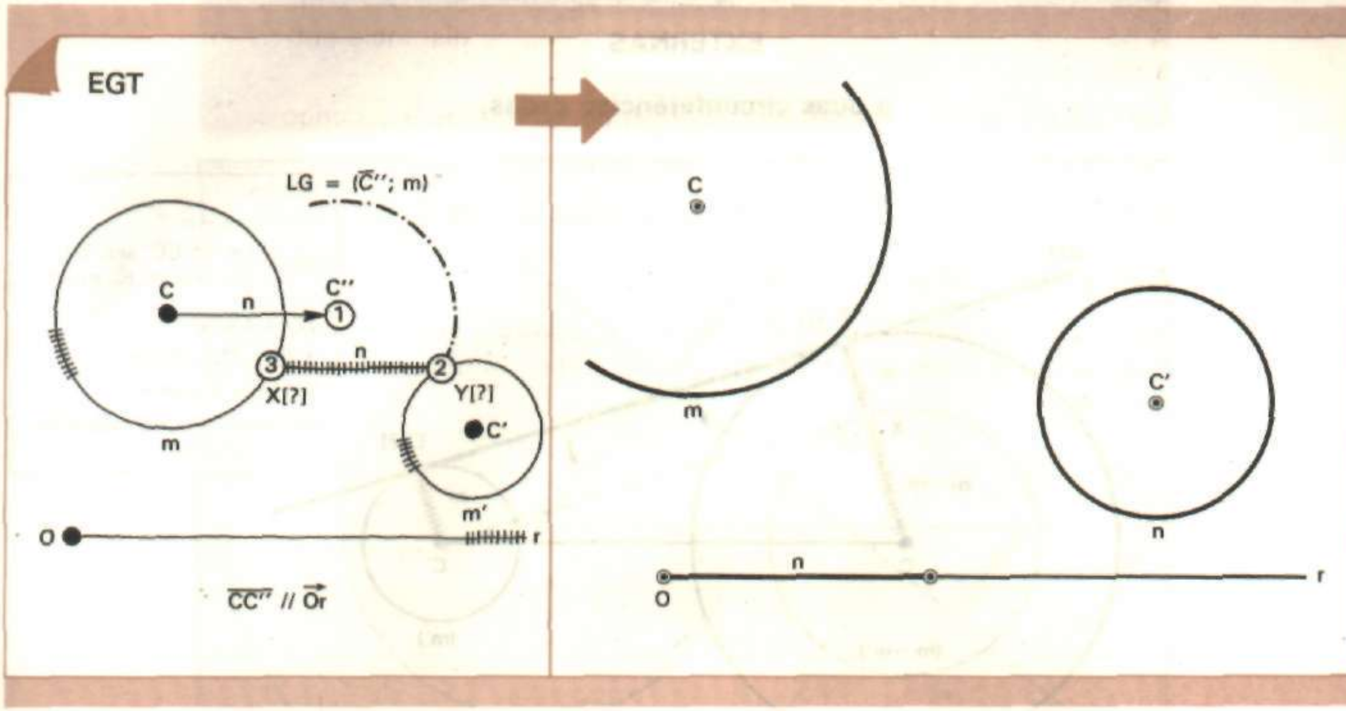
É o LG dos pontos que distam **d** de $\overleftrightarrow{r}$:

$\overleftrightarrow{r}$ é dada e

d é obtível: *o $\triangle_1$ tem tamanho determinado.*

101 EXERCÍCIO:

Construir $\overline{XY} \parallel \overrightarrow{Or}$, com XY = n, $\overline{X}$ em $(\overline{C}; m)$ e $\overline{Y}$ em $(\overline{C}'; m')$.



ROTEIRO:

....

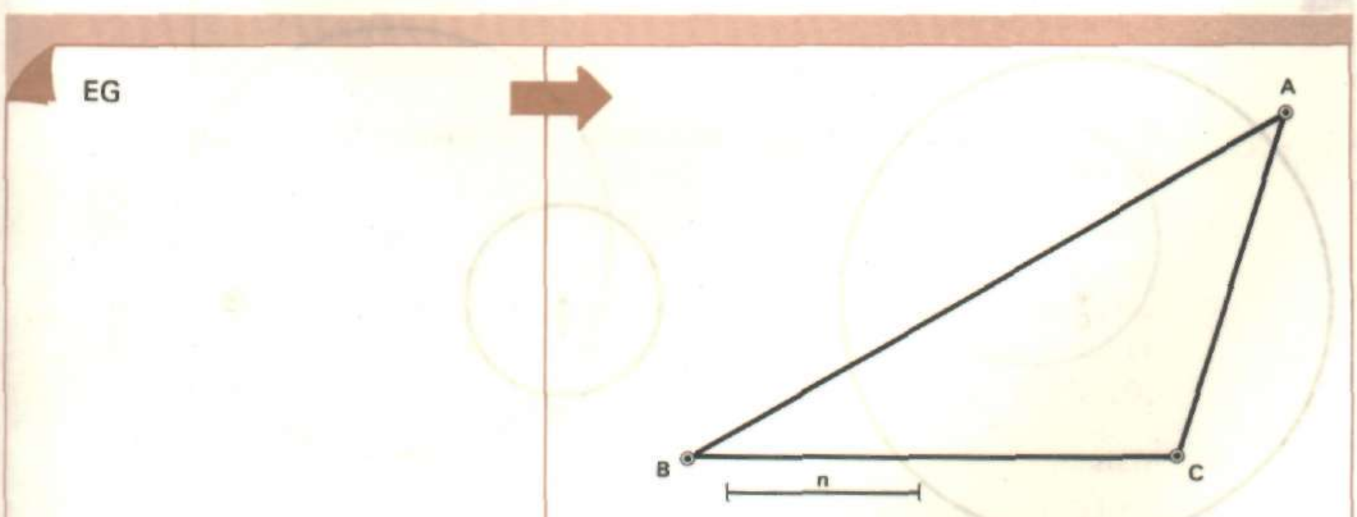
....

....

R: 1ª resposta: XC' = ... mm; 2ª resposta: XC' = ... mm.

102 EXERCÍCIO:

Construir $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, com $\overline{B}'$ em $\overline{AB}$, $\overline{C}'$ em $\overline{AC}$ e B'C' = n.



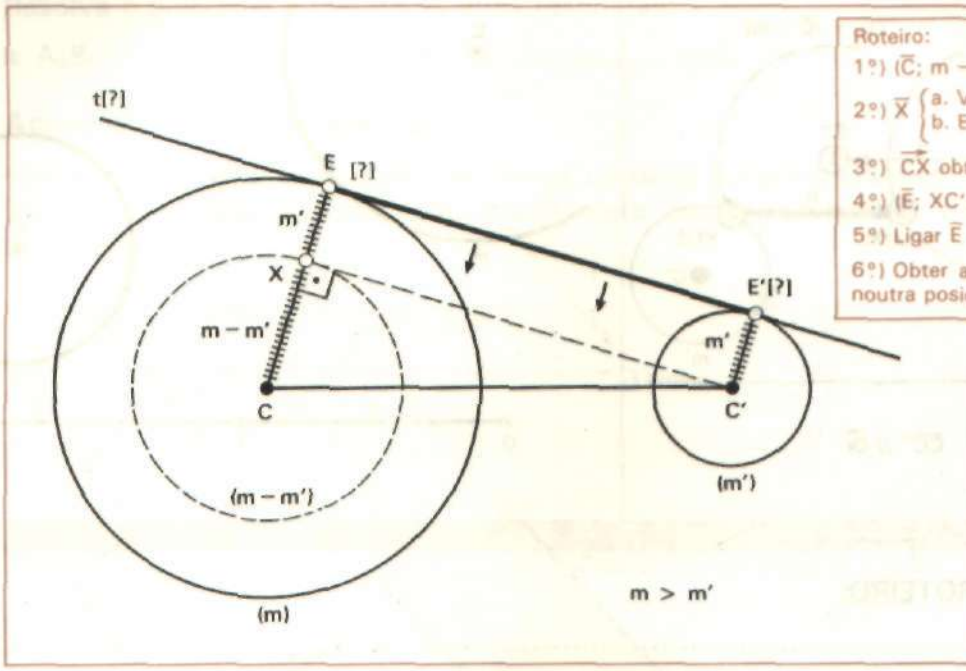
R: BB' = ...55....... mm.

103 PROBLEMA:

Traçar as retas tangentes comuns

EXTERNAS

a duas circunferências dadas.



Roteiro:

1º) ($\overline{C}$; m − m').

2º) $\overline{X}$ { a. Vê $\overline{CC'}$ sob 90°. b. Está em ($\overline{C}$; m − m')

3º) $\overrightarrow{CX}$ obtém $\overline{E}$.

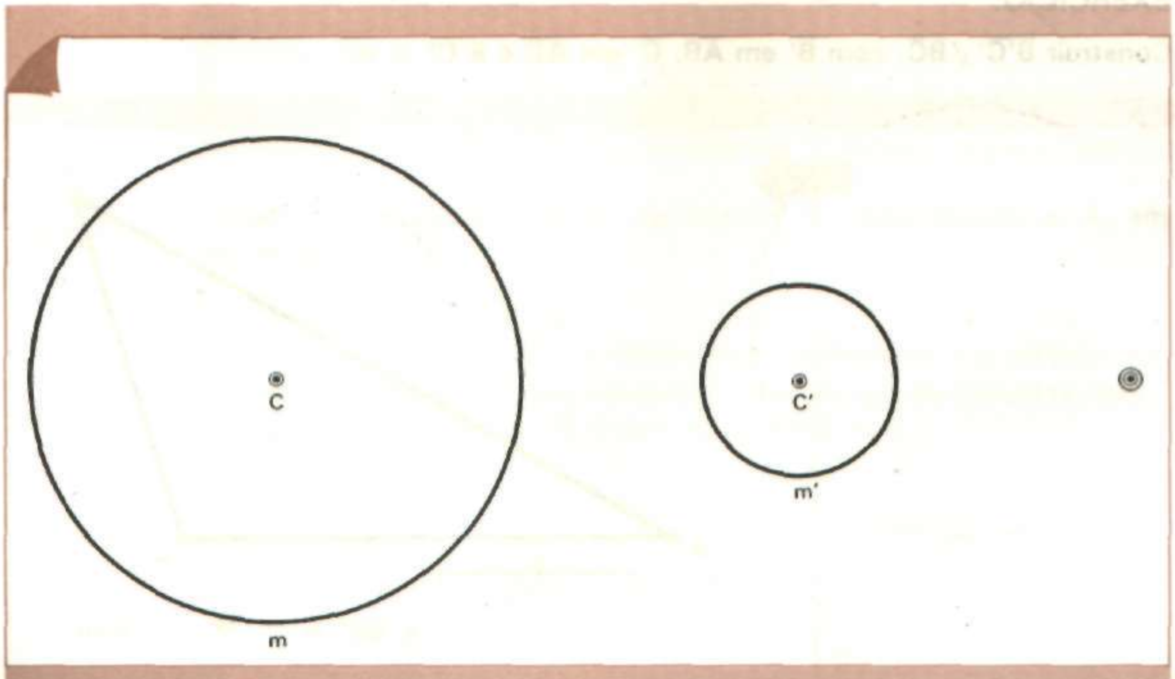
4º) ($\overline{E}$; XC') obtém $\overline{E}'$.

5º) Ligar $\overline{E}$ com $\overline{E}'$.

6º) Obter a outra resposta, noutra posição.

RACIOCÍNIO:

Transladando $\overline{EE'}$, paralelamente a si próprio, ele "encosta" em $\overline{C}'$ e tangencia a circunf. auxiliar ($\overline{C}$; m − m') em $\overline{X}$.

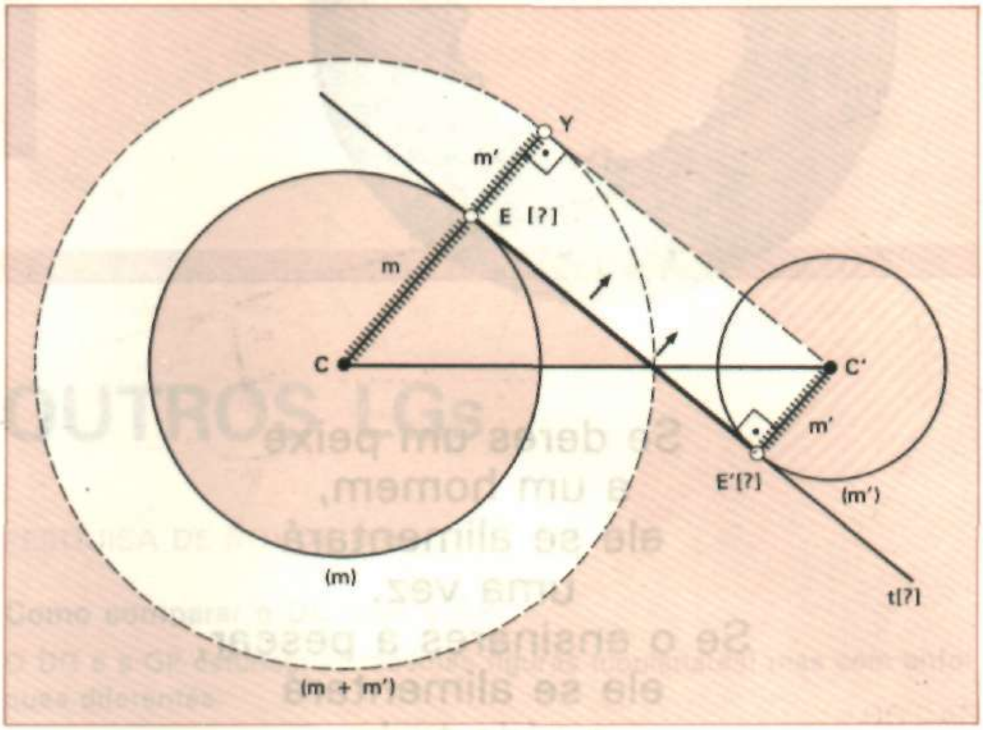


104 PROBLEMA:

Traçar as retas tangentes comuns

INTERNAS

a duas circunferências dadas.



Roteiro:

1º) $(\overline{C};\ m + m')$.

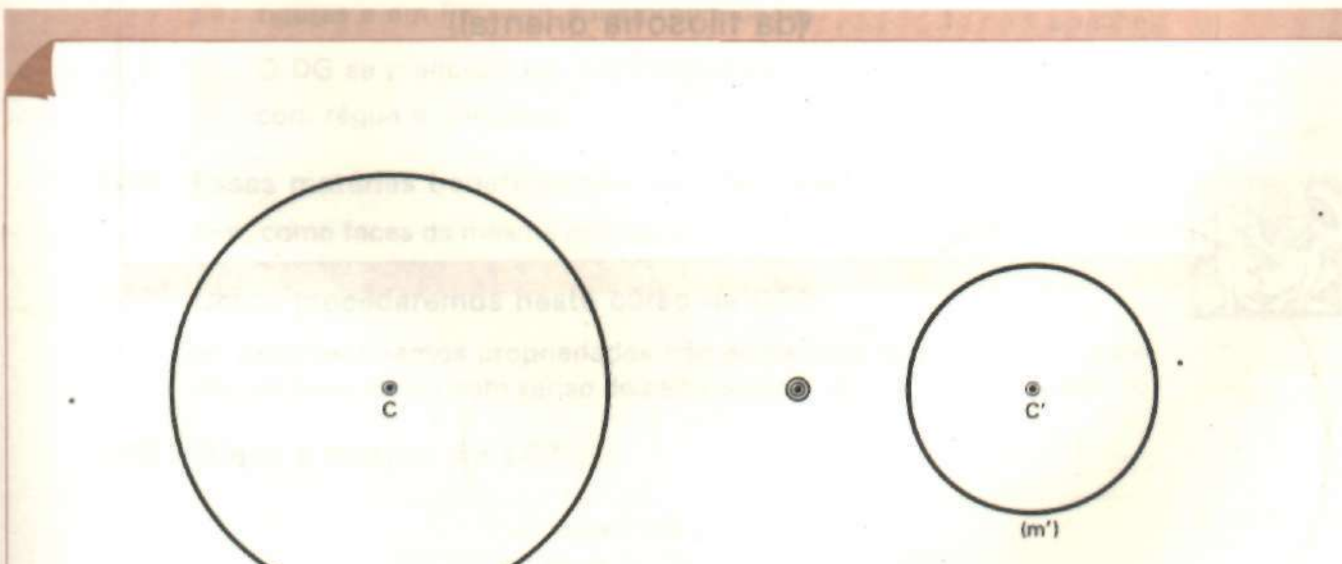
2º) $\overline{Y}$ vê $\overline{CC'}$ sob 90°.

3º) $\overline{E}$ em $\overline{CY}$.

4º) $(\overline{E};\ YC') \rightarrow \rightarrow \overline{E'}$.

5º) $\overleftrightarrow{EE'} = \overleftrightarrow{t}$.

6º) Não esquecer da "clandestina".

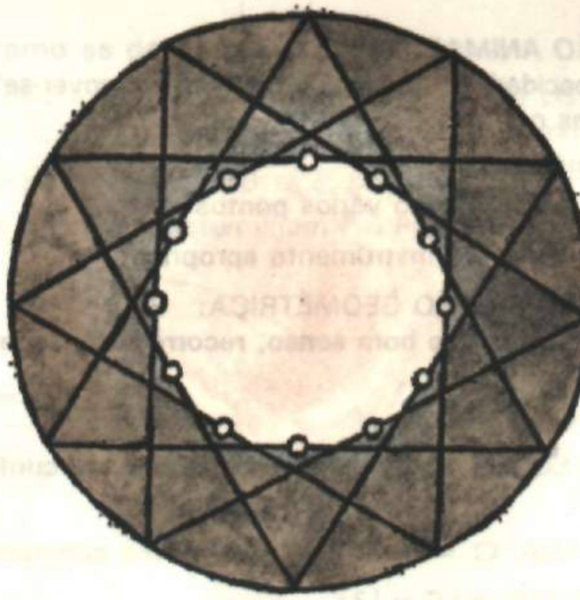


Se deres um peixe
a um homem,
ele se alimentará
uma vez.
Se o ensinares a pescar,
ele se alimentará
a vida toda.

(da filosofia oriental)

CAPÍTULO

2



OUTROS LGs

I PESQUISA DE NOVOS LGs

DG: Desenho Geométrico.
GP: Geometria do Plano.

105 Como comparar o DG com a GP?

O DG e a GP estudam as mesmas figuras (coplanares) mas com enfoques diferentes:

- A GP se preocupa em DEFINIR essas figuras e em PROVAR suas propriedades.
- O DG se preocupa em DESENHÁ-LAS com régua e compasso.

Esquadros apenas para paralelas e perpendiculares.

106 Essas matérias beneficiam-se mutuamente?

Sim, como faces da mesma moeda, são inseparáveis e interdependentes.

Irmãs siamesas...

Existem o bom, o médio e o mau senso...

107 Como procederemos neste curso de DG?

Só demonstraremos propriedades não evidentes, lembrando que a evidência depende do bom senso de cada pessoa. O bom senso é subjetivo.

108 O que é mesmo um LG?

> É uma linha (φ) tal que
> TODOS os seus pontos e SOMENTE ELES
> têm uma PROPRIEDADE ($\mathcal{C}$) comum.

Se precisar, reveja do nº 100 ao nº 107, no livro 1.

109 Enunciada uma certa propriedade $\mathcal{C}$, como pesquisar qual linha φ é o seu LG?

Há, em princípio, vários modos que se complementam (um ajuda o outro):

a. "VISÃO ANIMADA":
É a capacidade de imaginar um desenho "mover-se", mas satisfazendo a certas condições.

Desenho animado...

b. EXPERIÊNCIAS:

C é a propriedade.

ou desenhando vários pontos com C

ou com um instrumento apropriado.

c. DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA:
Para "calibrar" o bom senso, recorre-se à Geometria.

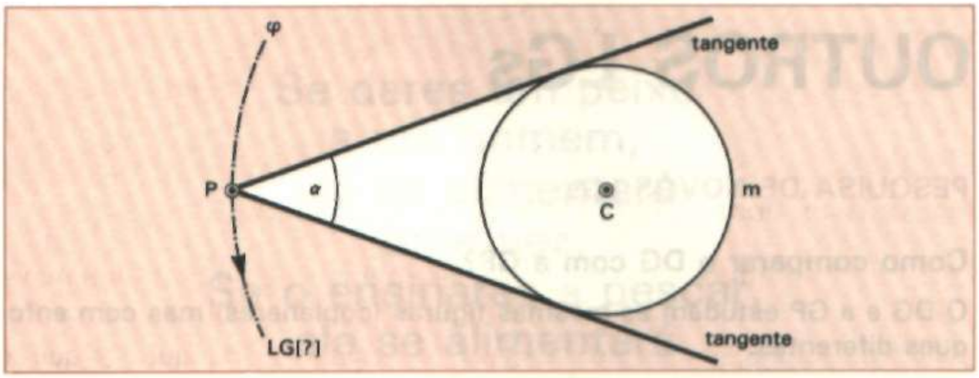
110 EXEMPLO:

Qual o LG dos pontos que enxergam uma circunferência ($\overline{C}$; m) sob ângulo α?

DADA: C = ver ($\overline{C}$; m) FIXA sob α constante.

OBTER: o LG φ [?].

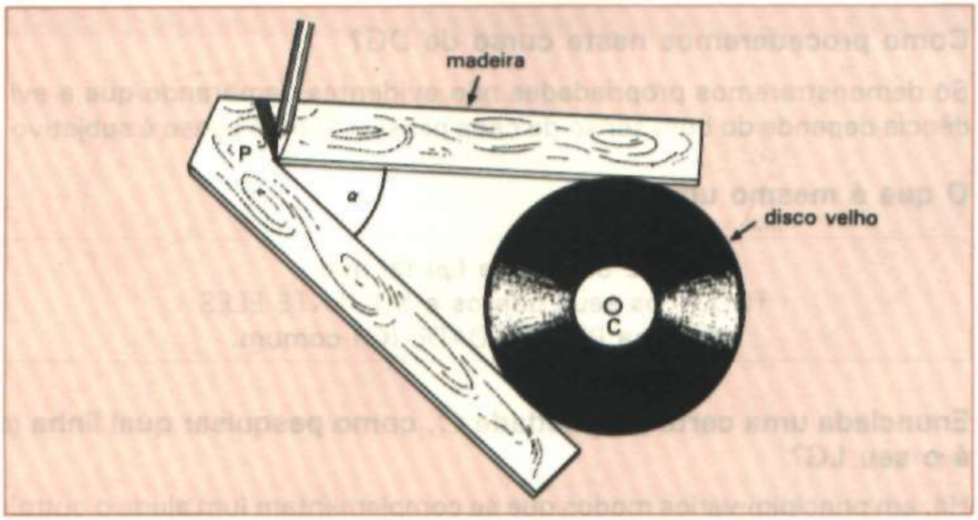
Posição fixa; tamanho constante.



PESQUISA DO LG:

a. "VISÃO ANIMADA":
Mantendo ($\overline{C}$; m) fixa e α constante, "movimente" mentalmente $\overline{P}$ e procure "ver" qual será a sua trajetória φ.

b. EXPERIÊNCIA:
Movimente fisicamente um instrumento como o do desenho abaixo e note que a ponta $\overline{P}$ do lápis (ou giz) descreve uma certa linha φ.



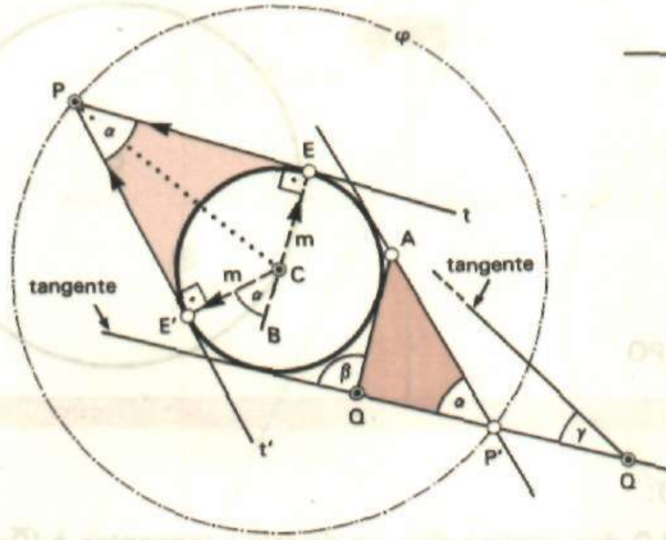
111 **Dados ($\overline{C}$; m) e α, como se desenha esse LG?**

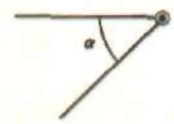
Pelo bom senso e/ou pela experiência, percebe-se que esse LG é uma circunferência de centro $\overline{C}$; resta obter o seu raio e isso se faz como segue:

1º) *Constrói-se um ângulo central E'ĈB ≅ $\hat{\alpha}$, obtendo $\overline{E'}$ e $\overline{E}$.*

2º) As tangentes por $\overline{E'}$ e por $\overline{E}$ determinam $\overline{P}$ e PC é o raio de φ.

Os ângulos E'ĈB e E'P̂E são congruentes por terem $\overline{PE'} \perp \overline{E'C}$ e $\overline{PE} \perp \overline{EC}$.





112 **Somente os pontos de ($\overline{C}$; CP) vêem ($\overline{C}$; m) sob α?**

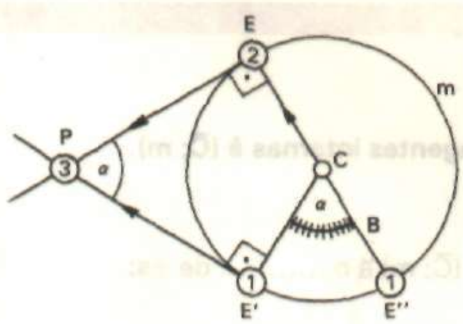
Sim. Se $\overline{Q}$ for interno, então (no △AQP') o ângulo externo β será maior que α.

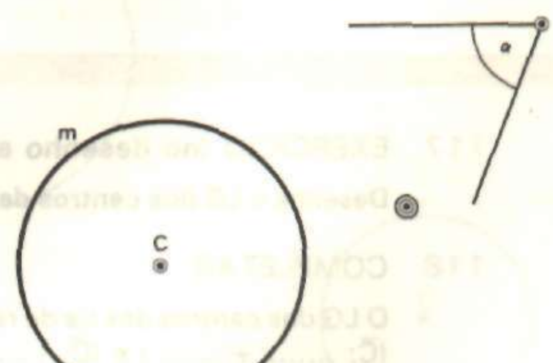
Se Q' for externo, então verá ($\overline{C}$; m) sob um ângulo γ menor que α, o que se demonstra analogamente (outro △, não desenhado).

113 EXERCÍCIO:

Desenhar o LG dos pontos que enxergam a circunferência ($\overline{C}$; m) sob ângulo α.

EG





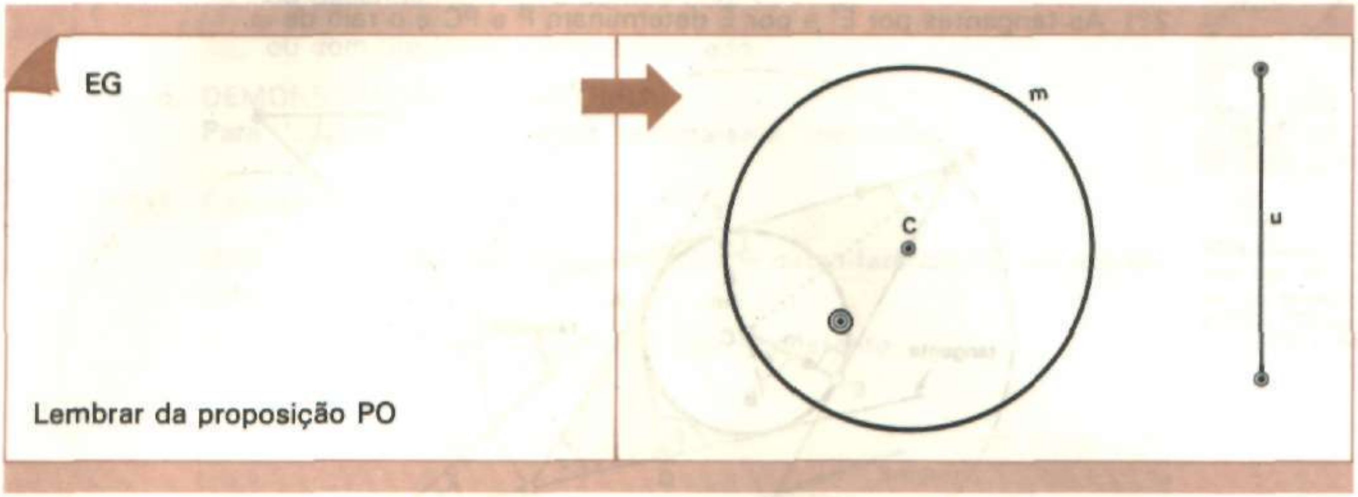
ROTEIRO:

Começa-se a cópia transportando $\hat{\alpha}$ para E'ĈE'' (ou E'ĈB).

114 Agora você sozinho vai pesquisar um LG:

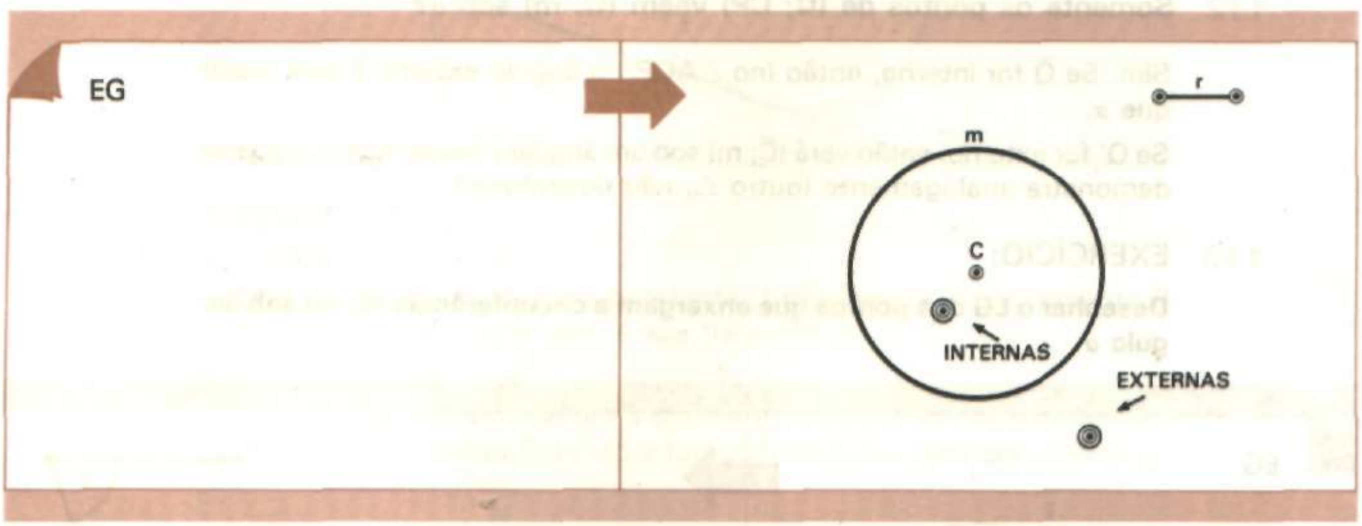
115 EXERCÍCIO:

Desenhe o LG dos pontos médios das cordas de ($\overline{C}$; m) que medem μ.



116 EXERCÍCIO:

Desenhe o LG dos centros das ⊙s de raio r tangentes à ($\overline{C}$; m).



117 EXERCÍCIO **(no desenho acima):**

Desenhe o LG dos centros das ⊙s de raio r tangentes internas à ($\overline{C}$; m).

118 COMPLETAR:

O LG dos centros das ⊙s de raio r tangentes à ($\overline{C}$; m) é o .... de ⊙s: ($\overline{C}$; .... + ...) e ($\overline{C}$; |....... − ....|).

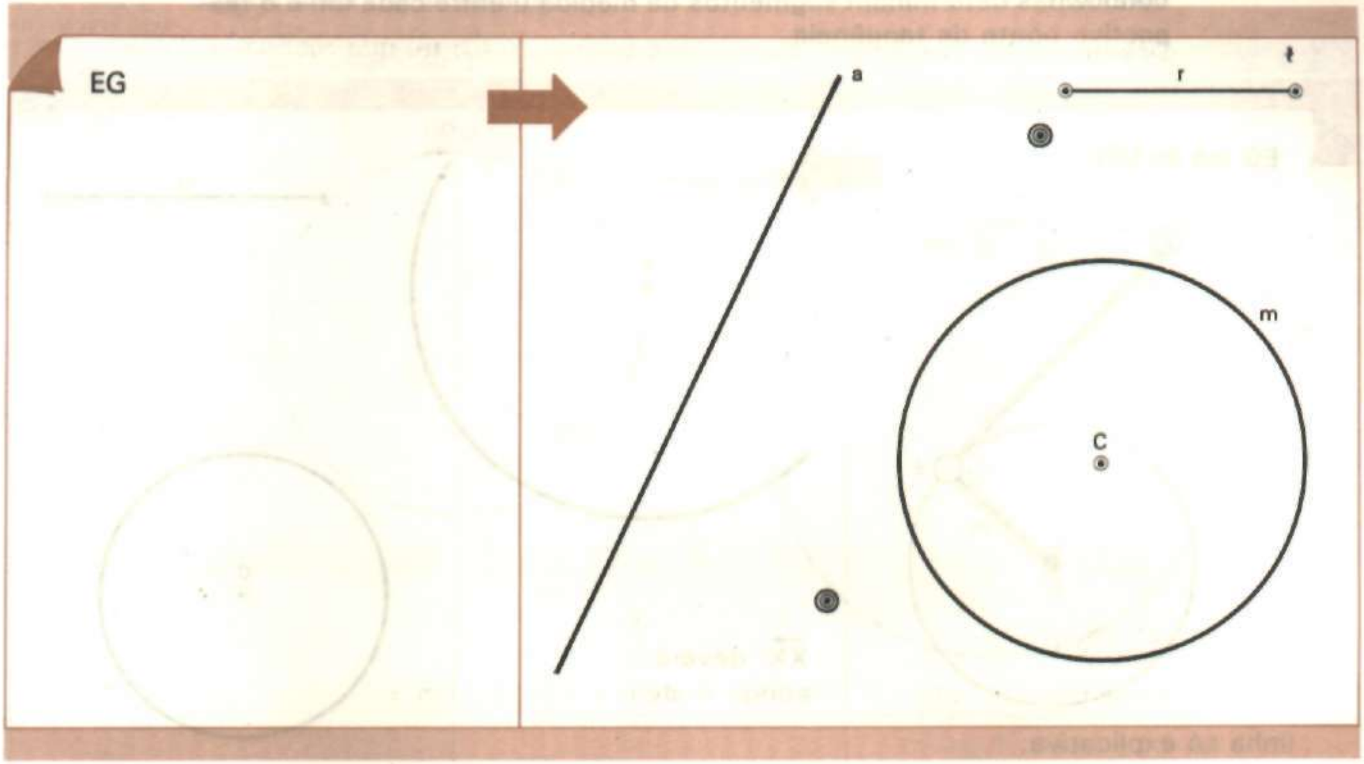
119 Nos próximos exercícios:

1º) Pesquise qual linha é o LG de que você necessita.

2º) Desenhe esse LG para copiar o ponto que você quer (ou já uma resposta ou um ponto auxiliar).

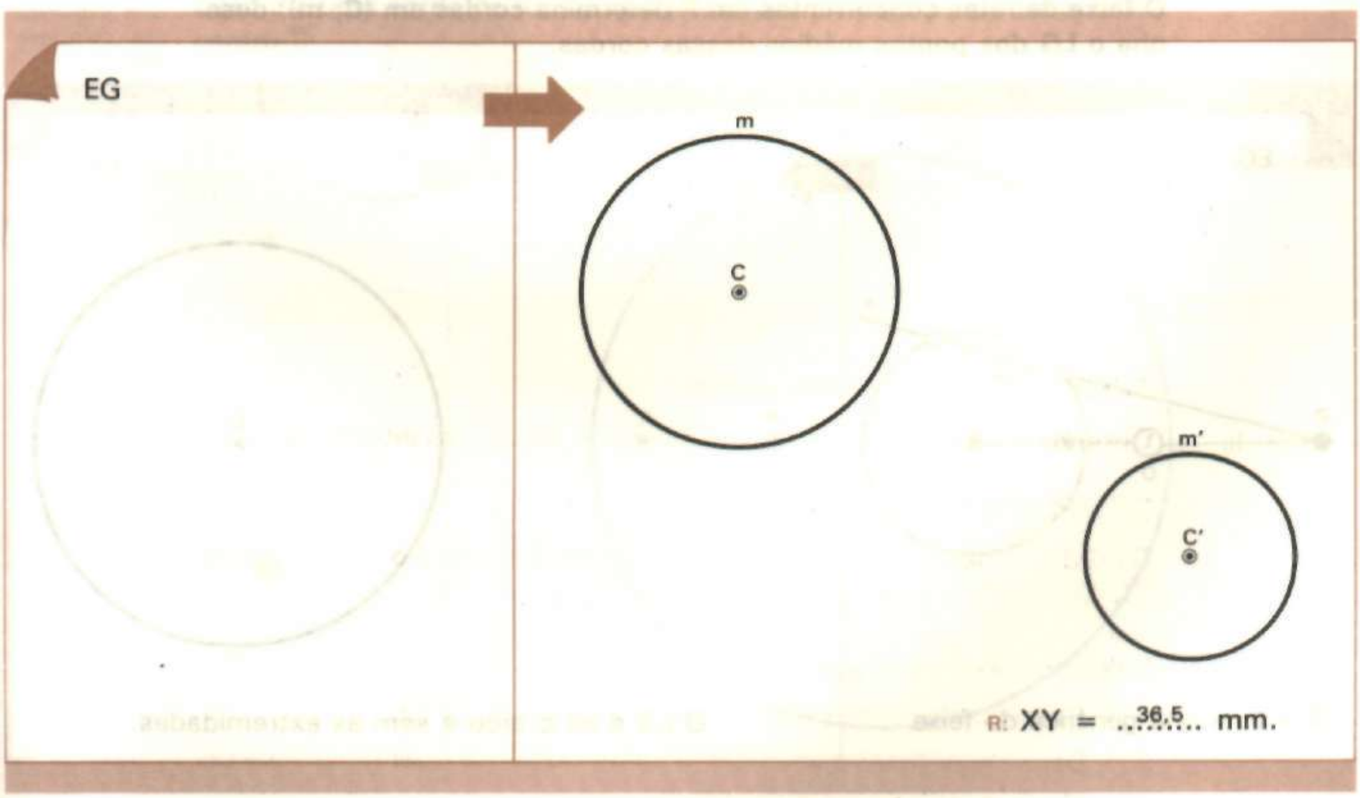
120 EXERCÍCIO:

Construir ($\overline{X}$; r) tangente à ($\overline{C}$; m) e com $\overline{X}$ na reta $\overleftrightarrow{a}$.



121 EXERCÍCIO:

Obter os pontos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ que vêem ($\overline{C}$; m) sob 60° e ($\overline{C}'$; m') sob 45°.

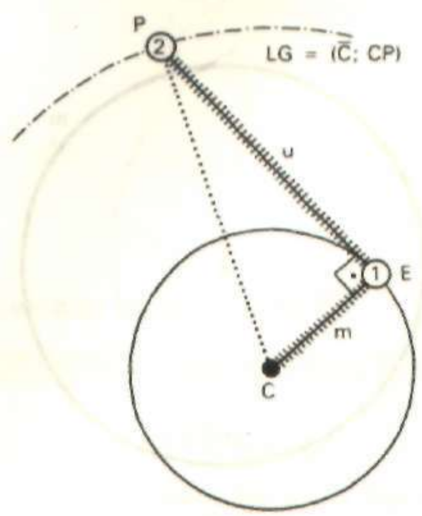


122 EXERCÍCIO:

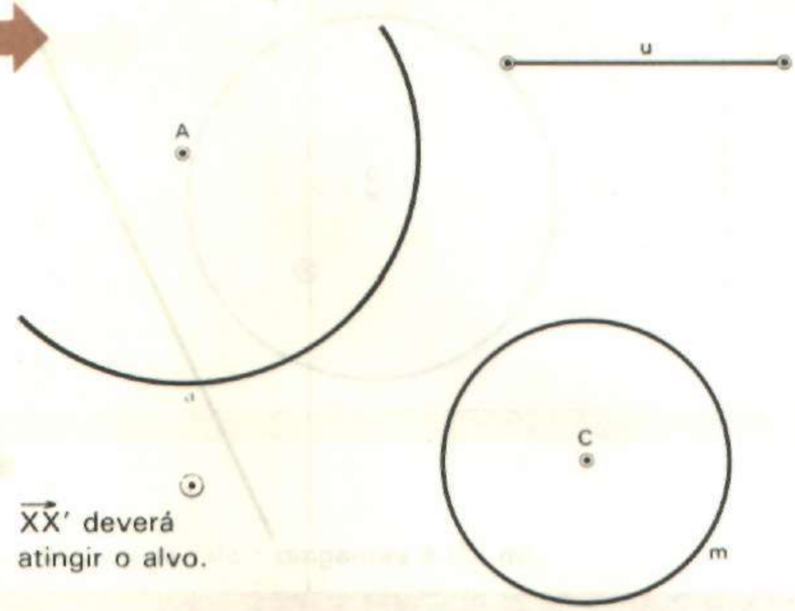
Obter $\overline{X}$ e $\overline{X'}$ em ($\overline{A}$; a), sabendo que as retas tangentes à ($\overline{C}$; m) por eles conduzidas determinam segmentos de medida u entre cada um e o respectivo ponto de tangência.

Puxa... é um exercício de interpretação de texto!

EG (só do LG):



... linha só explicativa.



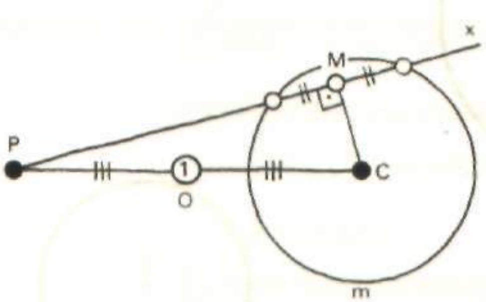
$\overrightarrow{XX'}$ deverá atingir o alvo.

123 EXERCÍCIO:

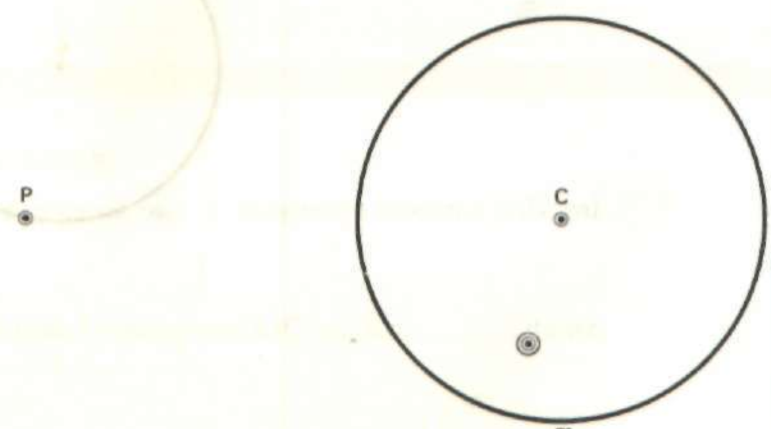
O feixe de retas concorrentes em $\overline{P}$ determina cordas em ($\overline{C}$; m); desenhe o LG dos pontos médios dessas cordas.

Não há cordas com extremidades coincidentes.

EG



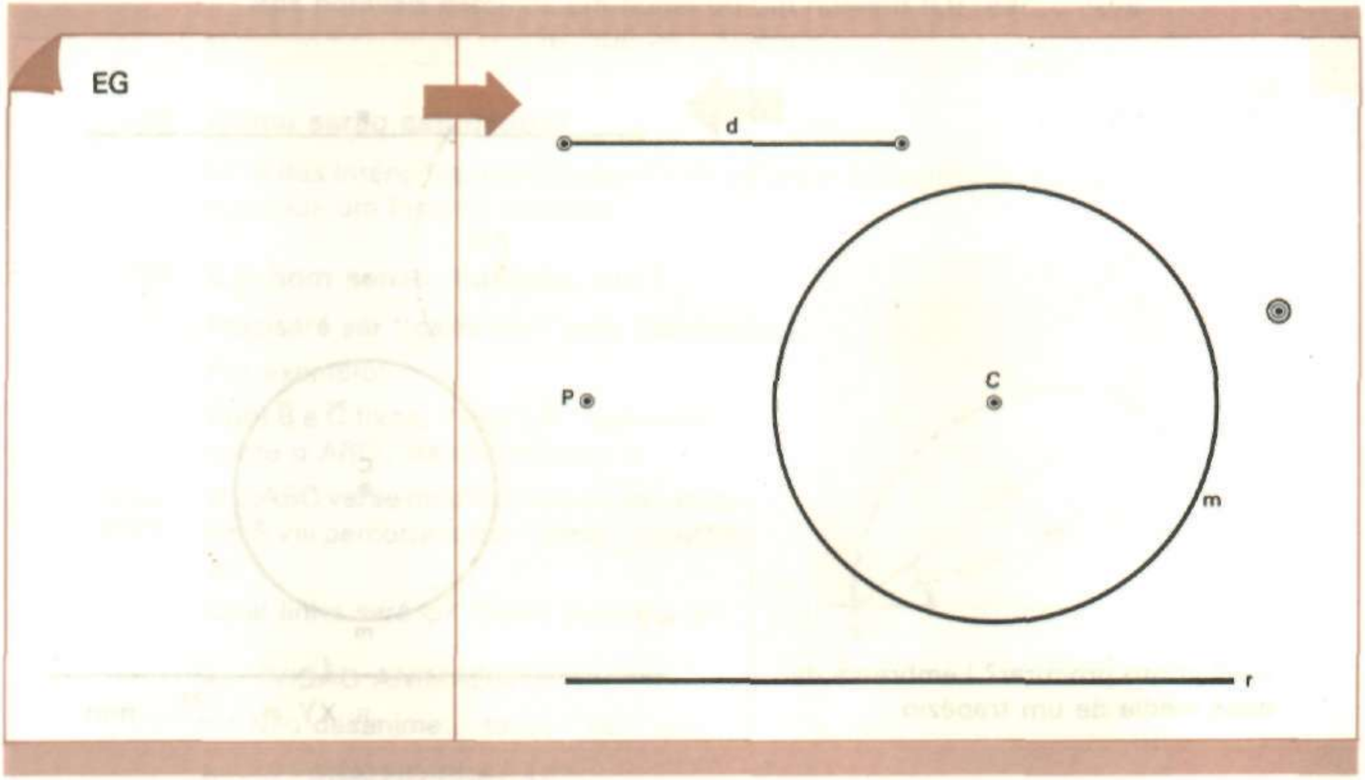
$\overleftrightarrow{x}$ é uma reta genérica do feixe.



O LG é só o arco e sem as extremidades.

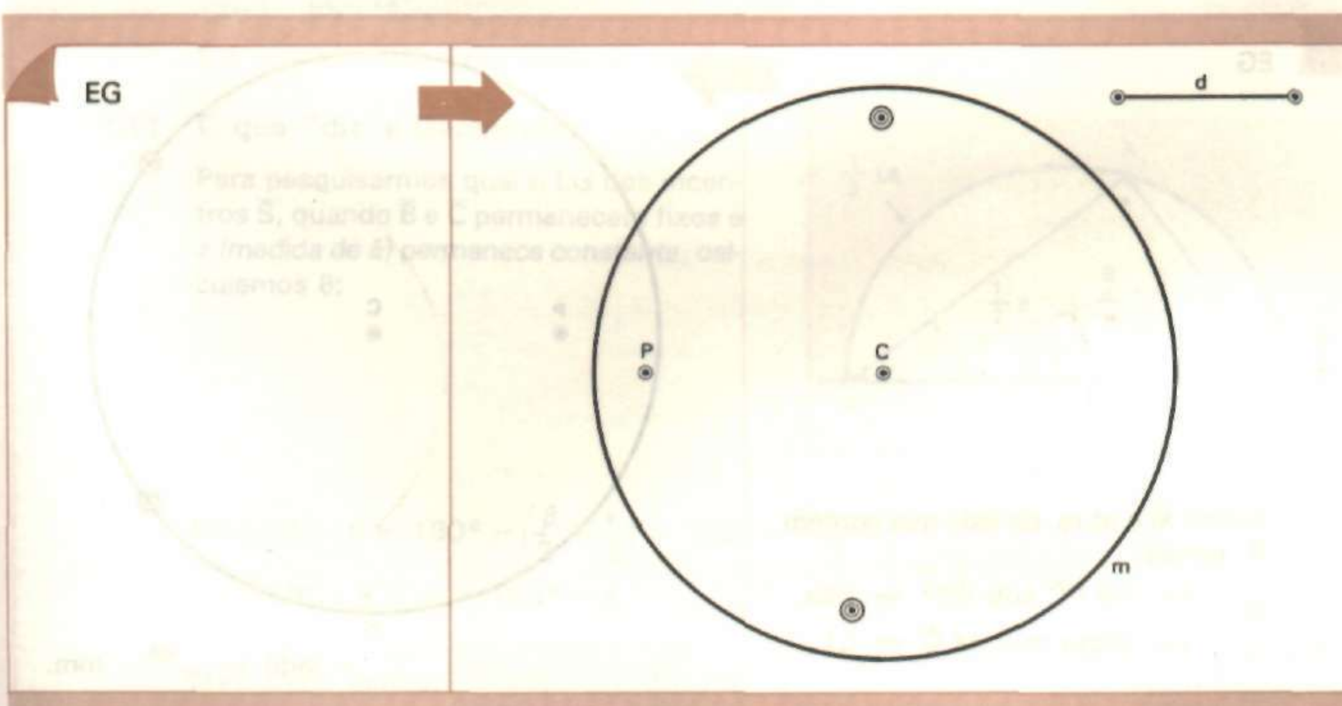
124 EXERCÍCIO:

Conduzir por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$ que determina em ($\overline{C}$; m) uma corda cujo ponto médio dista d da reta $\overleftrightarrow{r}$.



125 EXERCÍCIO:

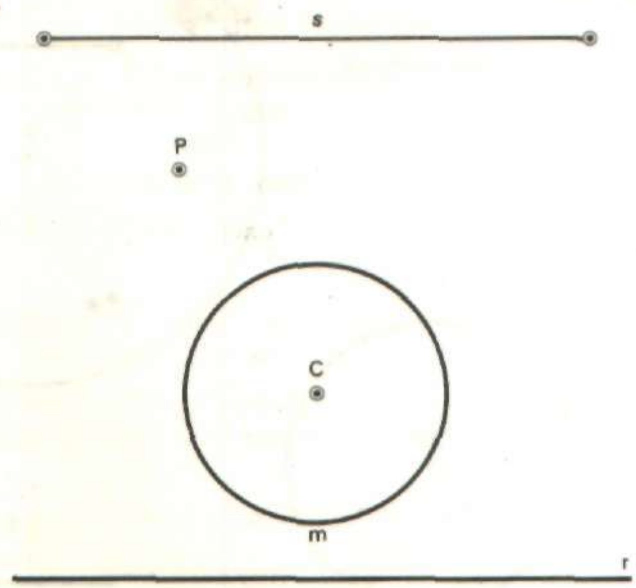
Desenhe uma corda de ($\overline{C}$; m) que passe por $\overline{P}$ e cujo pt.m. diste d do centro $\overline{C}$.



126 EXERCÍCIO:

Trace por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$, que encontra ($\overline{C}$; m) nos pontos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ e cujas distâncias à $\overleftrightarrow{r}$ somam s.

EG



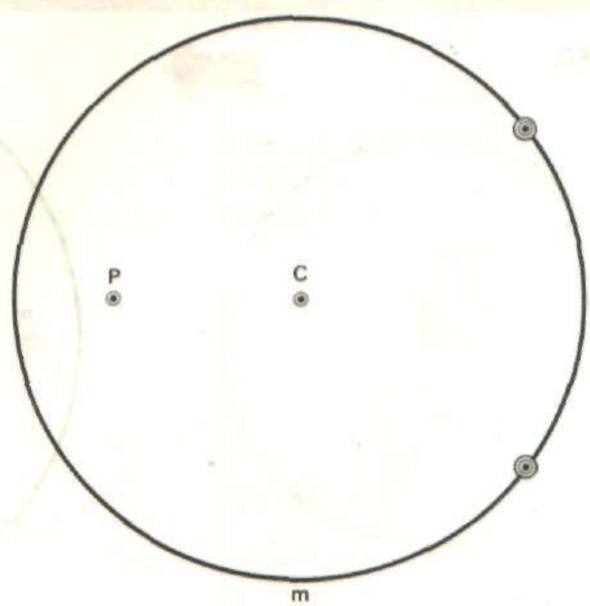
Qual ponto procurar? Lembre-se da base média de um trapézio.

R: XY = ...21.... mm.

127 EXERCÍCIO:

Em ($\overline{C}$; m), inscrever um △ eqüilátero com um lado contendo $\overline{P}$.

EG



Sendo $\overline{M}$ o pt.m. do lado que contém $\overline{P}$, *temos:*

$\overline{M}$[?] { a. Vê $\overline{PC}$ sob 90° ⇒ L5a.
b. Dista m/2 de $\overline{C}$ ⇒ L1.

R: lado = ...65.... mm.

Há tantos LGs quantos quisermos.
Aos notáveis daremos um nome ou um número (L6, L7,...) para facilitar as referências.

128 Como serão estudados?

Uma das intenções deste curso é a de valorizar a Geometria, sem a qual teríamos um livro de receitas...

129 E o bom senso, intuição, etc.?

Precisará ser "calibrado" pela Geometria...

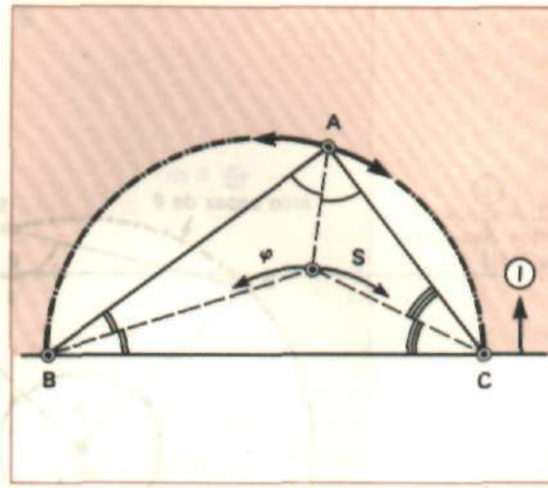
Por exemplo:

Com $\overline{B}$ e $\overline{C}$ fixos, "veja" $\overline{A}$ "passeando" sobre o ARCO de circunferência.

Incentro é o centro da ○ inscrita.

O $\triangle ABC$ vai se modificando e o seu incentro $\overline{S}$ vai percorrer uma "certa" trajetória φ.

Qual linha será φ? Como desenhá-la?



a. "VISÃO ANIMADA":

Não desanime... tente "ver" φ...

b. "TRABALHO BRAÇAL":

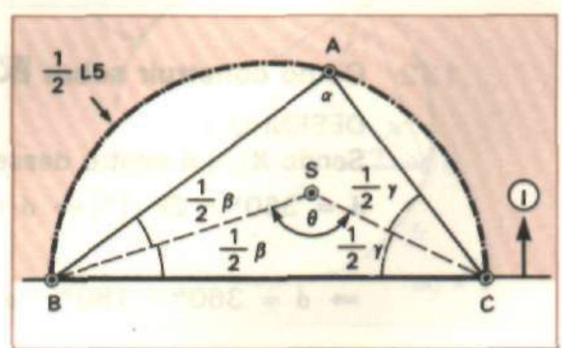
Desenhe $\overline{A}$ em várias posições e, para cada uma, ache $\overline{S}$ (intersecção das bissetrizes). Ligue os vários $\overline{S}$.

130 A minha "visão" só diz que é uma "curva" de $\overline{B}$ ao $\overline{C}$...; desenhar vários pontos...

É o que acontece com pessoas normais.

131 O que "diz" a Geometria?

Para pesquisarmos qual o LG dos incentros $\overline{S}$, quando $\overline{B}$ e $\overline{C}$ permanecem fixos e α (medida de $\hat{a}$) permanece constante, calculemos θ:



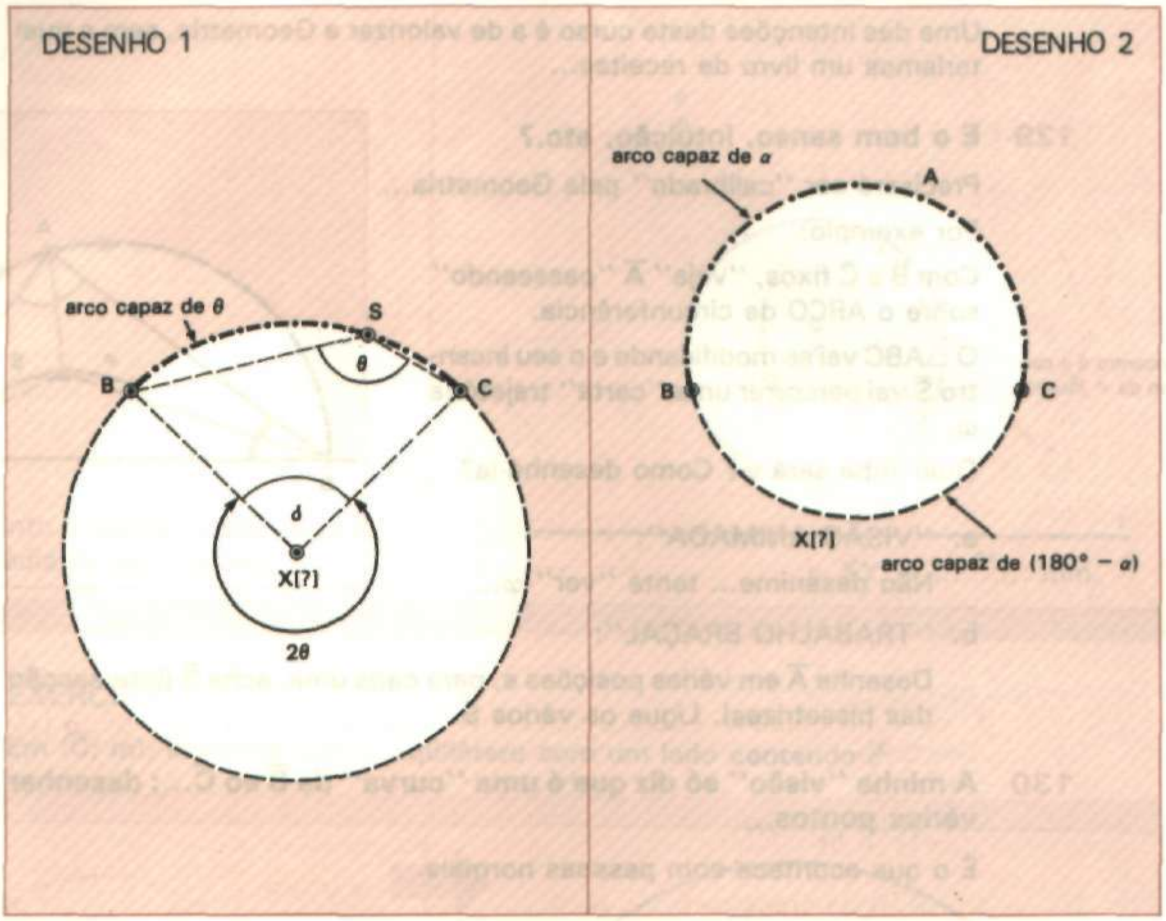
$$\left.\begin{array}{l} \text{No } \triangle SBC: \theta = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 180° - \frac{\beta + \gamma}{2} \\ \text{No } \triangle ABC: \beta + \gamma = 180° - \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 180° - \frac{\overbrace{180° - \alpha}^{\beta + \gamma}}{2}$$

Efetuando, temos: $\boxed{\theta = 90° + \frac{\alpha}{2}}$ (*)

RACIOCÍNIO:

SE α é constante $\xrightarrow{[*]}$ θ é constante,
ENTÃO $\overline{S}$ percorre o arco capaz de θ sobre $\overline{BC}$.

Basta obter $\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = \theta$ e construir em $\overline{BC}$ o arco capaz de θ, mas há *um modo melhor:*



P3: Ângulos inscritos (faz parte da TM).

132 Como construir sobre $\overline{BC}$ o arco capaz de θ?

DESENHO 1:

Sendo X[?] o centro desse arco, temos:

$$\delta = 360° - 2\theta \ \ [*] \Rightarrow \delta = 360° - 2\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = 360° - 180° - \alpha \Rightarrow \boxed{\delta = 180° - \alpha}$$

DESENHO 2:

SE $\widehat{BAC}$ é o arco capaz de α,
ENTÃO $\widehat{BXC}$ é o arco capaz de $(180° - \alpha)$.

O quadrilátero BACX é inscritível (ângulos opostos suplementares).

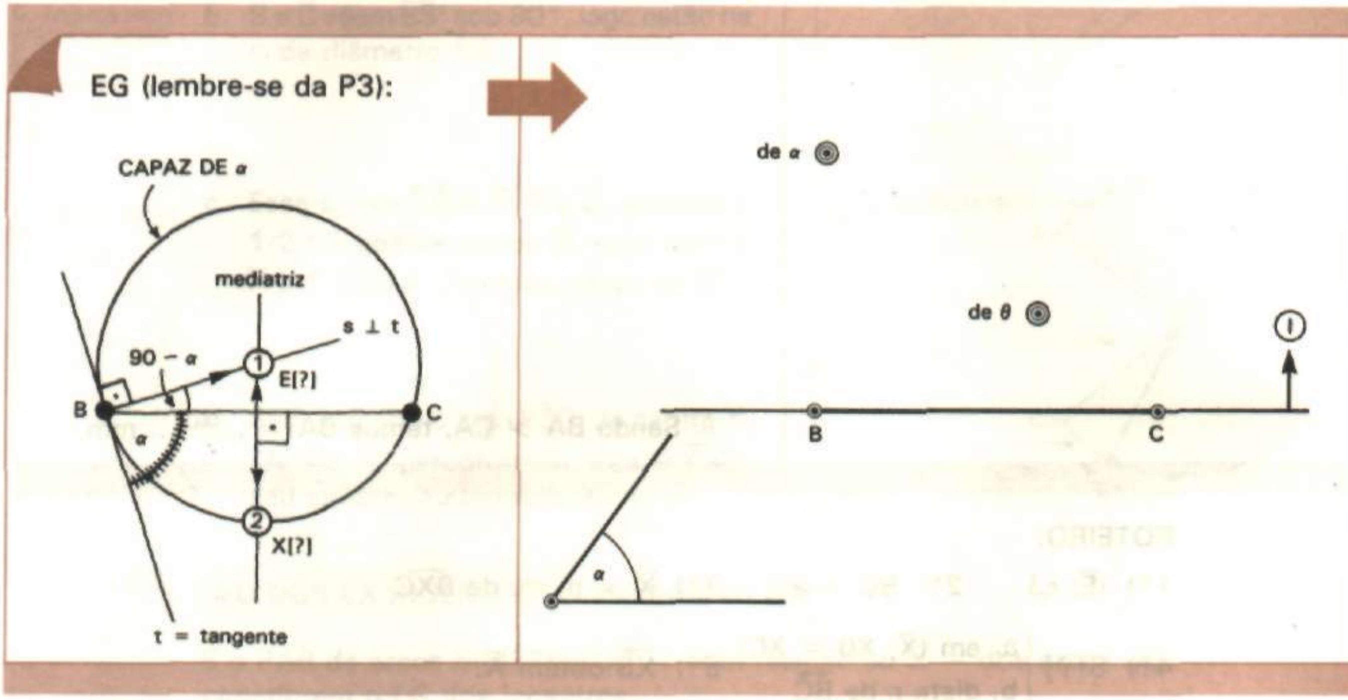
CONCLUSÃO DOS DOIS DESENHOS:

$$X[?] \begin{cases} \text{a. Vê } \overline{BC} \text{ sob } \delta = 180° - \alpha \\ \text{b. Eqüidista de } \overline{B} \text{ e } \overline{C}. \end{cases} \Rightarrow \overline{X} \text{ é pt.m. de } \widehat{BXC}.$$

133 Então esse arco capaz de θ tem centro $\overline{X}$ e raio XB = XC.

134 EXERCÍCIO **(serve como revisão):**

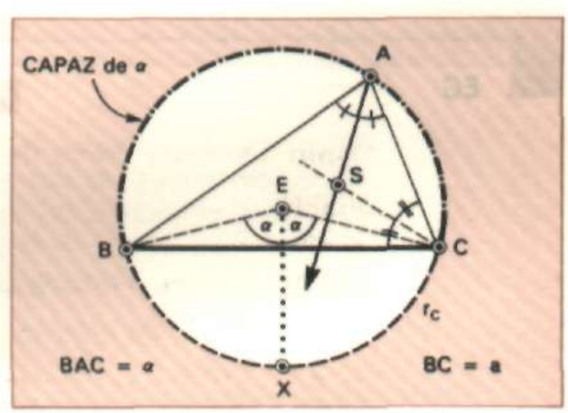
Em I, construa sobre $\overline{BC}$ o arco capaz de α e o arco capaz de $\theta = 90° + \frac{\alpha}{2}$.



135 Em cada semiplano há um único arco capaz de θ; no plano todo, o LG é o PAR de arcos.

136 LG DOS INCENTROS

É o PAR **de arcos capazes de θ.**



137 A bissetriz $\overrightarrow{AS}$ de $B\hat{A}C \cong \hat{\alpha}$ passa por $\overline{X}$ = pt.m. de $\overset{\frown}{BC}$, pois BEX = XEC = α.
Então $\overline{A}$, $\overline{S}$ e $\overline{X}$ são sempre colineares.

$\overline{E}$ é o circuncentro.

138 Em qualquer $\triangle$ABC temos: BC = a, α e r_c (raio da circunscrita) estão sempre relacionados, de modo que, tendo-se DOIS desses elementos, pode-se obter o 3º.

a. Dados a e α, construindo-se o arco capaz de α, o seu raio será r_c.

b. Dados a e r_c, o ângulo central BÔC medirá 2α.

c. Dados r_c e α, o ângulo central BÊC determinará $\overline{BC}$, de medida a.

139 Empregando o que vimos nos nºs 137 e 138 poderemos resolver muitos problemas de determinação de $\triangle$s:

Construir um $\triangle$ABC, dados:

140 EXERCÍCIO:

r_i é o raio da inscrita.

$a\,r_c\,r_i$ com $a = 28$; $r_c = 20$; $r_i = 8$ (em mm).

EG

R: **Sendo BA > CA, temos BA = ...40.... mm.**

ROTEIRO:

1º) $(\overline{E}; r_c)$ 2º) $BC = a$ 3º) $\overline{X}$ = pt.m. de $\widehat{BXC}$

4º) $S[?]\begin{cases}\text{a. em } (\overline{X};\ XB = XC)\\ \text{b. dista } r_i \text{ de } \overleftrightarrow{BC}\end{cases}$ 5º) $\overrightarrow{XS}$ obtém $\overline{A}$.

141 EXERCÍCIO:

$\alpha\,r_c\,r_i$ com $\alpha = 30°$; $r_c = 25$ mm; $r_i = 7$ mm.

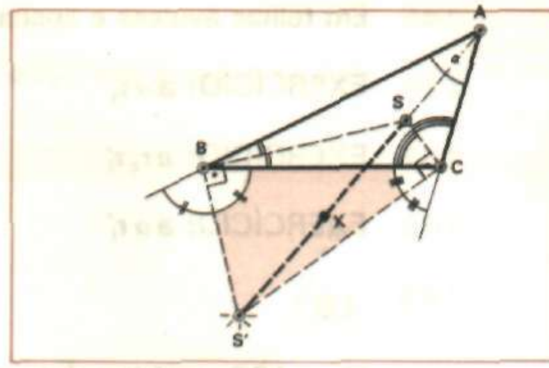
EG

R: **BA > CA mede ..45,5.. mm.**

142 **Qual é o LG dos ex-incentros?**

$\overline{S'}$ é o ex-incentro, relativo ao lado $\overline{BC}$; há outros dois.

a. $\overline{S'}$, estando na bissetriz $\overrightarrow{AS}$, é colinear com $\overline{A}$, $\overline{S}$ e $\overline{X}$ (n.º 137).

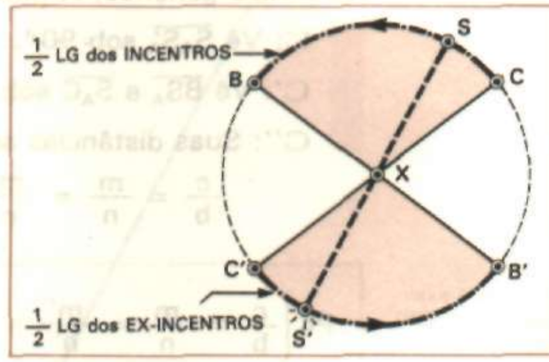


Os ângulos retos $S'\hat{B}S$ e $S\hat{C}S'$ são inscritos em semicircunferências de diâmetro $\overline{SS'}$.

b. $\overline{B}$ e $\overline{C}$ vêem $\overline{SS'}$ sob 90°, logo estão na ⊙ de diâmetro $\overline{SS'}$.

$\frac{1}{2}$ LG porque o LG é o par.

c. Essa ⊙, contendo $\overline{B}$, $\overline{S}$ e $\overline{C}$, contém o 1/2 LG dos incentros $\overline{S}$, cujo centro $\overline{X}$ (n.º 133) é, portanto, pt.m. de $\overline{SS'}$.



d. SE $\overline{S}$ percorre o arco $\widehat{BSC}$, de centro $\overline{X}$, ENTÃO $\overline{S'}$ percorrerá o arco $\widehat{B'S'C'}$, seu simétrico com relação ao $\overline{X}$.

143 **LG DOS EX-INCENTROS (relativos ao $\overline{BC}$)**

É o PAR de arcos SIMÉTRICOS — com relação ao $\overline{X}$ — dos arcos que constituem o LG dos incentros.

144 EXERCÍCIO:

$\alpha\, r_c\, r_i'$ com $\alpha = 60°$; $r_c = 30$ mm; $r_i' = 43$ mm.
(r_i' = raio da ex-inscrita relativa ao $\overline{BC}$)

EG

Com BA > CA, temos R: BA = ...58.. mm.

145 Em folhas avulsas e apenas para achar o roteiro:

146 EXERCÍCIO: $a\,\alpha\,r_i$

147 EXERCÍCIO: $a\,r_c\,r_i'$

148 EXERCÍCIO: $a\,\alpha\,r_i'$

149 **L6**

No $\triangle ABC$ genérico, $\overline{A}$ tem três propriedades que se equivalem:

C: Vê $\overline{S_AS_A'}$ sob 90°.

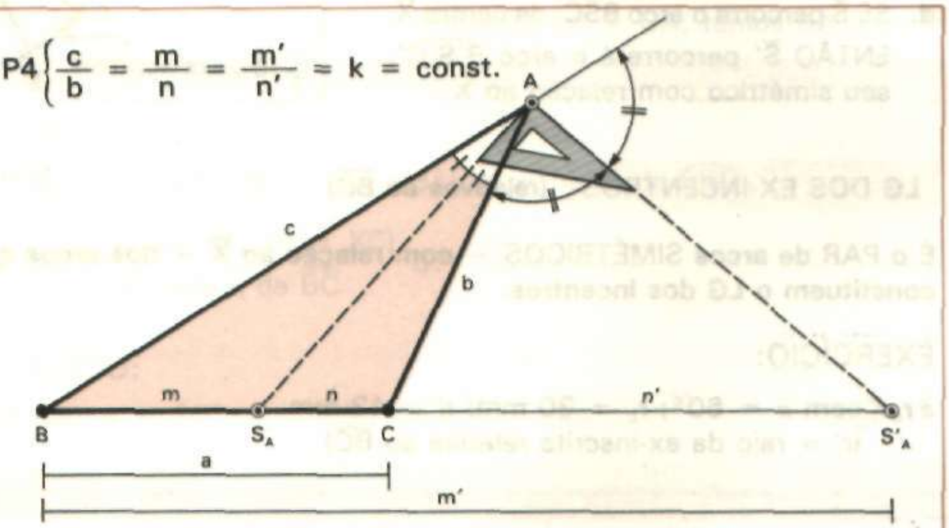
C': Vê $\overline{BS_A}$ e $\overline{S_AC}$ sob ângulos congruentes.

C'': Suas distâncias ao $\overline{B}$ e ao $\overline{C}$ (nessa ordem) estão na razão

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = k$$

A P4 está explicada do nº 030 ao nº 035.

$$\text{P4}\left\{\frac{c}{b} = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = k = \text{const.}\right.$$



O par ordenado $(S_A; S_A')$ divide $\overline{BC}$ harmonicamente na razão $\frac{c}{b}$.

150 Mantendo $\overline{B}$ e $\overline{C}$ fixos e variando $\overline{A}$ de modo a manter qualquer uma dessas propriedades, as outras duas também se manterão. Portanto o LG de uma é também o LG das outras duas.

151 **Qual o LG dos pontos que vêem $\overline{S_AS_A'}$ sob 90° (propriedade C)?**

R: É a .... de diâmetro ....

152 ***Qual o LG dos pontos que vêem $\overline{BS_A}$ e $\overline{S_AC}$ sob ângulos congruentes (C')?***

$\overline{BS_A}$ e $\overline{S_AC}$ precisam ser adjacentes.

R: É a .... de diâmetro ...., que se constrói obtendo o 4º harmônico S_A' (nº 024).

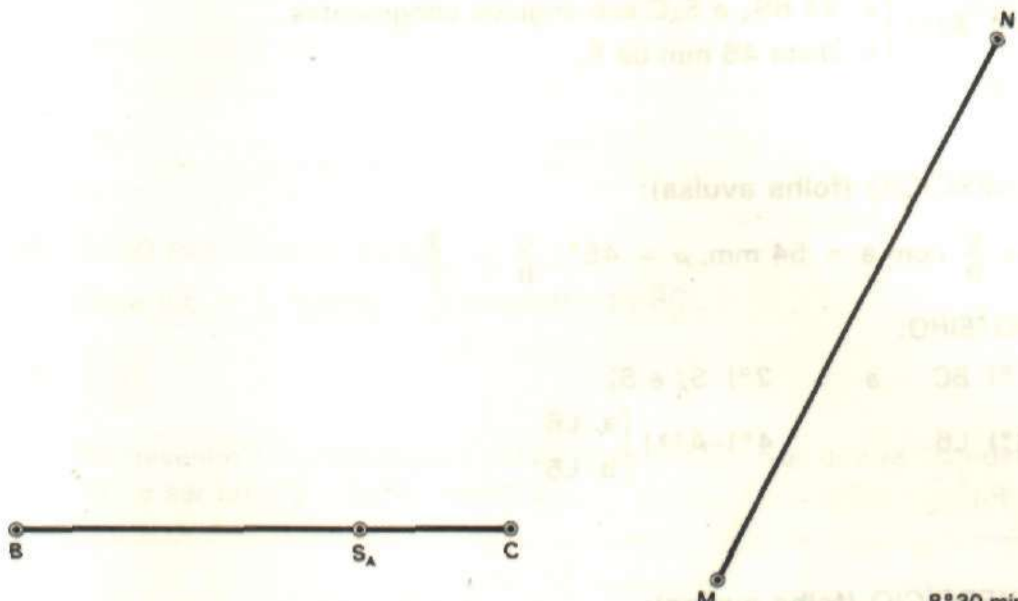
153 **Qual o LG dos pontos cujas distâncias ao $\overline{B}$ e ao $\overline{C}$ (nessa ordem) estão numa razão constante (C'')? Razão dada = r.**

R: É a .... de diâmetro ...., que se obtém dividindo .... $\overline{BC}$ na razão r (nº 022).

154 EXERCÍCIO:

Um ponto $\overline{X}$ do segmento $\overline{MN}$ enxerga $\overline{BS_A}$ e $\overline{S_AC}$ sob ângulos de mesma medida ε (épsilon). Qual é ε?

Use o transferidor para medir ε, depois de obter $\overline{X}$.

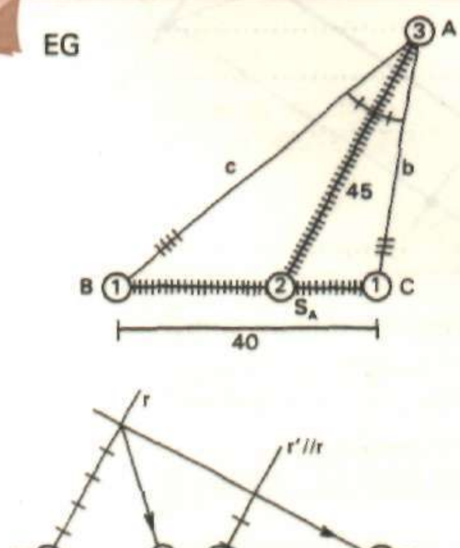


R: ε = ...8°30 min.... (em graus).

155 EXERCÍCIO:

a s_1 $\frac{c}{b}$ com a = 40 mm; s_1 = 45 mm; $\frac{c}{b} = \frac{5}{3}$.

EG



R: BA = ...63.... mm.

ROTEIRO:

1º) Comece a cópia por BC = a, "matando" $\overline{B}$ e $\overline{C}$.

2º) Obtenha $\overline{S}_A$ e $\overline{S}'_A$ como mostra o EG.

3º) Desenhe a ⊙ de diâmetro $\overline{S_A S'_A}$; é o L6.

4º) $\overline{A}[?]$ $\begin{cases} \text{a. Vê } \overline{BS_A} \text{ e } \overline{S_A C} \text{ sob ângulos congruentes.} \\ \text{b. Dista 45 mm de } \overline{S}_A. \end{cases}$

156 EXERCÍCIO **(folha avulsa):**

$a\,\alpha\,\frac{c}{b}$ com $a = 54$ mm; $\alpha = 45°$; $\frac{c}{b} = \frac{3}{2}$.

ROTEIRO:

1º) BC = a 2º) S_A e S'_A

3º) L6 4º) $\overline{A}[?]$ $\begin{cases} \text{a. L6} \\ \text{b. L5} \end{cases}$

157 EXERCÍCIO **(folha avulsa):**

$a\,r_c\,\frac{c}{b}$ com $a = 60$ mm; $r_c = 35$ mm; $\frac{c}{b} = \frac{7}{4}$.

ROTEIRO:

....

....

....

....

....

....

158 EXERCÍCIO **(só o roteiro):**

$a\,h_1\,\frac{c}{b}$

ROTEIRO:

....

....

....

....

....

....

159 EXERCÍCIO **(só o roteiro):**

$r_c \; \alpha \; \dfrac{c}{b}$

ROTEIRO:

....

....

....

....

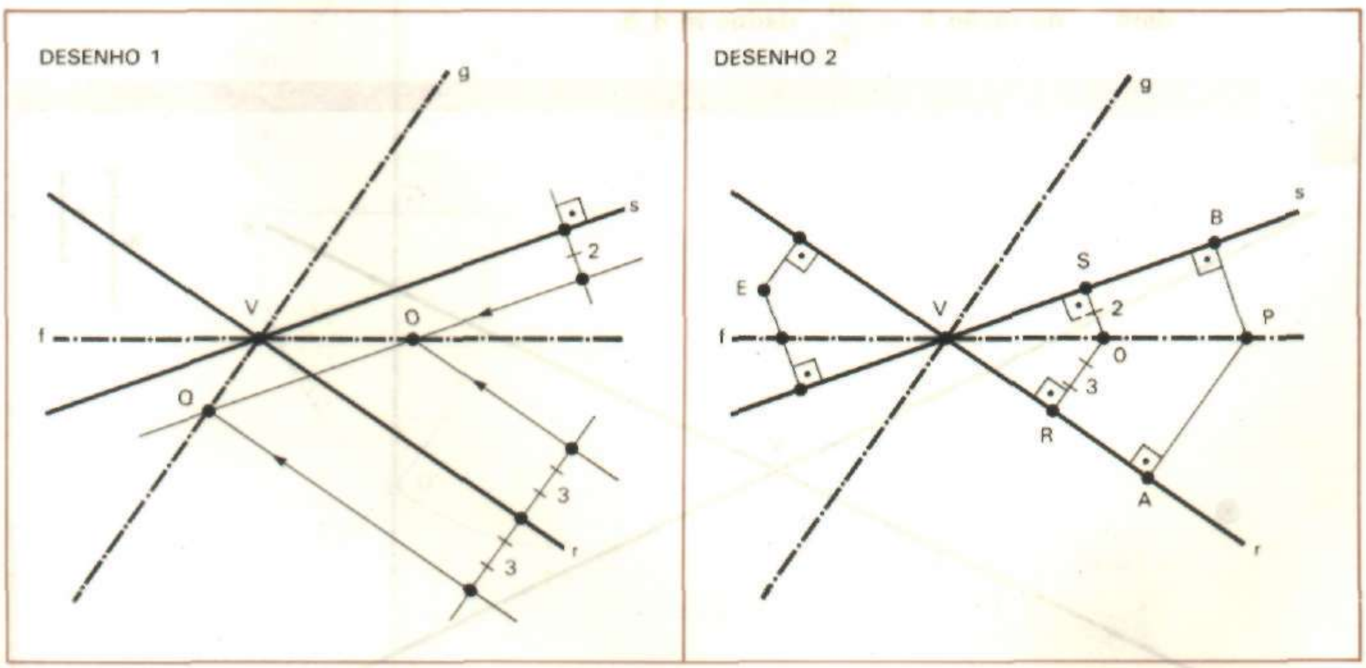
....

160 CASO PARTICULAR DO **LG**:

Caso c/b = 1, temos o L3 (mediatriz de $\overline{BC}$).

161 L7

No desenho 1, construímos o par de retas $(\overleftrightarrow{f}; \overleftrightarrow{g}) = \varphi$, que se "candidata" a ser um LG... Será "eleito"?



Como mostra o desenho 1, dadas $\overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{s}$ e a razão $k = \dfrac{m}{n}$ (no exemplo, fizemos $k = \dfrac{3}{2}$), obtivemos $\overline{O}$ e $\overline{Q}$ e depois $\overleftrightarrow{f}$ e $\overleftrightarrow{g}$.

162 **O par $(\overleftrightarrow{f}; \overleftrightarrow{g})$ está se candidatando a ser o LG de qual propriedade C?**

Dos pontos cujas distâncias à $\overleftrightarrow{r}$ e à $\overleftrightarrow{s}$ — nessa ordem — têm razão constante $k = \dfrac{m}{n}$.

163 **Todos os pontos de φ têm a propriedade C?**

Se um ponto genérico $\overline{P}$ tiver C, então todos os pontos de φ terão C. De fato:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle VPA \sim \triangle VOR \Rightarrow \dfrac{VP}{VO} = \dfrac{PA}{OR} \\ \triangle VPB \sim \triangle VOS \Rightarrow \dfrac{VP}{VO} = \dfrac{PB}{OS} \end{array}\right\} \dfrac{PA}{OR} = \dfrac{PB}{OS} \Rightarrow \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{\overbrace{OR}^{m=3}}{\underbrace{OS}_{n=2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m}{n} = k}$$

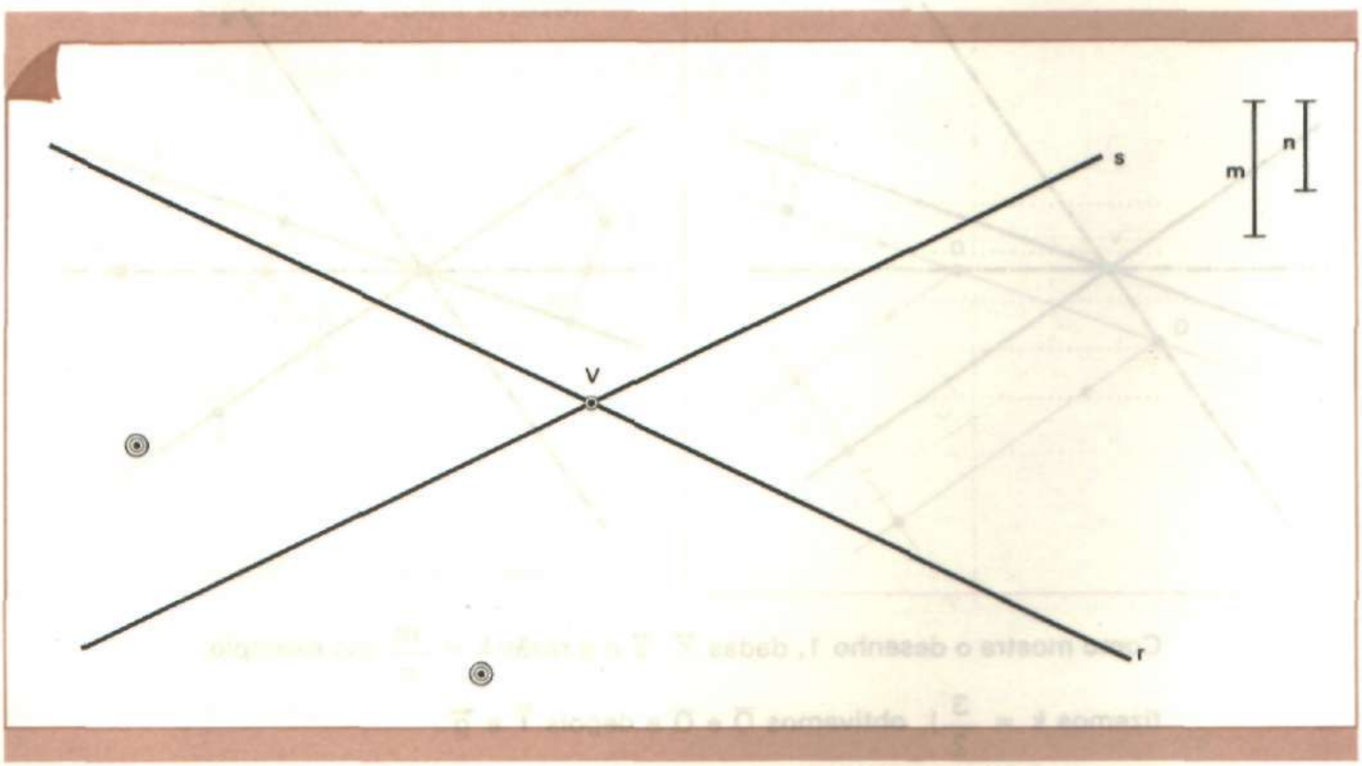
As distâncias PA e PB estão na razão **k**.

164 **E os pontos fora de φ?**

Não têm a propriedade C, como o ponto genérico $\overline{E}$. O bom senso pede para que não demonstremos...

165 EXERCÍCIO:

Construa o LG dos pontos cujas distâncias à $\overleftrightarrow{r}$ e à $\overleftrightarrow{s}$ estão — nessa ordem — na razão $k = \dfrac{m}{n}$, dados $\overline{m}$ e $\overline{n}$.



166 CASO PARTICULAR DO L7:

Se k = 1, *o L7 torna-se o L4.*

167 CUIDADO:

No L7, invertendo-se a ordem (1º $\overleftrightarrow{s}$ e depois $\overleftrightarrow{r}$) o LG é outro par de retas.

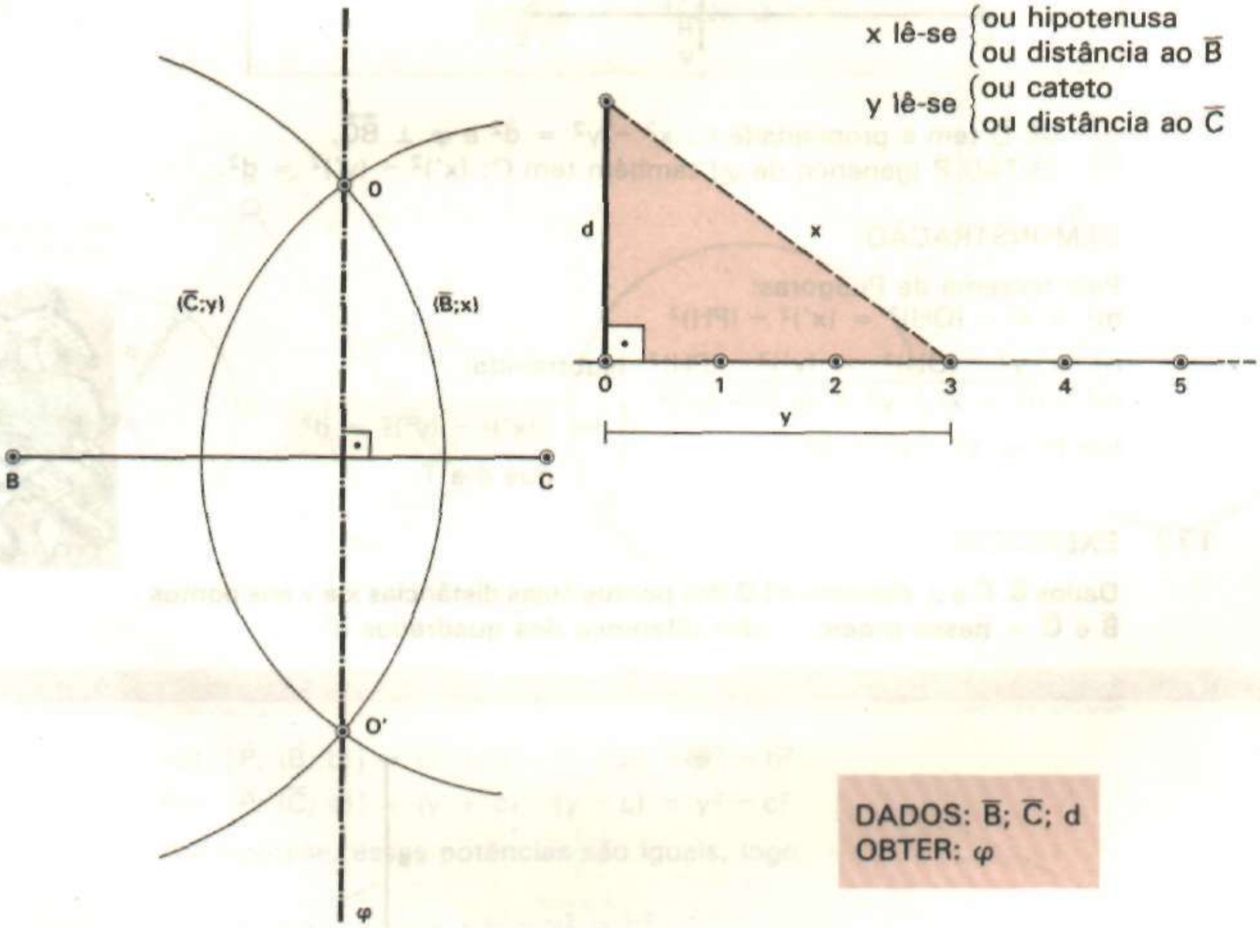
III EIXO RADICAL

168 Estudaremos antes outro LG:

L8

169 **Qual a figura "candidata" φ?**

É a reta $\overleftrightarrow{\overline{O}\overline{O}'}$, sendo $\overline{O}$ e $\overline{O}'$ as intersecções das circunferências ($\overline{B}$; x) e ($\overline{C}$; y).



x lê-se $\begin{cases} \text{ou hipotenusa} \\ \text{ou distância ao } \overline{B} \end{cases}$

y lê-se $\begin{cases} \text{ou cateto} \\ \text{ou distância ao } \overline{C} \end{cases}$

DADOS: $\overline{B}$; $\overline{C}$; d
OBTER: φ

170 **Quem são x e y?**

x é hipotenusa e **y** é cateto de um mesmo △ retângulo, cujo outro cateto tem comprimento constante **d**.

Em linguagem algébrica:

$$x^2 - y^2 = d^2 = \text{constante}$$

Pitágoras

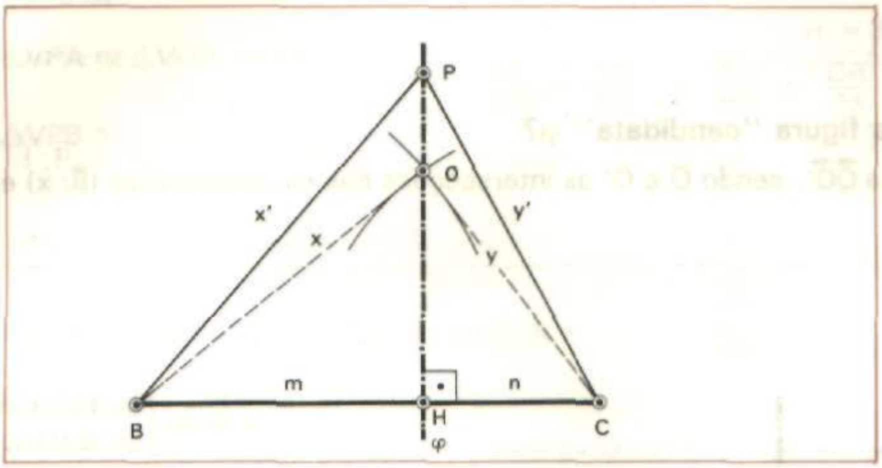
Cada ponto 0, 1, 2, 3,... fornece um par ordenado (x; y).
Cada par fornece dois pontos: $\overline{O}$ e $\overline{O}'$.

171 Todos os pontos de φ têm essa propriedade?

Sim, como provaremos a seguir:

Construção de φ

1º) Um ponto arbitrário (3) nos fornece $\overline{x}$ e $\overline{y}$.
2º) ($\overline{B}$; x) e ($\overline{C}$; y) nos fornecem $\overline{O}$.
3º) $\varphi \perp \overleftrightarrow{BC}$ por $\overline{O}$.



Por construção:

H $[x^2 - y^2 = d^2$

Sendo $\overline{P}$ genérico de φ, deveremos provar que:

T$[(x')^2 - (y')^2 = d^2$

SE $\overline{O}$ tem a propriedade C: $x^2 - y^2 = d^2$ e $\varphi \perp \overleftrightarrow{BC}$,
ENTÃO $\overline{P}$ (genérico de φ) também tem C: $(x')^2 - (y')^2 = d^2$.

DEMONSTRAÇÃO:

Pelo teorema de Pitágoras:

$$m^2 = x^2 - (OH)^2 = (x')^2 - (PH)^2$$
$$n^2 = y^2 - (OH)^2 = (y')^2 - (PH)^2 \quad \text{(subtraindo)}$$
$$\left.\begin{array}{l} m^2 - n^2 = x^2 - y^2 = (x')^2 - (y')^2 \\ \text{por H} \Rightarrow x^2 - y^2 = d^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(x')^2 - (y')^2 = d^2}$$

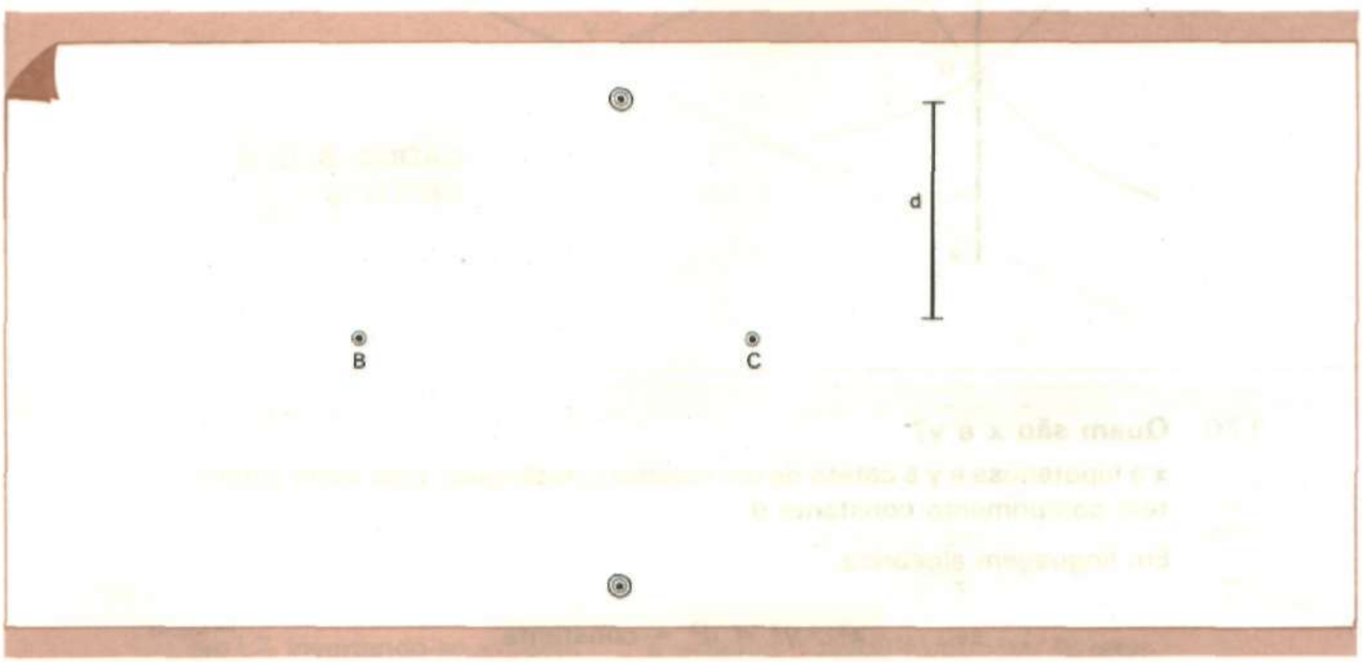
que é a T.

Note que $m^2 - n^2 = d^2$; logo $\overline{H}$ também tem a propriedade C.

Isso convence qualquer um...

172 EXERCÍCIO:

Dados $\overline{B}$, $\overline{C}$ e d, desenhe o LG dos pontos cujas distâncias x e y aos pontos $\overline{B}$ e $\overline{C}$ — nessa ordem — têm diferença dos quadrados d^2.



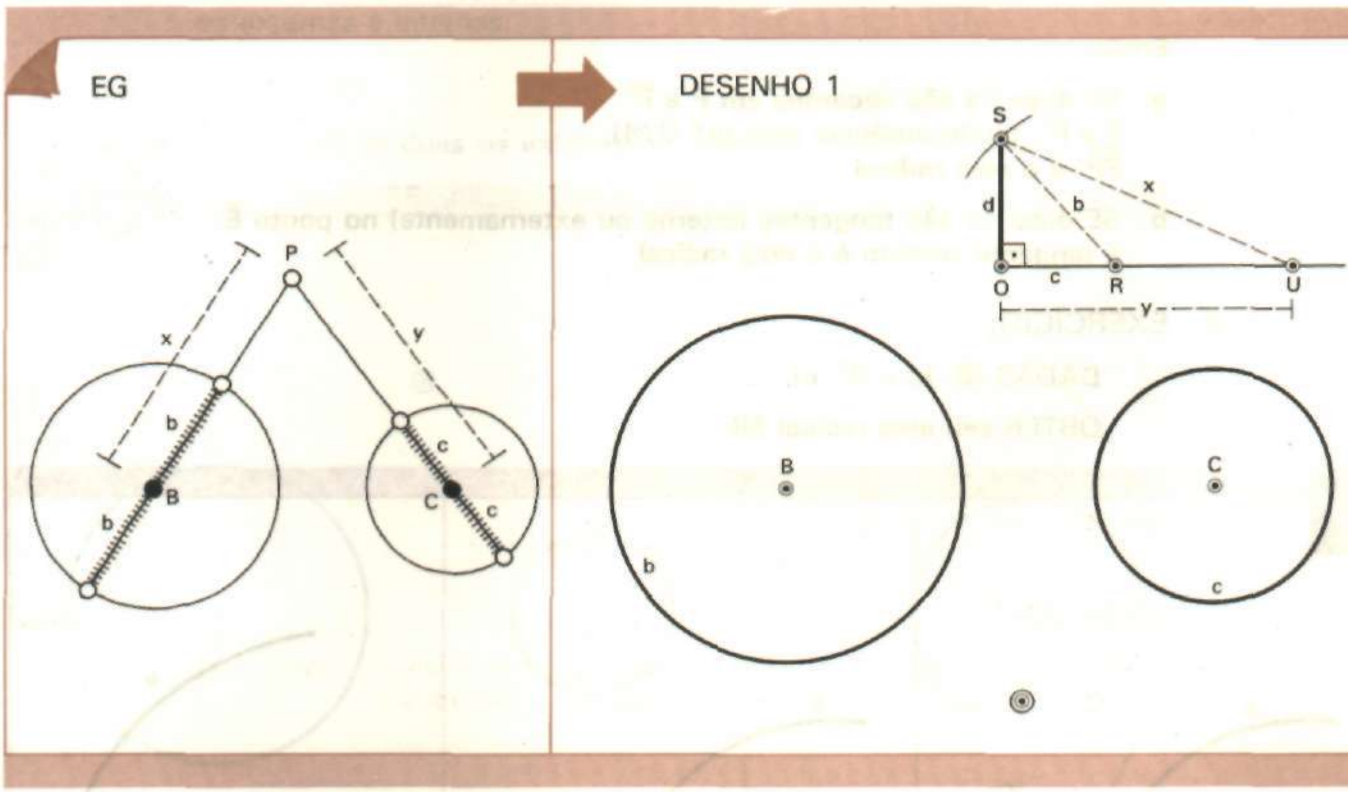
173 **EIXO RADICAL**

Designemos por Pot. $[\overline{P}; (\overline{C}; m)]$ a potência de um ponto $\overline{P}$ relativa a uma ⊙ $(\overline{C}; m)$.

Quando, e somente quando, um ponto $\overline{P}$ tem a mesma potência relativa a duas ⊙s, dizemos que $\overline{P}$ é eqüipotente com relação a elas.

174 **Qual será o LG dos pontos eqüipotentes em relação a duas ⊙s $(\overline{B}; b)$ e $(\overline{C}; c)$?**

Consideremos (EG) um ponto genérico $\overline{P}$, que seja eqüipotente (por hipótese), e pesquisemos qual é esse LG:



Se precisar, reveja a P6 no nº 073; faz parte da TM do DG.

Pot. $[\overline{P}; (\overline{B}; b)] = (x + b) \cdot (x - b) = x^2 - b^2$

Pot. $[\overline{P}; (\overline{C}; c)] = (y + c) \cdot (y - c) = y^2 - c^2$

Por hipótese, essas potências são iguais, logo:

$x^2 - b^2 = y^2 - c^2 \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = b^2 - c^2 = \text{const.}}$ (*)

Logo o LG é o L8, pois $x^2 - y^2 = \text{const.}$ (b; c são dados)

175

EIXO RADICAL **é o LG dos pontos eqüipotentes com relação a duas circunferências.**

176 EXERCÍCIO **(no desenho 1):**

DADAS **$(\overline{B}; b)$ e $(\overline{C}; c)$,**

OBTER **seu eixo radical ER.**

ROTEIRO:

1º) Chamando $(b^2 - c^2)$ de d^2, **poderemos obter d como segue:**

I. **Marca-se** OR = c.

II. $(\overline{R}; b) \rightarrow \overline{S}$ **e, portanto, d.**

2º) **Toma-se** $\overline{U}$ CONVENIENTE **em** $\overrightarrow{OR}$, **determinando x e y.**

3º) Os arcos $(\overline{B}; x)$ e $(\overline{C}; y)$ determinam $\overline{P}$ e $\overline{P'}$; a reta $\overline{PP'}$ é o eixo radical.

177 **Como o eixo radical é uma reta, para obtê-lo poderemos:**

ou obter DOIS PONTOS **($\overline{P}$ e $\overline{P'}$)**

ou obter UM PONTO **($\overline{P}$) e a DIREÇÃO ($\perp \overleftrightarrow{BC}$).**

Então:

a. SE **duas ⊙s são secantes em $\overline{P}$ e $\overline{P'}$:**
$\overline{P}$ e $\overline{P'}$, tendo potência zero (nº 074),
$\overleftrightarrow{PP'}$ **é o eixo radical.**

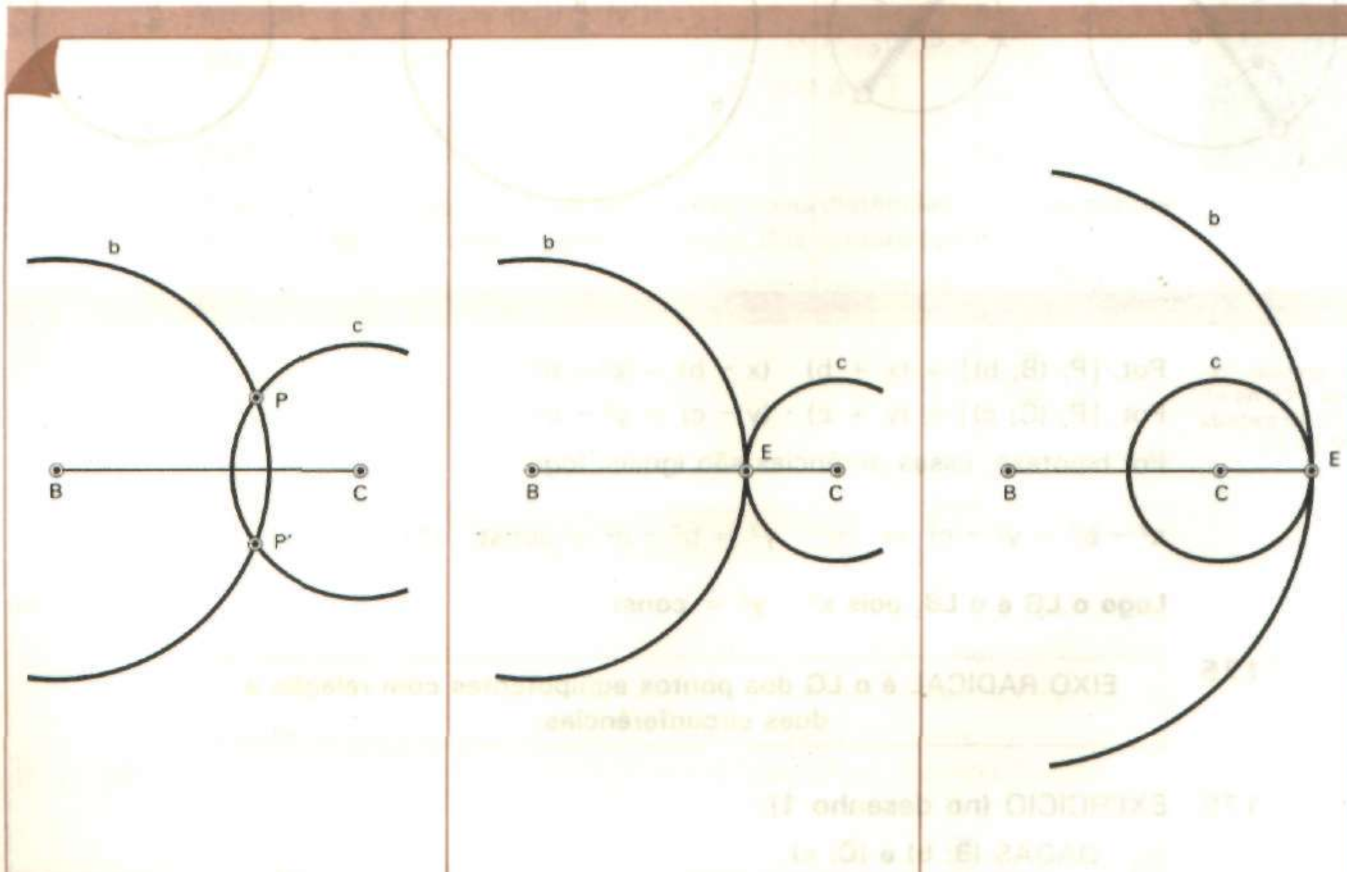
b. SE **duas ⊙s são tangentes (interna ou externamente) no ponto $\overline{E}$:**
a tangente comum é o eixo radical.

Porque:
1. $\overline{E}$ tem potência zero e
2. a tangente é $\perp \overleftrightarrow{BC}$.

178 EXERCÍCIO:

DADAS **($\overline{B}$; b) e ($\overline{C}$; c),**

OBTER **seu eixo radical ER.**



179 **CENTRO RADICAL**

Se, e somente se, os centros de três ⊙s ($\overline{B}$; b), ($\overline{C}$; c) e ($\overline{A}$; a) forem vértices de um △BCA, isto é, $\overline{B}$, $\overline{C}$ e $\overline{A}$ não forem colineares, então os três ERs terão um único ponto comum, denominado CENTRO RADICAL **das** *três ⊙s.*

Leia e releia porque é mais fácil compreender sem um desenho...

De fato, o ER da 1ª e da 2ª e o ER da 2ª e da 3ª, não sendo paralelos, têm um único ponto comum, que é eqüipotente com relação às três e, portanto, está no ER da 1ª e da 3ª;

é esse ponto o CENTRO RADICAL **das três.**

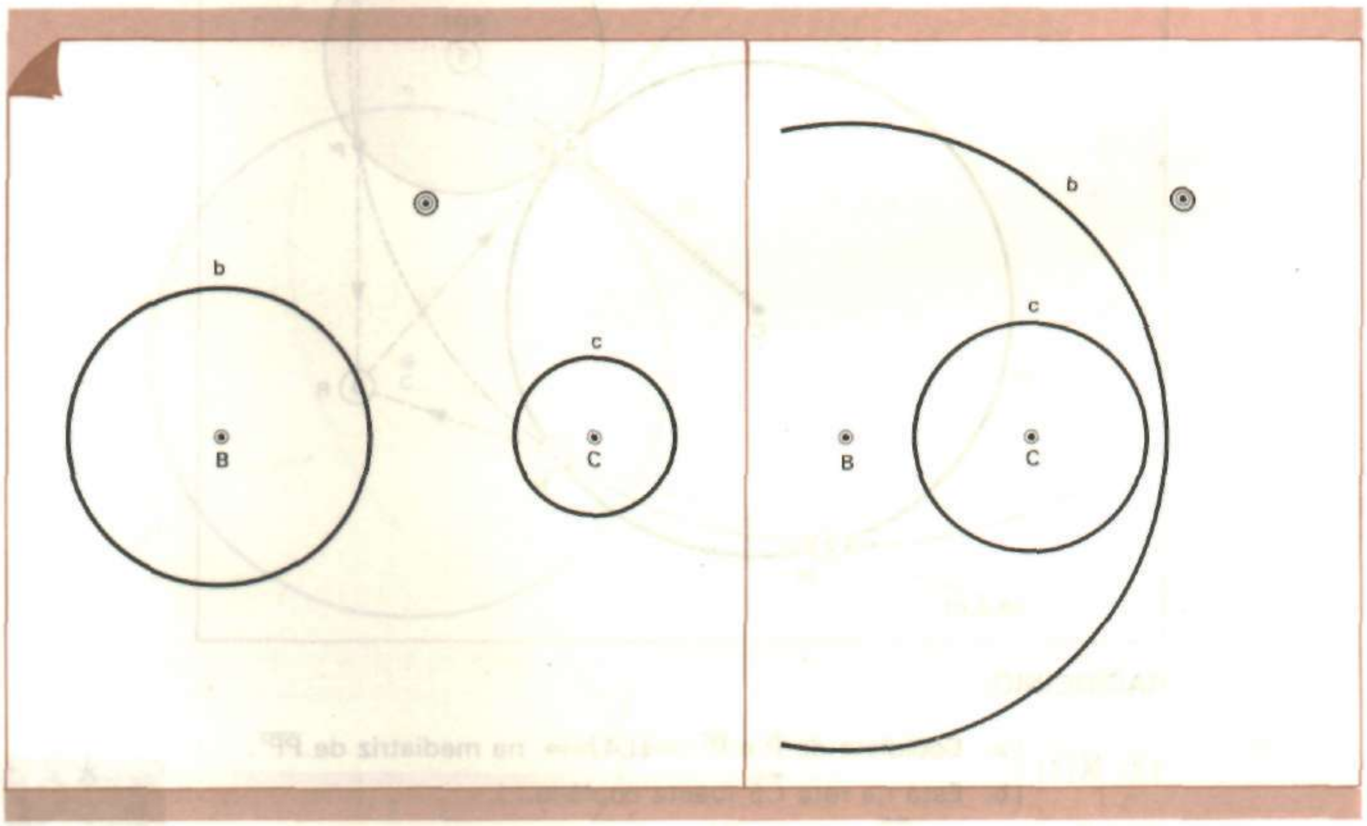
Leia e releia...

180 **Essa propriedade nos fornece um 2º processo para obter o ER de duas ⊙s externas e internas.**

É melhor do que o do nº 176.

181 EXERCÍCIO:

Obter o ER de duas ⊙s externas ou internas, dadas: ($\overline{B}$; b) e ($\overline{C}$; c).



ROTEIRO:

1º) Trace uma ○ auxiliar ($\overline{A}$; a) de centro $\overline{A}$ e raio a arbitrários (mas convenientes) e secante às duas dadas.

2º) Trace as secantes comuns (ER) das dadas com a auxiliar; elas se encontrarão em $\overline{R}$ (centro radical das três).

3º) Trace por $\overline{R}$ o ER procurado, que é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

182 O ER de duas ○s não secantes ou não tangentes **não pode encontrá-las,** pois um ponto [?] comum teria potência zero.

183 Essas propriedades possibilitam a resolução de um problema clássico muito importante e difícil:

184 **PP'C**

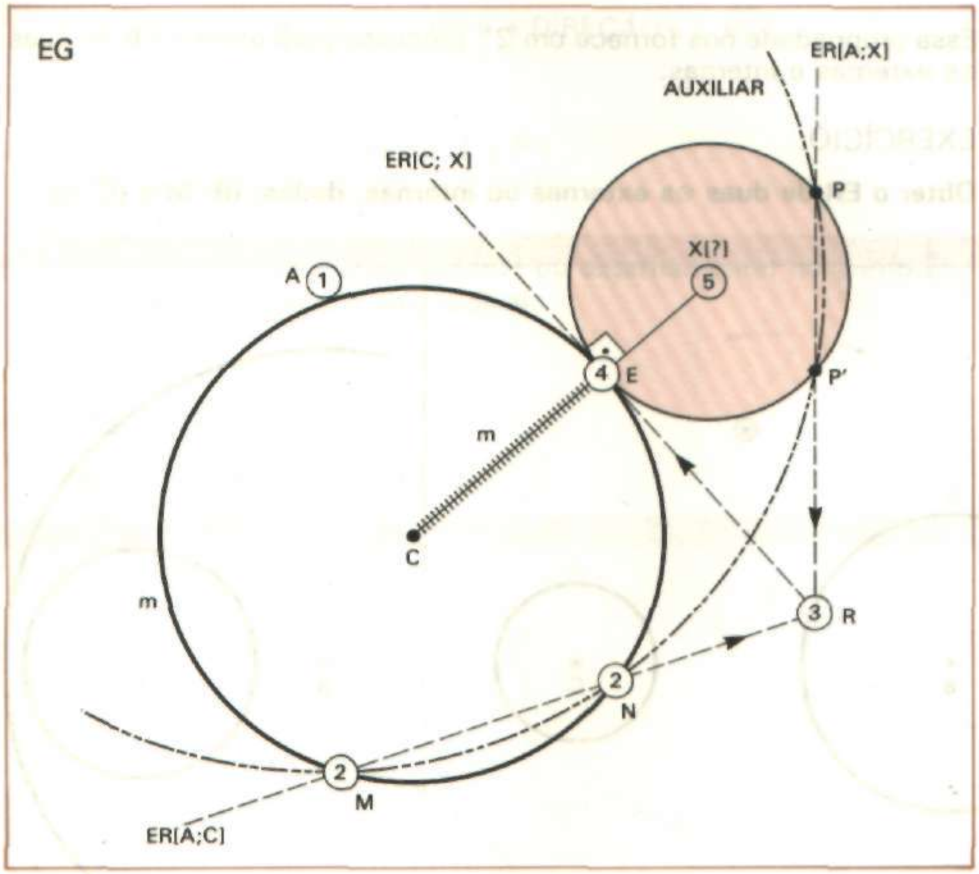
COMO DESENHAR O EG:

1º) Desenha-se uma das respostas (de centro $\overline{X}$).

2º) Colocam-se os pontos dados $\overline{P}$ e $\overline{P'}$.

3º) Desenha-se a ⊙ dada tangente à procurada num "certo" ponto $\overline{E}$.

Em geral, convém começar por uma das respostas.



RACIOCÍNIO:

1º) $\overline{X}[?]$ $\begin{cases} \text{a. Eqüidista de } \overline{P} \text{ e } \overline{P'} \xRightarrow{[L4]} \text{ na mediatriz de } \overline{PP'}. \\ \text{b. Está na reta } \overleftrightarrow{CE} \text{ (basta copiá-la...).} \end{cases}$

2º) Como copiar $\overleftrightarrow{CE}$, sem ter $\overline{E}$?

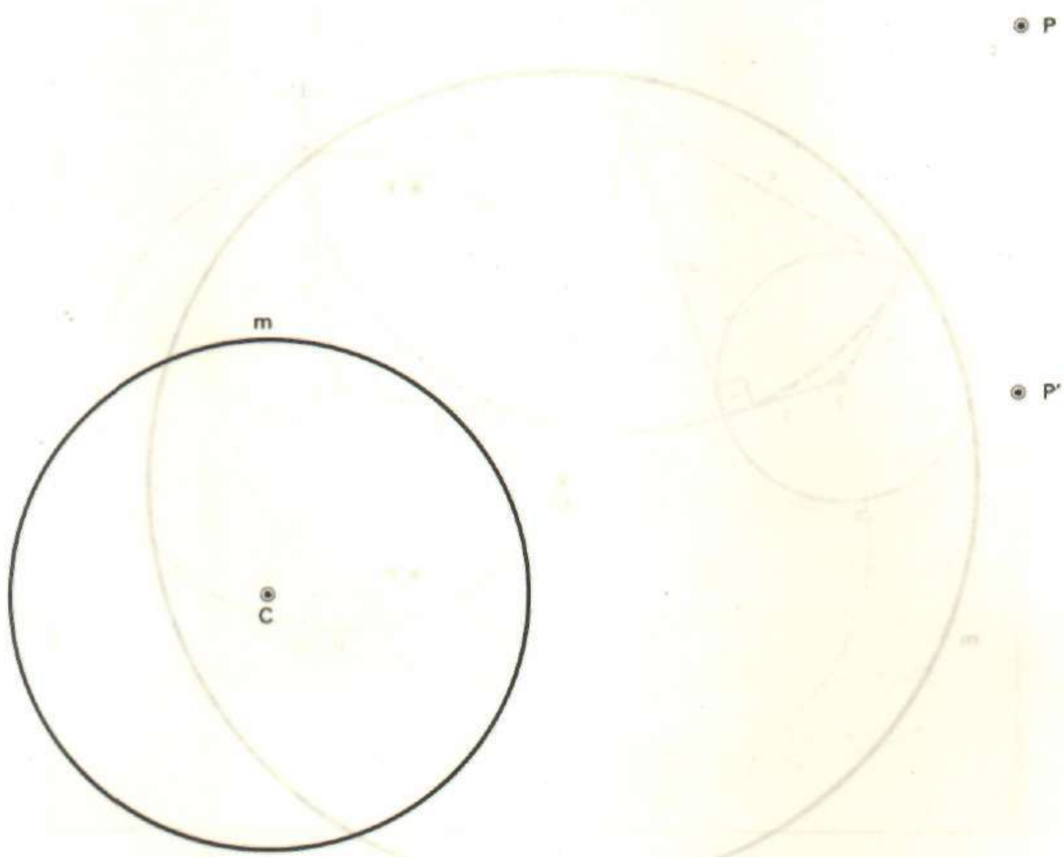
3º) Vamos, então, procurar $\overline{E}$. Como?
A reta tangente comum é o ER [C; X] – ER das ⊙s de centros C e X; isso nos sugere o seguinte:

4º) Uma ⊙ auxiliar contendo $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ e secante à dada em $\overline{M}$ e $\overline{N}$. Assim poderemos obter $\overline{R}$, centro radical das três!

5º) Obtido $\overline{R}$, poderemos depois obter $\overline{E}$:

$\overline{E}[?]$ $\begin{cases} \text{a. Está na ⊙ dada.} \\ \text{b. Vê } \overline{CR} \text{ sob } 90° \Rightarrow \text{L5a.} \end{cases}$

O centro do L5a é o pt.m. de $\overline{CR}$...



R: XX' (distância entre os dois centros) = ...46.... mm.

Devem-se traçar todas as respostas (no caso são só duas).

ROTEIRO:

1º) Com centro $\overline{A}$ arbitrário (na mediatriz de $\overline{PP'}$) traça-se ($\overline{A}$; AP = AP') obtendo $\overline{M}$ e $\overline{N}$ na ⊙ dada.

2º) $\overleftrightarrow{MN}$ encontra $\overleftrightarrow{PP'}$ em $\overline{R}$ (centro radical).

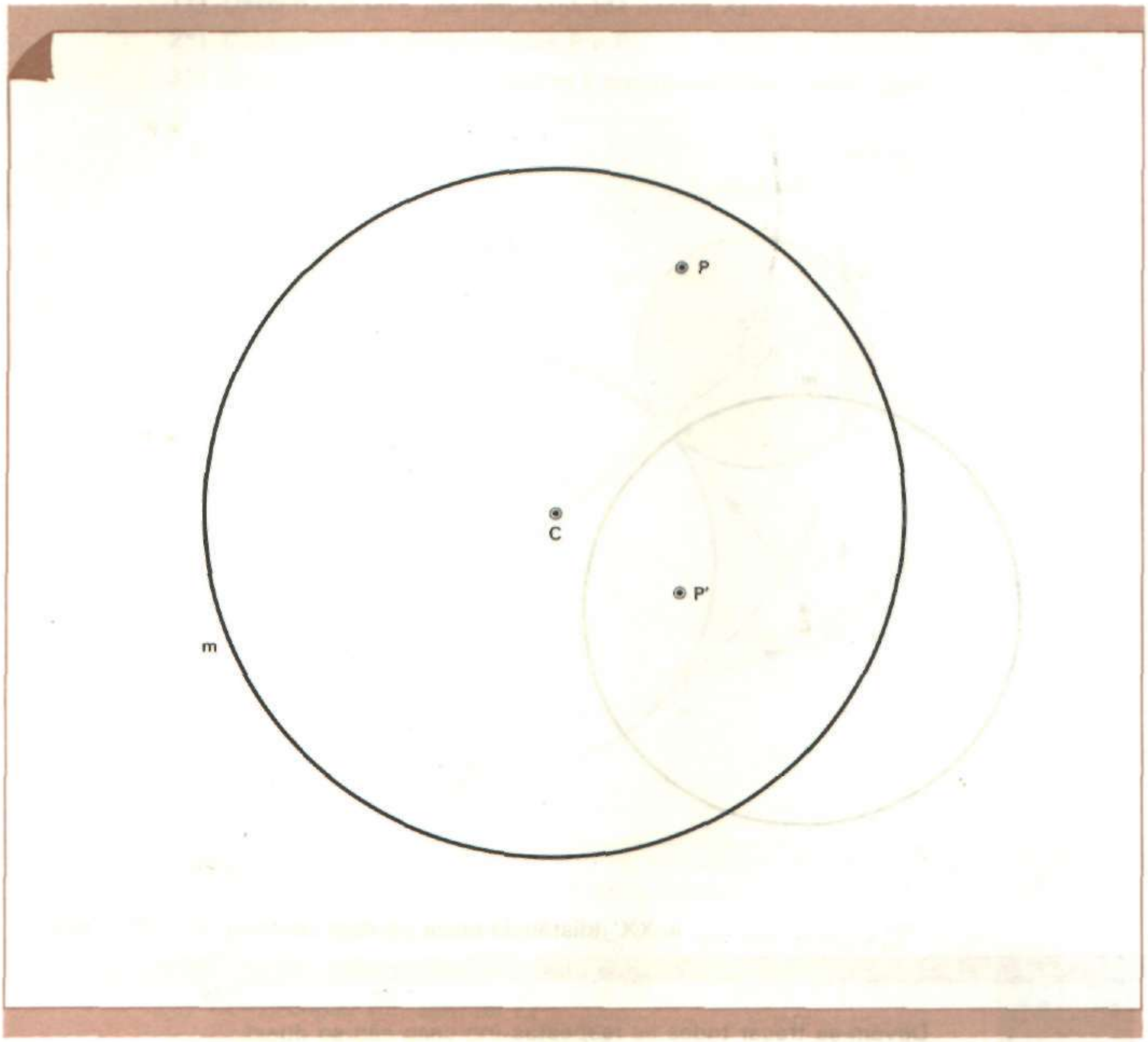
3º) A ⊙ de diâmetro $\overline{CR}$ (L5a) determina $\overline{E}$ e $\overline{E}'$ ("clandestino") na ⊙ dada.

4º) $\overleftrightarrow{CE}$ determina $\overline{X}$ e $\overleftrightarrow{CE'}$ determina $\overline{X}'$ ("clandestina") na mediatriz de $\overline{PP'}$.

185 Quando ambos os pontos $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ são internos à ⊙ dada, o roteiro é exatamente o mesmo, mas convém "desenhar para crer"...

186 EXERCÍCIO:

PP'C com $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ internos.



ROTEIRO:

Resumindo:

1º) Uma ⊙ arbitrária passando por $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ obtém $\overline{M}$ e $\overline{N}$.

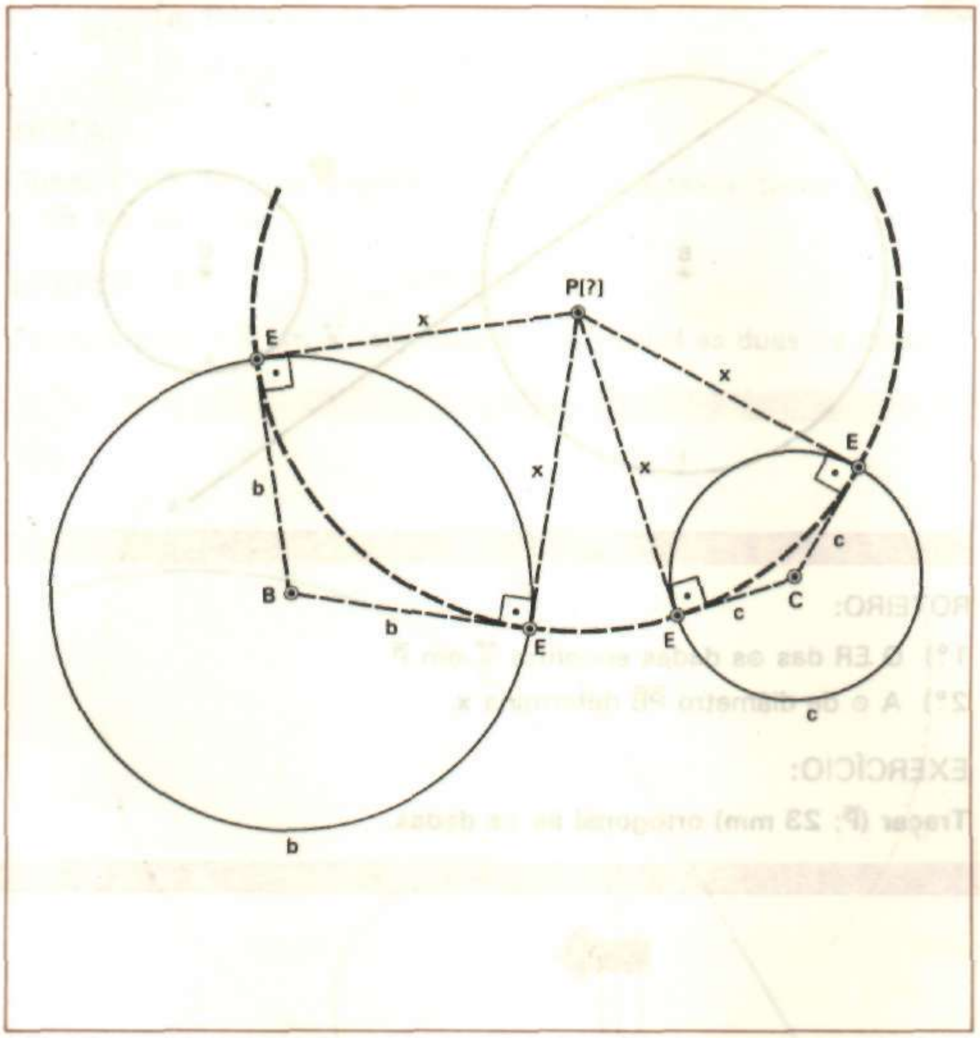
2º) $\overline{R} = \overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{MN}$.

3º) A ⊙ de diâmetro $\overline{CR}$ obtém $\overline{E}$ e $\overline{E}'$ na ⊙ dada.

4º) $\overleftrightarrow{CE}$ obtém $\overline{X}$ e $\overleftrightarrow{CE}'$ obtém $\overline{X}'$ (na mediatriz de $\overline{PP}'$).

IV OUTROS LGs

Duas ⊙s chamam-se ortogonais se, e somente se, seus raios — nos pontos de tangência — são perpendiculares um ao outro.



187 Seja ($\overline{P}$; x) uma ⊙ genérica que é ortogonal à ($\overline{B}$; b) e à ($\overline{C}$; c). Como essa ⊙, há tantas outras quantas quisermos.

188 **Qual será o LG dos centros dessas ⊙s?**

1º) SE ($\overline{P}$; x) é ortogonal à ($\overline{B}$; b) e à ($\overline{C}$; c), ENTÃO seus quatro raios $\overline{PE}$ são tangentes a essas duas ⊙s.

2º) As potências de $\overline{P}$ com relação à ($\overline{B}$; b) e à ($\overline{C}$; c) são, pois, iguais entre si (a potência é x^2). Se precisar: nº 074.

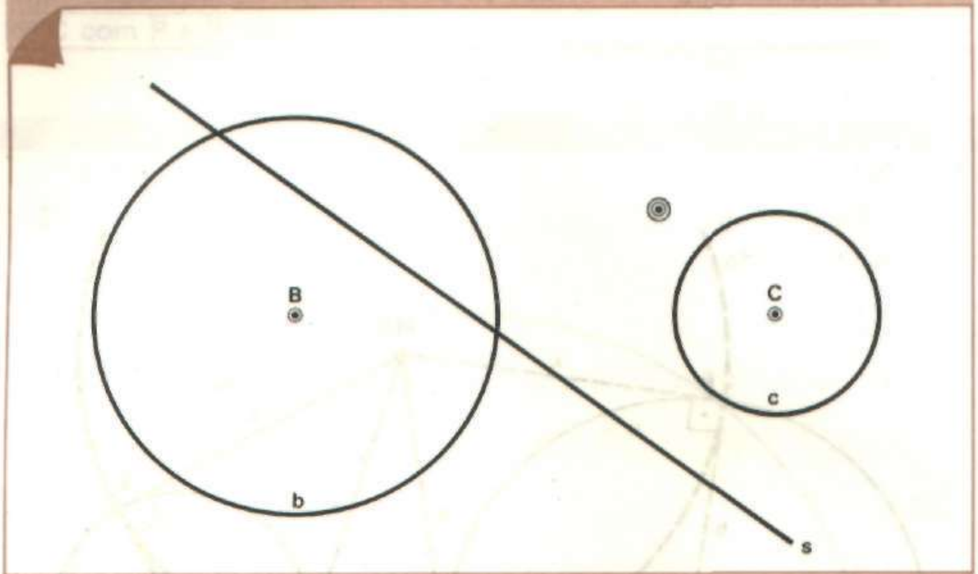
3º) Concluindo:

$\overline{P}$ é EQÜIPOTENTE ⇔ **$\overline{P}$ é** CENTRO **de** ⊙
ORTOGONAL **às duas.**

O LG dos centros das ⊙s ortogonais às duas ⊙s dadas é o ER das duas ⊙s dadas.

189 EXERCÍCIO:

Desenhe a ⊙ ($\overline{P}$; x) ortogonal à ($\overline{B}$; b) e à ($\overline{C}$; c), sabendo que $\overline{P}$ está em $\overleftrightarrow{s}$.



ROTEIRO:

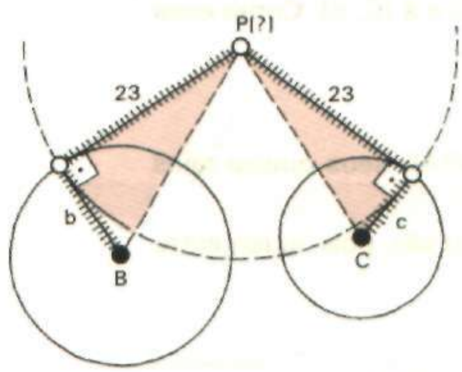
1º) O ER das ⊙s dadas encontra $\overleftrightarrow{s}$ em $\overline{P}$.

2º) A ⊙ de diâmetro $\overline{PB}$ determina **x**.

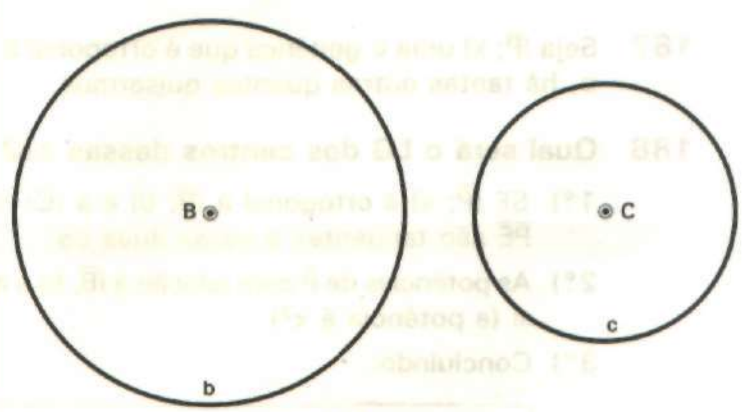
190 EXERCÍCIO:

Traçar ($\overline{P}$; 23 mm) ortogonal às ⊙s dadas.

EG



Há duas respostas.



R: PP′ = ...36... mm.

ROTEIRO:

Convém rever o exercício nº 122.

1º) Acha-se PB (só a distância) construindo um △ retângulo de catetos **b** e 23 mm.

2º) Acha-se PC construindo outro △ retângulo de catetos **c** e 23 mm.

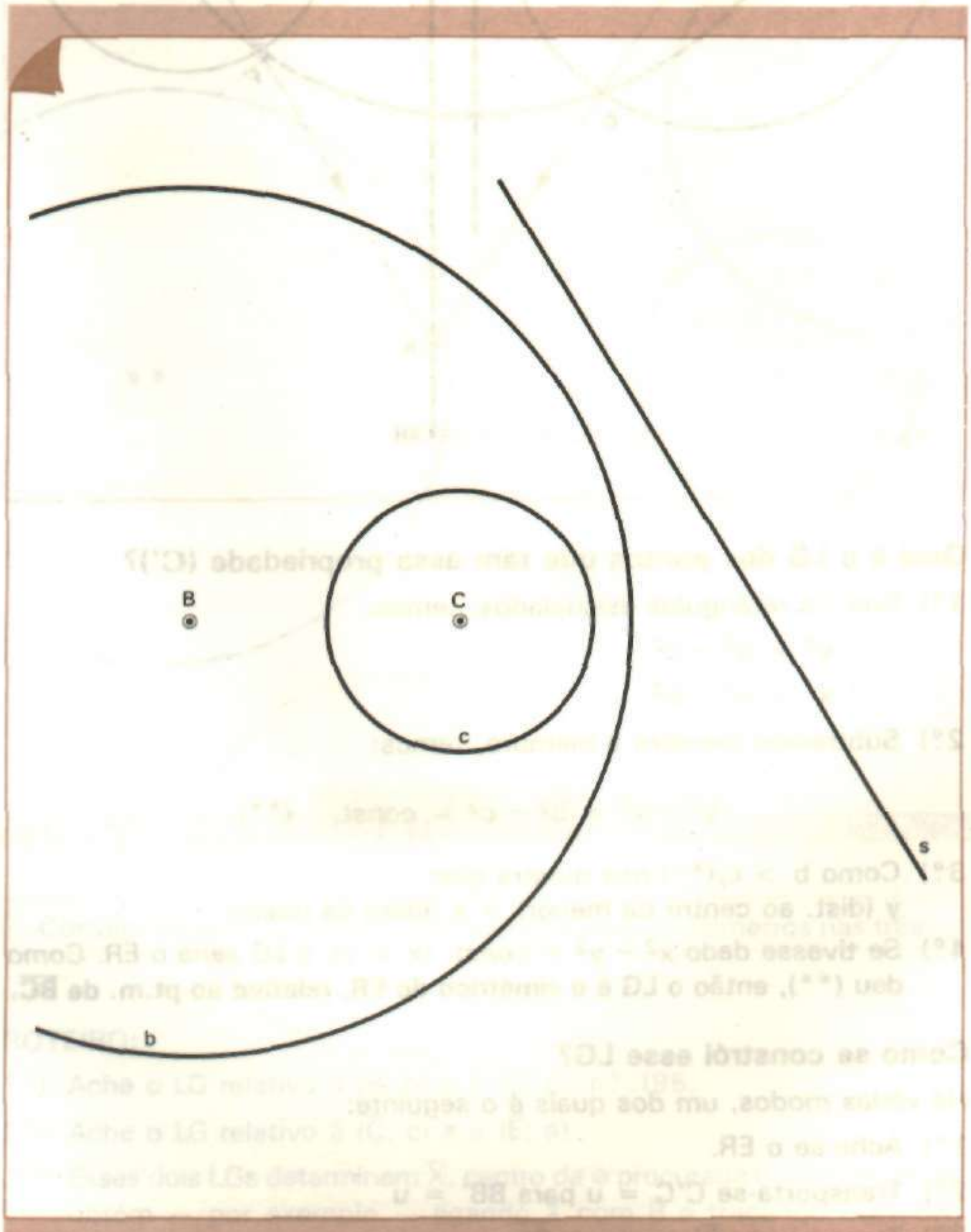
3º) $\overline{P}[?] \begin{cases} \text{a. Dista PB de } \overline{B}. \\ \text{b. Dista PC de } \overline{C}. \end{cases}$

191 NOTA:

Sendo $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ as duas respostas do exercício anterior, temos que $\overleftrightarrow{PP'}$ é o ER das ⊙s dadas.

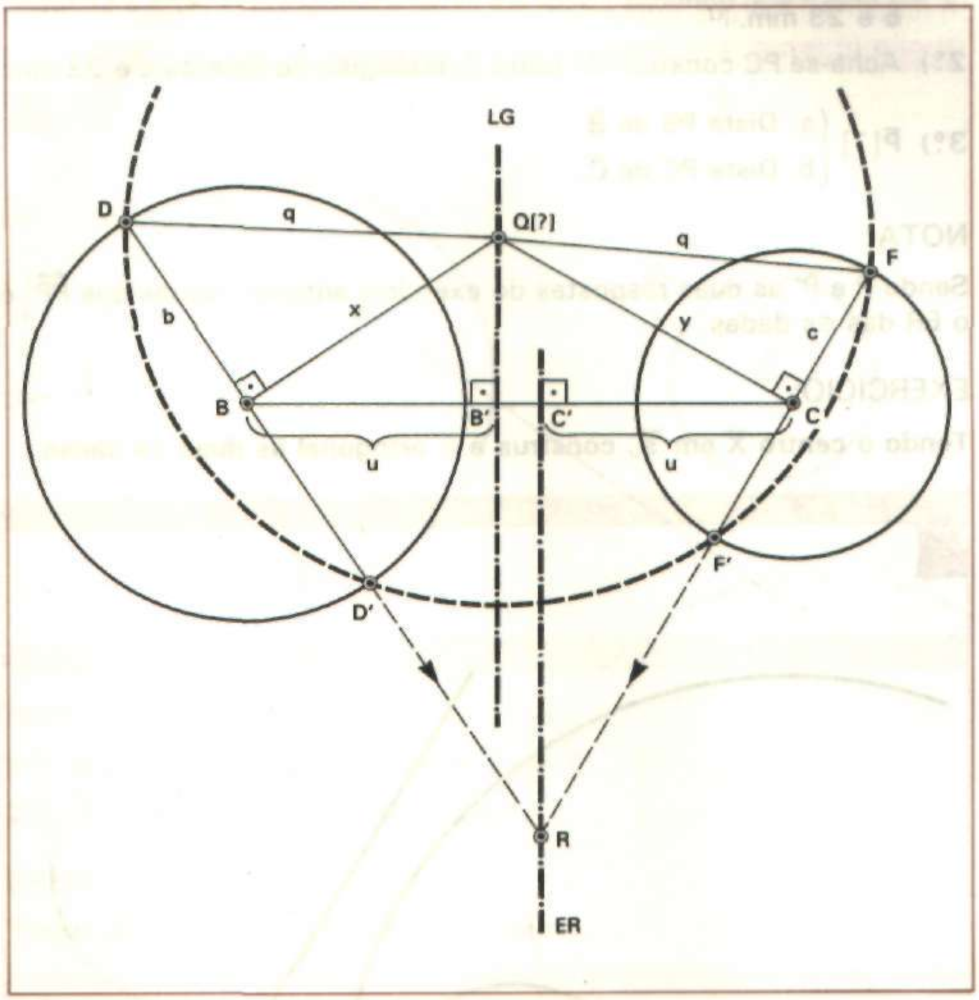
192 EXERCÍCIO:

Tendo o centro $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{s}$, construa a ⊙ ortogonal às duas ⊙s dadas.



Confira você mesmo.

193 ($\overline{Q}$; q) é uma das ⊙s que determinam diâmetros ($\overline{DD'}$ e $\overline{FF'}$) nas ⊙s dadas.



194 **Qual é o LG dos pontos que têm essa propriedade (C')?**

1º) Nos △s retângulos assinalados, temos:

$$\begin{cases} y^2 = q^2 - c^2 \\ x^2 = q^2 - b^2 \end{cases}$$

2º) Subtraindo membro a membro, temos:

$$y^2 - x^2 = b^2 - c^2 = \text{const.} \quad (**)$$

3º) Como b > c,(**) nos mostra que:
y (dist. ao centro da menor) > **x** (idem da maior)

No desenho acima, a ⊙ já traçada está funcionando como auxiliar para mostrar o ER.

Vide o (*) do nº 174.

4º) Se tivesse dado $x^2 - y^2$ = const. (x > y), o LG seria o ER. Como deu (**), então **o LG é o simétrico do ER, relativo ao pt.m. de $\overline{BC}$.**

195 **Como se constrói esse LG?**

Há várias modos, um dos quais é o seguinte:

Neste LG, como y > x, temos: y (distância ao $\overline{C}$) é hipotenusa e x (distância ao $\overline{B}$) é cateto.

1º) Acha-se o ER.

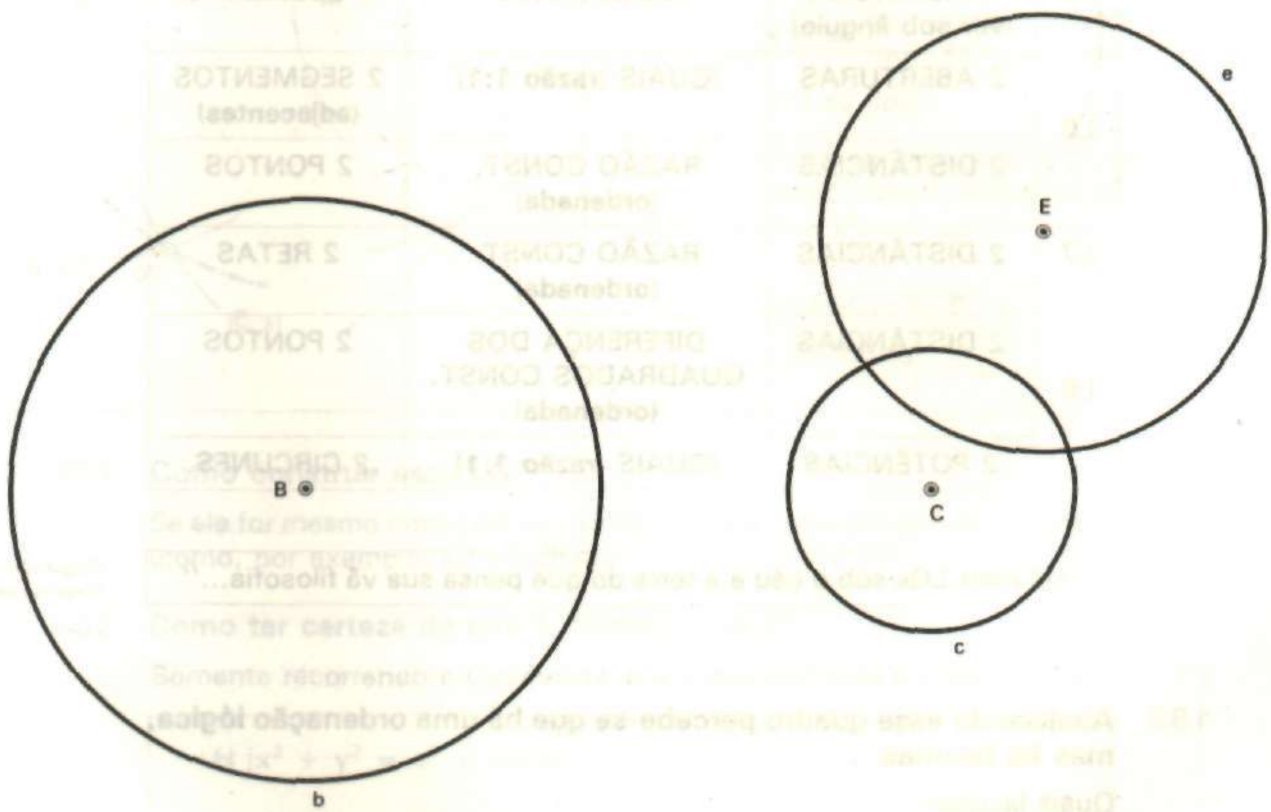
2º) Transporta-se C'C = u para BB' = u

3º) Traça-se por $\overline{B}'$ a reta ⊥ $\overleftrightarrow{BC}$.

196 EXERCÍCIO:

Construir uma ⊙ que determina diâmetros nas três ⊙s dadas: ($\overline{B}$; b), ($\overline{C}$; c) e ($\overline{E}$; e).

Confira você mesmo.



Convém conferir se a resposta determina mesmo diâmetros nas três.

ROTEIRO:

1º) Ache o LG relativo à ($\overline{B}$; b) e à ($\overline{C}$; c): nº 195.

O LG é o simétrico do ER.

2º) Ache o LG relativo à ($\overline{C}$; c) e à ($\overline{E}$; e).

3º) Esses dois LGs determinam $\overline{X}$, centro da ⊙ procurada e cujo raio (x) se obtém — por exemplo — ligando $\overline{X}$ com $\overline{B}$ e traçando $\overline{BD} \perp \overline{BX}$; XD = x é o raio.

197 Quantos LGs!...

Certo. Cabe aqui uma revisão:

LG	MEDIDAS	RELAÇÃO	A QUEM?
L1	1 DISTÂNCIA	CONSTANTE	1 PONTO
L2	1 DISTÂNCIA	CONSTANTE	1 RETA
L3	2 DISTÂNCIAS	IGUAIS **(razão 1:1)**	2 PONTOS
L4	2 DISTÂNCIAS	IGUAIS **(razão 1:1)**	2 RETAS
L5	1 ABERTURA (ver sob ângulo)	CONSTANTE	1 SEGMENTO
L6	2 ABERTURAS	IGUAIS **(razão 1:1)**	2 SEGMENTOS **(adjacentes)**
	2 DISTÂNCIAS	RAZÃO CONST. **(ordenada)**	2 PONTOS
L7	2 DISTÂNCIAS	RAZÃO CONST. **(ordenada)**	2 RETAS
L8	2 DISTÂNCIAS	DIFERENÇA DOS QUADRADOS CONST. **(ordenada)**	2 PONTOS
	2 POTÊNCIAS	IGUAIS **(razão 1:1)**	2 CIRCUNFS.

"Há mais LGs sob o céu e a terra do que pensa sua vã filosofia..."

Plagiando Shakespeare.

198 Analisando esse quadro percebe-se que há uma ordenação lógica, mas há lacunas...

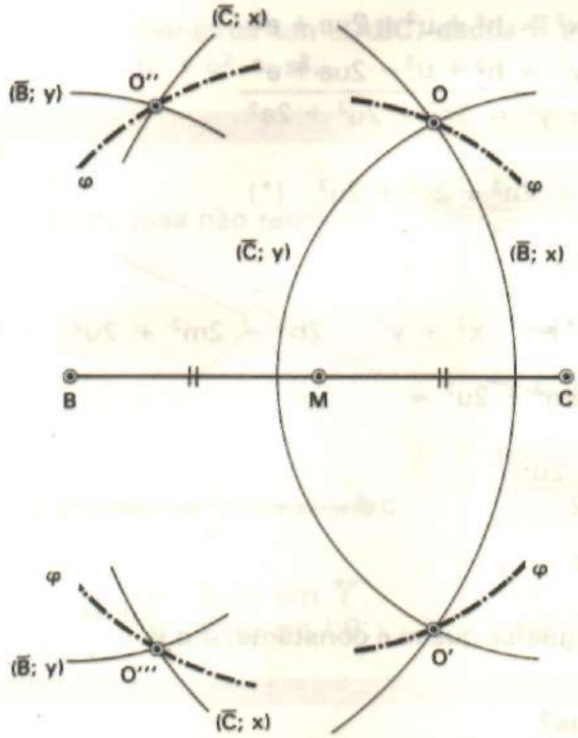
Quais lacunas?

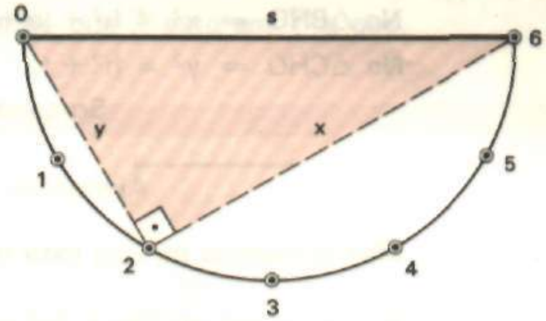
199 Por exemplo, qual será o LG dos pontos cujas distâncias a dois pontos fixos **variam, mas a** soma **de seus quadrados permanece** constante?

Vamos "bancar" um pesquisador, pesquisando:

200 L9

Para cada ponto ($\overline{O}$; $\overline{1}$; $\overline{2}$; $\overline{3}$; ...) da semicircunf. obtemos quatro pontos, $\overline{O}$; $\overline{O}'$; $\overline{O}''$; $\overline{O}'''$, simétricos com relação à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e com relação à mediatriz de $\overline{BC}$. Esse fato nos sugere que φ é uma linha simétrica com relação ao ponto médio ($\overline{M}$) de $\overline{BC}$, isto é, uma circunferência de centro $\overline{M}$.





x lê-se $\begin{cases}\text{ou um dos catetos}\\ \text{ou distância a um dos pontos}\end{cases}$

y lê-se {idem

Como se trata de $x^2 + y^2$, não há ordenação, isto é, tanto faz $x^2 + y^2$ como $y^2 + x^2$.

DADOS: $\overline{B}$; $\overline{C}$; s
OBTER: φ

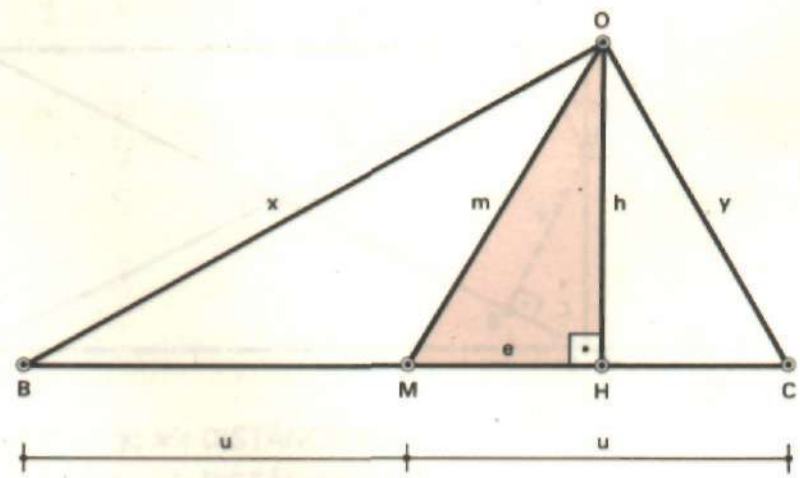
201 **Como construir esse LG?**

Se ele for mesmo uma ⊙ de centro $\overline{M}$, bastará obter um dos seus pontos (como, por exemplo, $\overline{O}$) e traçá-la.

202 **Como ter certeza de que é mesmo uma ⊙?**

Somente recorrendo à Geometria, e é o que faremos a seguir:

H $\{x^2 + y^2 = s^2 = \text{const.}$ T $\{m = \text{const.}$



203 Para provar que **m** é constante, deveremos calcular **m**:

No $\triangle BHO \Rightarrow x^2 = h^2 + (u + e)^2 \Rightarrow x^2 = h^2 + u^2 + 2ue + e^2$

No $\triangle CHO \Rightarrow y^2 = h^2 + (u - e)^2 \Rightarrow y^2 = h^2 + u^2 - 2ue + e^2$

Somando $\Rightarrow x^2 + y^2 = 2h^2 + 2u^2 + 2e^2$

Ajeitando: $\boxed{x^2 + y^2 = 2h^2 + 2e^2 + 2u^2}$ (*)

Mas queremos **m**, *que está no* $\triangle MHO$:

$h^2 + e^2 = m^2 \Rightarrow 2h^2 + 2e^2 = 2m^2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{x^2 + y^2 = 2h^2 + 2m^2 + 2u^2}$ (**)

Por H $\Rightarrow x^2 + y^2 = s^2 \overset{(**)}{\Longrightarrow} s^2 = 2m^2 + 2u^2 \Rightarrow$

$$\boxed{m^2 = \frac{s^2 - 2u^2}{2}}$$

CONCLUSÃO:

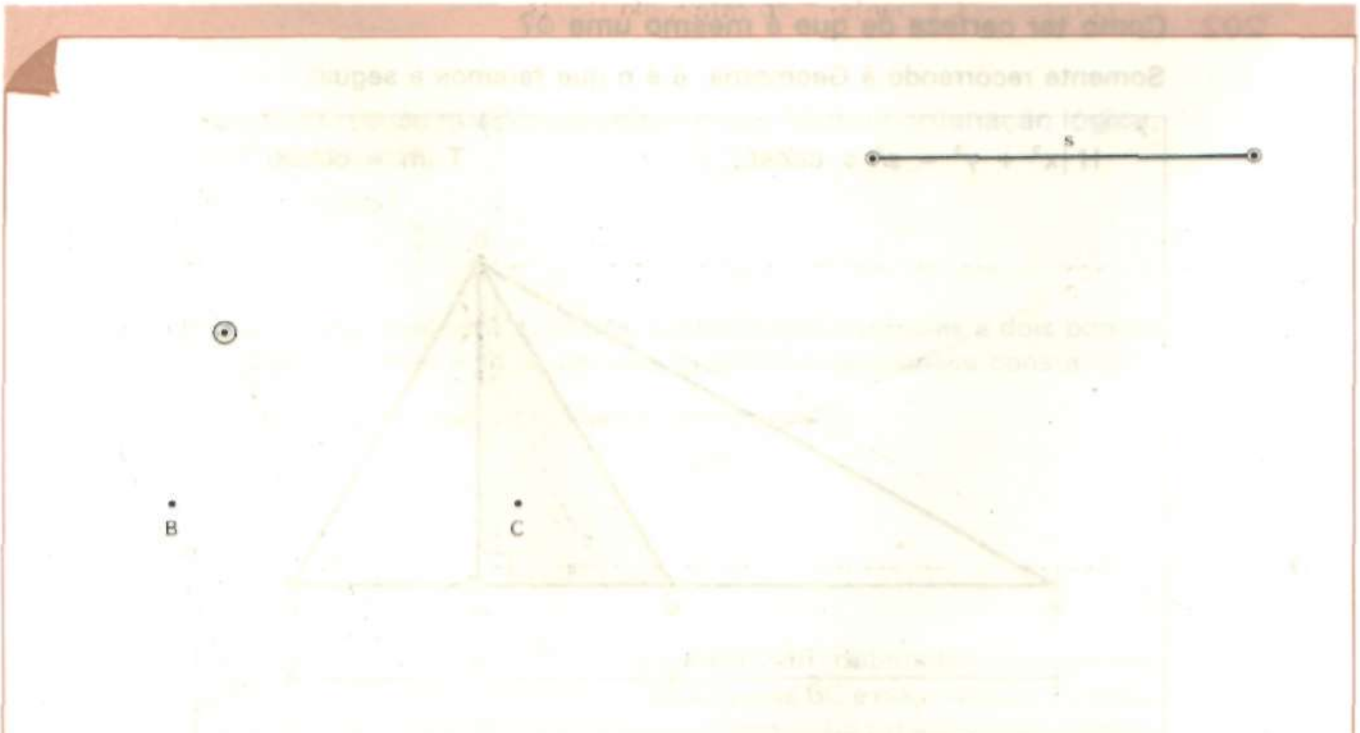
Sendo dados **s**; B; C̄, como $u = \dfrac{BC}{2}$, segue-se que **m** é constante, c.q.d.

204 **Esse LG existe para quaisquer dados?**

Não, como o raio **m** — sendo raio — não pode ser negativo, os dados deverão ser fornecidos satisfazendo $s \geqslant u\sqrt{2}$.

205 EXERCÍCIO:

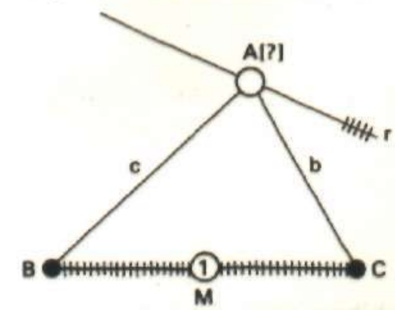
Construa o LG dos pontos cujas distâncias aos pontos B̄ e C̄ são catetos de triângulos retângulos de hipotenusa dada s.



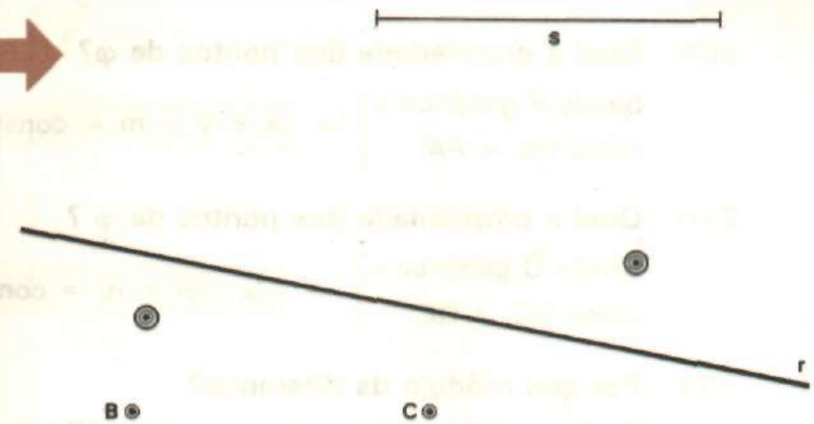
206 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle ABC$, dados $\overline{B}$ e $\overline{C}$ e sabendo que $\overline{A}$ está em $\overleftrightarrow{r}$ e que $b^2 + c^2 = s^2$.

EG
(Ajuda mas não resolve.)



A[?] {a. Está em $\overleftrightarrow{r}$. b. Está no L9.



Há 2 respostas e os alvos estão nas retas $\overleftrightarrow{BA}$ e $\overleftrightarrow{BA'}$.

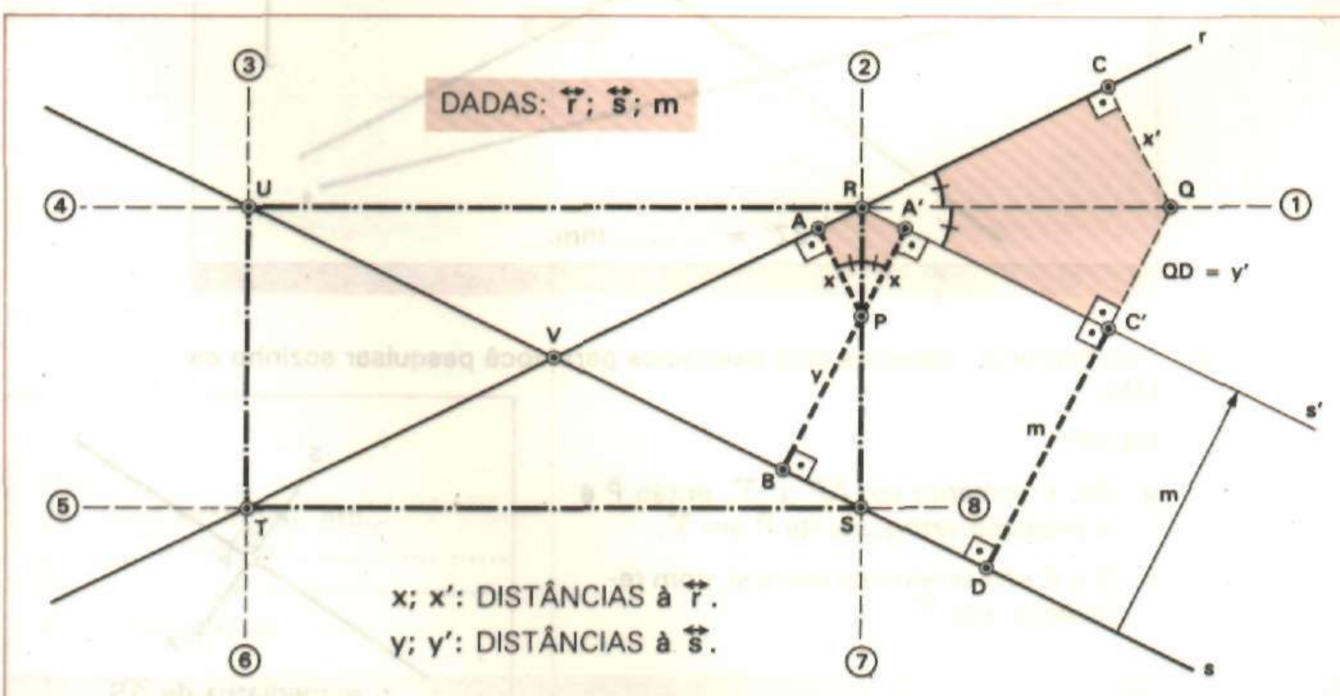
207 L10

Inicialmente construamos duas figuras:

1º) A reta $\overleftrightarrow{s'}$ // $\overleftrightarrow{s}$ à distância m encontra $\overleftrightarrow{r}$ no ponto $\overline{R}$.
2º) A ⊙ ($\overline{V}$; VR) determina $\overline{S}$, $\overline{T}$ e $\overline{U}$.

1ª figura: **φ é a periferia do retângulo RSTU.**

Perímetro é a medida da periferia.



208 **Qual é a 2ª figura?**

2ª figura: **φ é o conjunto de oito semi-retas, prolongamentos dos lados desse retângulo.**

209 **Qual a propriedade dos pontos de φ?**

Sendo $\overline{P}$ genérico e como PA = PA' $\Rightarrow$ x + y = m = const.

210 **Qual a propriedade dos pontos de φ'?**

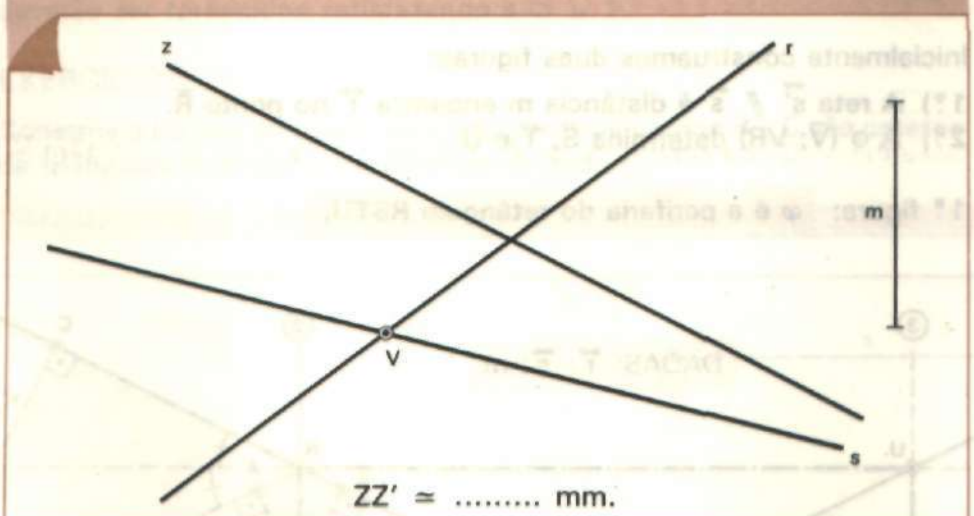
Sendo $\overline{Q}$ genérico e como QC = QC' $\Rightarrow$ |x − y| = m = const.

211 **Por que** módulo **da diferença?**

Porque na semi-reta 1 temos x' < y' = QD; já na semi-reta 3, por exemplo, temos x' (distância à $\overleftrightarrow{r}$) > y' (distância à $\overleftrightarrow{s}$).

212 EXERCÍCIO:

Obtenha os pontos $\overline{Z}$ e $\overline{Z}'$ de $\overleftrightarrow{z}$ cujas distâncias à $\overleftrightarrow{r}$ e à $\overleftrightarrow{s}$ somam m.



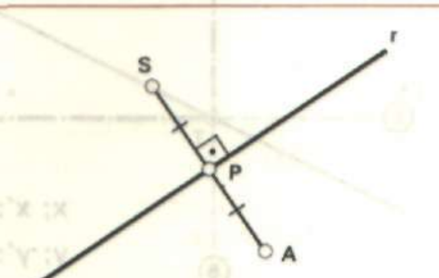
ZZ' = ... mm.

213 Para terminar, daremos dois exercícios para você pesquisar sozinho os LGs.

Da GP:

a. Se, e somente se, $\overline{AP} \perp \overleftrightarrow{r}$, então $\overline{P}$ é a projeção ortogonal de $\overline{P}$ em $\overleftrightarrow{r}$.

b. $\overline{S}$ e $\overline{A}$ são simétricos entre si, com relação à reta $\overleftrightarrow{r}$.



r = mediatriz de $\overline{AS}$.

214 EXERCÍCIO:

Construa o LG das projeções ortogonais de $\overline{A}$ nas retas que passam por $\overline{M}$.

EG

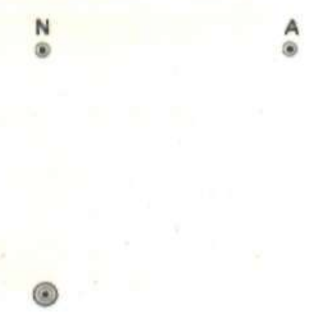
Substitua a propriedade pedida por outra, de um LG conhecido:

SE **é projeção ortogonal,**
ENTÃO **vê** ....
....
e reciprocamente.

215 EXERCÍCIO:

Desenhe o LG dos simétricos de $\overline{A}$ com relação às retas que contêm $\overline{N}$.

EG



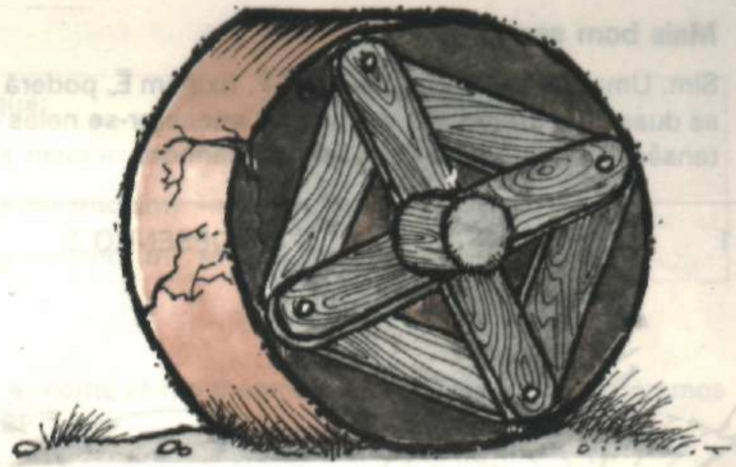
Idem:

SE **é simétrico, etc.,**
ENTÃO **dista** ....
....
e reciprocamente.

Planeje antes,
execute depois.

CAPÍTULO

3

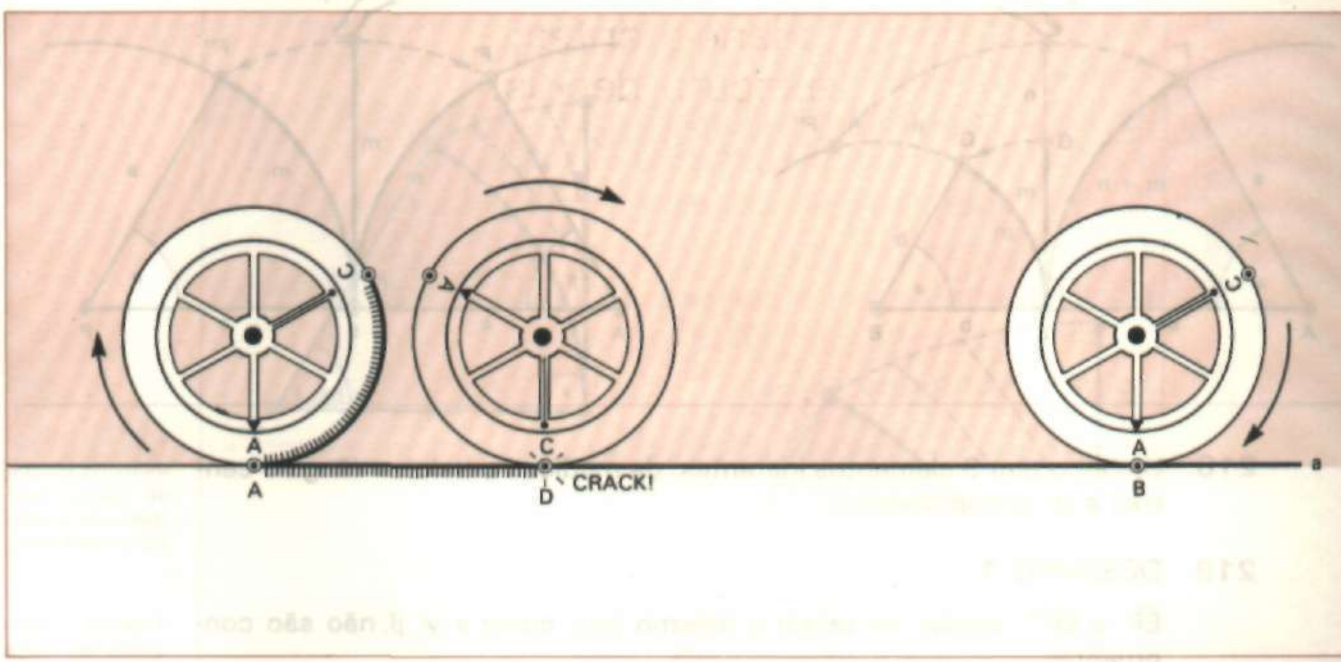


POLÍGONOS REGULARES

I PRELIMINARES

216 Em DG pode-se usar o bom senso?

Por que não? Seria falta de bom senso não usá-lo... Por exemplo:



A roda rola — sem escorregar — sobre a reta $\overleftrightarrow{a}$.

Imagine a roda em movimento.

Após uma volta completa (de 360°), o ponto $\overline{A}$ (ligado à roda) atinge $\overline{B}$ (ligado à reta).

Durante o percurso, $\overline{C}$ "esmaga" $\overline{D}$.

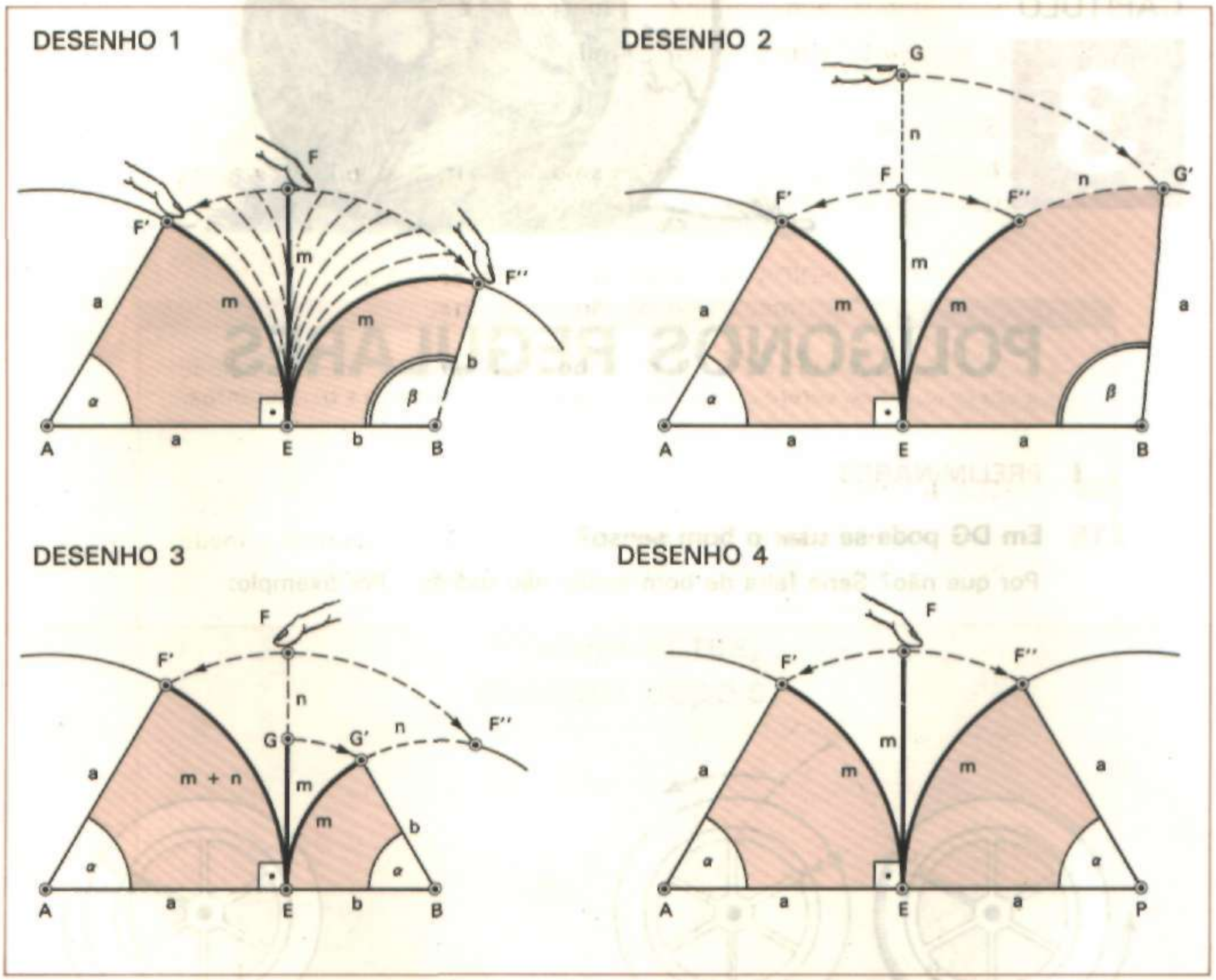
$\overline{D}$ é um amendoim?

a. O **segmento** $\overline{AB}$ **e a circunferência** da roda têm o mesmo comprimento.

b. O **segmento** $\overline{AD}$ e o **arco** $\overset{\frown}{AC}$ também têm o mesmo comprimento.

217 **Mais bom senso?**

Sim. Uma lâmina de aço flexível $\overline{EF}$, fixa em $\overline{E}$, poderá ser curvada sobre as duas circunferências de modo a **encostar-se** nelas em toda a sua extensão. Examine bem os quatro desenhos:



218 Um arco tem 3 elementos inerentes, de medidas a (raio), α (ângulo central) e m (comprimento).

Inerentes porque se faltar qualquer um, o arco não pode existir.

219 DESENHO **1**:

$\widehat{EF'}$ e $\widehat{EF''}$, apesar de terem o mesmo (m), como $\alpha \neq \beta$, não são congruentes.

Figuras congruentes são sempre superponíveis.

DESENHO **2**:

$\widehat{EF'}$ e $\widehat{EG'}$ têm mesmo (a), mas $\alpha \neq \beta$ e m $\neq$ (m + n), logo não são congruentes.

DESENHO **3**:

$\widehat{EF'}$ e $\widehat{EG'}$ têm mesmo (α), mas a $\neq$ b e (m + n) $\neq$ m, logo não são congruentes.

220 DESENHO 4:

$\widehat{EF'} \cong \widehat{EF''}$ porque:

a. mesmo (a) e mesmo (α) $\Rightarrow$ mesmo (m),

b. mesmo (a) e mesmo (m) $\Rightarrow$ mesmo (α) e

c. mesmo (α) e mesmo (m) $\Rightarrow$ (a).

221 DESENHO 2:

De fato $\widehat{EF'} \cong \widehat{EF''}$ e, como têm o mesmo (a) e o mesmo (m), poderemos concluir que $\sphericalangle$ EBF'' $= \alpha$.

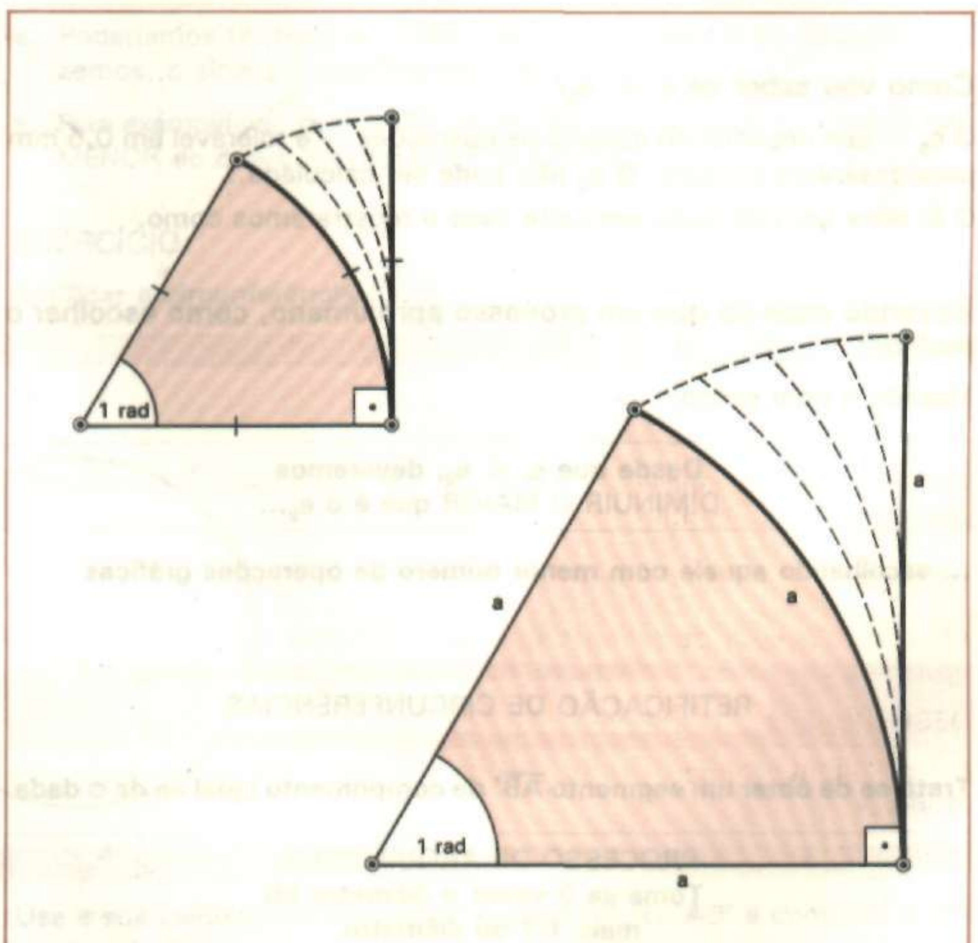
222

MEDIDA ANGULAR **de um arco de $\odot$ é a medida do seu ângulo central.**

Dois arcos (como $\widehat{EF'}$ e $\widehat{EG'}$ do desenho 3) podem ter a mesma medida angular (α) e não serem congruentes, porque têm raios (a e b) diferentes.

223 RADIANO (RAD):

Um arco (de qualquer raio) — bem como o seu ângulo central — mede 1 rad se, e apenas se, seu comprimento é igual ao seu raio.



224 Há problemas que não podem ser resolvidos utilizando apenas a régua e o compasso?

Trissecar: dividir em 3 partes iguais.

Trissector: instrumento para trissecar ângulos.

Não. O que há são problemas que não têm processo teoricamente exato de resolução, como os clássicos:

Quadratura: construir um quadrado de mesma área que a figura dada.

Trissectriz: curva utilizada para trissecar ângulos

TRISSECAR UM ÂNGULO GENÉRICO,

DESENHAR A QUADRATURA DE UM CÍRCULO, **etc.**

Que remédio...

"Mero" rigor teórico...

225 Como proceder nesses casos?

Utilizamos PROCESSOS APROXIMADOS.

226 Quando podemos usá-los?

Livro 1 (n.º 180): Em qualquer operação gráfica há um erro gráfico inevitável.

TEORICAMENTE:

Somente quando NÃO HÁ EXATOS.

NA PRÁTICA:

Numa construção, esses erros se acumulam.

Somente quando o ERRO TEÓRICO (e_t) É MENOR DO QUE O ERRO GRÁFICO (e_g).

227 Como vou saber se $e_t < e_g$?

O e_g — que depende do número de operações — é tolerável em 0,5 mm para desenhos comuns. O e_g não pode ser calculado...

O e_t deve ser calculado em cada caso e mostraremos como.

228 Havendo mais do que um processo aproximado, como escolher o melhor?

Usando o bom senso:

Desde que o e_t "já sumiu", tanto faz "sumir mais" como "sumir menos"...

Desde que $e_t < e_g$, deveremos DIMINUIR O MAIOR **que é o e_g...**

... escolhendo aquele com menor número de operações gráficas.

229 RETIFICAÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS

Trata-se de obter um segmento $\overline{AB}'$ de comprimento igual ao da ⊙ dada.

Sempre o procurado $\overline{AB}'$ tem "linha".

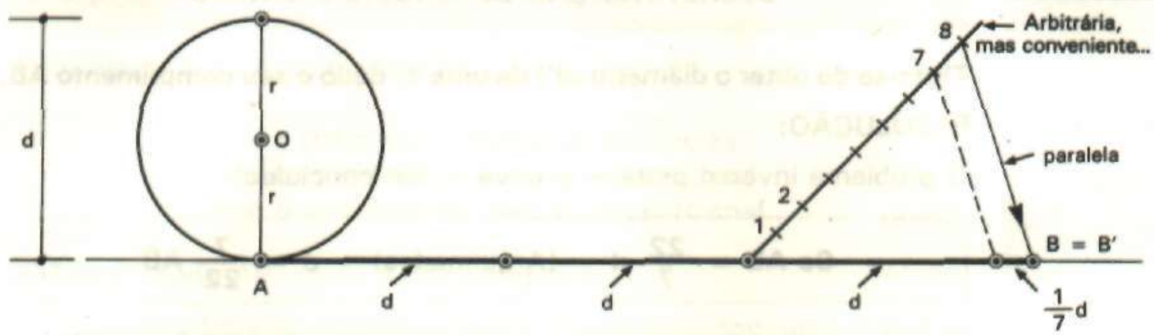
PROCESSO DE ARQUIMEDES: **Toma-se 3 vezes o diâmetro (d)** **mais 1/7 do diâmetro.**

Em Geometria:
= coincidente (igual)
~ semelhante
≅ congruente
e
≃
aproximadamente igual.

Isso é uma "receita", porque os processos aproximados não são concluídos e sim "achados" — são meras coincidências.

Abaixo mostramos uma boa maneira para obter AB (obtido) ≃ AB' (teórico):

É "mera coincidência" $\overline{B'}$ coincidir com $\overline{B}$...



230 CÁLCULO DO ERRO TEÓRICO e_t:

Um computador foi mandado calcular π; até hoje está calculando...

$$AB'_{teórico} = 2\pi r = \pi\, d \simeq 3{,}1416\, d$$

$$AB_{obtido} = 3\, d + \frac{1}{7}\, d = \frac{22}{7}\, d \simeq 3{,}1429\, d$$

22 | 7
10 3,142857....
30
20
60
40
50

$$e_t = AB'_{teórico} - AB_{obtido} \Rightarrow \boxed{e_t \simeq -0{,}0013\, d}$$

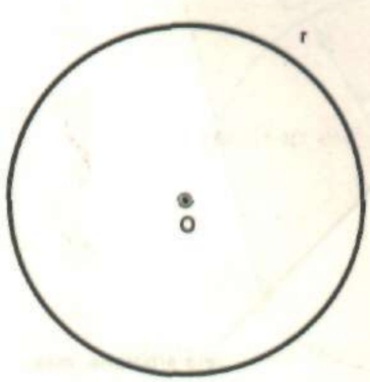
a. Poderíamos ter feito e_t = AB − AB' (tanto faz...); do jeito como fizemos, o sinal (−) significa erro por EXCESSO.

b. Para exemplificar, se d = 10 cm = 100 mm, teremos $e_t \sim -0{,}13$ mm, MENOR do que o inevitável ERRO GRÁFICO.

Que "excessinho"...

231 EXERCÍCIO:

Retificar a circunferência ($\overline{O}$; r).



R: AB ≃ 144,5 mm.

Use a sua calculadora para achar o valor teórico AB' e compare com o que você obteve.

232 **Se houver erro, você o atribui ao processo ou ao erro gráfico?**

R: ....

233

DESRETIFICAÇÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS

desretificar = enrolar

Trata-se de obter o diâmetro (d') de uma ⊙, dado o seu comprimento AB.

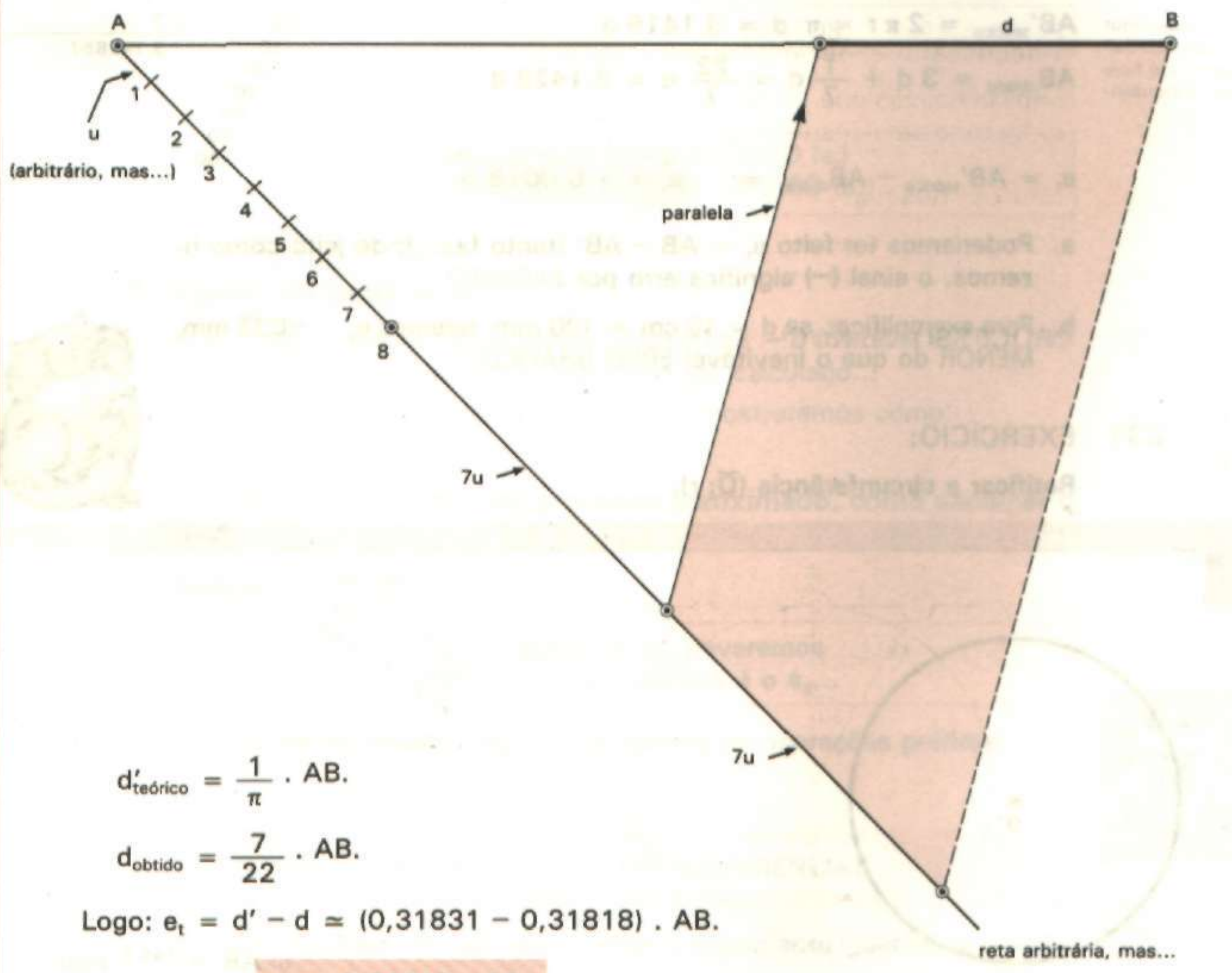
O procurado (d') tem "linha".

RESOLUÇÃO:

O problema inverso pode — e deve — ser concluído:

$$\text{Se } AB \simeq \frac{22}{7}\, d \xRightarrow{\text{[Arquimedes]}} d \simeq \frac{7}{22}\, AB.$$

Uma boa maneira para se obter $d(d_{\text{teórico}}) \simeq (d'_{\text{teórico}})$ é mostrada abaixo:



$d'_{\text{teórico}} = \frac{1}{\pi} \,.\, AB.$

$d_{\text{obtido}} = \frac{7}{22} \,.\, AB.$

Logo: $e_t = d' - d \simeq (0{,}31831 - 0{,}31818) \,.\, AB.$

$e_t \simeq 0{,}00013 \,.\, AB.$

234 Por que o processo de Arquimedes é o melhor?

Nossa homenagem ao sábio Arquimedes de Siracusa. Supõe-se que nasceu em 287 a.C. e foi morto aos 75 anos por um soldado romano que não o reconheceu, pois havia uma ordem expressa do general Marcelo para capturá-lo vivo.

Há processos com erro teórico menor do que o de Arquimedes, mas têm maior número de operações gráficas e isso resulta num

Culpa do erro gráfico...

ERRO FINAL MAIOR.

Além disso, o de Arquimedes:

... e é fácil de decorar...

é o único que resolve os problemas direto (retificar) e inverso (desretificar) sem o emprego de uma 4.ª proporcional.

ROTEIRO (dado AB, obter **d** por 4.ª proporc.):

Aplicando o processo de Arquimedes, não é necessário 4.ª proporcional.

1.º) Com **m** arbitrário, retifica-se (por qualquer processo) uma ⊙ de Φ **m**, obtendo **RS**.

ϕ: diâmetro

2.º) Como: $\frac{RS}{m} = \frac{AB}{d[?]}$, obtém-se **d** por 4.ª proporcional.

235 É necessário saber outros processos?

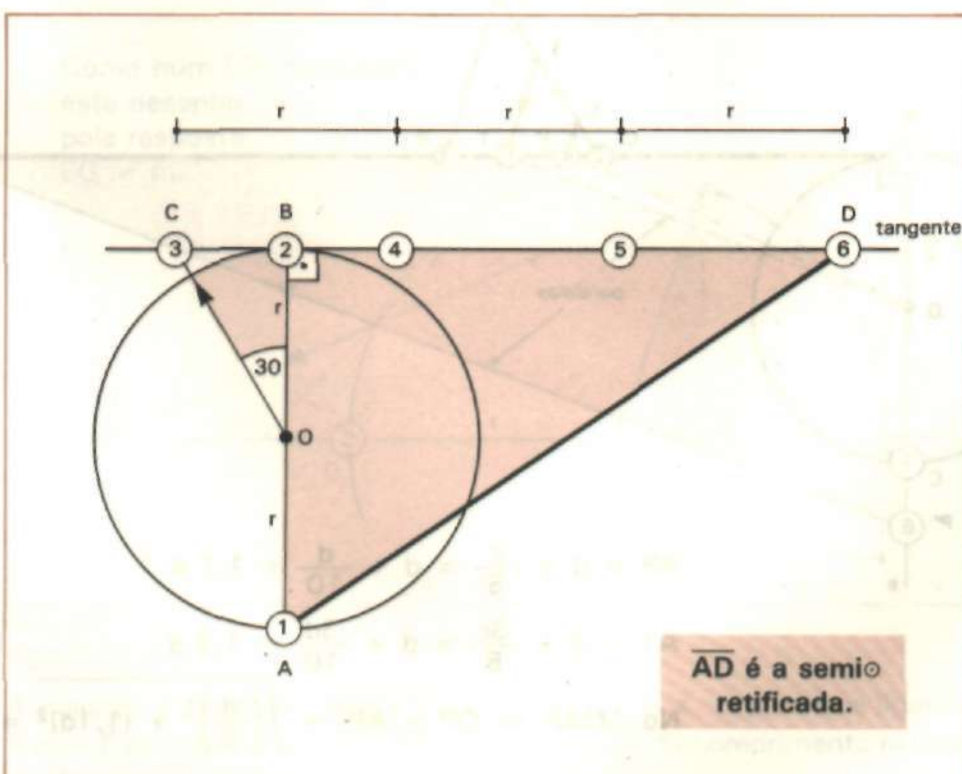
É nossa opinião que — sendo meras curiosidades geométricas — não é obrigatório sabê-los de cor.

236 Estou curioso...

Mostraremos — resumidos — dois dos mais divulgados e indicaremos como calcular o erro teórico (e_t) em cada um.

237 PROCESSO DE KOCHANSKY:

- Dados
- ○ Obtidos na ordenação dos números.



tan: abreviatura de tangente.

Como calcular o e_t (para quem se interessar):

1.º) $BC = r \cdot \tan 30^\circ$ e $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.º) $BD = 3r - r \cdot \tan 30^\circ$.

3.º) No $\triangle ABD \xRightarrow{\text{PITÁGORAS}} (AD)^2 = (2r)^2 + (BD)^2$.

4.º) Com essas expressões, você obterá:

Se fizéssemos r = 1, então acharíamos: AD = 3,1415333

$$AD_{obtido} = \sqrt{\frac{1}{3}(40 - 6\sqrt{3})} \cdot r \simeq 3{,}1415333 \cdot r.$$

$$AD'_{teórico} \simeq 3{,}1415926 \cdot r.$$

Logo: $e_t = AD' - AD \simeq 0{,}0000593 \cdot r \simeq 0{,}00006 \cdot r$ (por falta...).

Para comparar com o de Arquimedes, coloquemos e_t em função de $d = 2r$:

$$e_t \simeq 0{,}00003 \cdot d \quad \text{(por falta).}$$

E se fosse por excesso?

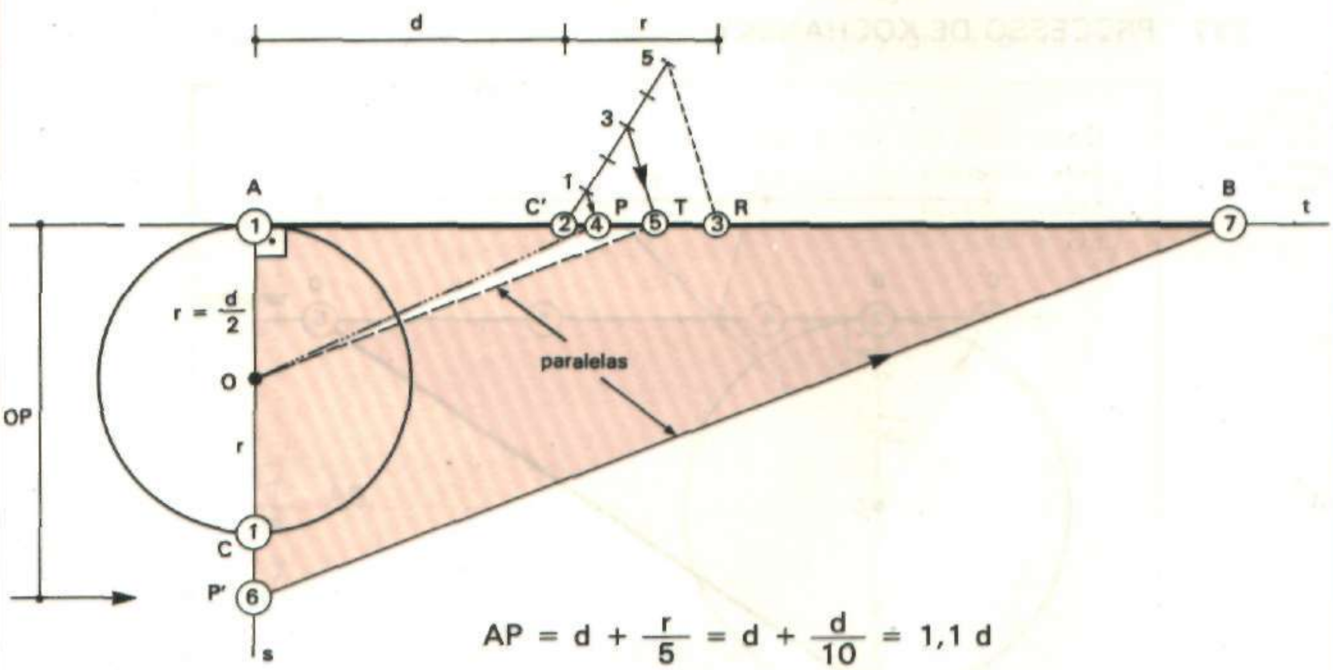
238 ***É um erro teórico bem menor...***

Mas dá um erro gráfico maior... e, para desretificar, exige 4ª proporcional.

Se nos preocuparmos apenas com o erro teórico, há um "recordista" mundial:

Está no Guiness-book...

239 PROCESSO DE SPECHT:



$$AP = d + \frac{r}{5} = d + \frac{d}{10} = 1{,}1\ d$$

$$AT = d + \frac{3r}{5} = d + \frac{3d}{10} = 1{,}3\ d$$

$$\text{No } \triangle OAP \Rightarrow OP = AP' = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (1{,}1d)^2} = \frac{d}{2}\sqrt{5{,}84}$$

ROTEIRO (em homenagem ao trabalho de Specht):

1.º) Traçada a tangente $\overrightarrow{At} \perp \overline{AC}$, marcam-se AC' = d e C'R = r.

2.º) Divide-se $\overline{C'R}$ em 5 partes congruentes, tomando-se apenas o primeiro ($\overline{P}$) e o terceiro ($\overline{T}$) pontos de divisão.

Para quem quiser decorar...

3.º) O primeiro ($\overline{P}$) usa-se em 1.º lugar, para marcar AP' = OP; depois usa-se o 3.º, para traçar $\overline{P'B} \parallel \overline{OT}$. $\overline{AB}$ é a RESPOSTA obtida.

Sumiu "mais" do que os outros...

COMO CALCULAR $\mathbf{e_t = AB'_{teórico} - AB_{obtido}}$:

1.º) Calculam-se AP, AT e depois AP' (no quadro).

2.º) $\triangle ABP' \sim \triangle ATO \Rightarrow \dfrac{AB}{AP'} = \dfrac{AT}{AO} \Rightarrow \dfrac{AB}{\frac{d}{2}\sqrt{5{,}84}} = \dfrac{1{,}3\ d}{\frac{d}{2}}$.

T é o 3.º

Para d = 100mm, temos um erro teórico de 0,00008 mm.

3.º) Logo: $AB = 1{,}3\sqrt{5{,}84} \simeq \mathbf{3{,}1415918}$ d.

4.º) $AB'_{teórico} = \pi d \simeq \mathbf{3{,}1415926}$ d.

5.º) Então: $e_t \simeq -0{,}000\,000\,8\ d$ (por excesso...).

240

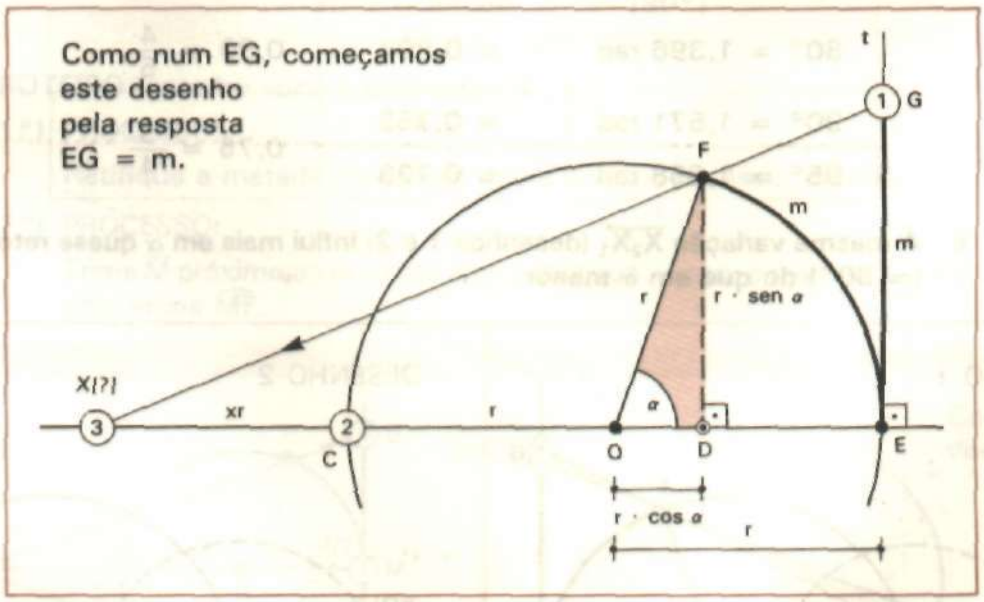
RETIFICAÇÃO DE ARCOS DE ⊙

DADO *um arco de* ⊙ $\widehat{EF}$,

OBTER *um segmento de mesmo comprimento* m.

Este é um dos poucos processos aproximados que pode ser concluído:

Estamos supondo que você já estudou Trigonometria.



$2\pi r : 2\pi$ rad. :: m: α

logo:

$\alpha = \dfrac{m \cdot 2\pi}{2\pi \cdot r}$ rad

$\boxed{m = r \cdot \alpha}$

Sendo α medido em radianos (rad).

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{a}{h}$

$\cos \alpha = \dfrac{b}{h}$

RESOLUÇÃO:

A questão é pesquisar *qual* [?] o valor de CX = x · *r para que ligando* $\overline{X}$ com $\overline{F}$ se obtenha em $\overrightarrow{Et} \perp \overline{EC}$ o segmento $\overline{EG}$ de comprimento **m** igual ao do arco $\widehat{EF}$ dado.

CÁLCULO DE **x**:

$$\triangle GEX \sim \triangle FDX \Rightarrow \boxed{\frac{m}{EX} = \frac{r \cdot \operatorname{sen}\alpha}{DX} \quad (*)}$$

Mas:

$$\left.\begin{array}{l} m = r\,\alpha \text{ (vide ''orelha'')} \\ EX = 2\,r + x\,r \text{ (desenho)} \\ DX = r \cdot \cos\alpha + r + x\,r \end{array}\right\} \xRightarrow{(*)} \frac{r\,\alpha}{2\,r + x\,r} = \frac{r \cdot \operatorname{sen}\alpha}{r \cdot \cos\alpha + r + x\,r}$$

Dessa última expressão — ''cortando'' r — temos:

$$\boxed{x = \frac{\alpha\,(\cos\alpha + 1) - 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \alpha}}$$

Nessa expressão, α é medido em RADIANOS.

241 CONCLUSÕES:

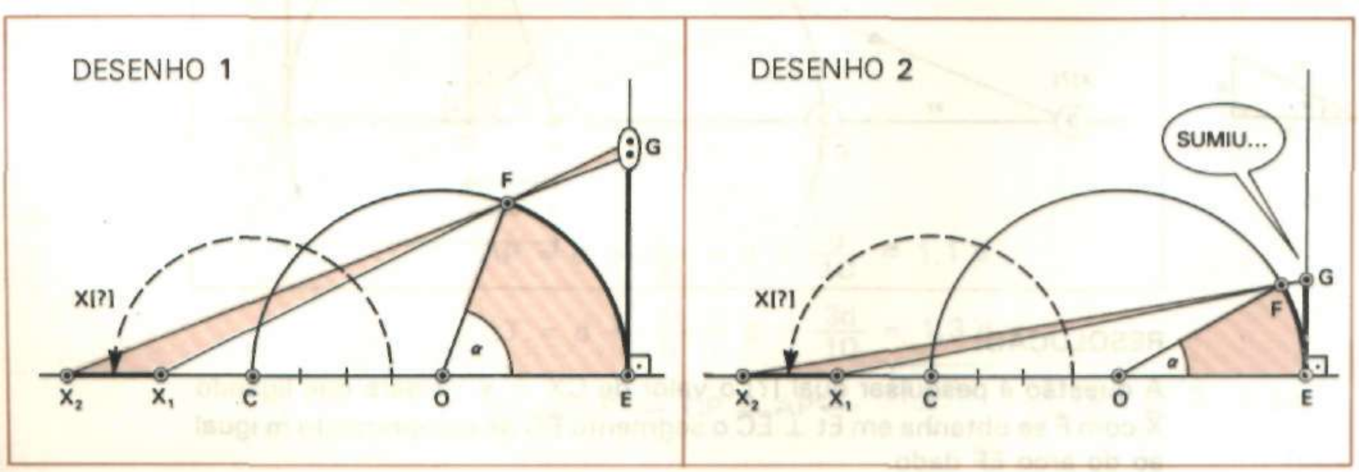
a. O número x não depende de r (que foi ''cortado'').

b. O valor de x DEPENDE **de α. Exemplos:**

α	x	
	CALCULADO	APROXIMADO
10° ≃ 0,175 rad	≃ 0,996	1,00
50° ≃ 0,873 rad	≃ 0,924	
80° ≃ 1,396 rad	≃ 0,804	$0{,}80 = \frac{4}{5}$
90° ≃ 1,571 rad	≃ 0,752	$0{,}75 = \frac{3}{4}$
95° ≃ 1,658 rad	≃ 0,723	

Nos desenhos 1 e 2, a variação $\overline{X_2X_1}$ foi exagerada, caso contrário não haveria variação visível no ponto $\overline{G}$.

c. A mesma variação $\overline{X_2X_1}$ (desenhos 1 e 2) **influi mais em α quase reto (≃ 90°) do que em α menor.**



Para α até ≈ 50°, até CX = r daria um $e_1 < e_2$...

242 Então... como devo proceder?

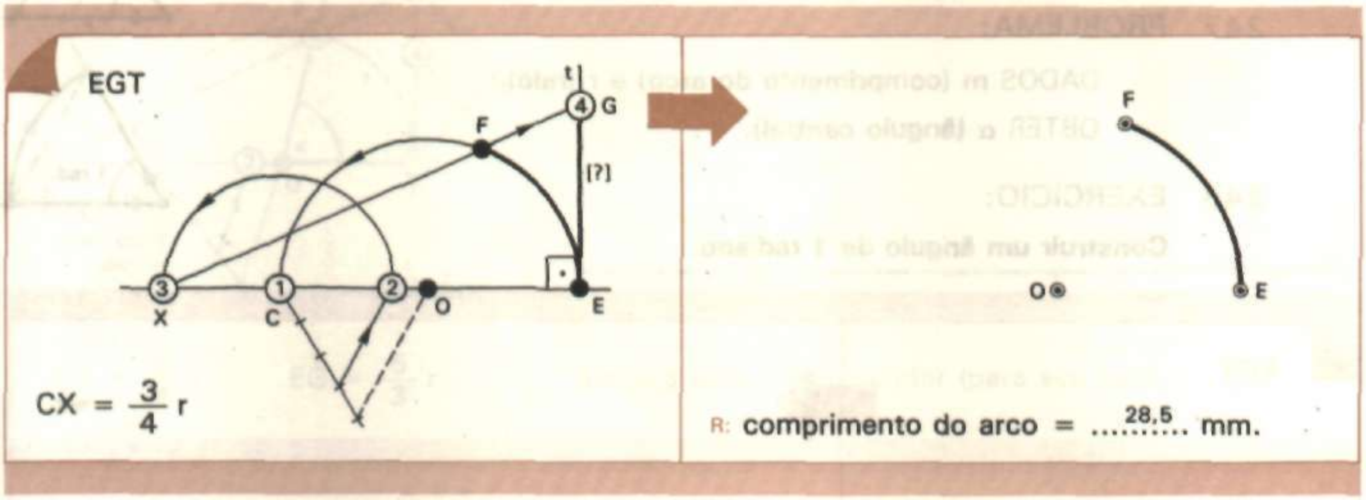
Como $\overline{CX}$ deve ser obtido graficamente e CONVÉM usar sempre o mesmo valor, sugerimos $CX = \frac{3}{4} r = 0{,}75\ r$:

Afinal, em DG temos que desenhar...

$$0° > \text{ângulo} \leqslant (\approx 90°) \Rightarrow CX = \frac{3}{4}$$

243 EXERCÍCIO:

Retificar o arco $\widehat{EF}$ dado abaixo.



244

$$(\approx 90°) \leqslant \text{ângulo} \leqslant (\approx 180°)$$

Para esses ângulos, o valor 3/4 para x não é satisfatório. Por exemplo: $\alpha = 110° \Rightarrow x \approx 0{,}629$.

1.° processo: $\overline{M}$ no pt.m. do arco dado.

ROTEIRO (escolha você o processo):

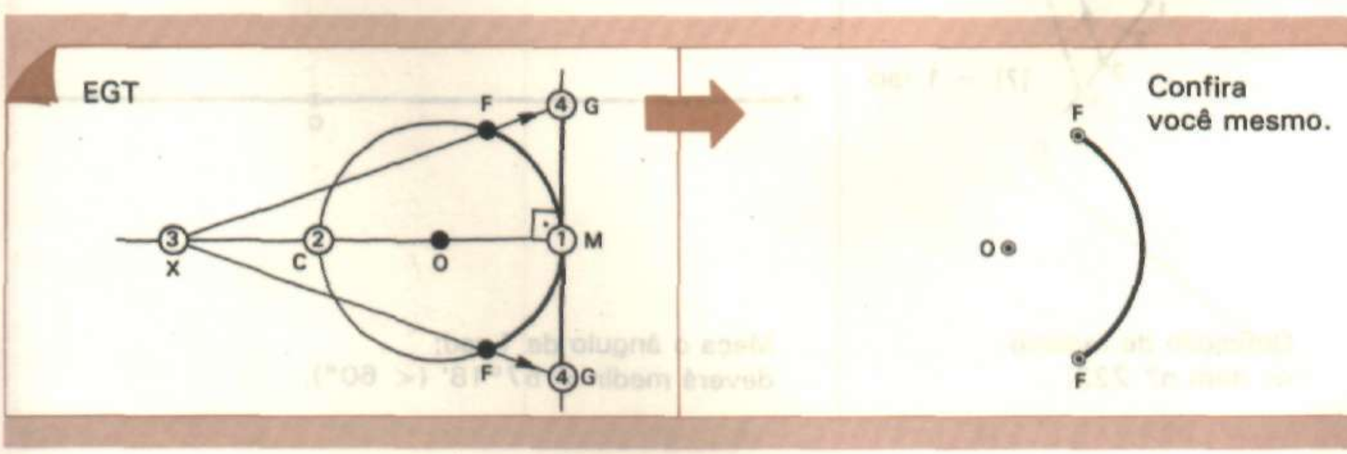
1.º) PROCESSO:

Retifique a metade do arco e dobre a resposta assim obtida.

2.º) PROCESSO:

Tome $\overline{M}$ próximo ao pt.m. do arco e retifique — com o mesmo $\overline{X}$ — os dois arcos $\widehat{MF}$.

2.° processo: $\overline{M}$ próximo ao pt.m. do arco.



245 **(≅ 180°) ⩽ ângulo < 360°**

Somente arcos podem ser maiores do que 360°; ângulos não podem ser maiores do que 360°.

ROTEIRO (basta um processo):

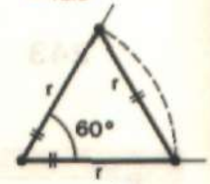
1º) Retifica-se a circunferência completa.

2º) Retifica-se o arco replementar.

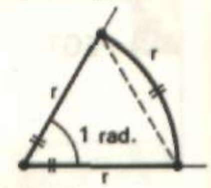
3º) Subtrai-se (graficamente).

Replementar é o que falta para 360°.

60° | corda = = raio



246 **DESRETIFICAR ARCOS**



1 rad | arco = = raio

247 PROBLEMA:

DADOS *m* ***(comprimento do arco) e r (raio).***

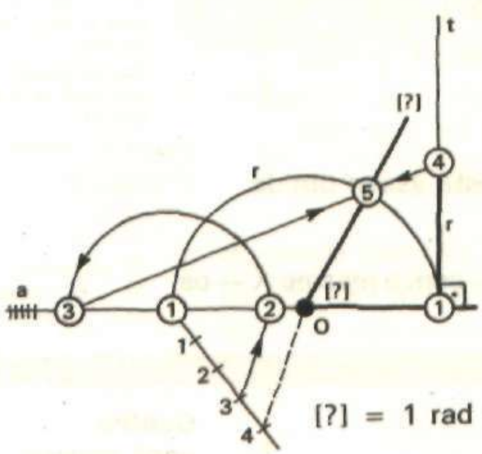
OBTER α **(ângulo central).**

248 EXERCÍCIO:

Construir um ângulo de 1 radiano.

EGT

Com r arbitrário:



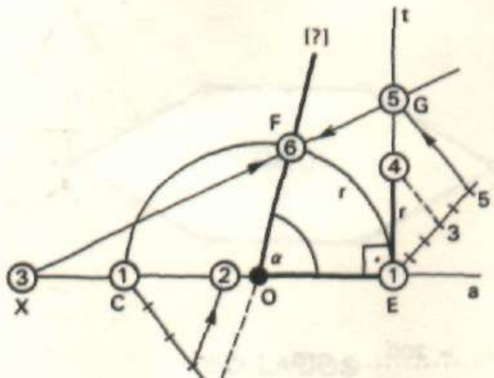
Definição de radiano no item nº 223.

Meça o ângulo de 1 rad; deverá medir ≅ 57°18′ (< 60°).

249 EXERCÍCIO:

Construir um ângulo de $\frac{p}{q}$ rad, sendo (p; q) ambos números ou ambos segmentos dados. Para exemplificar: $\alpha = \frac{5}{3}$ rad.

EGT



r = arbitrário

$CX = \frac{3}{4}\,r$ $EG = \frac{5}{3}\,r$

Faça a conta e confira.

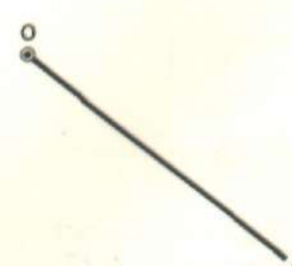
Meça α com o transferidor (para seu uso).

250 EXERCÍCIO:

Construa um ângulo aÔx de $\frac{8}{3}$ rad.

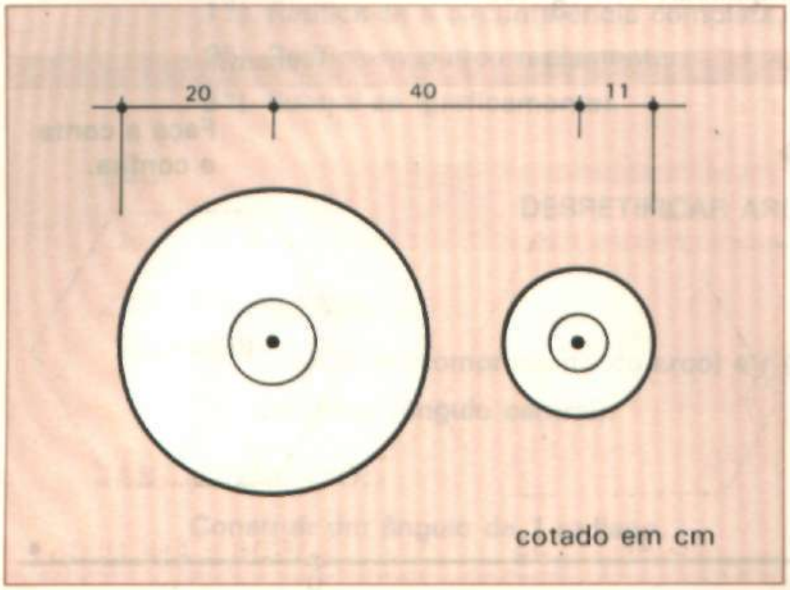
ROTEIRO

Faça a conta e confira.



251 EXERCÍCIO:

Qual o comprimento — em centímetros — da correia (não desenhada), sabendo que as polias giram no sentido horário?



Sugestão:
adote a escala
1 : 10 ⇒ 1 mm : 10 mm

R: ....≅ 200.... cm.

III POLÍGONOS REGULARES

252 O que é um polígono regular?

É somente aquele que tem todos os lados e todos os ângulos (internos) respectivamente CONGRUENTES **entre si.**

Não bastaria que apenas os lados ou apenas os ângulos o fossem?

Não. Veja os desenhos abaixo:

253 Como se desenha um polígono regular?

Esse é o nosso presente assunto.

Para exemplificar, iniciaremos dividindo uma circunferência em 8 partes congruentes entre si. Isso se faz:

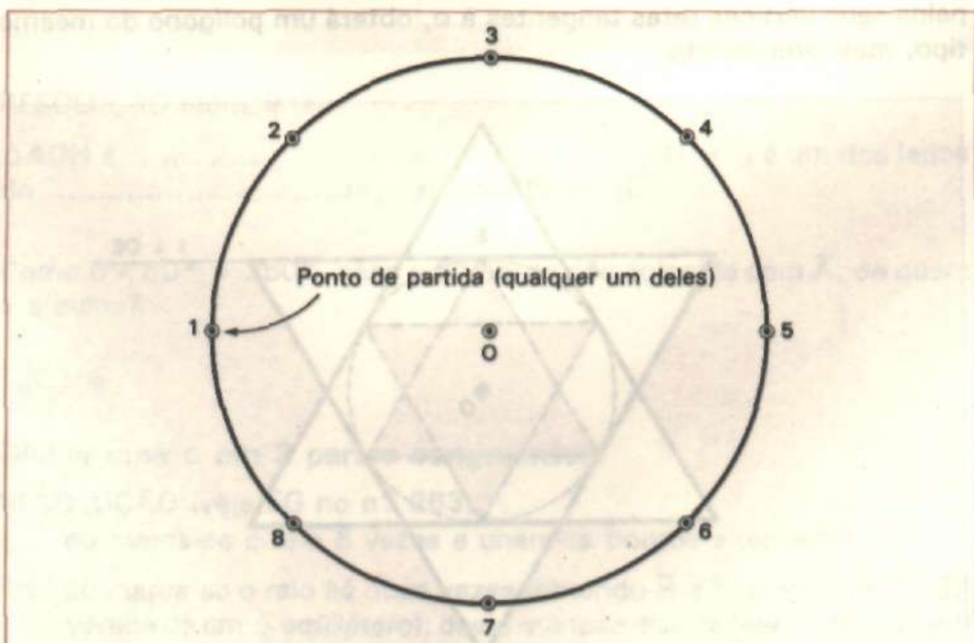
1.º) Traçando dois diâmetros perpendiculares entre si, dividindo a ⊙ em 4.

2.º) As bissetrizes de 2 ângulos retos (adjacentes) dividem a ⊙ em 8.

254 É dada uma ⊙, já dividida em 8 partes (arcos) congruentes entre si.

Seja $n > 1$ o n.º de divisões:

- n = 2 Diâmetro
- n = 3 △ Eqüilátero
- n = 4 Quadrado
- n = 5 Pentágono
- n = 6 Hexágono
- n = 7 Heptágono



- n = 8 Octógono
- n = 9 Eneágono
- n = 10 Decágono
- n = 11 Undecágono, etc.

É dicionário grego?

255 A partir de um ponto qualquer (por exemplo $\dot{1}$) e no sentido horário, vamos ligar os pontos consecutivamente e de **p em p** ARCOS. Por exemplo, 1 arco por vez ($\dot{1}$ com $\dot{2}$; $\dot{2}$ com $\dot{3}$;...), 2 arcos por vez ($\dot{1}$ com $\dot{3}$; $\dot{3}$ com $\dot{5}$, $\dot{5}$ com $\dot{7}$;...) até $p < n$ arcos por ligação. Poderemos obter:

$\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$,... designam pontos.

256 **p = 1 ⇒ POLÍGONO REGULAR CONVEXO**

Polígono regular subentende-se que é o convexo.

257 **Para $p \neq 1$, se — e somente se — percorrermos todos os pontos antes de retornar ao ponto de partida, obteremos um**

POLÍGONO REGULAR ESTRELADO

Isso acontecerá somente quando p e n forem primos entre si, como $n = 8$ e $p = 3$, ou quando n não for divisível por p.

10 não é divisível por 4.

Estrela de Davi.
$n = 6$
$p = 2$

258 ***Se retornarmos ao ponto de partida sem percorrer todos os pontos,* obteremos um** POLÍGONO REGULAR CONVEXO **com n/p lados.**

É o que acontece quando $n = 8$ e $p = 2$; obteremos um quadrado. Ligando da mesma maneira os outros pontos, obteremos outro quadrado. A união desses polígonos regulares convexos chama-se ESTRELA.

Parece ser, mas não é um polígono estrelado.

259 **E se, para $n = 8$, eu ligar de 5 em 5 arcos?**

Como $5 + 3 = 8$, ligar de 5 em 5 no sentido HORÁRIO **é o mesmo que de 3 em 3 no** ANTI-HORÁRIO...

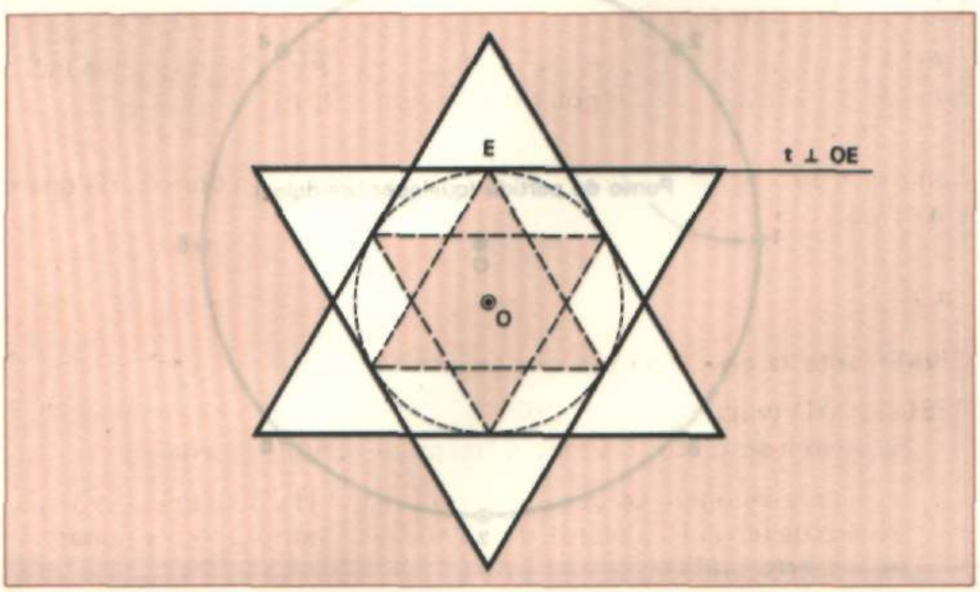
Para $n = 9$ e $p = 3$ também obtemos uma estrela (3 △s eqüiláteros).

260 **Todos os polígonos regulares anteriores são inscritos na circunferência.**

261 **Como devo fazer para obter os circunscritos?**

Seja o inscrito um convexo, um estrelado ou uma estrela, se você traçar pelos seus vértices retas tangentes à ⊙, obterá um polígono do mesmo tipo, mas circunscrito.

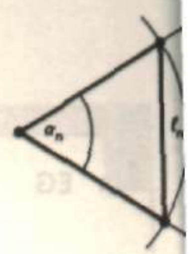
Qualquer polígono regular é inscritível e é também circunscritível numa circunferência.



Poderia continuar? É lindo...

IV DIVISÃO DE ⊙s EM n PARTES CONGRUENTES

262 **Designando o lado de um polígono regular inscrito numa ⊙ ($\overline{O}$; r) por ℓ_n (onde n é o n.º de lados) e por α_n o ângulo central cuja corda é ℓ_n, temos**

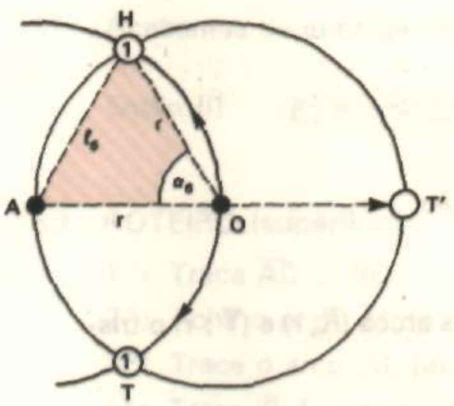


$$\alpha_n = \frac{360°}{n}$$

263 **n = 6**

Dividir ($\overline{O}$; r) em 6 partes congruentes.

EG



RESOLUÇÃO (complete):

△AOH é .... ⇒ α_6 = ... ⇒ $\overline{AH} = \ell_6$ é um dos lados do .... regular inscrito em ($\overline{O}$; r).

Como 6 × 60° = 360°, caso o 6.º ponto não coincida com $\overline{A}$, de quem é a culpa?

264 **n = 3**

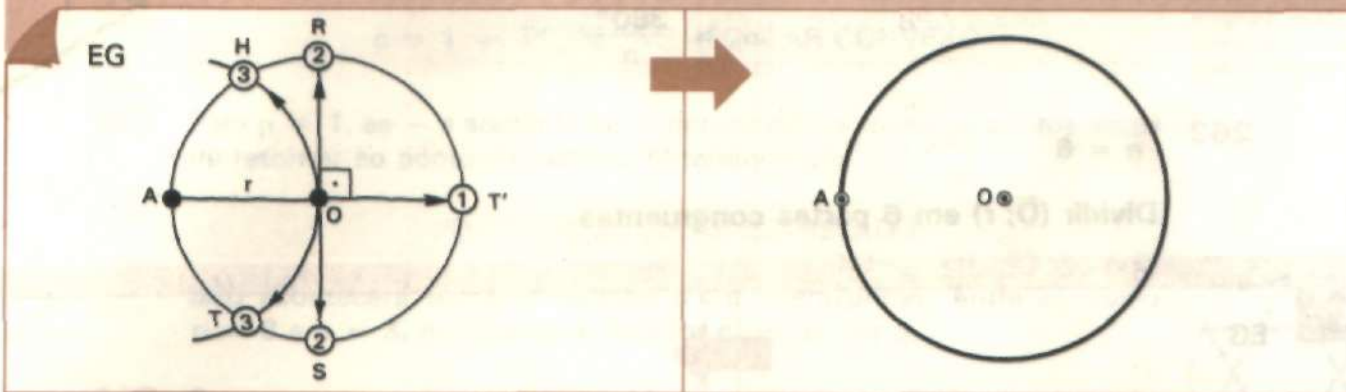
Dividir uma ⊙ em 3 partes congruentes.

RESOLUÇÃO (veja EG no n.º 263):

- **ou marca-se o raio 6 vezes e unem-se pontos alternados**
- **ou marca-se o raio só duas vezes (obtendo $\overline{H}$ e $\overline{T}$) e acha-se $\overline{T}'$ (3.º vértice de um △ eqüilátero); desta maneira distribui-se ("irmanamente") o erro gráfico.**

265 **n = 12**

Dividir ($\overline{O}$; r) em 12 partes congruentes.



ROTEIRO:

1.º) $\overline{AT'}$

2.º) $\overline{RS} \perp \overline{AT'}$

3.º) ($\overline{A}$;r) $\rightarrow$ $\overline{H}$ e $\overline{T}$

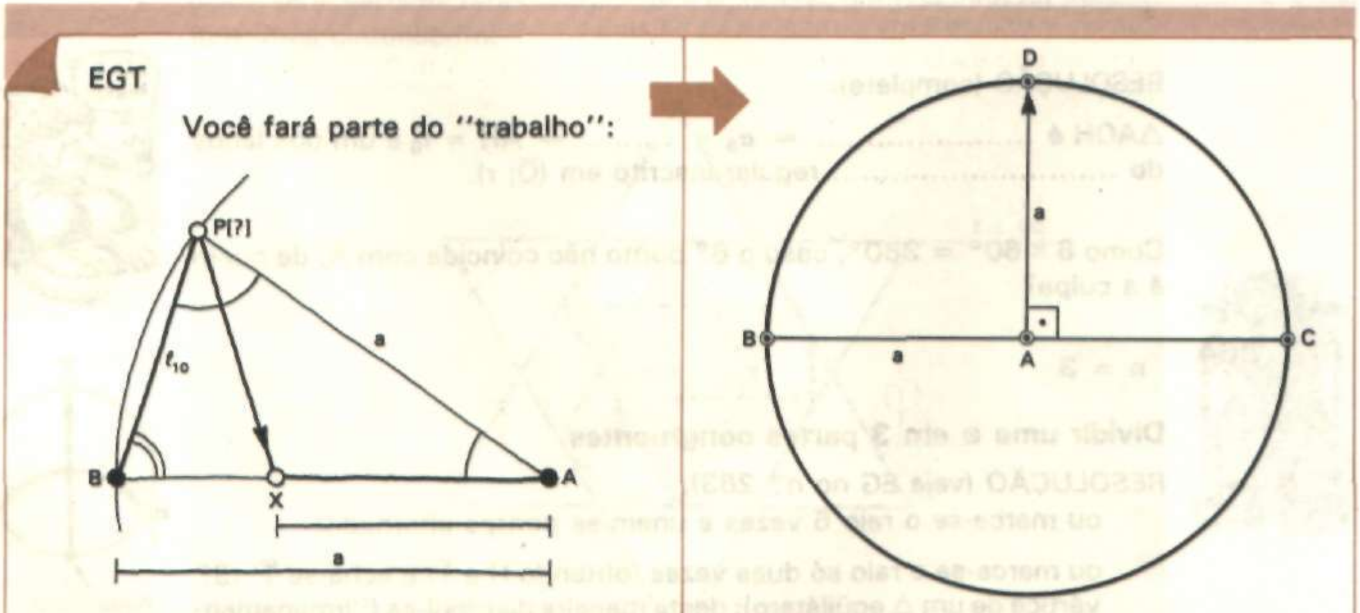
4.º) ($\overline{R}$; r), ($\overline{T}$'; r) e ($\overline{S}$; r) completam a divisão

266 TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO RETO:

Seja — por exemplo — o ângulo reto RÔT'; os arcos ($\overline{R}$; r) e ($\overline{T}$'; r) o trisseccionam.

267 **n = 10** CONVÉM rever segmento áureo (n.º 071).

Dividir ($\overline{A}$; a) em 10 partes congruentes.



RACIOCÍNIO (O QUE SE SABE? O QUE SE QUER?):

1.º) Queremos ℓ_{10}, logo façamos (no EGT): $BP = \ell_{10}$.

Lembra-se da P4? (Teorema das bissetrizes n.º 030.)

2.º) $BP = \ell_{10} \xrightarrow{\text{n.º } 262}$ $B\hat{A}P$ mede .... (escreva no EGT).

3.º) O $\triangle BAP$ é isósceles, logo:
$A\hat{B}P$ e $A\hat{P}B$ medem ambos .... (escreva).

4.º) Como 72° é o dobro de 36° (que sorte...), isso nos dá a idéia (!) de considerar a bissetriz $\overline{PX}$ de $A\hat{P}B$.

5.º) Os $\triangle$s BPX e BPA são isósceles (têm 2 ângulos de 72°), logo: $AX = XP = PB =$ ....

6.º) $P4 \Rightarrow \dfrac{\ell_{10}}{a} = \dfrac{BX}{AX} \Rightarrow \dfrac{\ell_{10}}{a} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ell_{10}} \Rightarrow \ell_{10}^2 = a \cdot (a - \ell_{10})$ (**)

268 CONCLUSÃO:

$$\left.\begin{array}{l}\text{No n.º 071 temos } (*)\ x^2 = a\,.\,(a-x) \\ \text{Acabamos de concluir } (**)\ \ell_{10}^2 = a\,.\,(a-\ell_{10})\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell_{10} = x$$

Então (!): **ℓ_{10} é o SEGMENTO ÁUREO do raio a.**

269 ROTEIRO **(supérfluo):**

1.º) Trace $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

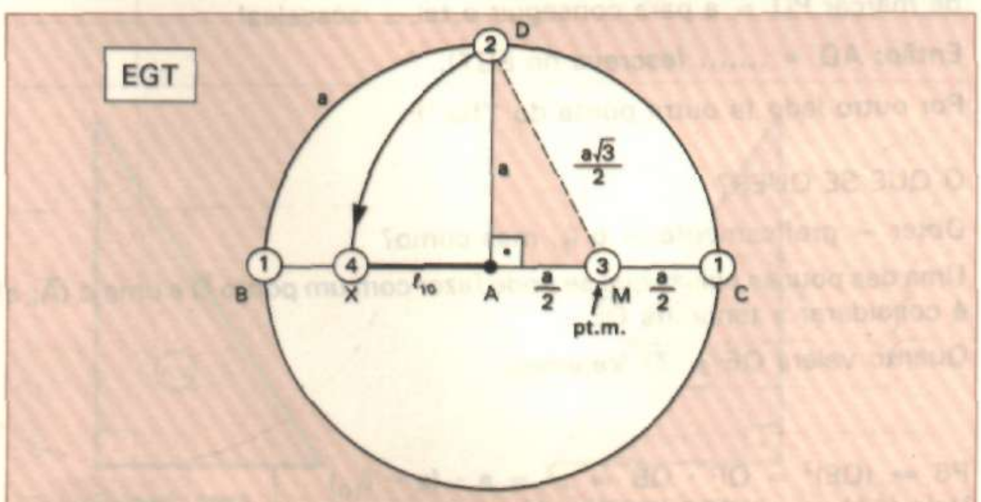
2.º) Ache o pt.m. $\overline{M}$ do raio $\overline{AC}$.

3.º) Trace o arco ($\overline{M}$; MD), obtendo X e $AX = \ell_{10}$.

4.º) Trace ($\overline{B}$; ℓ_{10}), obtendo $\overline{P}$ e prossiga até retornar ao ponto $\overline{B}$. Se houver uma diferença, será erro gráfico.

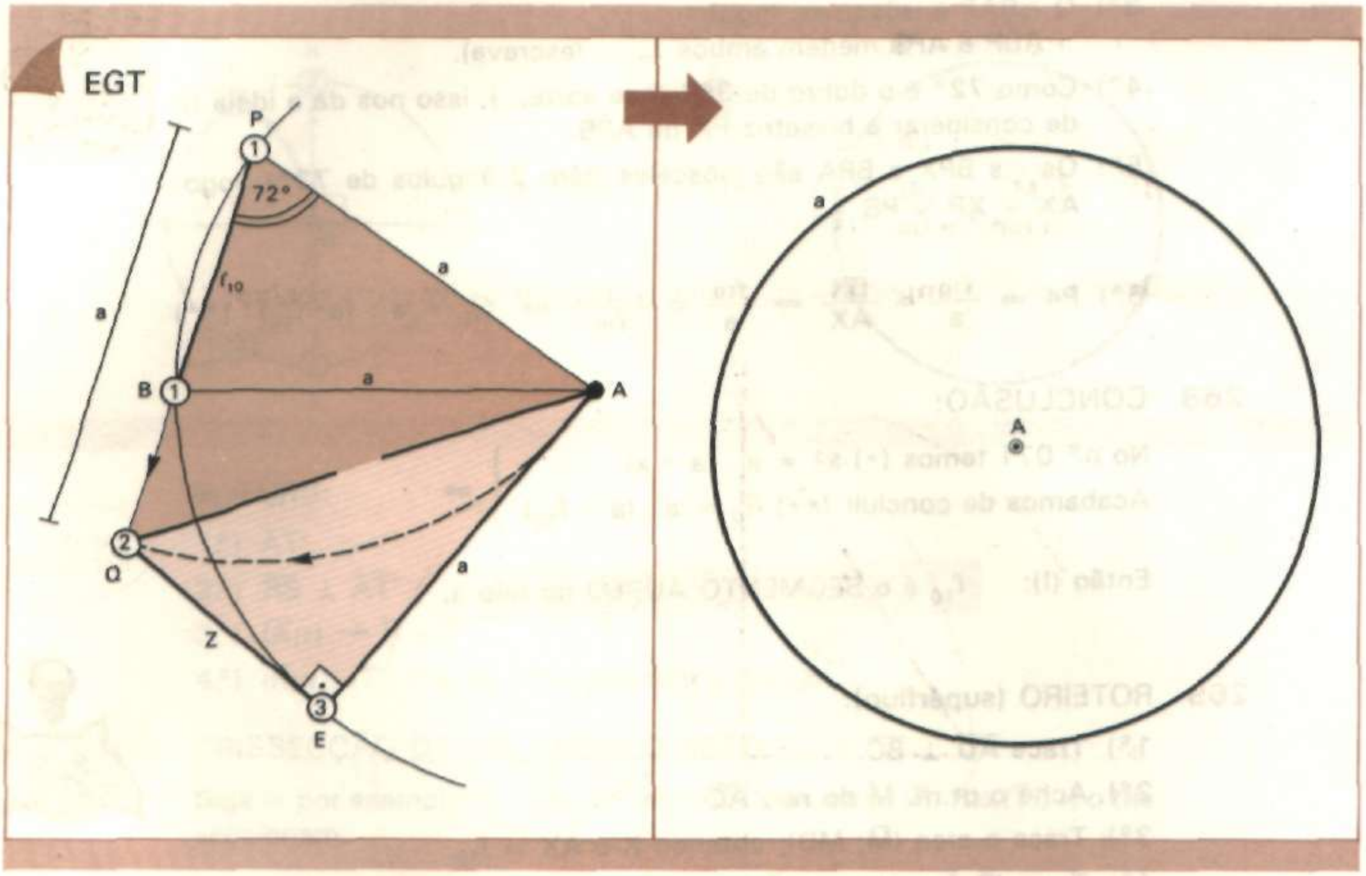
270 **Por que esse roteiro é supérfluo?**

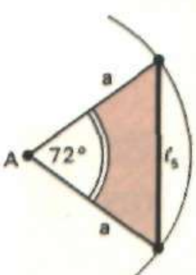
Porque é exatamente a mesma construção do segmento áureo... Como convém decorá-la, repetiremos essa construção abaixo, na forma de um EGT:



271 $n = 5$

Dividir $(\bar{A};\ a)$ em 5 partes congruentes.





RACIOCÍNIO (S [?] —— Q [?]):

O QUE SE SABE?

Numa ⊙ $(\bar{A};\ a)$, uma CORDA $= \ell_5$ determina um ângulo central $\alpha_5 = 72°$. Então, um △ isósceles de lados a e base ℓ_5 tem o ângulo oposto à base com 72°.

No EGT (do ℓ_{10}) já temos um ângulo $B\hat{P}A$ com 72°... Isso nos dá a idéia de marcar PQ = a para conseguir o tal △ isósceles!

Então: AQ = ... (escreva no EGT).

Por outro lado (a outra ponta do "fio"):

O QUE SE QUER?

Obter — graficamente — o ℓ_5, mas como?

Uma das poucas coisas que se pode fazer com um ponto $\bar{Q}$ e uma ⊙ $(\bar{A};\ a)$ é considerar a tangente $\overleftrightarrow{QE}$...

Quanto valerá QE = Z? Vejamos:

Lembra-se da P6? Potência de ponto; nº 073.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{P6} \Rightarrow (QE)^2 = QP \cdot QB \Rightarrow z^2 = a \cdot (a - \ell_{10}) \\ \text{Veja (**) no nº 267 (fim)} \Rightarrow \ell_{10}^2 = a \cdot (a - \ell_{10}) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z = \ell_{10}}$$

272 CONCLUSÃO:

> **ℓ_5 é hipotenusa quando os catetos são ℓ_{10} e a.**

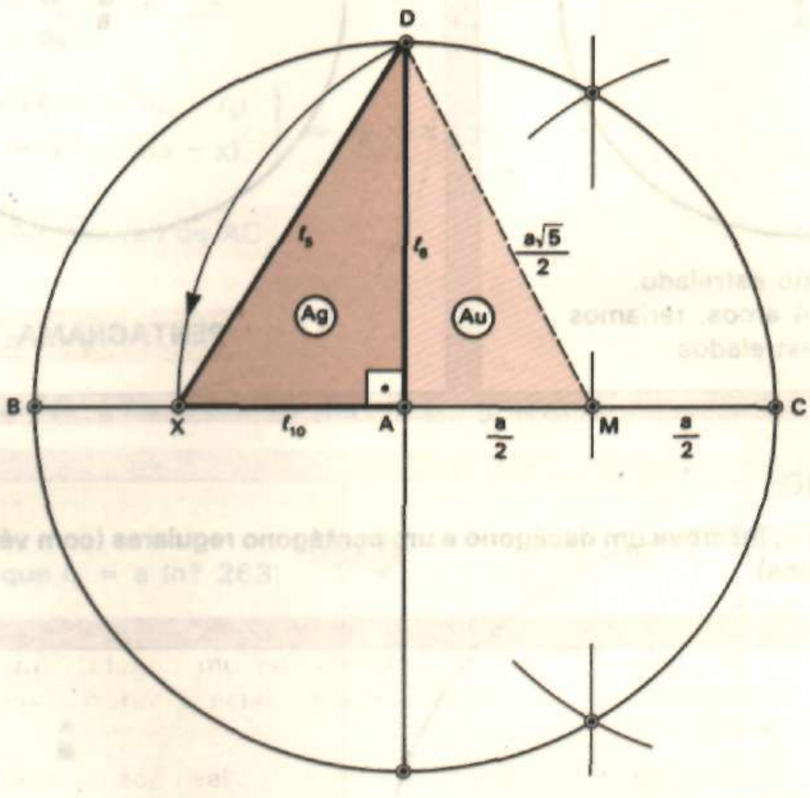
273 ROTEIRO (supérfluo):

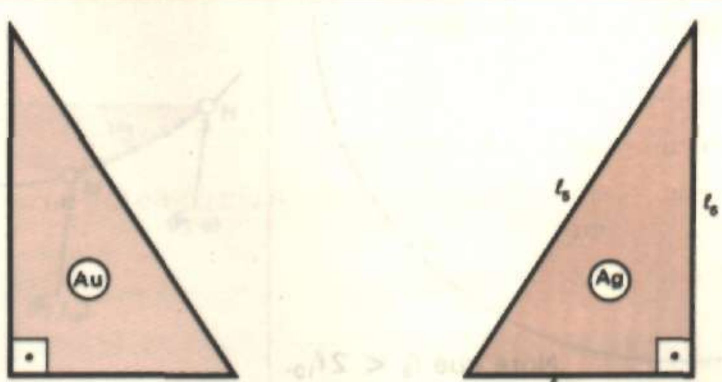
1º) $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

2º) $\overline{M}$ = pt.m. de $\overline{AC}$.

3º) $(\overline{M}; MD)$ obtém $\overline{X}$. O $\triangle AXD$, de catetos $AX = \ell_{10}$ e $AD = a = \ell_6$ tem hipotenusa $DX = \ell_5$.

274 **Devido à sua importância, convém decorar o desenho abaixo:**





Triângulo áureo.

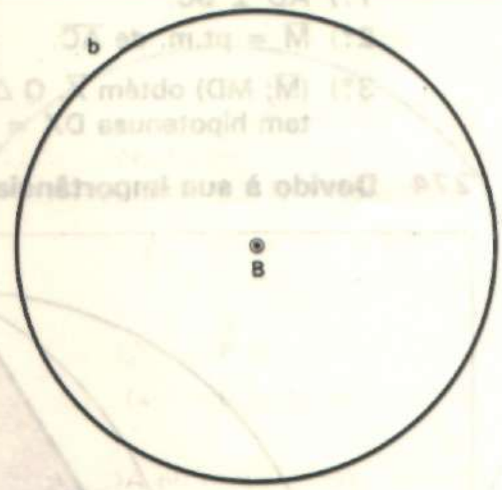
Triângulo de prata.

275 EXERCÍCIO:

Em $(\overline{A}; a)$ inscreva um decágono estrelado.

Em $(\overline{B}; b)$ inscreva — com vértices comuns — 2 pentágonos regulares: um convexo e um estrelado.

Só há um decágono estrelado.
Ligando de 4 em 4 arcos, teríamos dois pentágonos estrelados.



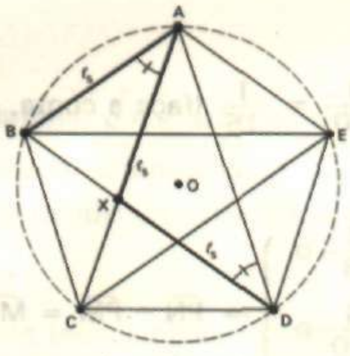
PENTAGRAMA

276 EXERCÍCIO:

Na mesma $\odot$, inscreva um decágono e um pentágono regulares (com vértices comuns).

Note que $\ell_5 < 2\ell_{10}$.

Em Geometria, pentagrama (ao lado) é o símbolo dos pitagóricos.
Em Música, pentagrama é uma pauta de 5 linhas.



d_5 = diagonais

Pela P3 os ângulos inscritos BAC e BDC são iguais entre si por valerem metade do central correspondente BOA.

PENTAGRAMA:

No séc. V a.C., os pitagóricos, baseados na semelhança dos $\triangle$s isósceles ABX e DAB, concluíram:

$$\begin{array}{l} \triangle ABX \Rightarrow \\ \triangle DAB \Rightarrow \end{array} \frac{\ell_5}{d_5} = \frac{d_5 - \ell_5}{\ell_5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Logo} \Rightarrow \ell_5^2 = d_5\,(d_5 - \ell_5) \\ \text{ÁUREO} \Rightarrow x^2 = a(a - x) \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_5 = x$$

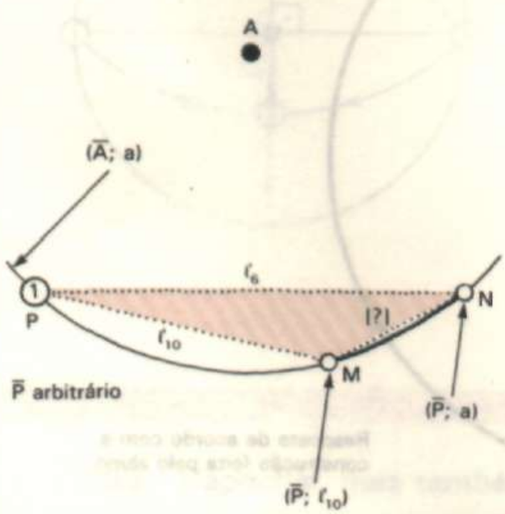
isto é, AX é áureo de AC

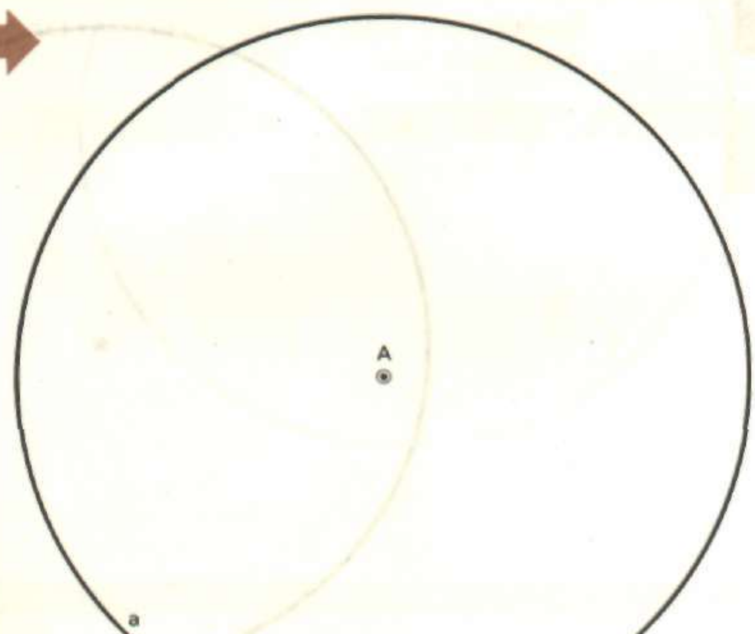
277 **n = 15**

Dividir uma $\odot$ em 15 partes congruentes.

EGT

Lembrar que ℓ_6 = a (nº 263).





Não confunda Arco com Corda:

JUSTIFICAÇÃO:

Saiba (!) que: $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ (faça a conta...).

Então:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{PN} = \ell_6 \Rightarrow \widehat{PN} = \frac{1}{6} \odot \\ \overline{PM} = \ell_{10} \Rightarrow \widehat{PM} = \frac{1}{10} \odot \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{PN} - \widehat{PM} = \widehat{MN} \Rightarrow \boxed{\widehat{MN} = \frac{1}{15} \odot}$$

$\odot = 2\pi a$ (comprimento da $\odot$)

> **SE o arco vale $\frac{1}{15}$ da circunferência,**
>
> **ENTÃO sua corda é o ℓ_{15}.**

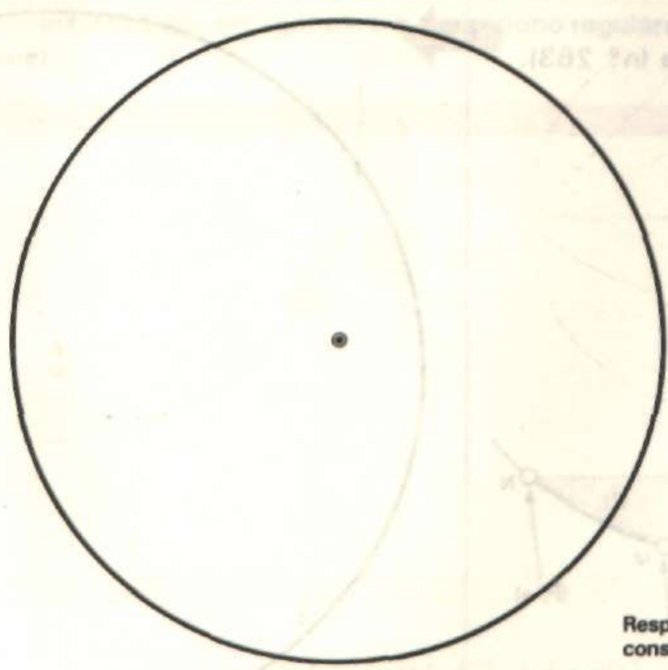
> **Johannes Kepler (1630-1571 = 59a.), o pai da Astronomia moderna, declarou:**
> **"A Geometria tem dois grandes tesouros: o teorema de Pitágoras e o segmento áureo."**

Falta o índio...

278 **No próximo exercício capriche na precisão, porque o usaremos como exemplo.**

279 **EXERCÍCIO:**

Dividir a $\odot$ dada em 15 partes congruentes entre si.



Resposta de acordo com a construção feita pelo aluno.

Caprichei, mas a diferença entre o 15.º e o 1.º ponto foi de ...... mm.
Os erros podem se acumular...

Para n = 8, já aplicamos esse processo.
Para n = 12, vimos outro processo, mas este serviria.

Para n = 12, aproveitamos para explicar a trissecção de um ângulo reto (n.º 266).

280 $n' = 2n$

Divide-se em n e, depois, cada arco ao meio (mediatrizes).

Pode-se e convém traçar diâmetros.

É assim que se pode dividir em 16, 20, 24, 30, 32, ...

281 E em 7, 9, 11 e 13?

Como não há processos teoricamente exatos, somos obrigados a usar processos aproximados...

Quem não tem cão...

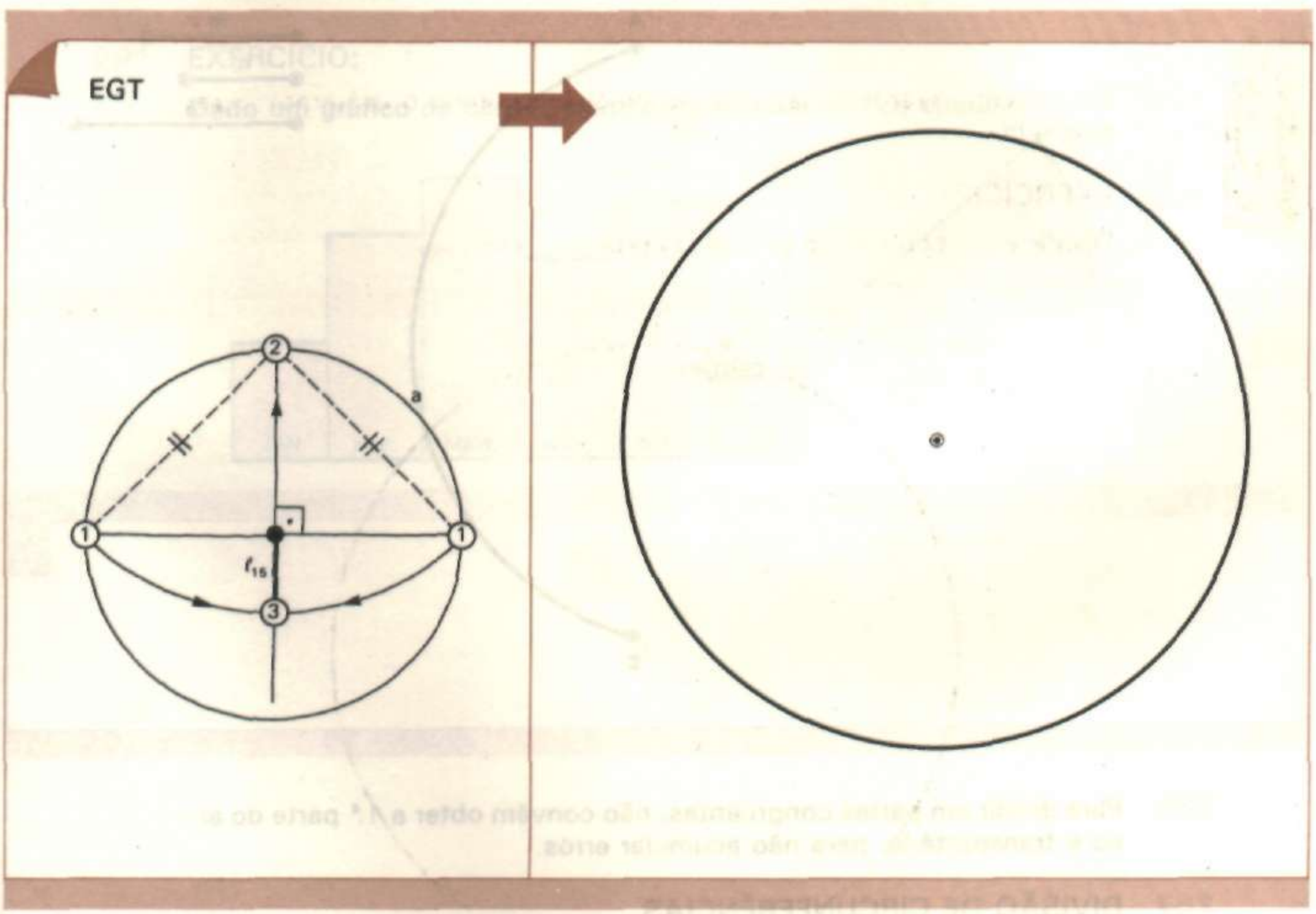
282 Somente nesses casos?

Somos de opinião que — na prática — mesmo havendo um processo teoricamente exato, deve-se usar um aproximado, desde que o erro teórico seja menor do que o erro gráfico.

Você já deve saber copiar um EGT.
É a linguagem gráfica.

EXEMPLO:

Dividir a ⊙ dada em 15 partes congruentes pelo processo abaixo:



283 Caprichei, mas também deu um erro...

Certamente é erro gráfico, porque o e_t (vide n.º 300) $\simeq 0{,}0016$ a.

Para um raio a = 40 mm teríamos um $e_t \simeq 0{,}064$ mm e, mesmo que esse erro se adicione sucessivamente, não chega a 1 mm (hum...).

Às vezes, por acaso, os vários erros parciais se compensam e acertamos o alvo...

284 DIVISÃO DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Para arcos genéricos só há processos aproximados e basta saber o seguinte:

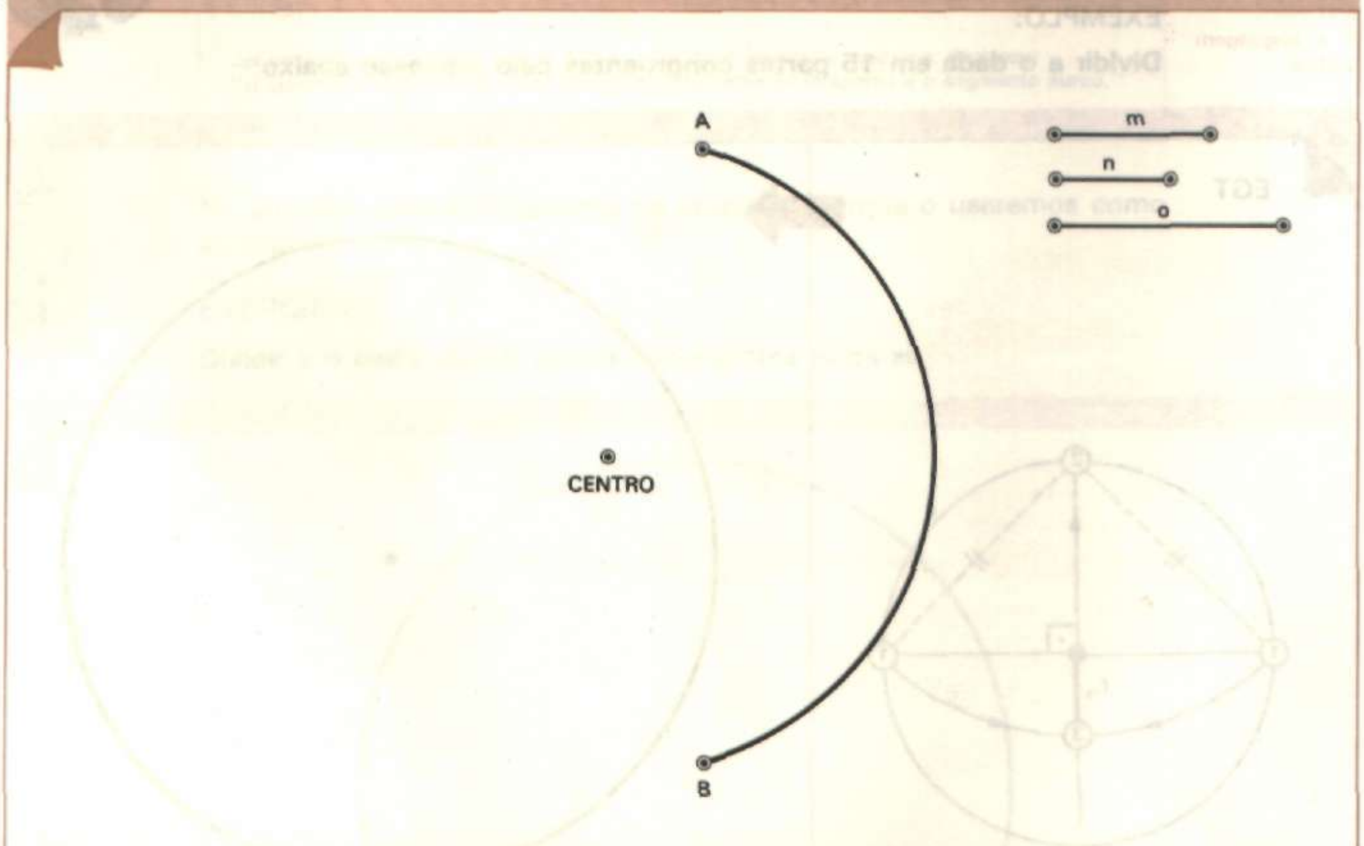
1.º) Retifica-se o arco.

2.º) Divide-se o arco retificado (segmento) como foi pedido (em partes congruentes ou proporcionais).

3.º) "Voltam-se" os pontos de divisão.

285 EXERCÍCIO:

Dividir $\overset{\frown}{AB}$ em partes proporcionais aos segmentos m, n, o — nessa ordem e a partir de $\overline{A}$.



286 Para dividir em partes congruentes, não convém obter a 1.ª parte do arco e transportá-la, para não acumular erros.

287 DIVISÃO DE CIRCUNFERÊNCIAS

PROCESSO GERAL:

1.º) Retifica-se a circunferência, obtendo $\overline{AB}$.

2.º) Divide-se $\overline{AB}$ como foi pedido.

3.º) Desretificam-se os segmentos obtidos (o último é para conferir).

288 Por uma questão de rigor teórico, um processo aproximado só deve ser usado quando não existe outro teoricamente exato.

289 **SIMPLIFICAÇÕES devem ser espontâneas.**

SE você sozinho perceber uma simplificação,

ENTÃO é óbvio que a compreendeu...

No entanto, como este é um assunto técnico, mostraremos duas:

1º) Para dividir a ⊙ em partes congruentes, pode-se obter um só arco e depois transportá-lo.

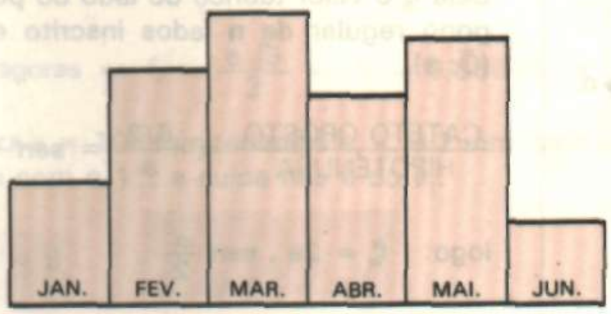
2º) Para dividir uma ⊙ em partes proporcionais, pode-se — ao desretificar os segmentos — usar o mesmo ponto $\overline{X}$ (aquele de $CX = \frac{3}{4}$ do raio) e transportar os arcos obtidos para a ⊙.

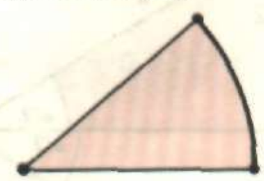
290 **Gostaria de fazer um problema técnico...**

Uma das finalidades deste curso de desenho é prepará-lo para isso.

291 EXERCÍCIO:

Dado um gráfico de barras, transformá-lo num gráfico circular.





Da GP:
A área de um setor circular é proporcional ao comprimento do arco.

ROTEIRO:

1.º) Obtenha um segmento $\overline{AB}$ igual à soma das alturas das barras.

2.º) Desretifique $\overline{AB}$, obtendo uma ⊙.

3.º) Desretifique as várias alturas das barras, na ordenação em que foram dadas.

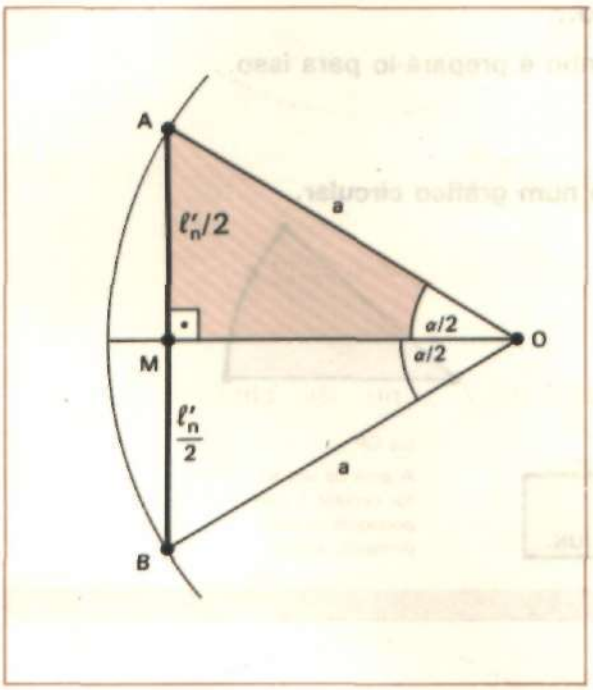
292 Há processos particulares para dividir uma ⊙ em 7, 9, 11 e 13 partes congruentes?

Sim. Há poucas operações e, portanto, o e_g é pequeno. Na prática, convém usá-los.

293 E quanto ao erro teórico e_t?

Pode — e deve — ser desprezado, tão pequeno é.

Para calcular o e_t precisaremos empregar Trigonometria:



CÁLCULO DE ℓ'_n:

Seja ℓ'_n o valor teórico do lado do polígono regular de **n** lados inscrito em $(\overline{O}; a)$.

$$\frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{\ell'_n/2}{a} = \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

logo: $\boxed{\ell'_n = 2a \cdot \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}}$

sendo $\alpha = \frac{360°}{n} \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{2} = \frac{180°}{n}}$

CÁLCULO DE ℓ_n:

ℓ_n é o valor obtido em cada construção.

Logo: $\boxed{e_t = \ell'_n - \ell_n}$

294 EXERCÍCIOS:

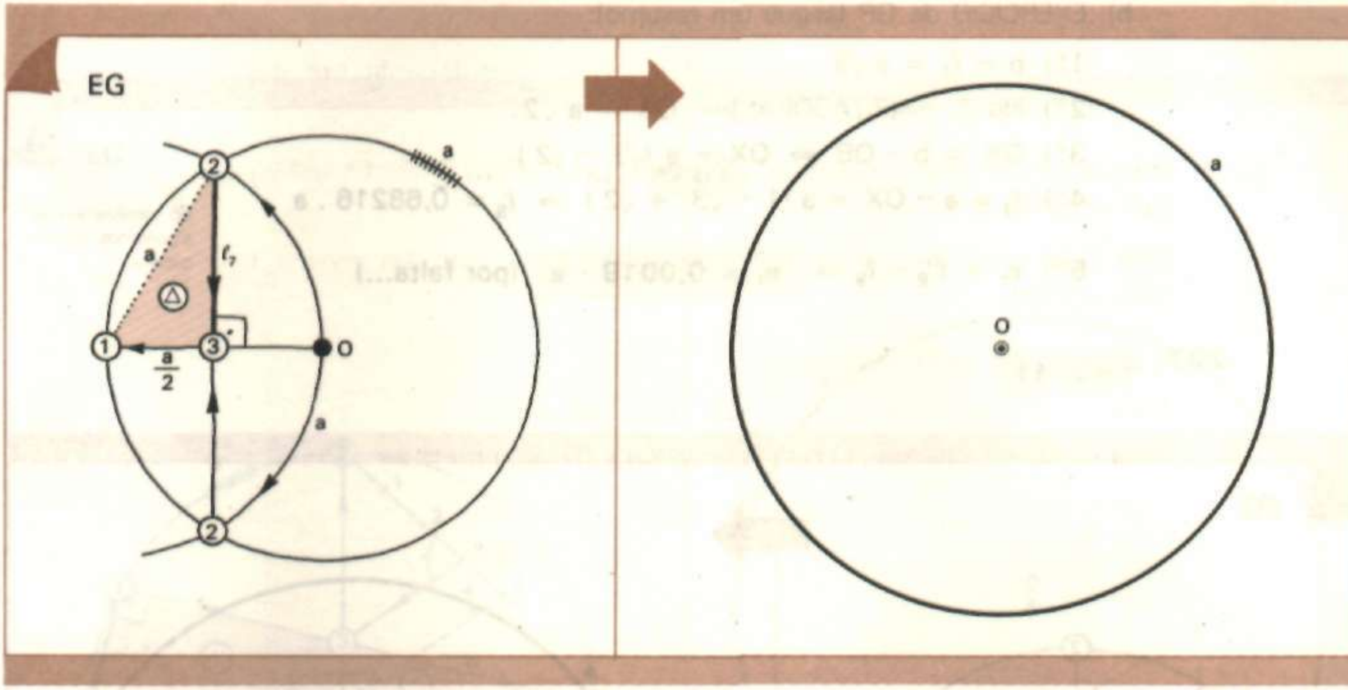
A seguir, nos EGs, mostraremos (Linguagem Gráfica) um processo para cada **n**.

a. Você os copiará, como exercício do MF.

b. Você calculará ℓ_n, como exercício de GP.

c. Os valores numéricos serão dados, para você conferir e saber o tamanho do e_t.

295 **n = 7**



Use a calculadora.

$$\ell'_7 = 2a \cdot \text{sen}\,\frac{180°}{7} \Rightarrow \ell'_7 \simeq 0{,}86777 \cdot a$$

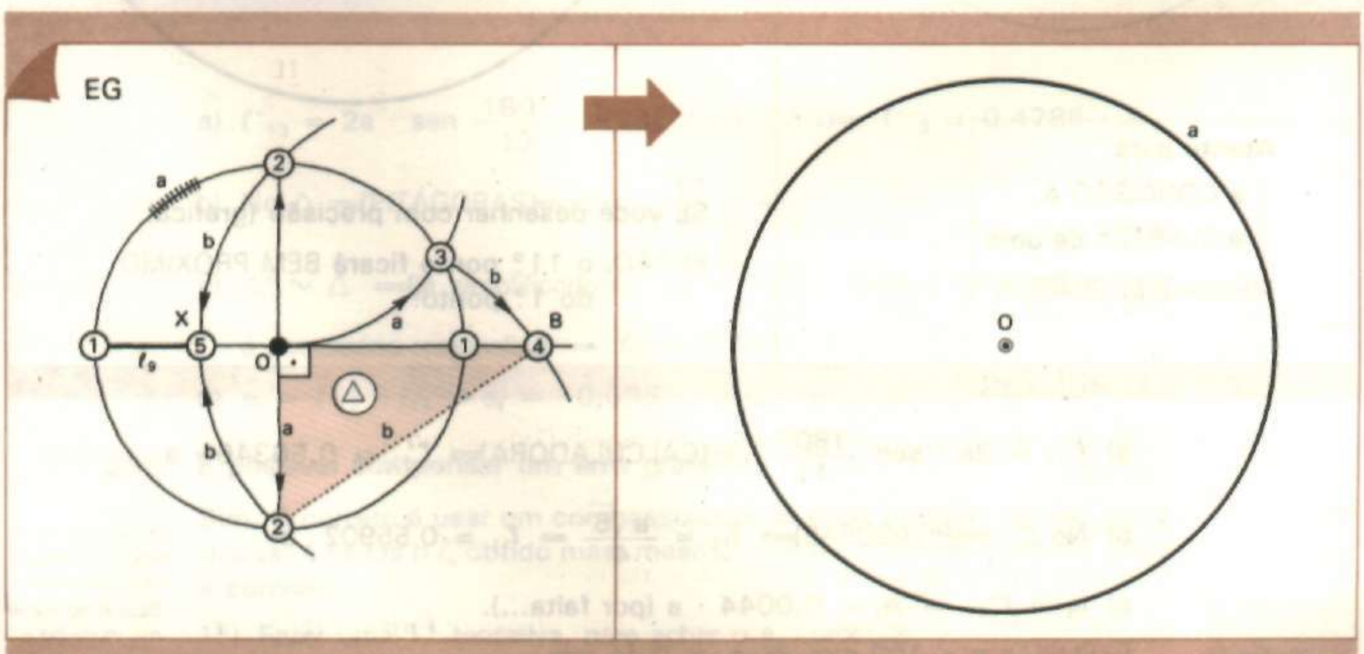
$$\text{Pitágoras} \Rightarrow \ell_7 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_7 \simeq 0{,}86603 \cdot a$$

$$\Rightarrow \boxed{e_t \simeq 0{,}0017\ a}$$

Por falta, o que pouco importa...

Para $a = 100$ mm teríamos $e_t < 0{,}2$ mm; se o seu 7º ponto não coincidiu com o 1º, a culpa não é do e_t.

296 **n = 9**



a) $\ell'_9 = 2a \cdot \text{sen}\,\dfrac{180°}{9} \Rightarrow \ell'_9 = 0{,}68404\ a$

b) EXERCÍCIO de GP (segue um resumo):

1.º) $b = \ell_3 = a\sqrt{3}$.

2.º) No △ ═[PITÁGORAS]⟹ $OB = a\sqrt{2}$.

3.º) $OX = b - OB \Rightarrow OX = a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

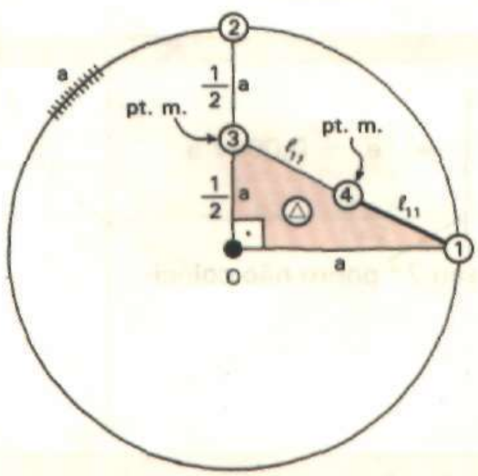
4.º) $\ell_9 = a - OX = a(1 - \sqrt{3} + \sqrt{2}) \Rightarrow \ell_9 \simeq 0{,}68216\ .\ a$

5.º) $e_t = \ell'_9 - \ell_9 \Rightarrow$ $e_t \simeq 0{,}0019 \cdot a$ (por falta...)

Só escrevemos os algarismos significativos.

297 n = 11

EG



Atente para
a CONCISÃO é
a CLAREZA de uma
MENSAGEM GRÁFICA.

SE você desenhar com precisão (gráfica),
ENTÃO: o 11.º ponto ficará BEM PRÓXIMO do 1.º ponto.

a) $\ell'_{11} = 2a \cdot \text{sen}\,\dfrac{180°}{11}$ ═[CALCULADORA]⟹ $\ell'_{11} \simeq 0{,}56346 \cdot a$

b) No △ ═[PITÁGORAS]⟹ $\ell_{11} = \dfrac{a\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \ell_{11} \simeq 0{,}55902\ .\ a$

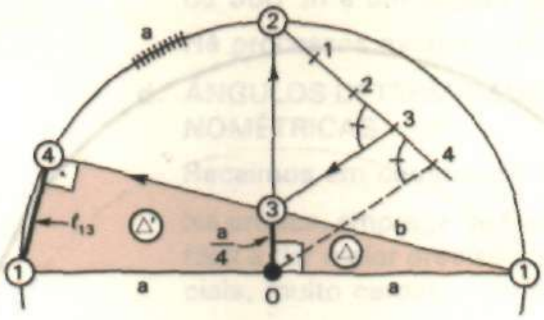
c) $e_t = \ell'_{11} \Rightarrow e_t \simeq 0{,}0044 \cdot a$ (por falta...).

EXEMPLO: $a = 100$ mm $\Rightarrow e_t \simeq 0{,}44$ mm

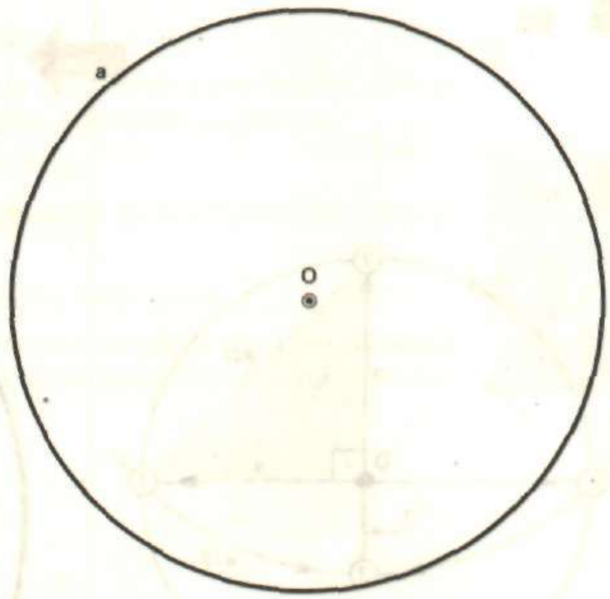
Esse e_t se aproxima muito do e_9.

298 **n = 13**

EG



Num EG, PODE-SE desenhar só o NECESSÁRIO e o SUFICIENTE para *CONCLUIR "COMO" COPIÁ-LO.*



a) $\ell'_{13} = 2a \cdot \text{sen}\,\frac{180°}{13}$ ═[CALCULADORA]⟹ $\ell'_{13} \simeq 0{,}4786 \cdot a$

b) No Δ ═[PITÁGORAS]⟹ $b = \frac{\sqrt{17}}{4} \cdot a$

c) $\Delta' \sim \Delta$ ═[já simplificado]⟹ $\ell_{13} = \frac{2a}{\sqrt{17}}$. Com a calculadora, não é necessário racionalizar ⟹ $\ell_{13} = 0{,}4851 \cdot a$

Da mesma ordem de grandeza que o e_g.

d) $e_t = \ell'_{13} - \ell_{13} \Rightarrow e_t \simeq -0{,}0065 \cdot a$ (por excesso...).

299 **É possível compensar um erro gráfico?**

O busílis da topografia é saber compensar o erro cometido (inevitável).

Sim. O correto é usar um compasso com as duas pontas-"secas" para *marcar n vezes o ℓ_n obtido mas, mesmo com o compasso comum,* pode e convém:

É por isso que fabricam...

1.º) Fazer uma 1.ª tentativa, para achar o e_g cometido.

2.º) Dar um pequeno "toque" na abertura do compasso e repetir a marcação.

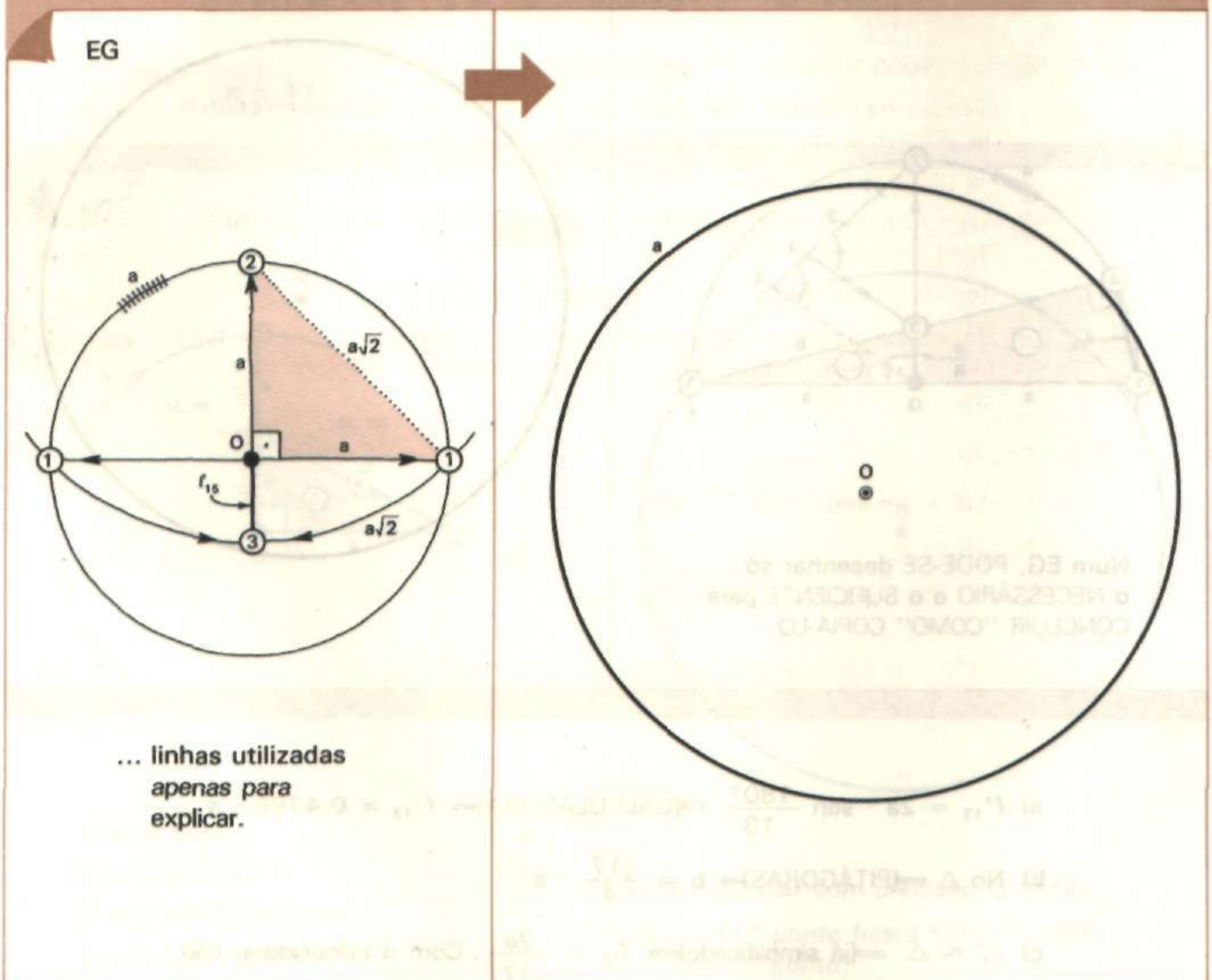
300 **n = 15**

Mas já vimos (n.º 277) um processo exato!...

Exatamente, mas tem tantas operações que o erro final, no caso é só o e_g, torna-se muito grande.

Será que pode?...

Há um bom processo aproximado, que convém ser utilizado na prática:



a) $\ell'_{15} = 2a \cdot \text{sen}\,\dfrac{180°}{15} \xRightarrow{\text{CALCULE}} \ell'_{15} \simeq 0{,}4158 \cdot a$

$\sqrt{2} \simeq 0{,}4142...$

b) $\ell_{15} = a\sqrt{2} - a \Longrightarrow \ell_{15} \simeq 0{,}4142\,.\,a$

c) $e_t = \ell'_{15} - \ell_{15} \Rightarrow e_t \simeq 0{,}0016 \cdot a$ (por falta).

Dá o que pensar...

301 Mesmo em GP, o valor exato de ℓ'_{15}, sendo função do número irracional $\sqrt{5}$, **só pode ser obtido aproximadamente...**

VI ÂNGULOS COM RÉGUA E COMPASSO

302 Como desenhar um ângulo de medida dada com régua e compasso?

Esquadros só para paralelas e perpendiculares...

Já estudamos os seguintes conjuntos de ângulos:

a. ÂNGULOS MÚLTIPLOS DE **7°30'**.

Está no livro 1, n.º 321, se precisar...

b. ÂNGULOS DADOS EM FRAÇÕES DE RADIANOS.

Numa ⊙ de raio arbitrário, desretifica-se o segmento apropriado (livro 2, n.º 247).

c. ÂNGULOS SUBMÚLTIPLOS DE **360°**.

Quem faz o ângulo de 1°, faz qualquer número inteiro de graus...

Numa ⊙ de raio arbitrário, uma corda ℓ_n determina um ângulo central de 360°/n e um ângulo inscrito igual à metade do central.

Há processos exatos e/ou aproximados.

d. ÂNGULOS DETERMINADOS POR UMA DE SUAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

Recaímos em construção de triângulos retângulos.

Na prática, emprega-se freqüentemente a tangente (tan) por ser mais fácil e dar maior precisão que os transferidores comuns (há os especiais, muito caros).

303 EXERCÍCIO:

Construa um ângulo de 1,3 rad.

SOLUÇÃO:

$1{,}3 = \frac{13}{10}$; desretifique $\frac{13}{10}$ do raio.

304 EXERCÍCIO:

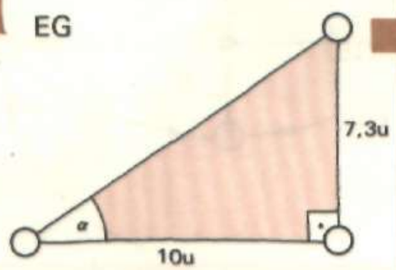
Construa um ângulo de 36°.

Roteiro

305 EXERCÍCIO:

Construa um ângulo α, sabendo que $\tan \alpha = 0{,}73$ e meça-o com um transferidor.

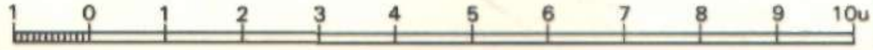
EG



$$\tan \alpha = \frac{\text{CAT. OPOSTO}}{\text{CAT. ADJAC.}}$$

$$\tan \alpha = \frac{7{,}3\,u}{10{,}0\,u} = 0{,}73$$

u é arbitrário.
convém u = 1 cm



306 **Há outros conjuntos de ângulos?**

Sim, SOMA e ou DIFERENÇA dos que estudamos...

Por exemplo:

Construir um ângulo de 102°.

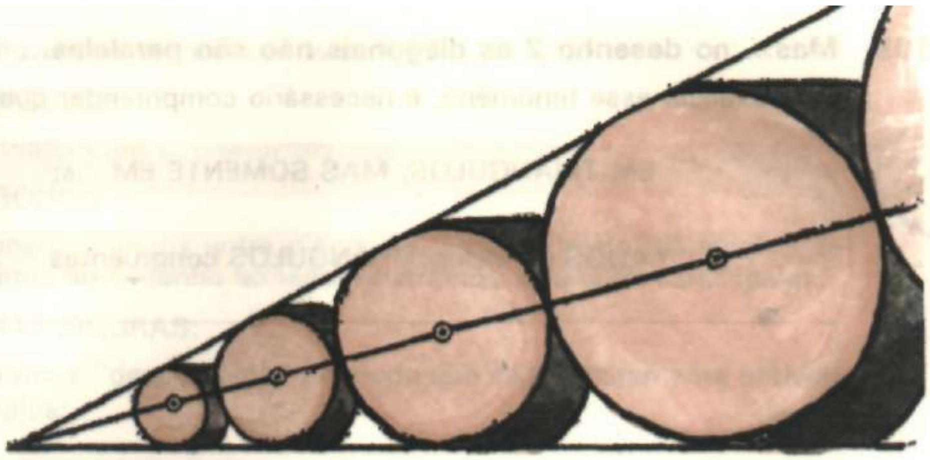
RESOLUÇÃO [?]

Depois de um grande "esforço" mental, "descobrimos" que

$102° = 30° + 72°$ e que $72° = \dfrac{360°}{5}$!

CAPÍTULO

4



HOMOTETIA

I PRELIMINARES

307 O que é homotetia?

HOMOTETIA = SEMELHANÇA + PARALELISMO

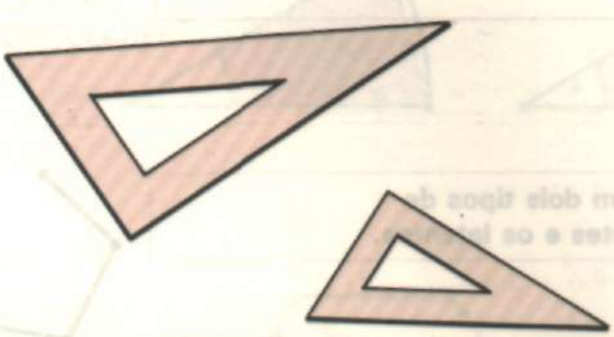
Linguagem concisa...

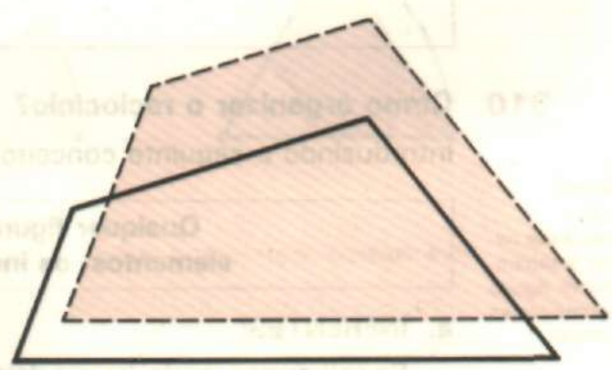
308 Não bastaria somente uma das "parcelas"?

Não. Examine os desenhos abaixo:

DESENHO 1 | DESENHO 2

NÃO SÃO HOMOTÉTICOS:





SÓ SEMELHANÇA | **SÓ PARALELISMO**

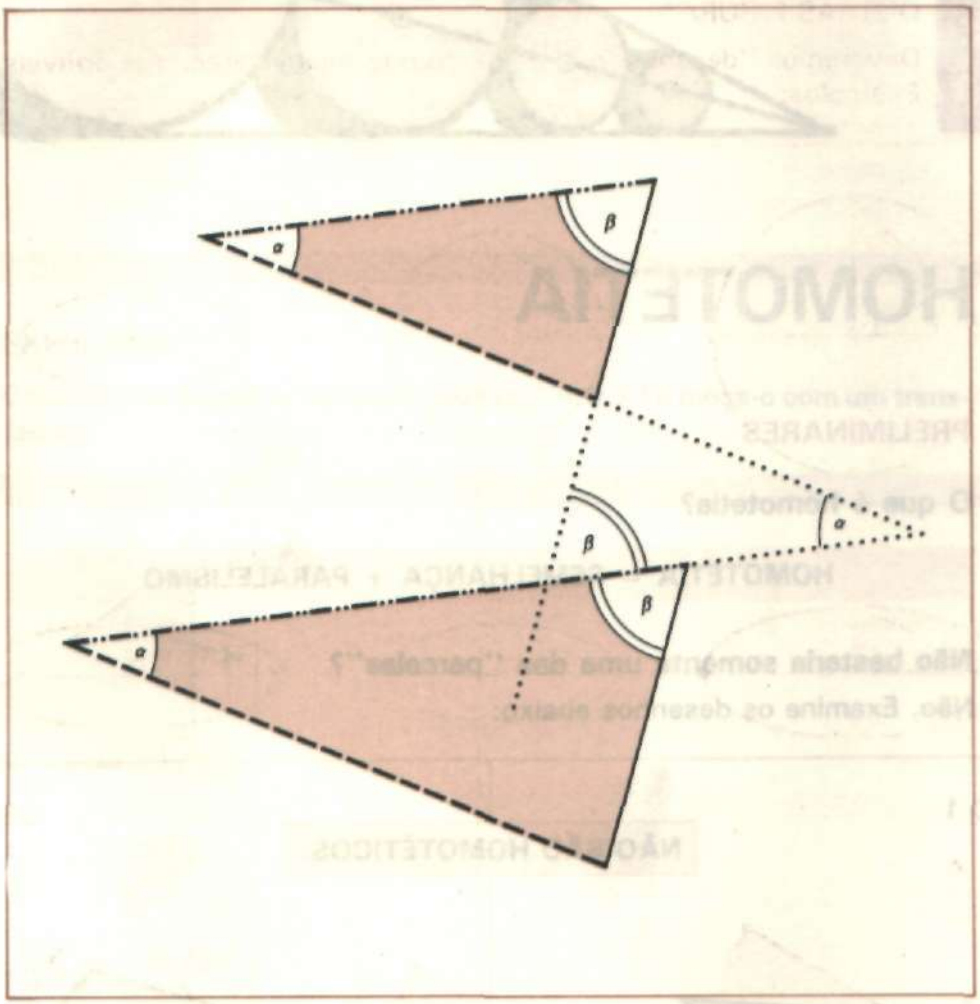
309 Mas... no desenho 2 as diagonais não são paralelas...

Para explicar esse fenômeno, é necessário compreender que:

Fenômeno: tudo o que é percebido pelos sentidos ou pela consciência.

EM TRIÂNGULOS, MAS SOMENTE EM $\triangle$s:

LADOS paralelos $\Rightarrow$ ÂNGULOS congruentes.



Os ângulos α são a.i. (alternos-internos).

O mesmo para os ângulos β.

310 Como organizar o raciocínio?

Introduzindo o seguinte conceito:

Qualquer figura tem dois tipos de elementos: os inerentes e os latentes.

"Inerente. Adj. 2g. Que está por natureza inseparavelmente ligado a alguma coisa ou pessoa."

Aurélio

a. INERENTES:

Se retirarmos qualquer um deles, mesmo que seja um só, a figura deixará de existir. Por exemplo: num polígono, apenas são inerentes os lados e os ângulos internos.

Essa "coisa" não é polígono...

b. LATENTES:

Triangular: revelar triângulos.

São os que surgem, aparecem, são revelados apenas quando triangulamos a figura.

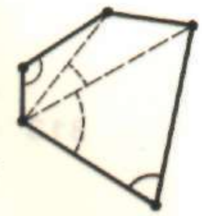
311 Quais são esses elementos latentes?

a. TRIÂNGULOS:

Medianas, alturas, bissetrizes, etc.

b. POLÍGONOS:

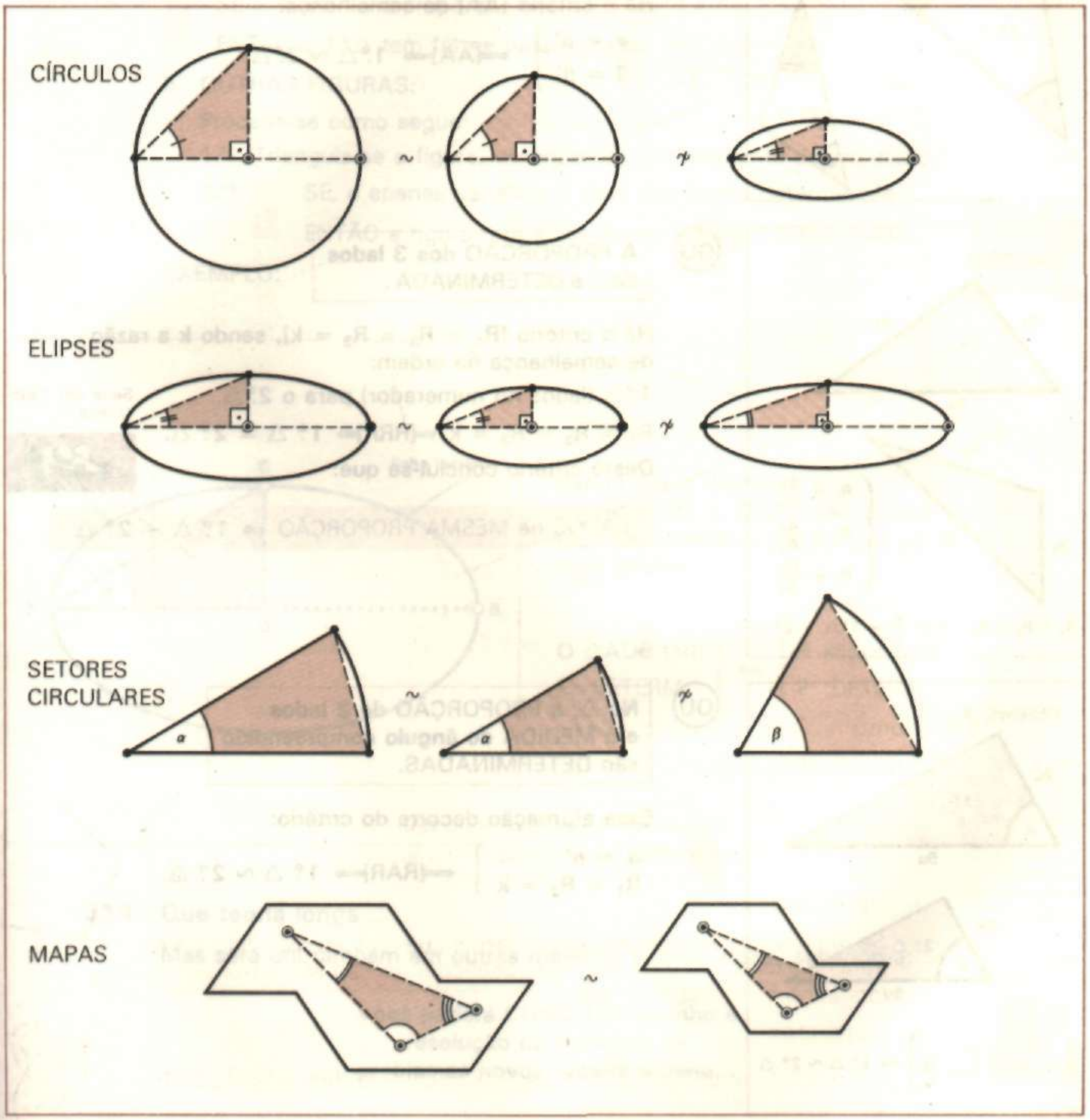
Diagonais, ângulos entre diagonais, ângulos entre diagonais e lados, etc. No desenho ao lado mostramos alguns (em tracejado).



≁: não ~ (semelhança já foi explicado: livro 1; nº 218 ao nº 221).

c. OUTRAS FIGURAS:

Deveremos "descobri-los" de modo que sejam claramente obtíveis. Exemplos:



312 Qual o conceito geométrico de mesma forma?

MESMA FORMA $\Leftrightarrow$ SEMELHANTES

Este conceito inclui congruência.

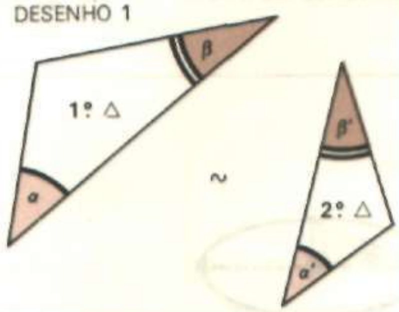
313 Quando a forma está determinada?

a. TRIÂNGULO:

Quando, mas somente quando:

Determinar: ou dar ou obter.

DESENHO 1

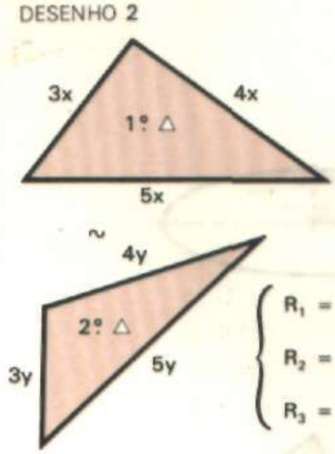


OU **2 ÂNGULOS têm MEDIDAS determinadas.**

Há o critério [AA] de semelhança:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \alpha' \\ \beta = \beta'\end{array}\right\} \xLeftrightarrow{[AA]} 1^{\circ}\triangle \sim 2^{\circ}\triangle$$

DESENHO 2



$$\left\{\begin{array}{l}R_1 = \dfrac{3x}{3y} \\ R_2 = \dfrac{4x}{4y} \\ R_3 = \dfrac{5x}{5y}\end{array}\right.$$

$R_1 = R_2 = R_3 = k = \dfrac{x}{y} \Leftrightarrow 1^{\circ}\triangle \sim 2^{\circ}\triangle$

OU **A PROPORÇÃO dos 3 lados do △ é DETERMINADA.**

Há o critério $[R_1 = R_2 = R_3 = k]$, sendo **k** a razão de semelhança na ordem:

1.º △ (lados no numerador) para o 2.º △.

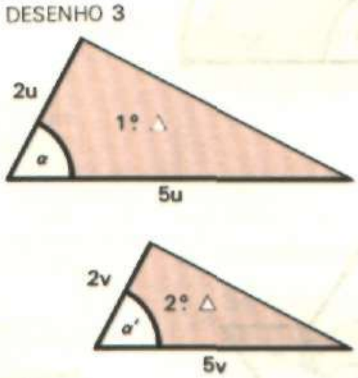
$R_1 = R_2 = R_3 = k \xLeftrightarrow{[RRR]} 1^{\circ}\triangle \sim 2^{\circ}\triangle$.

Deste critério conclui-se que:

Seria um "sub-critério"...

LADOS na MESMA PROPORÇÃO $\Leftrightarrow 1^{\circ}\triangle \sim 2^{\circ}\triangle$

DESENHO 3



$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \alpha' \\ R_1 = R_2 = k = \dfrac{u}{v}\end{array}\right\} \Leftrightarrow 1^{\circ}\triangle \sim 2^{\circ}\triangle$$

OU **No △, a PROPORÇÃO de 2 lados e a MEDIDA do ângulo compreendido são DETERMINADAS.**

Essa afirmação decorre do critério:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \alpha' \\ R_1 = R_2 = k\end{array}\right\} \xLeftrightarrow{[RAR]} 1^{\circ}\triangle \sim 2^{\circ}\triangle$$

EXEMPLOS NUMÉRICOS:

DESENHO 1:

SE $\alpha = 45°$ e $\beta = 30°$,

ENTÃO o 1.º △ tem forma determinada (é óbvio que o 2.º △ também tem).

Se a proporção é 3 : 4 : 5, então o △ é retângulo. (É a recíproca do teorema de Pitágoras.)

DESENHO 2:

SE os lados do 1.º △ estão na proporção determinada 3:4:5,

ENTÃO o 1.º△ tem forma determinada (e o 2.º△ também tem).

O 2.º△ também tem...

DESENHO 3:

SE $\alpha = 60°$ e a proporção dos seus lados é de 2:5,

ENTÃO o 1.º△ tem forma determinada.

b. OUTRAS FIGURAS:

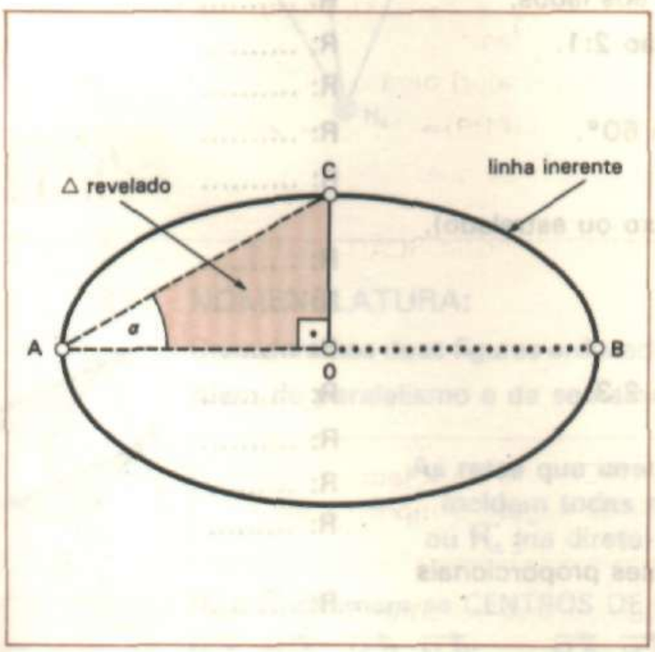
Procede-se como segue:

1.º) Triangula-se a figura, obtendo um △ claramente determinado.

2.º) SE, e apenas se, esse △ tiver sua forma determinada,
ENTÃO a figura terá a sua forma também determinada.

Então, e só então...

EXEMPLO:



Sendo $\overline{AB}$ o diâmetro maior, $\overline{O}$ o centro e $\overline{OC} \perp \overline{OA}$, então revelamos claramente o △AOC, que estava latente.

O △AOB tem F. DETERM.	⇔	A elipse tem F. DETERM.

A elipse é uma cônica que será estudada com detalhes no livro 3.

314 Que teoria longa...

Mas será útil também em outras matérias e, além disso, sabendo-a:

Você poderá CONCLUIR **sozinho a resolução de centenas de problemas novos. Valerá a pena...**

Palavra?...

315 EXERCÍCIO:

Para ter certeza de que você sabe reconhecer se uma figura enunciada por palavras tem ou não forma determinada, responda sim ou não:

a. Triângulo eqüilátero. R: ....

b. Triângulo isósceles. R: ....

c. Triângulo isósceles com o ângulo oposto à base com 30°. R: ....

d. △ isósceles com lados iguais ao triplo da base. R: ....

e. △ retângulo. R: ....

f. △ retângulo-isósceles. R: ....

g. △ retângulo de catetos na proporção 2:3. R: ....

h. △ retângulo com um ângulo (interno) de 30°. R: ....

i. Retângulo. R: ....

j. Retângulo de lados na proporção 2:3. R: ....

k. Retângulo com uma diagonal formando 36°. com um lado. R: ....

l. Retângulo com as diagonais formando 30° entre si. R: ....

m. Losango. R: ....

n. Losango com um ângulo (interno) de 45°. R: ....

o. Losango com uma diagonal igual aos lados. R: ....

p. Losango de diagonais na proporção 2:1. R: ....

q. Paralelogramo (⫽gr). R: ....

r. ⫽gr. com um ângulo (interno) de 60°. R: ....

s. Pentágono regular. R: ....

t. Qualquer polígono regular (convexo ou estrelado), sendo dado o nº de lados. R: ....

u. Círculo (ou circunferência). R: ....

v. Elipse. R: ....

w. Elipse de diâmetros na proporção 2:3. R: ....

x. Mapa do estado de SP. R: ....

y. O logotipo da Shell. R: ....

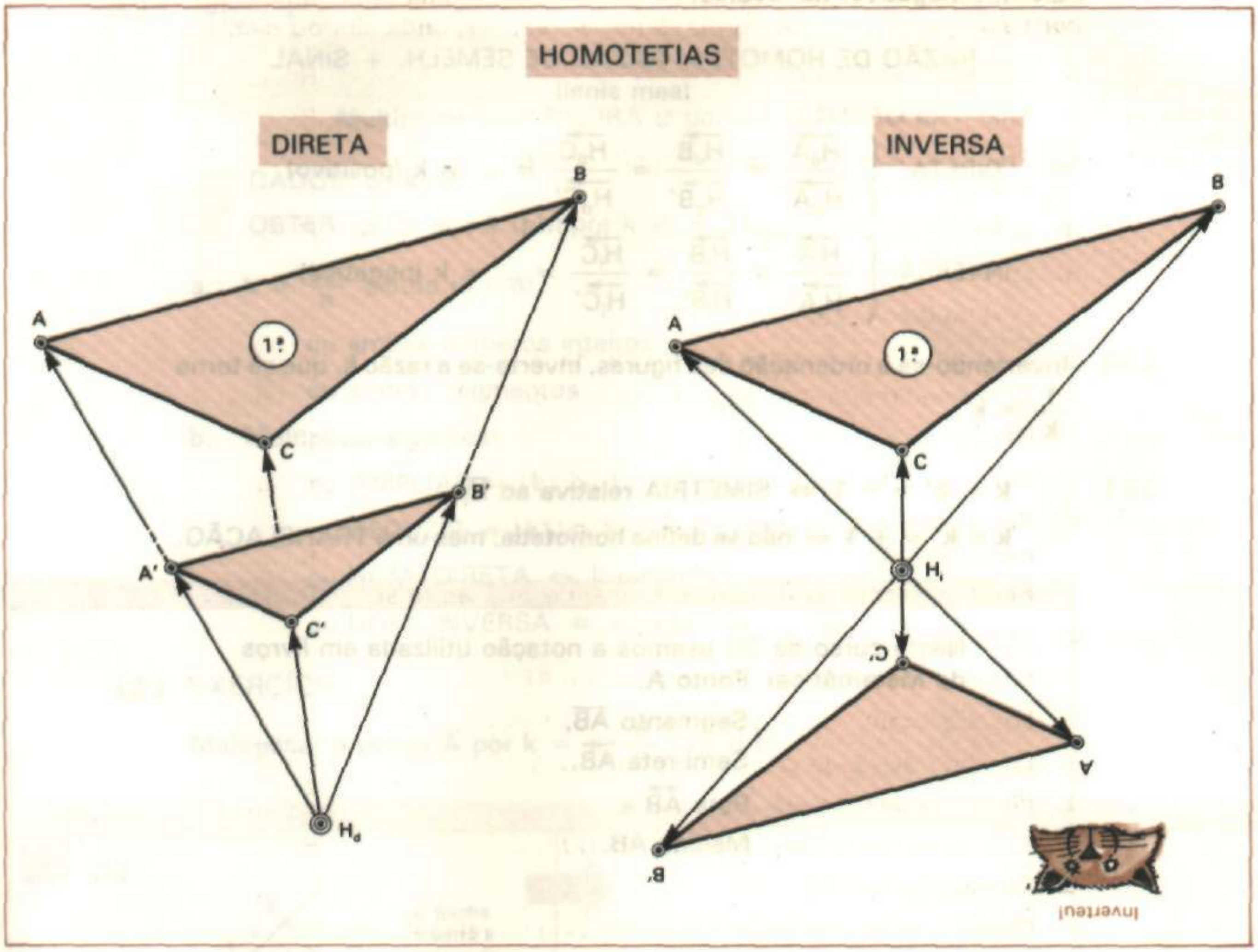
z. O logotipo da Coca-cola. R: ....

α. Trapézio retângulo de altura e bases proporcionais aos números 1, 2 e 3. R: ....

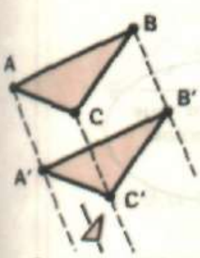
β. Quadrilátero ABCD (nch) com AB : BC : CD : DA : AC ∷ 3 : 4 : 7 : 8 : 6. R: ....

316 **Acertou todos ⇔ pode prosseguir.**

II TIPOS DE HOMOTETIA



317 NOMENCLATURA:



Para congruência + paralelismo, temos uma translação na direção $\overleftrightarrow{\Delta}$.

Consideramos duas figuras ordenadas (sabe-se qual é a 1.ª) e homotéticas.

Além do paralelismo e da semelhança, obrigatoriamente:

As retas que unem pontos homólogos incidem todas num mesmo ponto ou $\overline{H_d}$ *(na direta)* **ou $\overline{H_i}$** *(na inversa).*

Exceto para a razão de semelhança igual a +1.

$\overline{H_d}$ e $\overline{H_i}$ chamam-se CENTROS DE HOMOTETIA.

$\overrightarrow{H_dA}$, $\overrightarrow{H_dA'}$, $\overrightarrow{H_dB}$, $\overrightarrow{H_dB'}$, ..., $\overrightarrow{H_iA}$, $\overrightarrow{H_iA'}$, ...

chamam-se RAIOS VETORES.

318 **Os raios vetores são segmentos** ORIENTADOS, **com origens sempre ou em $\overline{H_d}$ ou em $\overline{H_i}$.**

319 *A razão entre os raios vetores de pontos homotéticos (que são necessariamente homólogos)* **é constante (k) e chama-se** RAZÃO DE HOMOTETIA **e tem sinal:**

(+) positivo: na direta ou

(−) negativo: na inversa.

RAZÃO DE HOMOT. = RAZÃO DE SEMELH. + SINAL
(sem sinal)

$$\text{DIRETA}\ \left\{ \frac{\overrightarrow{H_dA}}{\overrightarrow{H_dA'}} = \frac{\overrightarrow{H_dB}}{\overrightarrow{H_dB'}} = \frac{\overrightarrow{H_dC}}{\overrightarrow{H_dC'}} = \ldots = k \ (\textit{positivo}) \right.$$

$$\text{INVERSA}\ \left\{ \frac{\overrightarrow{H_iA}}{\overrightarrow{H_iA'}} = \frac{\overrightarrow{H_iB}}{\overrightarrow{H_iB'}} = \frac{\overrightarrow{H_iC}}{\overrightarrow{H_iC'}} = \ldots = k \ (\text{negativo}) \right.$$

320 **Invertendo-se a ordenação das figuras, inverte-se a razão k, que se torna** $\frac{1}{k} = k'$.

321 $k = k' = -1 \Leftrightarrow$ SIMETRIA **relativa ao** $\overline{H_i}$.

$k = k' = +1 \Leftrightarrow$ **não se define homotetia, mas uma** TRANSLAÇÃO.

Neste curso de DG **usamos a notação utilizada em livros de Matemática:** **Ponto A,**

Segmento $\overline{AB}$,

Semi-reta $\overrightarrow{AB}$,

Reta $\overleftrightarrow{AB}$ e

Medida AB.

Segmento que une os pontos 1 e 2.

Mas fica também esta sugestão: Pontos $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, ...

Segmentos $\overline{AB}$, $\overline{m}$, $\overline{1\ 2}$, ...

Semi-retas $\overline{AB}$, $\overline{Oa}$, ...

Retas $\overline{AB}$, $\bar{r}$, ...

Segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$, $\vec{m}$, ...

Semi-eixo $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, ...

Par ordenado $(\overrightarrow{m; n})$, $(\overline{AB; A'B'})$, ...

Direção $\overset{\leftrightarrow}{\triangle}$

Sentidos $\overrightarrow{\triangle}$, $\overleftarrow{\triangle}$

É a moda dos "chapéus" para o ano 2000...

322 TIPO 1

Multiplicar uma FIGURA φ por um NÚMERO k.

k ou k' que daqui para diante chamaremos somente k.

DADOS: φ; **k**; $\overline{H}$.

OBTER: $\varphi' = \varphi \cdot \mathbf{k}$ (sempre $k \neq +1$)

a. $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$ sendo **m** e **n:**

- ou ambos números inteiros
- ou ambos segmentos

b. Multiplicar significa:

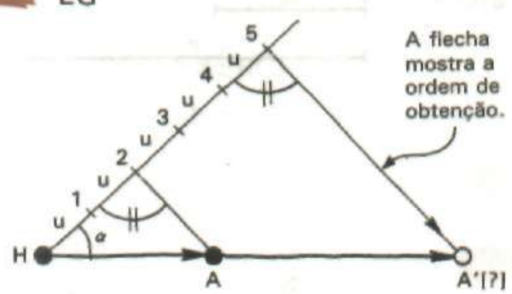
| k |: módulo de k (sem o sinal).

- ou AMPLIAR $\Leftrightarrow |\mathbf{k}| > 1$
- ou REDUZIR $\Leftrightarrow |\mathbf{k}| < 1$
- ou HOM. DIRETA $\Leftrightarrow$ k **positivo**
- ou HOM. INVERSA $\Leftrightarrow$ k **negativo**

323 EXERCÍCIO:

Multiplicar o ponto $\overline{A}$ por k = $+\frac{5}{2}$. Dado $\overline{H}$.

EG



α e u arbitrários, mas convenientes.

324 "Multiplicar um ponto" significa "multiplicar o raio vetor **do ponto".**

É o raio vetor que será ampliado ou reduzido.

325 Antes de operar, pense bem:

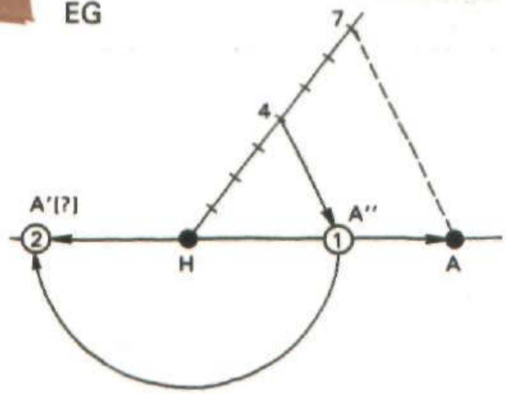
a. Vou AMPLIAR **ou** REDUZIR**?**

b. Trata-se de homotetia DIRETA **ou** INVERSA**?**

326 EXERCÍCIO:

Multiplicar $\overline{A}$ por $k = -\frac{4}{7}$. Dado $\overline{H}$.

EG



Para evitar enganos e diminuir o n.º de operações, pode e convém obter $\overline{A}''$ e depois $\overline{A}'$.

327 EXERCÍCIO:

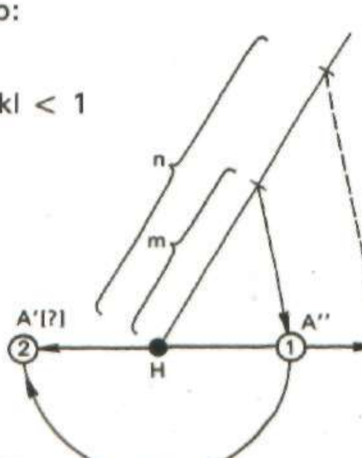
Multiplicar $\overline{A}$ por $k = -\frac{m}{n}$. Dados $\overline{H}$, m e n.

EG e raciocínio:

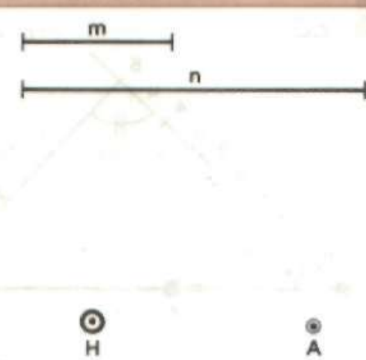
Queremos:

a. $m < n \Rightarrow |k| < 1$

b. k negativo (inversa).



Atenção: como $m < n \Rightarrow HA' < HA$.



328

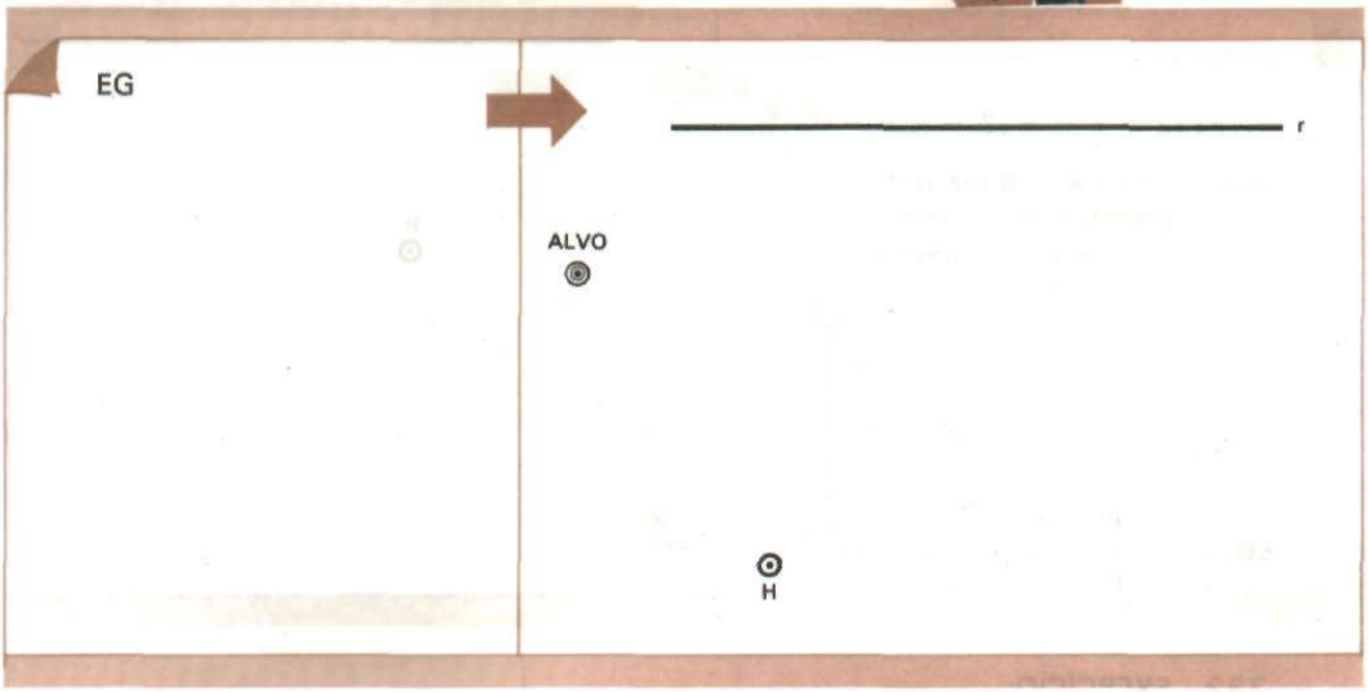
Para multiplicar uma RETA:

ou multiplicam-se 2 pontos

ou multiplica-se 1 ponto e traça-se a paralela (a direção conserva-se).

329 EXERCÍCIO:

Multiplicar a reta $\overleftrightarrow{r}$ por $k = \frac{2}{3}$. Dado $\overline{H}$.



ROTEIRO:

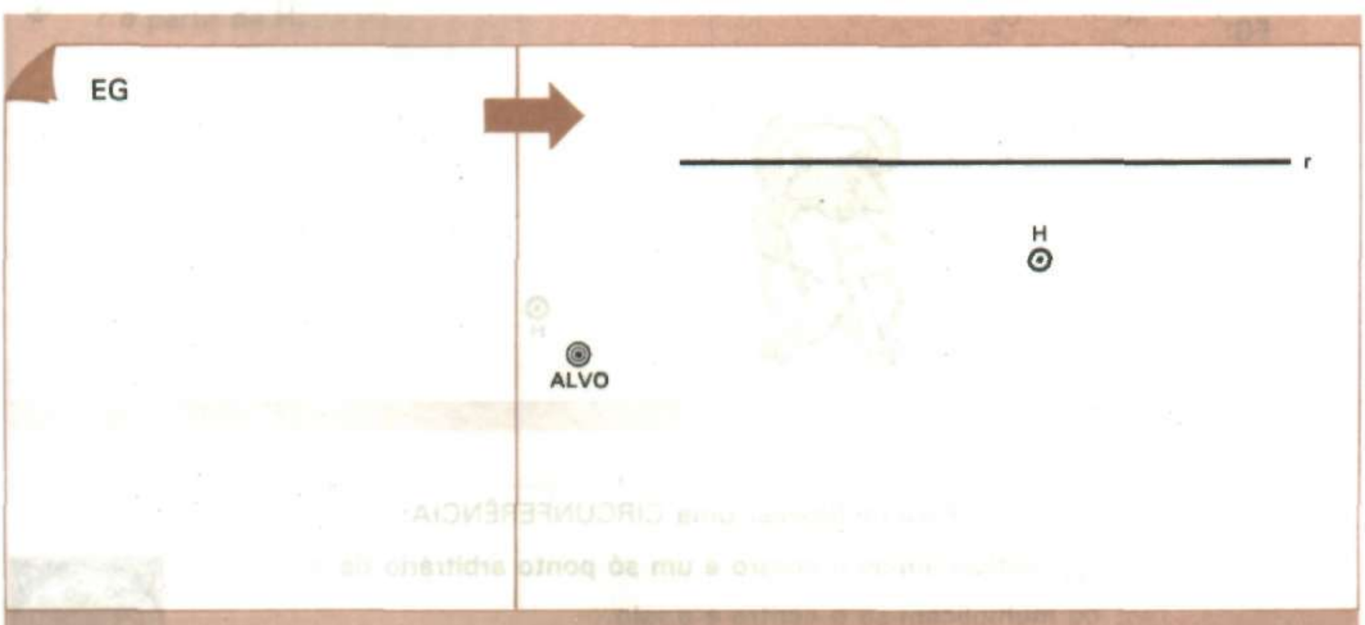
1.º) Tome em $\overleftrightarrow{r}$ um ponto $\overline{A}$ arbitrário.

2.º) Multiplique $\overline{A}$ por $k = 2/3$, obtendo $\overline{A'}$.

3.º) Trace por $\overline{A'}$ a reta $\overleftrightarrow{r'} \parallel \overleftrightarrow{r}$; $\overleftrightarrow{r'}$ é a resposta.

330 EXERCÍCIO:

Multiplicar $\overleftrightarrow{r}$ por $k = -1$. Dado $\overline{H}$.



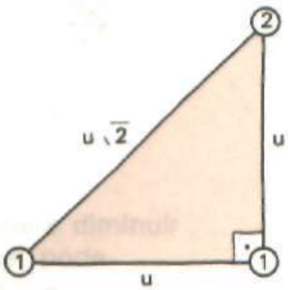
331 EXERCÍCIO:

Multiplicar $\overleftrightarrow{r}$ por $k = -\sqrt{2}$. Dado $\overline{H}$.

RACIOCÍNIO:

nº 322a $\Rightarrow k = -\sqrt{2} \Rightarrow k = -\dfrac{u\sqrt{2}}{u}$

Assim temos k = à razão de dois segmentos: **u** (arbitrário) e $u\sqrt{2}$ (obtível):



EG:

r

H

ALVO

332 EXERCÍCIO:

Multiplicar $\overleftrightarrow{r}$ por $k = \dfrac{1,5}{2}$. Dado $\overline{H}$.

RACIOCÍNIO:

Deveremos ter n.ºs inteiros, logo $k = \dfrac{1,5}{2} \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

EG:

r

H

333 **Para multiplicar uma** CIRCUNFERÊNCIA:

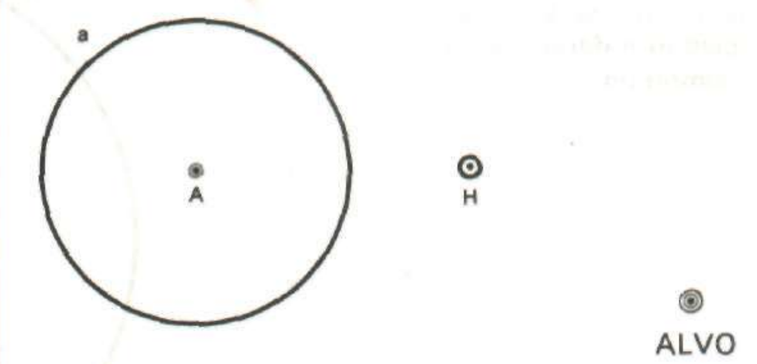
ou multiplicam-se o centro e um só ponto arbitrário da ⊙

ou multiplicam-se o centro e o raio.

334 EXERCÍCIO:

Multiplicar $(\overline{A}; a)$ por $k = -1$. Dado $\overline{H}$.

Quase sempre é mais fácil multiplicar o raio do que um ponto da ⊙, especialmente quando $k = -1$.

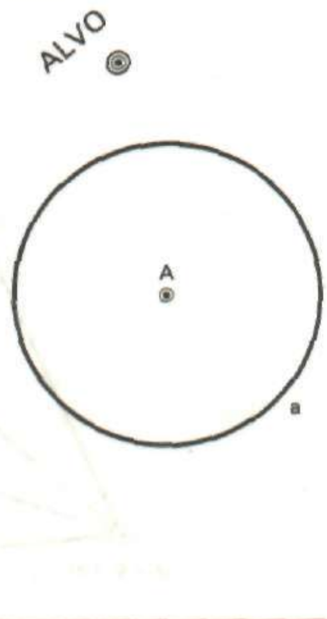


335 EXERCÍCIO:

Multiplicar $(\overline{A}; a)$ por $k = \frac{7}{5}$. Dado $\overline{H}$.

Sempre se divide pelo denominador (5) e toma-se 7 a partir de $\overline{H}$.

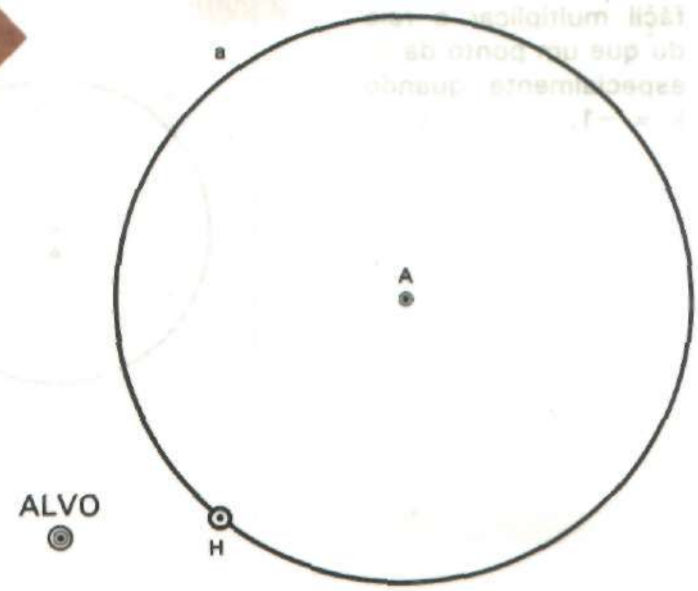
Basta multiplicar o centro e o raio.



336 EXERCÍCIO:

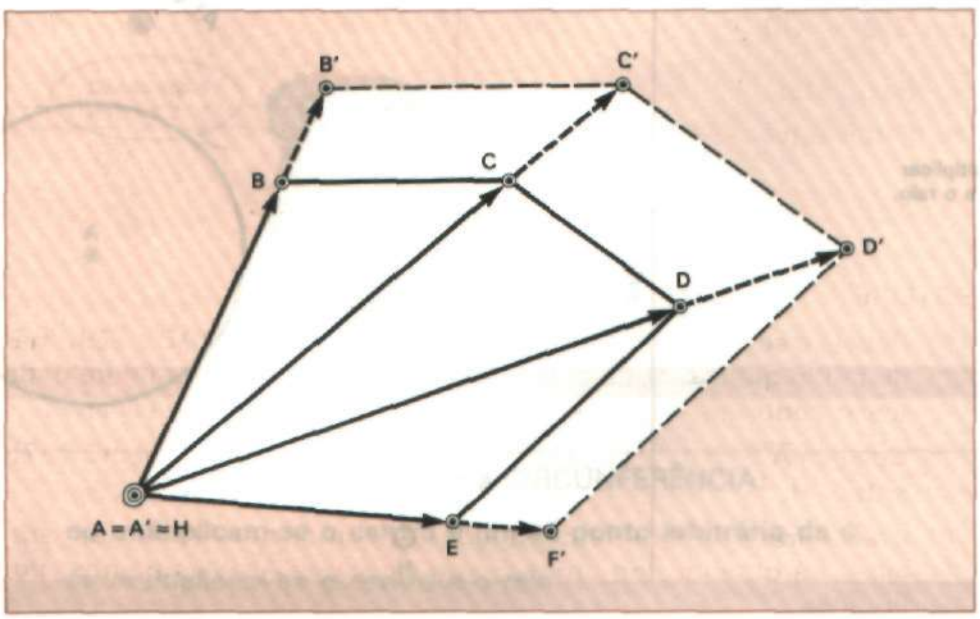
Multiplicar $(\overline{A}; a)$ por $k = -\frac{3}{8}$. Dado $\overline{H}$.

Para prevenir enganos, faça como se **k** fosse positivo e depois ache o simétrico.



337 Em qualquer homotetia:

SE **um ponto coincide com seu homotético,**
ENTÃO **ambos coincidem com $\overline{H}$ e recipr.**



338 **TIPO 2**

Faz parte integrante dela...

Multiplicar uma FIGURA φ, de modo que um segmento $\overline{m}$ dela (está nela, faz parte dela, ...) resulte com comprimento m′ dado.

$\overline{H}$ não é dado, mas deverá ser obtido.

339 **O segmento $\overline{m}$, ligado à figura φ,**

ou é um dos inerentes

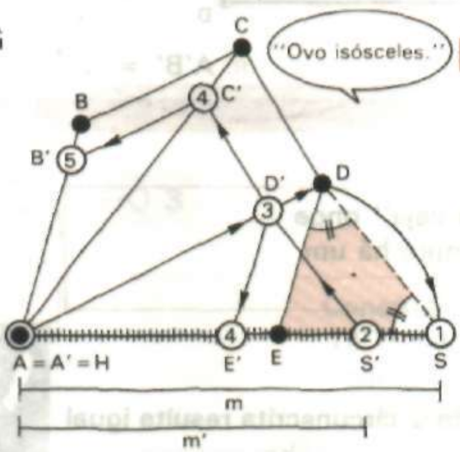
ou deverá ser revelado.

O "latido" torna claro que só há dois jeitos.

340 EXEMPLO:

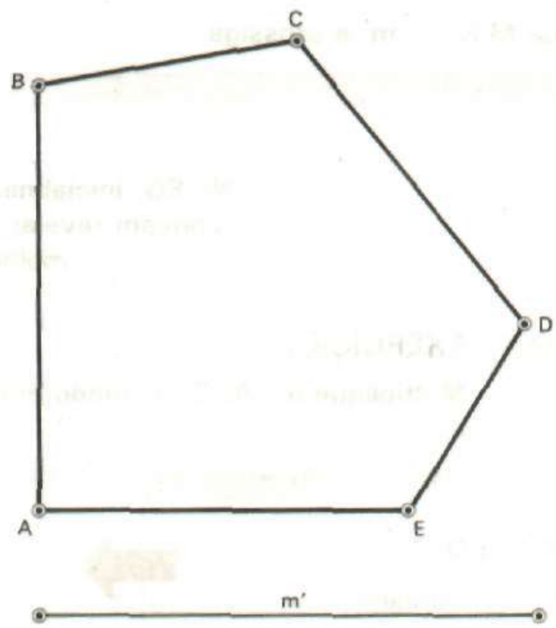
Multiplicar o pentágono ABCDE, de modo que a soma (A′E′ + E′D′) torne-se de comprimento m′.

EG



$\overline{D'}$ [?] { a. Raio vetor $\overrightarrow{HD}$; b. Em $\overleftrightarrow{S'D'} \parallel \overleftrightarrow{SD}$

OUTROS { a. Raio vetor ; b. Paralela (vá pelas letras)



R: A′B′ ≃ ...48... mm.

ROTEIRO:

Poderíamos ter feito $\overline{H}$ coincidir com $\overline{S}$ (e portanto com $\overline{S'}$), mas como fizemos é melhor.

1º) Revele o segmento $\overline{AS}$, de medida **m**, fazendo $\overline{AS} \cong (\overline{AE} + \overline{ED})$, mas de modo que $\overline{AS}$ fique encostado (ligado, unido, ...) à figura dada (caso contrário, não teremos uma só figura para multiplicar...).

2º) Coloque $\overline{A'S'} \cong \overline{m'}$, obrigando $\overline{A'}$ coincidir com $\overline{A}$, que será (nº 337), então, $\overline{H}$.

3º) Irradie (trace os raios vetores) todos os pontos notáveis e, por paralelas, vá obtendo (na ordenação melhor possível) os pontos procurados.

No traçado das paralelas, baseie-se nas letras.

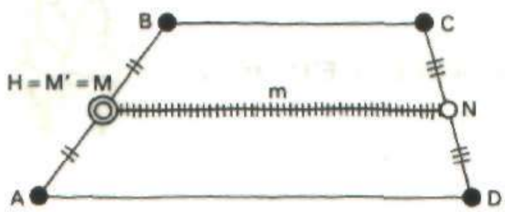
341 **Não há outro processo?**

Para esse problema há (''ovo isósceles'', 4ª proporcional, etc.), mas estamos explicando homotetia... Veremos muitos onde não há.

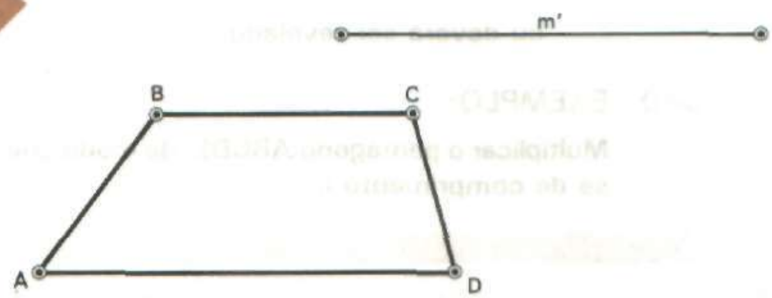
342 EXERCÍCIO:

Multiplicar o trapézio dado, de modo que sua base média resulte de comprimento m'.

EG
Revele a base média:



Marque M'N' = m' e prossiga.



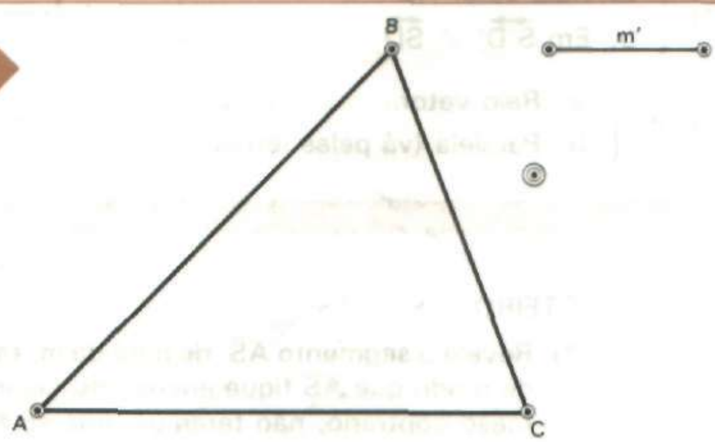
R: A'B' = ...33... mm.

343 **No EG, inicialmente ''pré-veja'' onde convém revelar o $\overline{H}$; sempre há um melhor lugar.**

344 EXERCÍCIO:

Multiplique o △ABC, de modo que o raio da ⊙ circunscrita resulte igual a m'.

ROTEIRO
$\overline{H}$ no circuncentro...

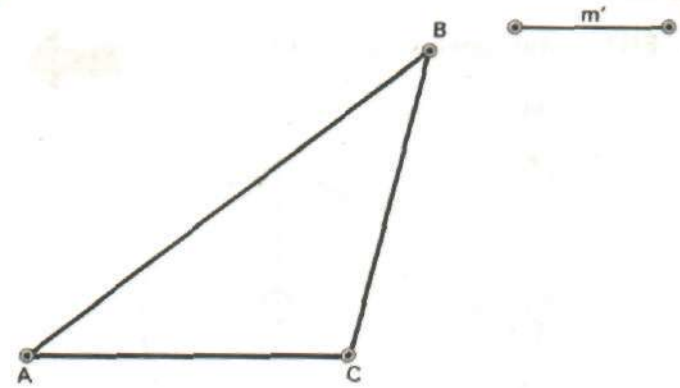


R: A'B' = ...38... mm.

345 EXERCÍCIO:

Multiplique o $\triangle ABC$ para que o raio da ⊙ inscrita fique igual a m'.

ROTEIRO



R: A'B' = ...120.... mm.

346 TIPO 3

Construir uma figura de FORMA DETERMINADA**, sendo dado o comprimento** m' **de qualquer segmento $\overline{m}$ da mesma.**

No tipo 2 é dada a figura.

No tipo 3 é dada apenas a forma da figura.

347 Você imagina o número elevado de problemas deste tipo? Basta enunciar:

a. A forma da figura:

Qualquer uma das que vimos no n.º 315 ou dezenas de outras...

b. Dar o comprimento m' **de qualquer segmento $\overline{m}$ dessa figura:**

Lado, diagonal, raio da inscrita, raio da circunscrita, perímetro, ... e mais: soma, diferença, média aritmética, média geométrica, média harmônica... de 2 desses segmentos ou ainda segmento áureo, um múltiplo, um submúltiplo... de qualquer um deles...

c. Pedir para construir a figura toda ou apenas parte dela.

348

No tipo 2 a figura é dada.

No tipo 3, a figura é obtível, pois temos a sua forma.

ROTEIRO PARA TODOS OS PROBLEMAS DO TIPO 3:

1.º) **Tendo a** FORMA, **constrói-se uma figura** SEMELHANTE **à procurada e de tamanho arbitrário.**

2.º) **Recai-se no** TIPO 2**: revela-se $\overline{m}$, ...**

349 EXEMPLO:

Figuras:
procurada φ
auxiliar φ'

a. **Um retângulo tem lados na proporção 1 : 2.**

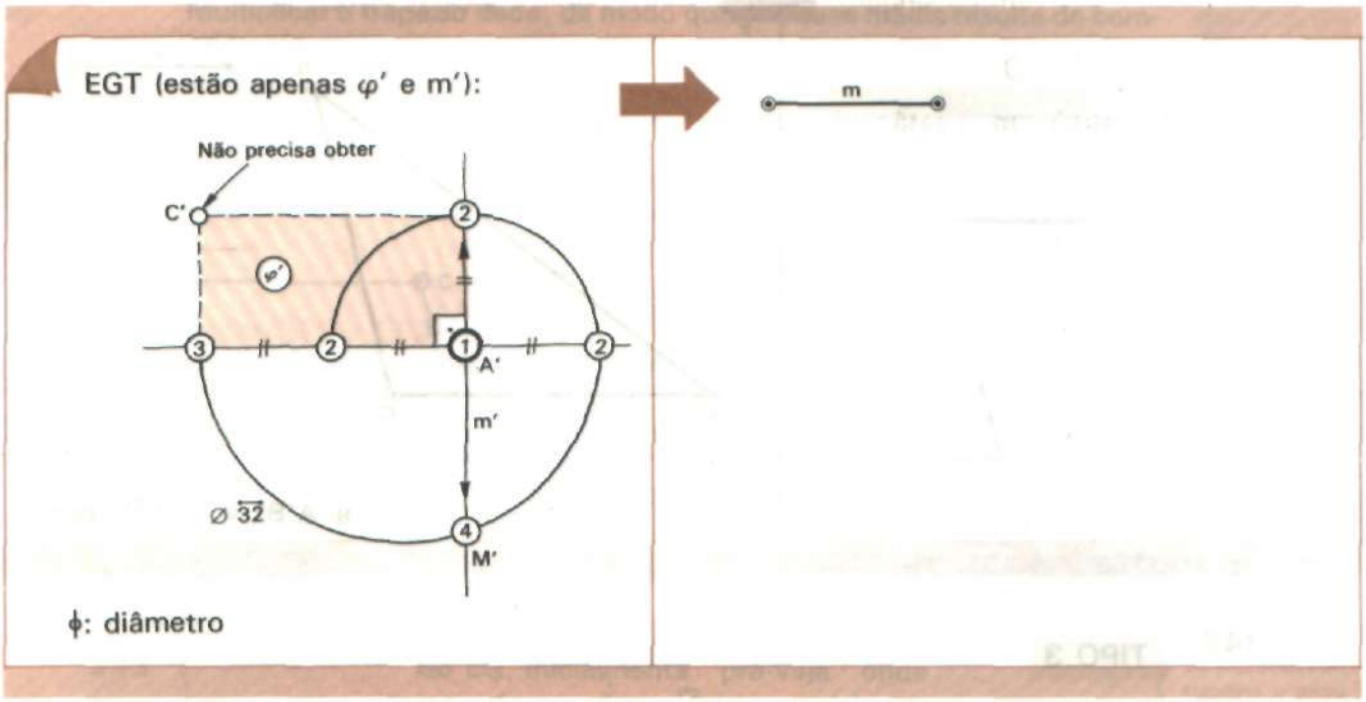
b. **A média geométrica dos lados é $\overline{m}$.**

c. **Construir esse retângulo.**

a. Dada a forma.

b. Dado m, foi dado também o tamanho de φ.

c. Foi pedida a figura toda.



Lembre-se: $\overline{32}$ = segmento de extremidades 3 e 2.

MONÓLOGO (falar consigo próprio):

1.º) **Qual a** FORMA **da figura φ procurada?**
Vou responder em "grafiquês", desenhando no EG a figura φ' semelhante à φ.

Fale baixinho...

2.º) **E quanto ao** TAMANHO? **φ' é $>$, $<$ ou $\cong$ à φ?**
Para responder, deveremos obter $\overline{A'M'} \cong \overline{m'}$ (homólogo de $\overline{m}$).
Se $m' < m \Rightarrow \varphi' < \varphi$ e se $m' > m \Rightarrow \varphi' > \varphi$.

Se m' = m, então refaça, porque ninguém vai acreditar em tão *grande coincidência*...

3.º) **Como acertar o tamanho, por** HOMOTETIA?

1. Marca-se $\overline{AM} \cong \overline{m}$, com $A = A'$, na semi-reta $\overrightarrow{A'M'}$, para que haja homotetia DIRETA e para que $H = A = A'$ (desenhe no EGT).
2. Irradiam-se os pontos homotéticos dos procurados e traçam-se paralelas.

Nas paralelas, baseie-se nas letras.

Espero a obra desabar?...

350 **Sem a resposta, como faço para** conferir?

Como um engenheiro faz para conferir os seus desenhos?

Neste problema é fácil calcular o valor **x** do lado menor de φ:

$$m = \sqrt{2x \cdot x} = x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{m}{\sqrt{2}} \Rightarrow [\text{CALCULADORA}] \Rightarrow x \cong \text{..........}$$

Faça a conta.

351 **Devo simplificar a construção para melhorar a precisão gráfica?**

Deve, *mas como já dissemos:*

simplificações devem ser espontâneas e não forçadas.

É irrelevante...

Por exemplo, no EGT ao lado, para evitar ter que obter o pt.m. de $\overline{31}$, marcamos duas vezes um segmento arbitrário e aproveitamos para marcar mais duas vezes...

352 **Algo mais?**

Sim: **convém desenhar $\varphi' > \varphi$ para melhorar a precisão gráfica.**

Numa ampliação o e_s é ampliado; numa redução, reduz-se o e_s.

353 EXERCÍCIO:

Construir um △ retângulo-isósceles, dado o raio m da ⊙ inscrita.

EG (escolha bem o $\overline{H}$)

m

R: BC = ...96.5... mm.

354 EXERCÍCIO:

Construir um pentágono regular, dado o comprimento m de uma diagonal.

Quando não se especifica, trata-se do convexo.

EG

m

SE for difícil conferir,

ENTÃO "cuide-se"...

R: lado do pentágono = ...24... mm.

355 EXERCÍCIO:

Construir um pentágono regular de apótema m.

EG

m

Apótema de um polígono regular é o raio da ⊙ nele inscrita.

R: ℓ_5 = ...51.... mm.

356 EXERCÍCIO:

Construir um pentadecágono regular de lado dado m.

EG

m

R: raio da ⊙ circunscrita ≃ ....49.... mm.

357 EXERCÍCIO:

Construir um heptágono regular, dado o lado ℓ_7.

EG

Idem nº 356

R: r_c = ...23.... mm.

358 DESRETIFICAÇÃO DE ARCOS:

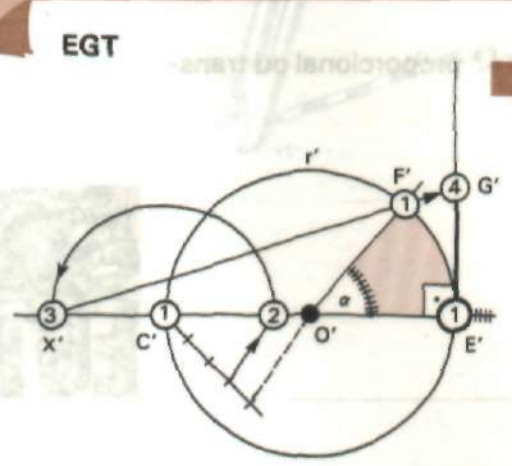
(Vamos complementar o assunto)

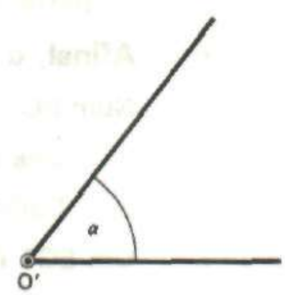
DADOS: m **(comprimento do arco) e α (ângulo central do arco procurado).**

OBTER: r **(raio) para poder traçar o arco.**

O setor circular está com sua forma dada.

EGT





R: r = ...32.... mm.

ROTEIRO (parte já desenhada no EGT):

1.º) Com centro $\overline{O}'$ e raio r' arbitrários, trace uma ⊙, determinando os pontos $\overline{E}'$, $\overline{F}'$ e $\overline{C}'$.

2.º) Marque $C'X' = \frac{3}{4}r'$.

"Encurvamos" um segmento, para obter um arco de ○, que tenha ângulo central α (do arco obtido).

3.º) Ligue $\overline{X}'$ com $\overline{F}'$, obtendo $\overline{G}'$ na tangente.

Nas paralelas, baseie-se nas letras...

CONTINUAÇÃO (complete o EGT):

4.º) **Marque $\overline{EG} \cong \overline{m}$, com $\overline{E} = \overline{E}'$, na semitangente $\overrightarrow{E'G'}$, obtendo $\overline{H} = \overline{E}' = \overline{E}$ e $\overline{G}$.**

5.º) Trace $\overline{GO} \mathbin{/\!/} \overline{G'O'}$, obtendo $\overline{O}$ e r = OE.

6.º) Trace o arco $(\overline{O}; r)$.

7.º) Trace $\overline{OF} \mathbin{/\!/} \overline{O'F'}$, obtendo $\overline{F}$ em $(\overline{O}; r)$.

O arco $\widehat{EF}$ é o segmento m desretificado.

359 DETERMINAÇÃO DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA:

Um arco de circunferência tem três elementos:

- **r : o seu raio,**
- **m : o seu comprimento e**
- **α : o seu ângulo central.**

São os elementos inerentes; outros podem ser revelados.

DADOS **2 deles, poderemos obter graficamente o 3.º.**

a. Dados r **e** α, **obter** m:
Retifica-se o arco (n.º 240).

b. Dados r **e** m, **obter** α:
Desretifica-se $\overline{m}$ (n.º 246).

c. Dados m **e** α, **obter** r:
Por homotetia (n.º 358) ou por semelhança (4.ª proporcional ou transporte de ângulos).

360 Afinal, o que é mesmo um EGT?

Num EG, desenhamos:

- **uma das** RESPOSTAS **e**
- TODOS OS DADOS.

Um EGT é:

Baseie-se nas letras!

um EG   **+**   **as linhas necessárias e suficientes**   **para que possamos copiá-lo.**

361 Algum "ovo de Colombo" para os problemas de homotetia? Para evitar enganos...

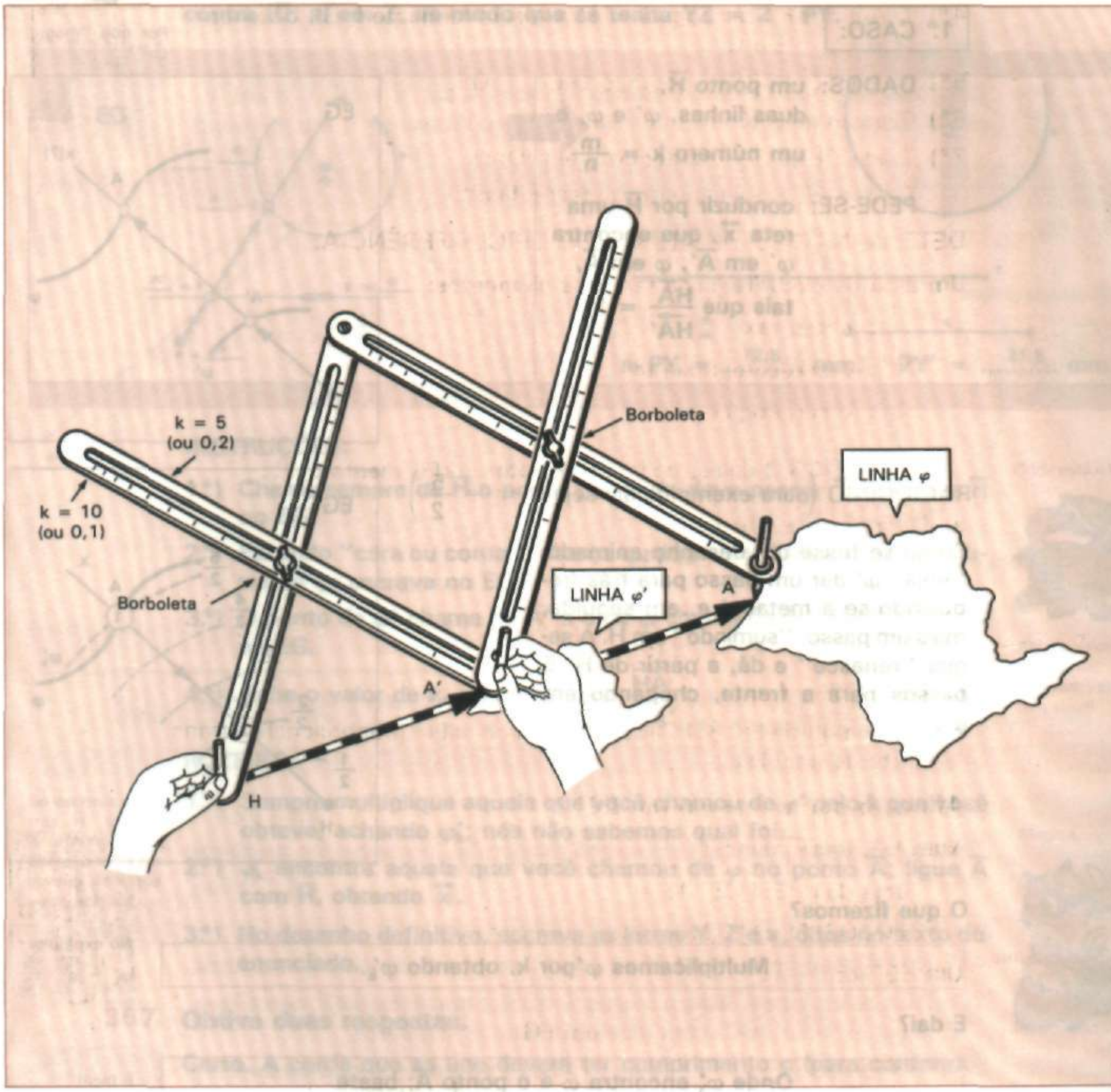
"Ovo paralelo"...

Exemplo:
Em qualquer problema:

Num desses problemas, sejam $(\overrightarrow{A'; A})$, $(\overrightarrow{B'; B})$, $(\overrightarrow{C'; C})$, ..., $(\overrightarrow{X'; X})$, ... pares ordenados de pontos homotéticos, onde os primeiros são da figura auxiliar φ' e os segundos, da procurada φ.

$\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{A'B'}$,
$\overline{BC} \mathbin{/\!/} \overline{B'C'}$, ...
$\overline{AX} \mathbin{/\!/} \overline{A'X'}$, etc.

Baseie-se nas letras para traçar as paralelas!



O instrumento pode ser regulado para outros valores de k.

Invertendo as pontas $\overline{A}'$ e $\overline{A}$, poderemos também reduzir.

É um instrumento baseado na propriedade dos paralelogramos articulados, de manterem seus lados sempre paralelos entre si.

Fixando o estilete $\overline{H}$ e fazendo a ponta $\overline{A}'$ percorrer uma **linha** φ', a ponta $\overline{A}$ (grafite, tinta ou giz) percorrerá a **linha** φ, que será φ' multiplicada por um certo número **k** (no desenho temos $k = +2 = \overrightarrow{AH} : \overrightarrow{HA'}$.

$$\mathbf{k} = \frac{\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{HA'}} \quad \text{e} \quad \varphi = \varphi' \cdot \mathbf{k}$$

Parece um cabide...

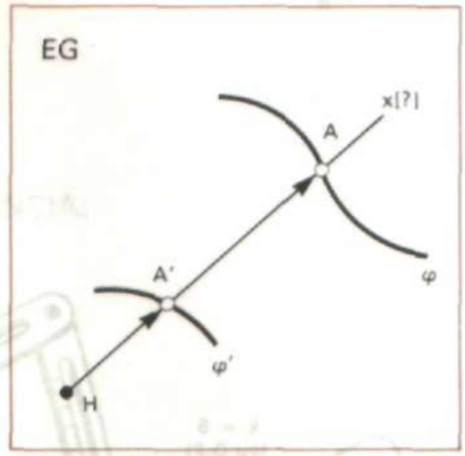
363 TIPO 4 (PROBLEMA MÁGICO)

Por que "mágico"?...

1.º CASO:

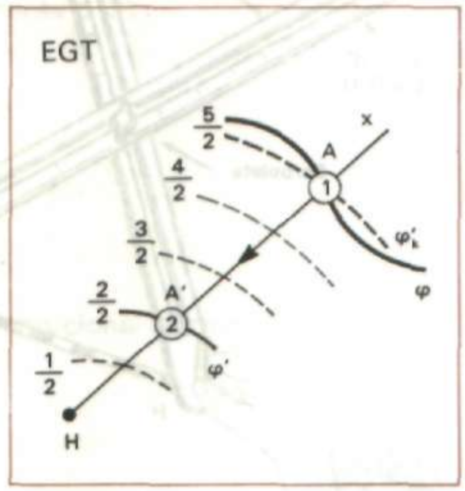
DADOS: **um ponto $\overline{H}$, duas linhas, φ' e φ, e um número $k = \frac{m}{n}$.**

PEDE-SE: **conduzir por $\overline{H}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$, que encontra φ' em $\overline{A}'$, φ em $\overline{A}$, tais que $\frac{\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{HA'}} = k$.**



RACIOCÍNIO $\left(\text{para exemplificar, seja } k = +\frac{5}{2}\right)$

Como se fosse um desenho animado, "veja" φ' dar um passo para trás (reduzindo-se à metade) e, em seguida, mais um passo, "sumindo" em $\overline{H}$. A seguir "renasce" e dá, a partir de $\overline{H}$, 5 passos para a frente, chegando em φ'_k.



O que fizemos?

Simbolicamente $\varphi'_k = \varphi' \cdot k$

Multiplicamos φ' por k, obtendo φ'_k.

No exemplo: $\varphi'_k = \varphi' \cdot \frac{5}{2}$

E daí?

Onde φ'_k encontra φ é o ponto $\overline{A}$; basta ligá-lo com $\overline{H}$ para obter $\overleftrightarrow{x}$ e $\overline{A}'$...

É fácil!

364 Poderíamos ter multiplicado φ por $\frac{1}{k}$ $\left(\text{no caso } \frac{2}{5}\right)$?

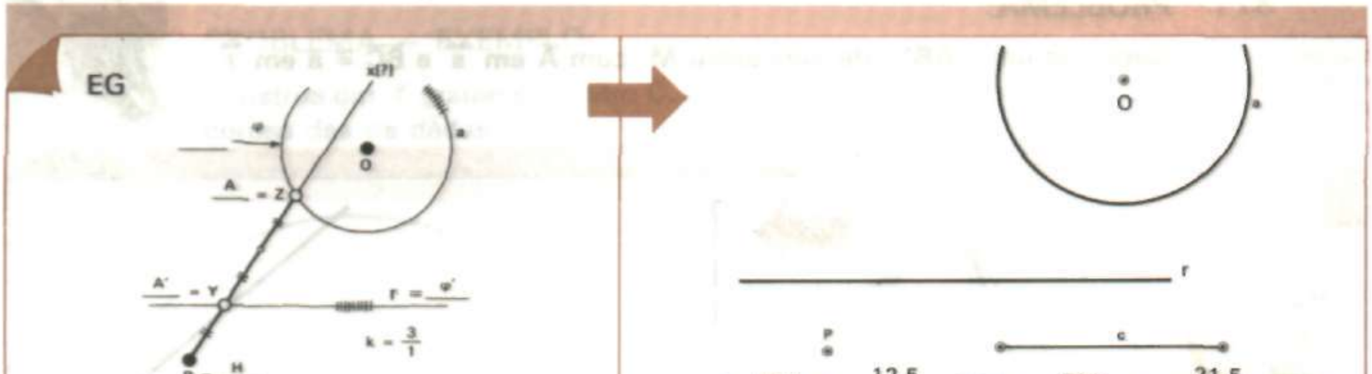
Poderíamos... poderíamos mas não convém!

365 Por que não convém?

Porque nesse tipo de problema, enganos são tão comuns que é melhor fazer sempre do mesmo jeito! Como exemplo, daremos um problema para você resolver, seguindo nossas instruções:

366 PROBLEMA:

Dados $\overline{P}$ $\overleftrightarrow{r}$ e $(\overline{O}; a)$, traçar por $\overline{P}$ uma reta $\overleftrightarrow{x}$ que encontra $\overleftrightarrow{r}$ em $\overline{Y}$, encontra $(\overline{O}; a)$ em $\overline{Z}$, de modo que se tenha $YZ = 2 \cdot PY$.



R: PY = ...12,5.... mm. PY' = ...21,5.... mm.

INSTRUÇÕES:

Onde está o k?...

1ª) Chame sempre de $\overline{H}$ o ponto por onde deve passar $\overleftrightarrow{x}$; escreva $\overline{H}$ no EG.

2ª) Fazendo "cara ou coroa", chame qualquer das linhas de φ' e a outra de φ; escreva no EG.

3ª) O ponto de φ' chame de $\overline{A}'$ e o de φ chame de $\overline{A}$; escreva A' e A no EG.

4ª) Ache o valor de **k**, que é sempre $\dfrac{\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{HA'}}$.

Ache o valor de k com sinal! Os raios vetores têm sinal!

ROTEIRO:

Só escreva as letras $\overline{H}$, φ', φ, $\overline{A}'$ e $\overline{A}$ no EG. Escreva também o valor de k que você achou.

1º) Sempre multiplique aquela que você chamou de φ' pelo **k** que você obteve, achando φ'_k; nós não sabemos qual foi...

Mágica...

2º) φ'_k encontra aquela que você chamou de φ no ponto $\overline{A}$; ligue $\overline{A}$ com $\overline{H}$, obtendo $\overleftrightarrow{x}$.

3º) No desenho definitivo, escreva as letras Y, Z e x, ditas no texto do *enunciado*.

367 Obtive duas respostas.

Certo. A corda que as une deverá ter comprimento **c** (para conferir).

368 E se eu tivesse invertido a nomenclatura?

Você acharia outro valor para o **k** e teria que multiplicar a nova φ' pelo novo **k**... Se você for como São Tomé, faça isso e "veja para crer" que as respostas serão as mesmas...

369 Estou perplexo...

E se eu inverter a nomenclatura?

Por quê? Não há motivo... Por exemplo, em Física, você chama uma força de $\vec{x}$ e a outra de $\vec{y}$; arma a equação, resolve-a e acha $\vec{x} = 10$ N. **Qual força vale 10 N?**

Aquela que você chamou de $\vec{x}$ ...

370 **Continuo perplexo...**

Só há um remédio... resolver sozinho alguns problemas...

Que remédio...

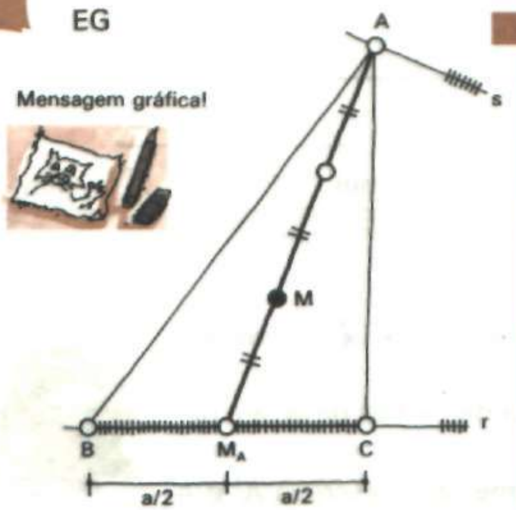
371 PROBLEMA:

Baricentro: encontro das medianas.

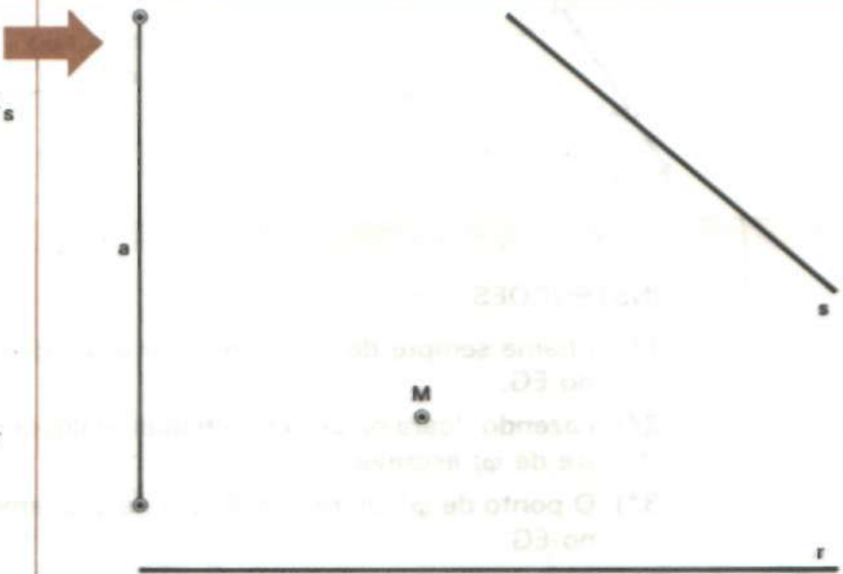
Construir um △ABC, de baricentro $\overline{M}$, com $\overline{A}$ em $\overleftrightarrow{s}$ e $\overline{BC} \cong \overline{a}$ em $\overleftrightarrow{r}$.

EG

Mensagem gráfica!



Veja como indicar uma proporção graficamente, para que "salte aos olhos".



R: AC = ...59,5.... mm.

RACIOCÍNIO:

Temos **um ponto, duas linhas e uma proporção**, portanto é o problema mágico.

ROTEIRO:

Sempre:

A' em φ' e A em φ...

1.º) No EG escreva as letras H, φ', φ, **A' em φ' e A em φ à sua vontade.**

2.º) **Para essas letras, ache o respectivo valor numérico de k, que é sempre k = $\overrightarrow{HA}$ / $\overrightarrow{HA'}$, com sinal** (no caso é negativo).

Lembre-se: $\overleftrightarrow{HA'}$ em "baixo"...

3.º) **Multiplique φ' pelo k que você achou, obtendo φ'_k que encontra φ em $\overline{A}$**; ligue $\overline{A}$ com $\overline{M}$, obtendo M_A. Fim da mágica.

4.º) Obtenha $\overline{B}$ e $\overline{C}$. Fim do problema.

372 **Há só duas situações onde podemos nos dar ao luxo de não tomar tanto cuidado:**

Mas querendo tomar cuidado, pode...

> **1.ª) Quando k = −1 ⇒ 1/k também vale −1.**
> **2.ª) Quando φ' coincide com φ.**

Na 1.ª, multiplica-se qualquer uma por (−1).

Na 2.ª, multiplica-se a única ($\varphi' = \varphi$) ou por **k** ou por **1/k**, tanto faz...

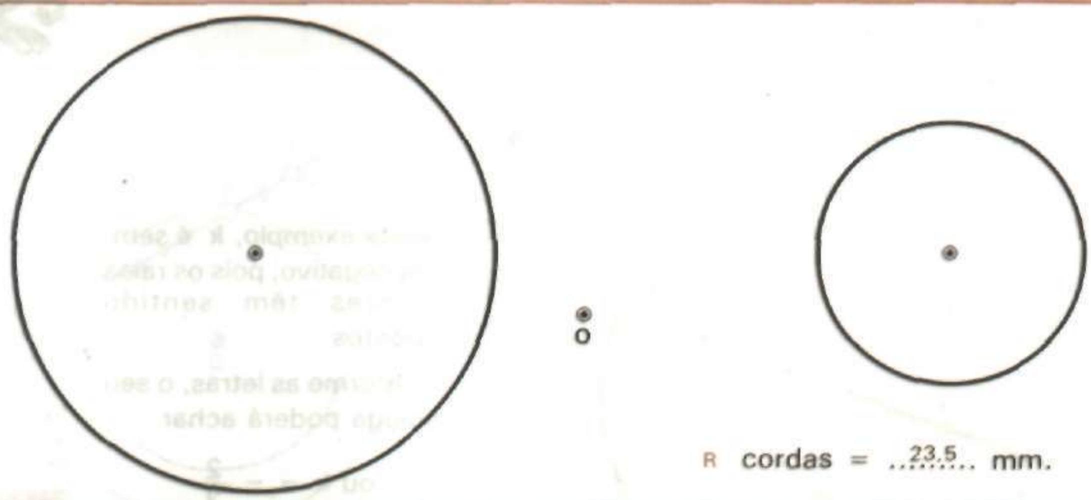
373 **Como?... como podem coincidir?**

Somente se forem arcos — de extremidades não determinadas — da mesma circunferência.

374 PROBLEMA — EXEMPLO:

Construa um // gramo de centro $\overline{O}$, sabendo que seus lados opostos são cordas das ⊙s dadas.

O centro de um // gramo é a intersecção das diagonais.



R cordas = ..23.5.. mm.

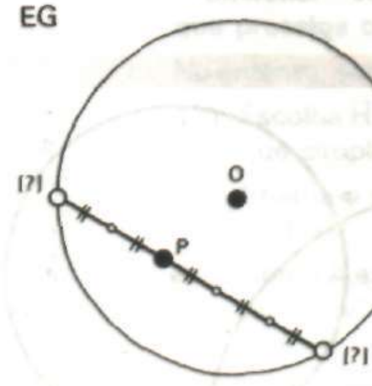
375 **Em problemas como este, é mais fácil dispensar o EG, usar "óculos mentais" e "vislumbrar" o // gramo que está desenhado acima com tinta invisível...**

Aproveite esses "óculos" para ler a palavra // gramo...

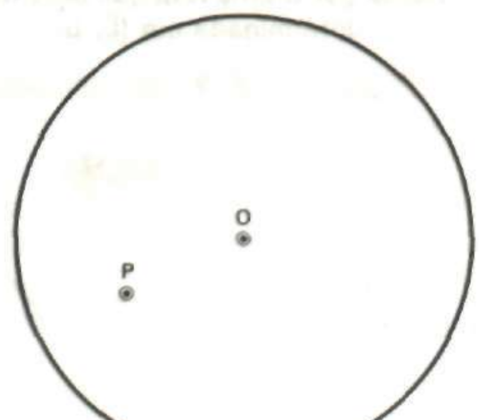
376 PROBLEMA:

Traçar uma corda da ⊙ dada, que fique dividida internamente por $\overline{P}$ na razão 2:3.

EG



Este EG destina-se a mostrar como se indica graficamente uma proporção.



R: comprimento das duas cordas = ...50... mm.

377 Posso inventar problemas?

Para "pegar" colegas?...

RECEITA:

1.º) Desenhe 2 linhas (ou 2 retas, ou 1 reta e 1 ⊙, ou 2 ⊙s ou ainda **2 arcos da mesma ⊙.**

2.º) Desenhe 1 ponto (ou "livre" ou numa das ⊙s ou em ambas as ⊙s).

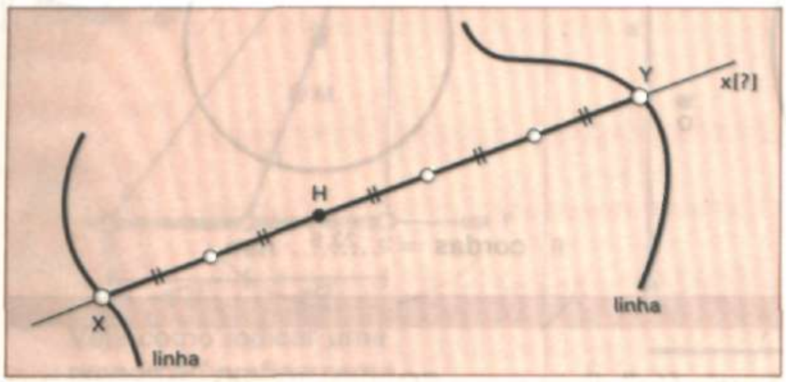
3.º) Peça para traçar pelo ponto uma reta que determine segmentos numa **dada proporção**. Essa proporção poderá ser enunciada de várias maneiras; deixe o "coitado" do colega descobrir qual deverá ser o **k**...

O ponto não pode estar numa reta, porque teríamos um raio vetor nulo.

378 EXEMPLO:

O enunciado (texto) diz HX : HY = 2 : 3

Faça o EG conveniente:



Neste exemplo, **k** é sempre negativo, pois os raios vetores têm sentido opostos.

Conforme as letras, o seu colega poderá achar

ou $k = -\dfrac{2}{3}$

ou $k = -\dfrac{3}{2}$.

Se achar outro número, o "coitado" errou...

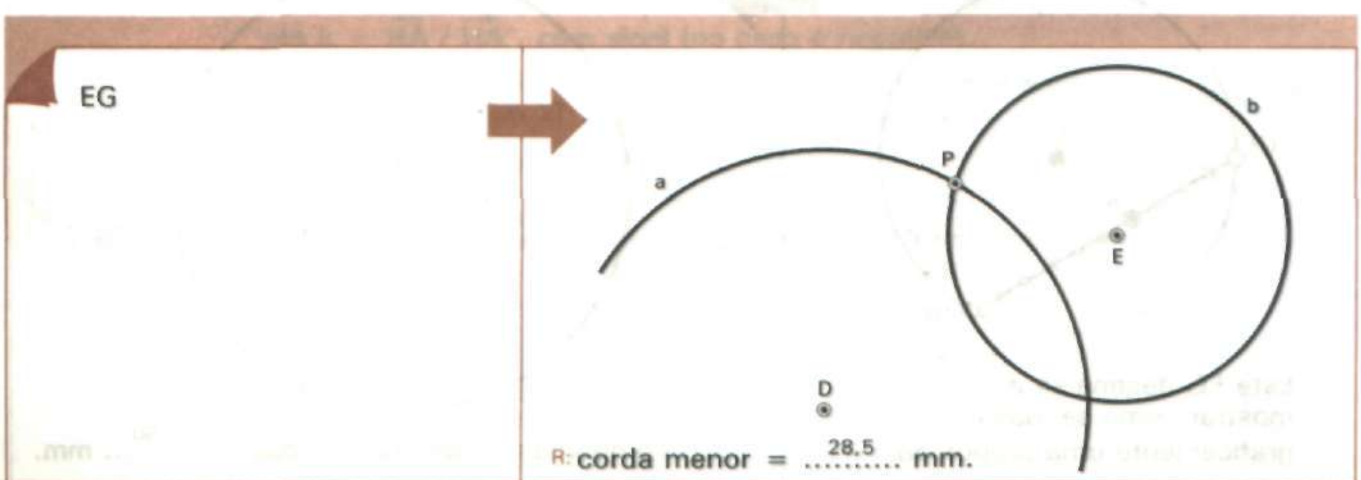
379 Conforme as letras (φ', φ, $\overline{A}'$ em φ', $\overline{A}$ em φ) escolhidas, obteremos:

ou 1.º $\overline{X}$ e depois $\overline{Y}$

ou 1.º $\overline{Y}$ e depois $\overline{X}$.

380 EXERCÍCIO:

Traçar por $\overline{C}$ uma reta que determine em ($\overline{D}$; a) uma corda igual a 2/3 da corda determinada em ($\overline{E}$; b).



381 **2.º CASO**

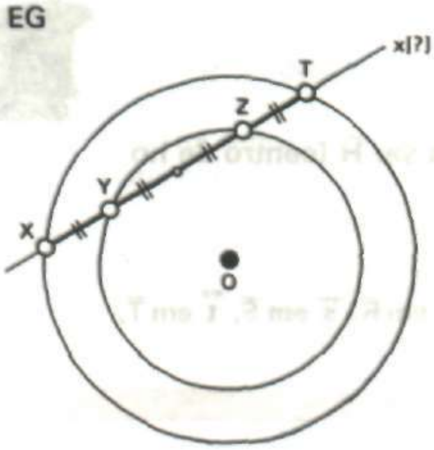
O ponto que será o $\overline{H}$ não é dado, mas pode ser escolhido para recair no 1.º caso.

Isso acontece somente quando a posição da reta procurada não é determinada, não é obtível.

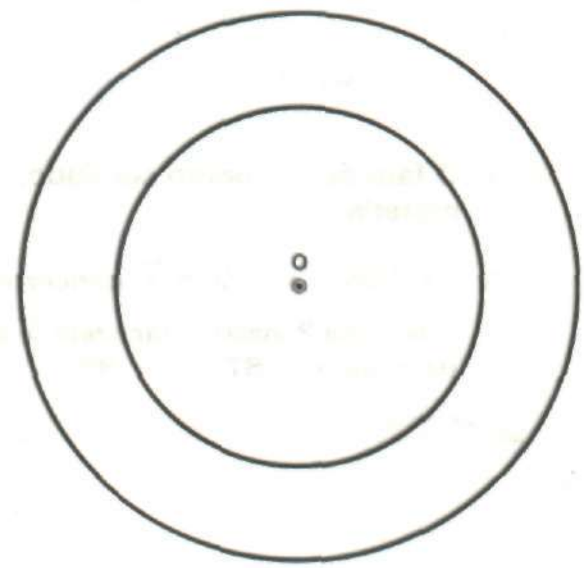
382 EXEMPLO:

Traçar uma reta que determine nas ⊙s concêntricas cordas na razão 2:1.

EG



$\overleftrightarrow{x}$ é uma das infinitas retas que satisfazem as condições impostas.



R: corda menor = ...32.... mm.

RESOLUÇÃO:

a. *Um EG bem-feito ajudará muito.*

b. Você pode escolher qualquer um dos pontos $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ ou $\overline{T}$ para "funcionar" como $\overline{H}$ e qualquer uma das ⊙s para ser φ' ou φ, **desde que prossiga certo e ache o valor numérico do respectivo k.**

$\overline{H}$ será o centro dessa homotetia.

c. No entanto, sempre há um melhor jeito, que — no caso — é o seguinte:

1.º) *Escolha $\overline{H}$ em $\overline{Y}$ (um ponto arbitrário da ⊙ menor); você verá porque simplifica...*

Vão explicar simplificações?...

Para nós é fácil...

2.º) Chame a maior de φ' e a menor de φ (vá escrevendo as letras no EG).

3.º) Como $\overline{A}$ está em φ, só poderá ser $\overline{Z}$. O $\overline{A}'$ (da teoria), devendo estar em φ', poderá ser $\overline{X}$ ou $\overline{Y}$, mas escolha $\overline{X}$ (já veremos por que...).

4.º) Com essas letras ache k, que é SEMPRE:

$$k = \frac{\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{HA'}}$$

com essa escolha teremos k = − 2.

ROTEIRO:

Como foi concluído na teoria (n.º 363):

Ao multiplicar a maior, "esqueça" a outra; concentre-se no que está fazendo...

1º) Multiplique a maior (φ') por $k = -2$, multiplicando o centro $\overline{O}$ e o raio (2 vezes o raio dá o diâmetro), você obterá φ'_k, que corta a menor (φ) em $\overline{A}$ (da teoria) que é o $\overline{Z}$.

2º) Ligue $\overline{Z} = \overline{A}$ com $\overline{Y} = \overline{H}$, resolvendo o problema. Confira a resposta.

383 Por que esse é o melhor jeito?

Outra mágica?...

Por isso, é bom "pré-ver".

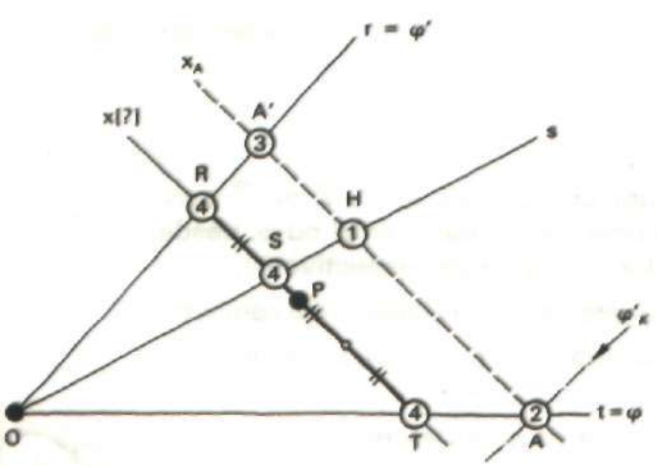
Porque é mais fácil multiplicar por (−2) do que por $\left(-\frac{1}{2}\right)$, ou (−3) ou $\left(-\frac{1}{3}\right)$, ou (+ 4), ou...

384 O fato de um ponto ser dado, não o obriga a ser $\overline{H}$ (centro de homotetia).

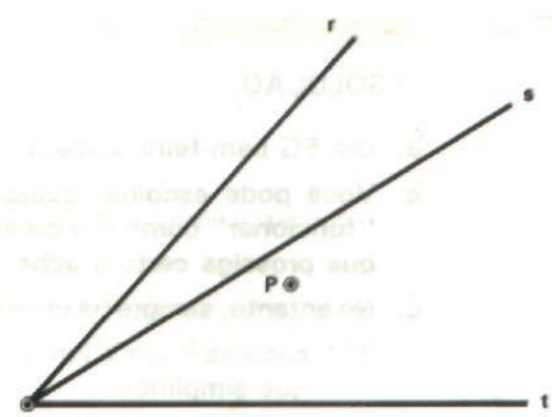
385 EXEMPLO ($\overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{s}$ e $\overleftrightarrow{t}$ concorrentes em $\overline{O}$):

Traçar por $\overline{P}$ (dado...) uma reta $\overleftrightarrow{x}$ que encontra $\overleftrightarrow{r}$ em $\overline{R}$, $\overleftrightarrow{s}$ em $\overline{S}$, $\overleftrightarrow{t}$ em $\overline{T}$, de modo que $ST = 2 \cdot RS$.

EG



$$k = \frac{\overleftrightarrow{HA}}{\overleftrightarrow{HA'}} = -2 \Rightarrow \varphi'_k = \varphi' \cdot (-2)$$
$$(\varphi'_k \parallel \varphi')$$



r: RT = ...34.... mm.

RESOLUÇÃO:

a. A incógnita $\overleftrightarrow{x}$ deverá passar pelo ponto dado $\overline{P}$, mas não conhecemos a proporção entre $\overline{PR}$ e $\overline{PT}$ nem entre $\overline{PS}$ e PT nem entre $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$...

Não há mágica que resolva isso...

Reunindo coisas que se sabe, chega-se aonde se quer. Caso contrário, o problema não poderá ser resolvido.

b. O QUE SE SABE?

O teorema de Tales faz parte da TM do DG.

1.º) ST = 2 . RS (diz o enunciado).

2.º) [TALES] ⇒ essa proporção se conserva, se deslocarmos $\overleftrightarrow{x}$ paralelamente a si própria!

ROTEIRO:

1.º) Tome $\overline{H}$ arbitrário em $\overleftrightarrow{s}$ e faça a "mágica"...

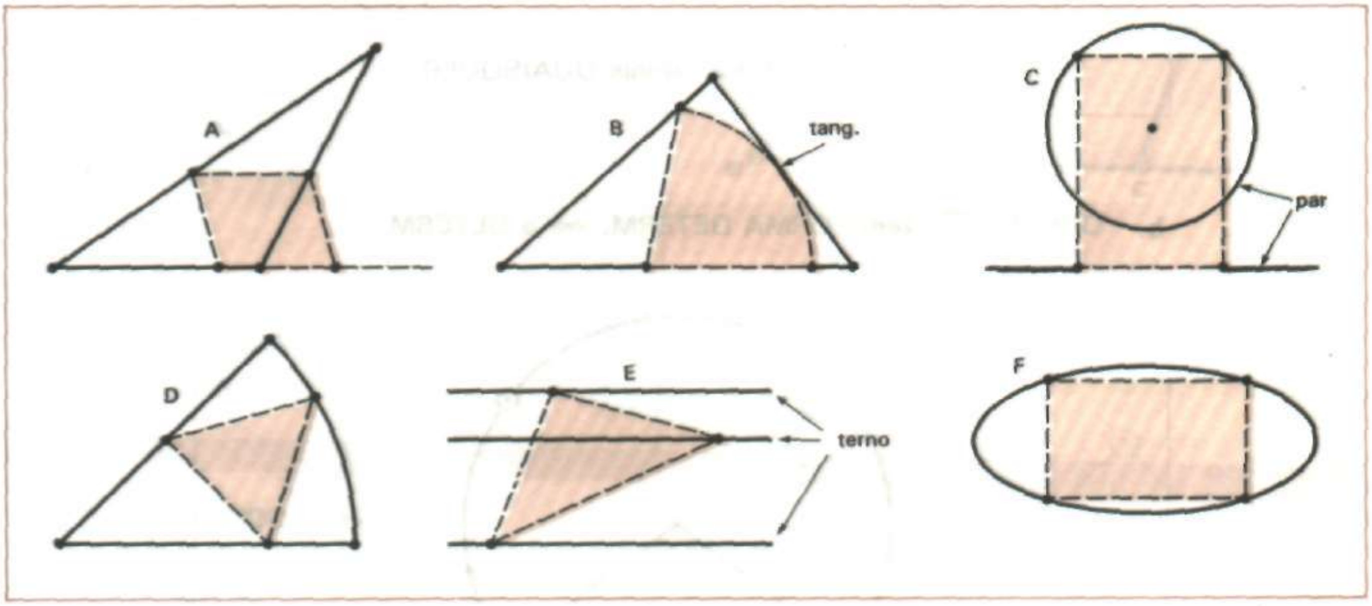
2.º) Trace por $\overline{P}$ a reta $\overleftrightarrow{x} \parallel \overleftrightarrow{x}_A$ obtida "magicamente".

386 INSCRIÇÃO e CIRCUNSCRIÇÃO de figuras.

Não há definição genérica, mas apenas particulares (polígono inscrito ou circunscrito numa ⊙, ...).

387 Sabe-se que:

Uma é INSCRITA ⇔ a outra é CIRCUNSCRITA.



388 A inscrita (-----) deve ter:

a. todos os seus vértices nas linhas da outra ou em seus prolongamentos;

b. todos os seus arcos tangenciando as linhas da circunscrita.

389 Lembrar que um **par** (desenho C) ou um **terno** (desenho E) de figuras podem ser considerados uma só figura.

Uma UNIÃO de figuras é uma NOVA FIGURA.

390 **Uma união de figuras tem a sua forma determinada se, e apenas se,**

ou todas as proporções **entre segmentos são** determinadas

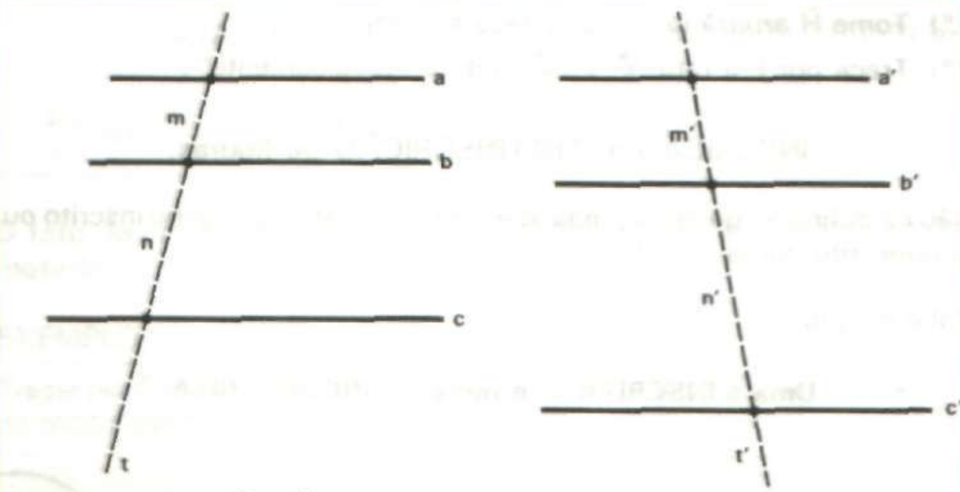
ou todas as aberturas **dos ângulos são** determinadas.

São condições suficientes (bastam elas).

EXEMPLOS:

a. TERNO $(a; b; c) \sim$ TERNO $(a'; b'; c') \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$

Figuras de mesma forma são semelhantes e reciprocamente.

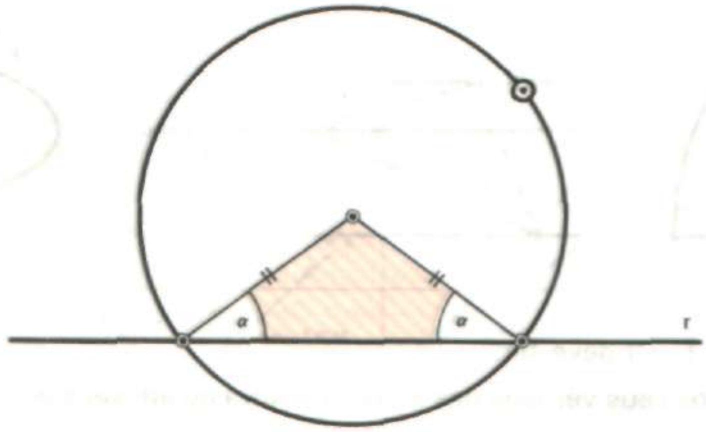


$\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$ são transversais QUAISQUER.

b. O PAR $(\odot; \overrightarrow{r})$ tem FORMA DETERM. $\Leftrightarrow \alpha$ DETERM.

α é a medida de $\hat{o}$.

São condições suficientes, isto é, basta acontecerem para que se possa concluir a tese.



391

MESMA FORMA + SEGMENTOS HOMÓLOGOS PARALELOS	$\Leftrightarrow$ UNIÕES HOMOTÉTICAS

392 TIPO 5 (INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO)

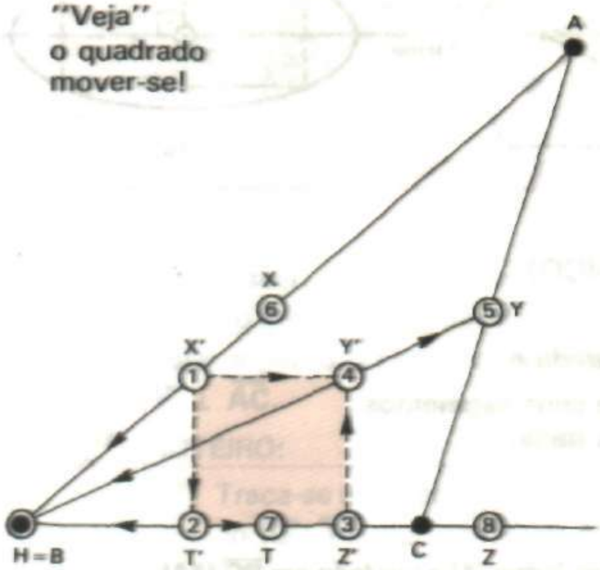
393 EXEMPLO DE RESOLUÇÃO POR HOMOTETIA:

Inscrever no $\triangle ABC$ um quadrado (*) com lado em $\overleftrightarrow{BC}$ (**).

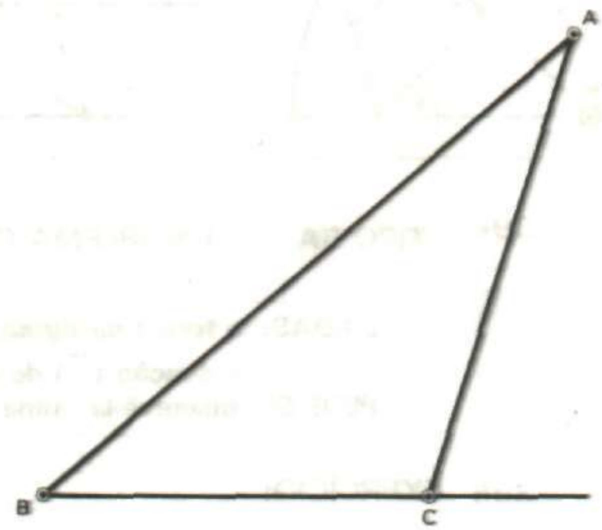
EGT cinematográfico:

"VISÃO ANIMADA"

"Veja"
o quadrado
mover-se!



(*) ⇒ FORMA
(**) ⇒ DIREÇÃO } ⇔ HOMOTETIA



R: lado = ...27,5... mm.

RACIOCÍNIO:

1.º) Imagine o quadrado-resposta XYZT.

2.º) Mentalmente, faça-o ir **diminuindo de tamanho — mantendo a forma** — mas:

a. com $\overline{X}$ percorrendo $\overrightarrow{AB}$ e
b. $\overline{Z}$ e $\overline{T}$ percorrendo $\overrightarrow{CB}$. } ⇒ **$\overline{H} = \overline{B}$ é o centro da homotetia.**

3.º) Depois de "sumir" em $\overline{H}$, ele "**renasce**", vai crescendo, crescendo, até "dar com a testa" $\overline{Y}'$ (que estava "solta") em $\overline{Y}$.

$\overline{H}$ é o encontro de raios vetores.

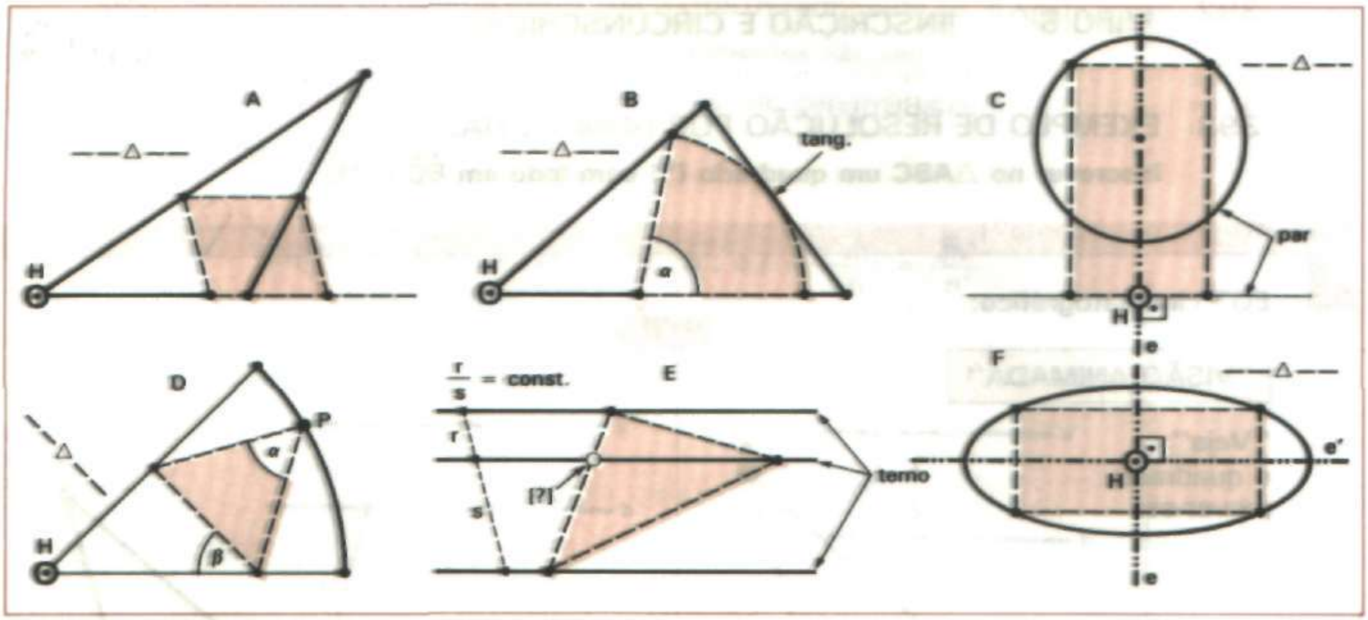
$\overline{H}$ é um sorvedouro...

ROTEIRO:

1.º) Com $\overline{X}'$ arbitr. em $\overrightarrow{HA}$, construa o quadrado X'Y'Z'T'.

2.º) Ligue $\overline{H}$ com $\overline{Y}'$ ("solto") obtendo $\overline{Y}$ e complete o quadrado YXTZ.

$\overline{Z}'$ é dispensável: TZ = XY = XT.



394 TIPO 5A (PROBLEMA GENÉRICO)

DADAS: a forma da figura procurada e a direção ($\overleftrightarrow{\Delta}$) de um de seus segmentos. PEDE-SE: inscrevê-la numa figura dada.

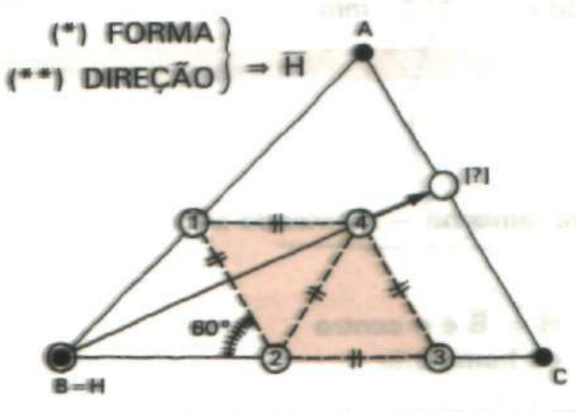
Tendo a forma da figura e a direção de um segmento, tem-se as direções de todos os outros.

395 EXERCÍCIO:

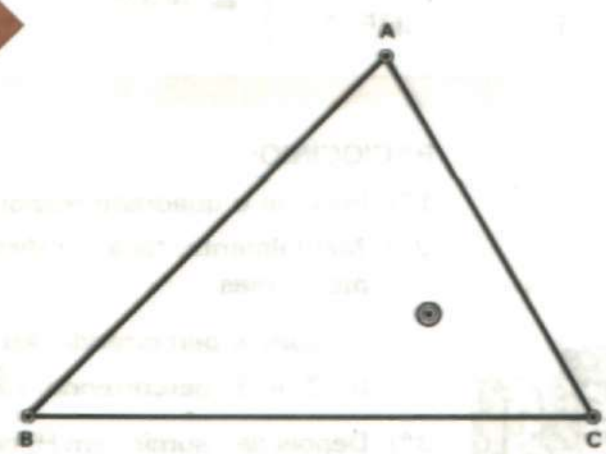
Um losango tem uma diagonal "igual" aos lados (*) e um lado em $\overline{BC}$ (**).

Inscrevê-lo no $\triangle$ABC (dado).

EGT (só do "filhote")



(Só desenhe tracejado no EG)



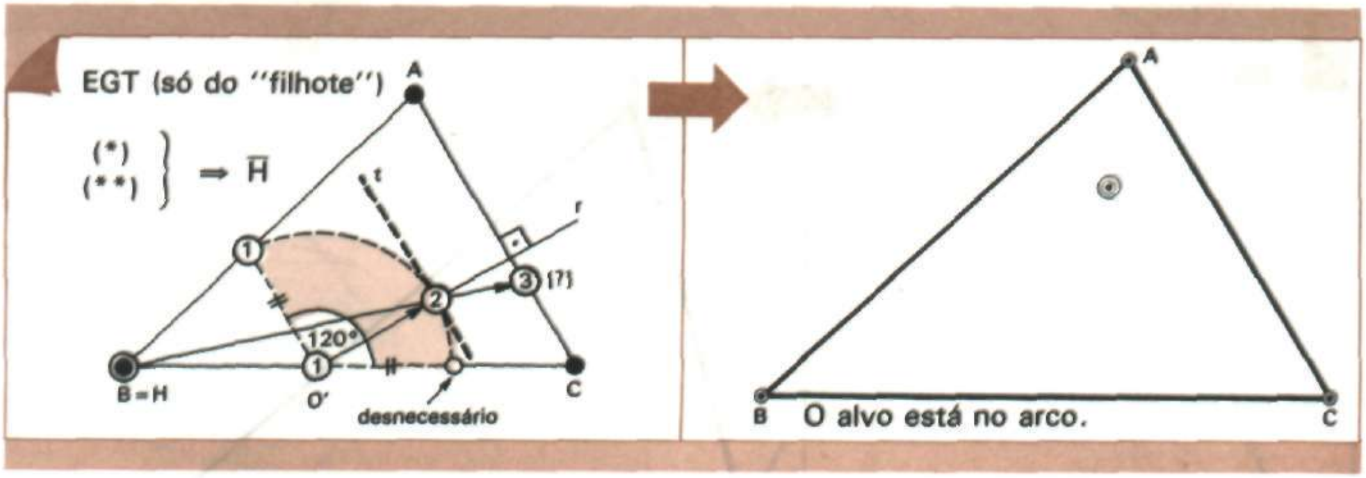
O alvo é o centro do losango procurado.

396 **Às vezes a dificuldade está em achar (no "filhote") qual (?) o ponto que vai "dar com a testa" numa linha da figura dada.** Por exemplo:

397 EXERCÍCIO:

Um setor circular de ângulo central 120° (*) tem um raio em $\overleftrightarrow{BC}$ (**). Inscrevê-lo no $\triangle ABC$.

É aquele que fica solto...



RACIOCÍNIO:

Ao crescer, o "setorzinho" vai "empurrando" a tangente $\vec{t}$ // $\overleftrightarrow{AC}$ que, no instante da "trombada", coincidirá com a reta $\overleftrightarrow{AC}$. Então, para obter o ponto ($\dot{2}$) **que vai "trombar", basta traçar pelo ponto $\overline{O'}$ a reta $\overleftrightarrow{r} \perp \overleftrightarrow{AC}$.**

Parece cinemática...

É cinema.

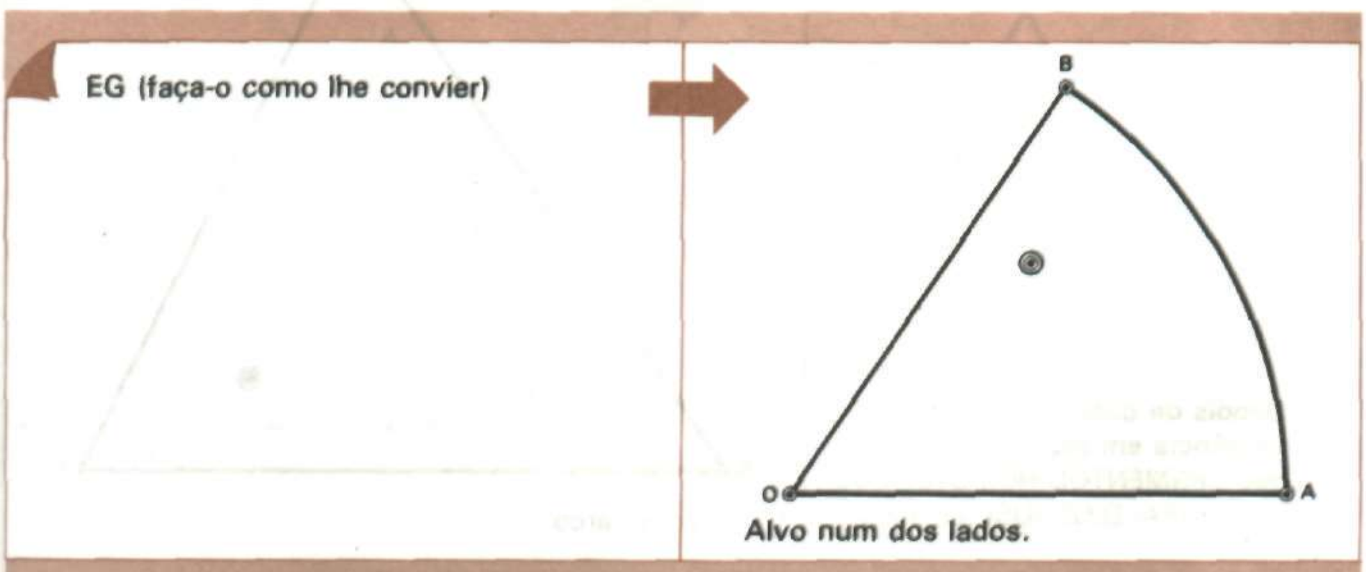
ROTEIRO:

1º) Traça-se uma reta arbitrária formando 120° com $\overleftrightarrow{BC}$; traça-se o arco ($\overline{O'}$; $\overline{11}$) e a reta $\overleftrightarrow{r} \perp \overleftrightarrow{AC}$, para obter $\dot{2}$ e depois $\dot{3}$.

2º) Para obter o centro do setor procurado traça-se por $\dot{3}$ a paralela ao segmento $\overline{20'}$.

398 EXERCÍCIO:

No setor circular OAB dado, inscrever um $\triangle$ eqüilátero (*) com um lado // $\overline{OA}$ (**).

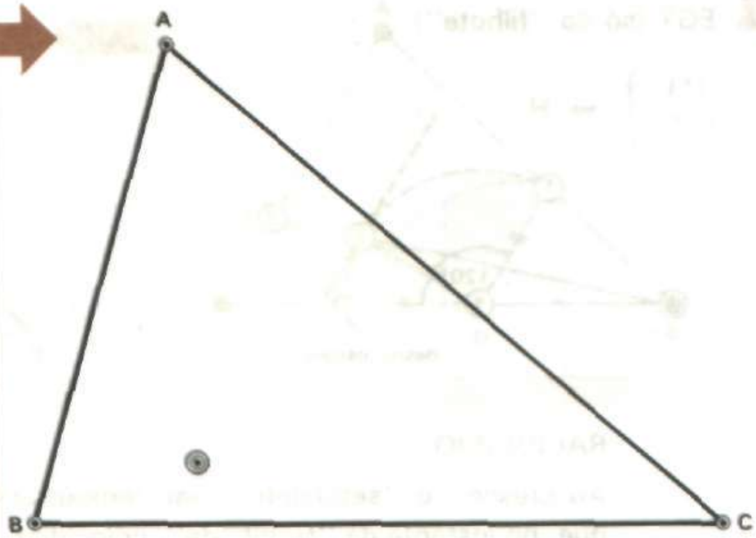


399 EXERCÍCIO:

No △ABC dado, inscrever um retângulo de lados proporcionais a 2 e 3 (*) e com o lado maior em $\overline{BC}$ (**).

(*) forma
(**) direção

EG



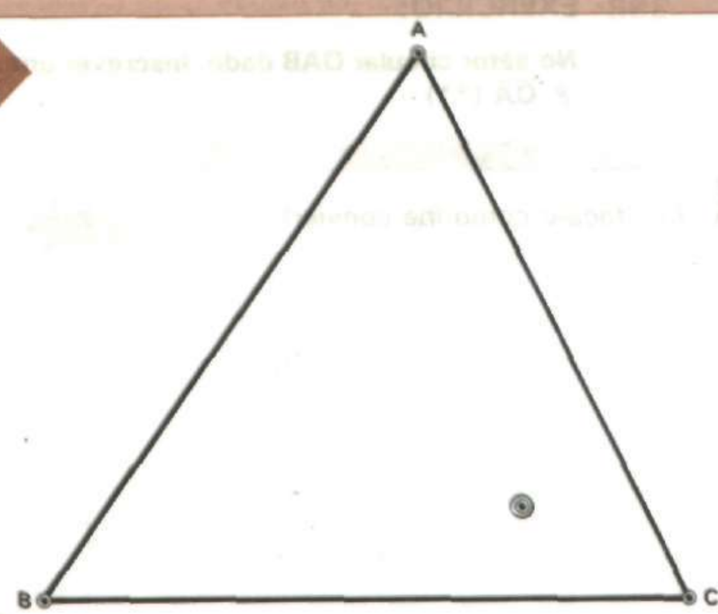
Alvo numa diagonal.

400 EXERCÍCIO:

No △ABC dado, inscrever um semicírculo (*) com o diâmetro perpendicular ao lado $\overline{BC}$ (**).

EG

Depois de obter o ponto de tangência em $\overline{AC}$, lembre-se que SEGMENTOS HOMOTÉTICOS SÃO PARALELOS (USE LETRAS).

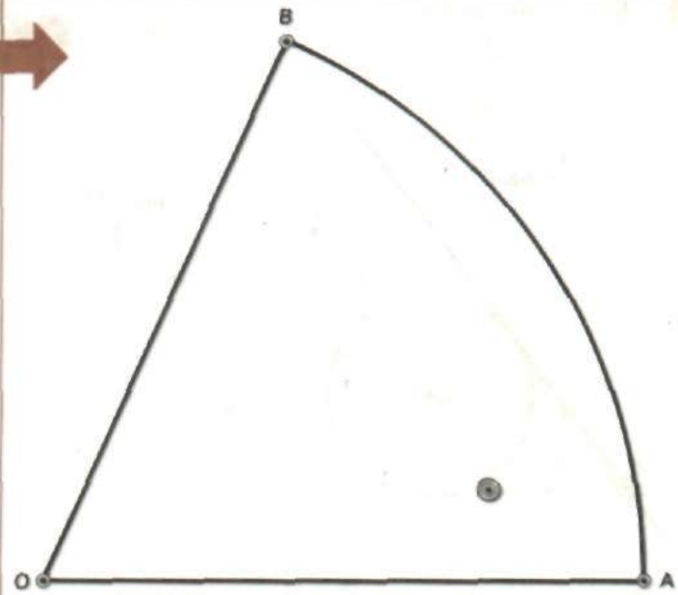


• **Alvo no arco.**

401 EXERCÍCIO:

Inscrever no setor circular OAB um trapézio retângulo XYZT (nch), com XY : YZ : ZT = 1 : 3 : 2 (*) e com a base menor $\overline{XT}$ em $\overline{OA}$ (**).

EG

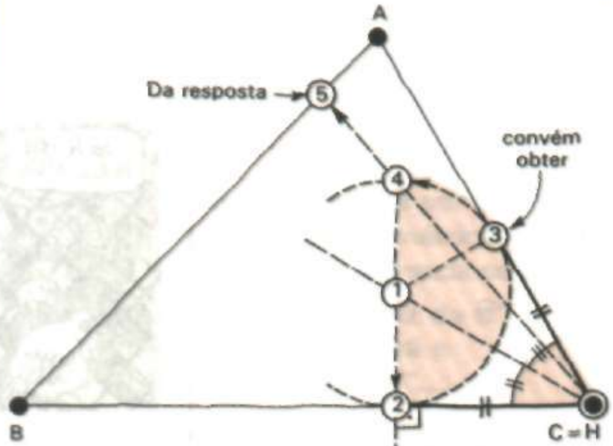


Alvo no lado oblíquo às bases.

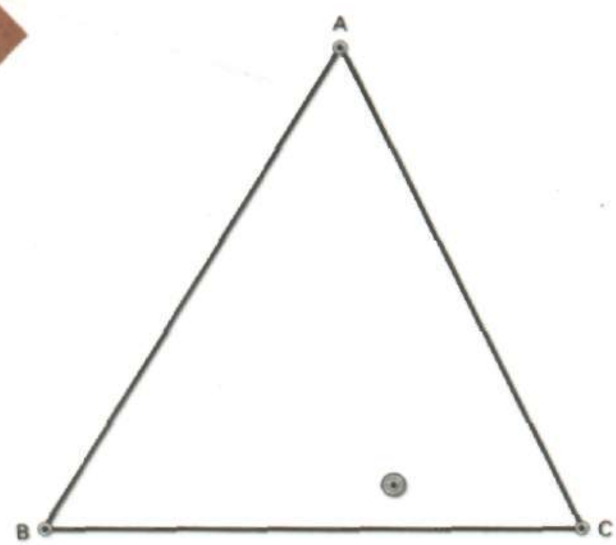
402 Às vezes, pode-se escolher $\overline{H}$ em mais do que um lugar.

Como exemplo, resolveremos o exercício do n.º 400 (releia-o), mas escolhendo $\overline{H}$ **em** $\overline{C}$. A construção do "filhote" é mais difícil. **Convém "pré-ver" antes de decidir.**

EG



O ponto de partida é 1 (arbitr.) na bissetriz.



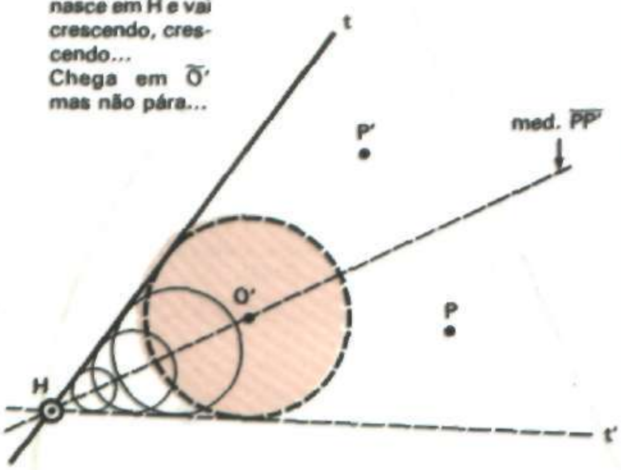
Alvo no arco.

403 EXERCÍCIO **(o clássico PP't – n.º 076):**

Resolver o PP't com $\overline{R} = \overleftrightarrow{PP'} \cap t$ inacessível.

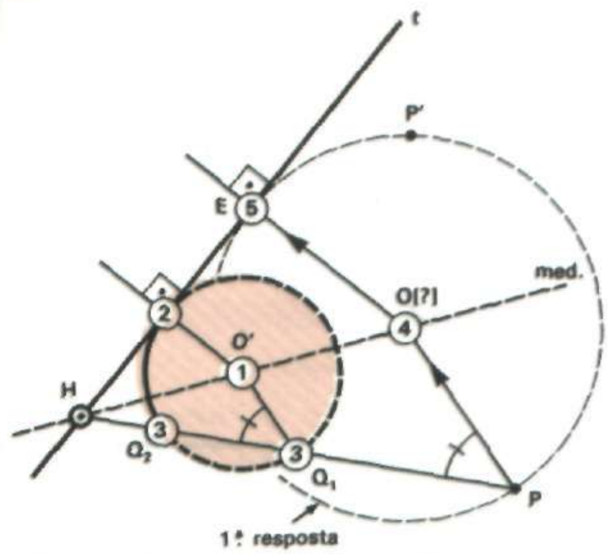
EG "cineminha":

uma "rodinha" nasce em $\overline{H}$ e vai crescendo, crescendo... Chega em $\overline{O'}$ mas não pára...



Quando "bater" em $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ (ao mesmo tempo) será a 1.ª resposta (centro $\overline{O}$) mas não pára... A "traseira" dela volta a "bater" em $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ (2.ª resposta).

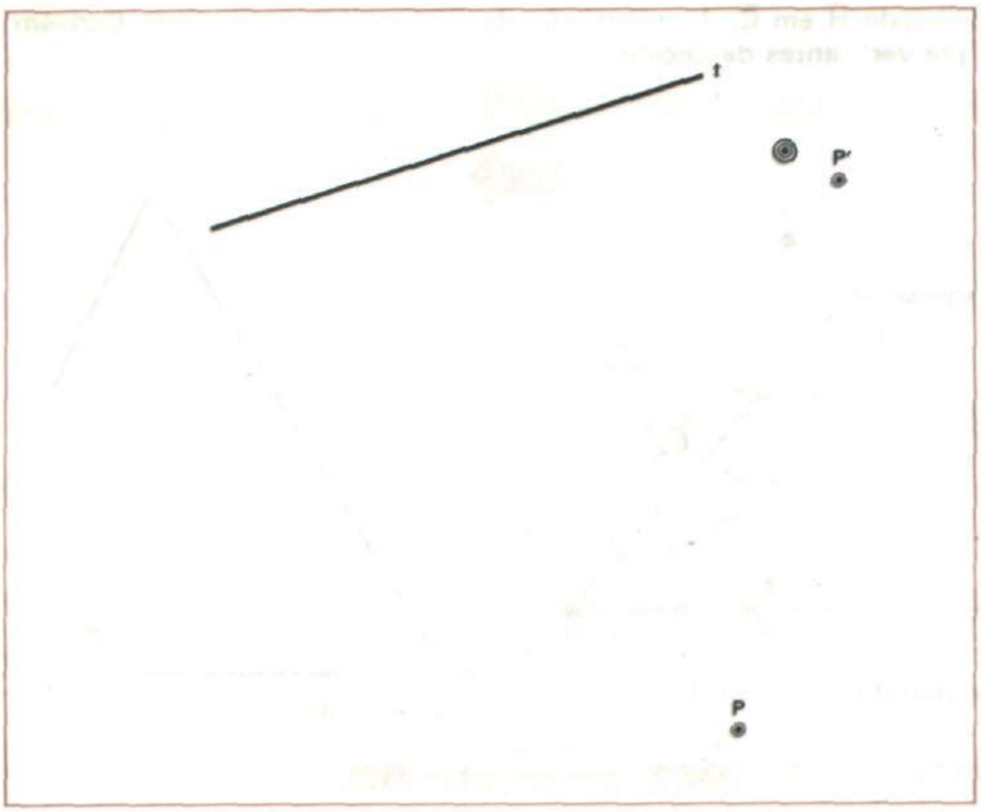
EG "instantâneo":



Como $\overline{R}$ é inacessível ⇒ a 2.ª resposta também é.

Roteiro:

1.º) Obter $\overline{H} = \overleftrightarrow{t} \cap$ med.
2.º) Com $\overline{O'}$ arbitrário na mediatriz, obter 2 e traçar o "filhote".
3.º) Ligar $\overline{H}$ e $\overline{P}$ para obter os pontos $\overline{Q}_1$ e $\overline{Q}_2$.
4.º) $\overline{PO} \parallel \overline{Q_1O'}$ determina $\overline{O}$. Convém obter $\overline{E}$ antes de traçar a resposta.



Para obter a 2.ª resposta, bastaria traçar por $\overline{P}$ a reta $\parallel$ ao $\overline{Q_2O'}$.

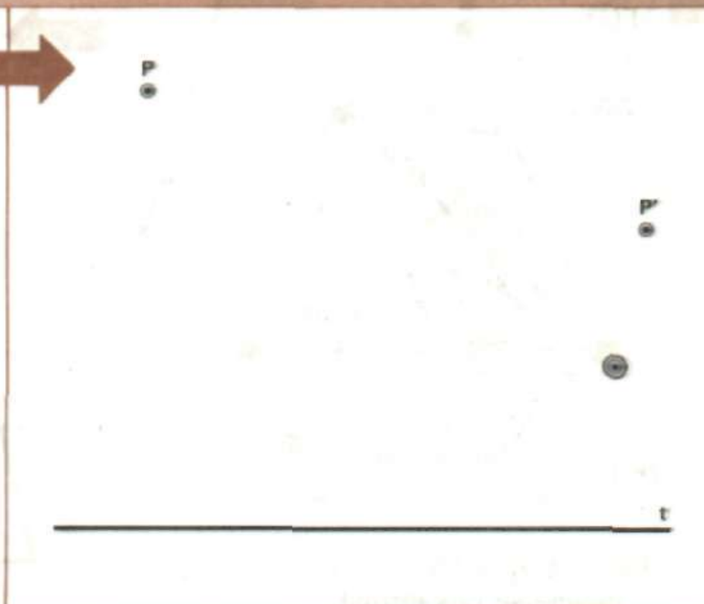
404 **Só convém resolver o PP't por homotetia quando $\overline{R}$ é inacessível.**

405 EXERCÍCIO:

PP't quando $\overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{t}$ está fora do papel.

EG

Há UMA SÓ resposta.



406 EXERCÍCIO **(é outro problema clássico):**

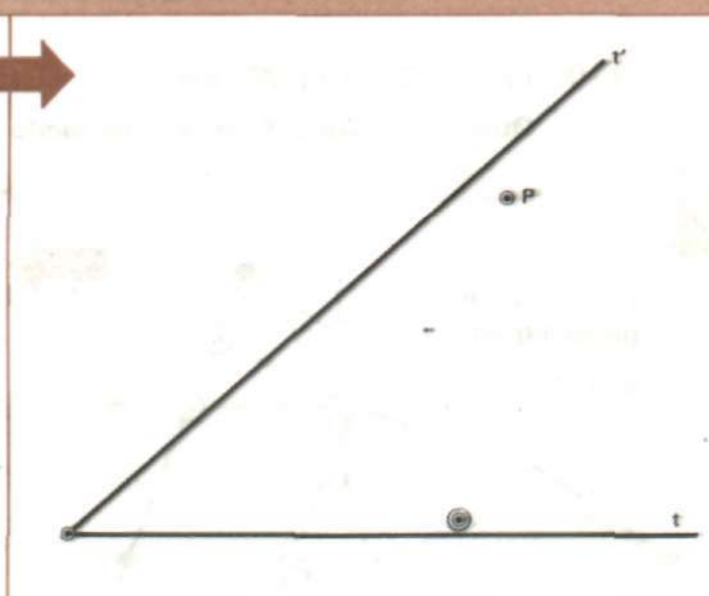
Resolver o Ptt' por homotetia.

EG

Sem homotetia:

SE a ⊙ procurada passa por $\overline{P}$,
ENTÃO passará pelo simétrico
$\overline{P'}$ (relativo à biss.) e recai-se no PP't.

SE $\overline{P}$ estiver na bissetriz de $\widehat{tt'}$,
ENTÃO *a homot. falhará* e
ENTÃO recai-se no tt't''...

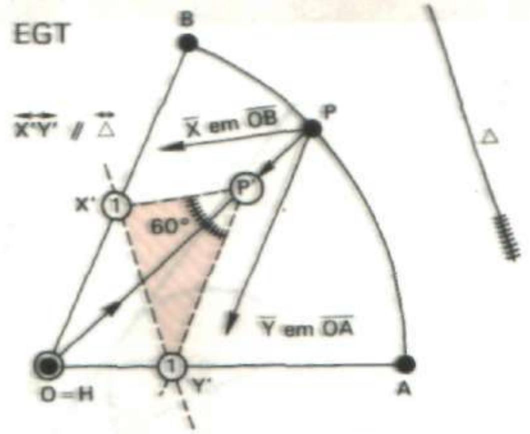


407 TIPO 5B **A forma da figura procurada não é (previamente) dada.**

408 EXERCÍCIO:

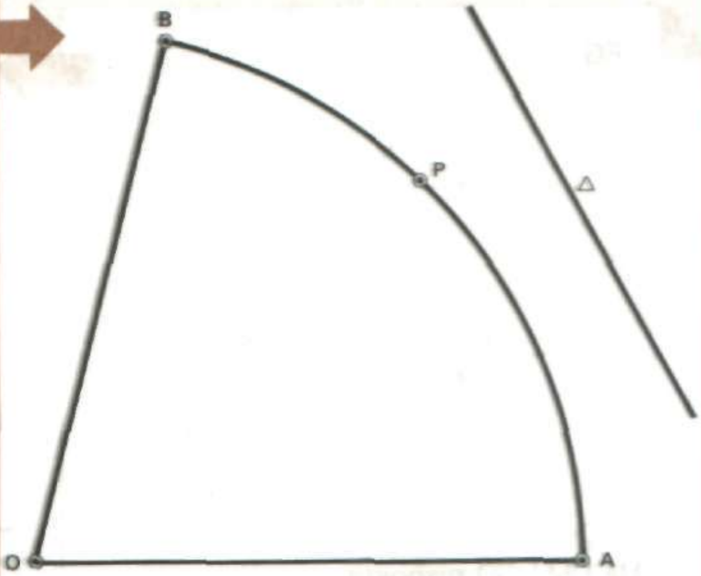
Façamos: $\overline{X}$ em $\overline{OB}$ e $\overline{Y}$ em $\overline{OA}$.

No setor AOB, inscrever um △XYP, dados $\overline{P}$, ângulo XPY = 60° e com $\overleftrightarrow{XY}$ // $\overleftrightarrow{\Delta}$.



$\overline{P'}$ [?] { a. No raio vetor $\overrightarrow{HP}$.
b. Vê X'Y' sob 60° ⇒ L5.

($\overline{PX}$ // $\overline{P'X'}$ e $\overline{PY}$ // $\overline{P'Y'}$)
Baseie-se nas letras!



R: XY = ...47... mm.

409

Há problemas onde deveremos nos lembrar das figuras UNIÕES de outras:

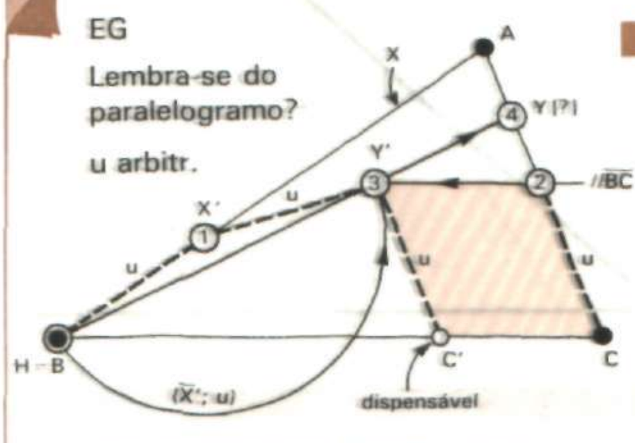
410 EXERCÍCIO EXEMPLAR:

Obter $\overline{X}$ em $\overline{AB}$ e $\overline{Y}$ em $\overline{AC}$, de modo que BX = XY = YC.

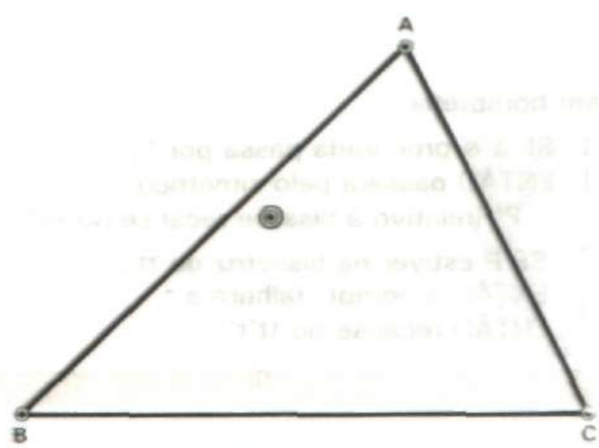
EG

Lembra-se do paralelogramo?

u arbitr.



A figura procurada BXYC é uma linha poligonal...



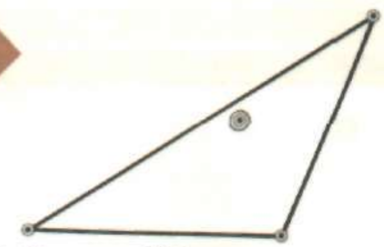
Alvo em $\overline{XY}$.

411 EXERCÍCIO:

Obter $\overline{X}$ em $\overline{AB}$ e $\overline{Y}$ em $\overline{AC}$, de modo que BX : XY : YA = 2 : 3 : 1.

EG

Sugestões:
1.ª) $\overline{H}$ em $\overline{B}$.
2.ª) Use um // gramo com vértice $\overline{A}$ e o lado 1 u em $\overline{AC}$.



Alvo em XY.

412 TIPO 5C — **É dada a forma, mas não é dada nenhuma direção.**

Não tendo as direções, então não poderemos resolver por homotetia. Teremos que

$\nexists\ \overleftrightarrow{\triangle} \Rightarrow \nexists\ \overline{H}$

Muitos dos problemas já resolvidos por homotetia podem ser resolvidos também por semelhança.

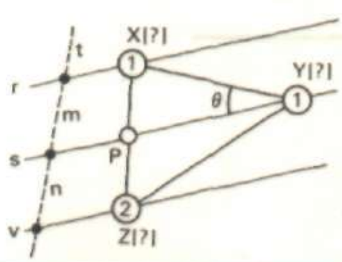
Resolver por semelhança, baseados:
NAS PROPORÇÕES (4.ª proporcional) **e/ou**
NOS ÂNGULOS (transporte de ângulos).

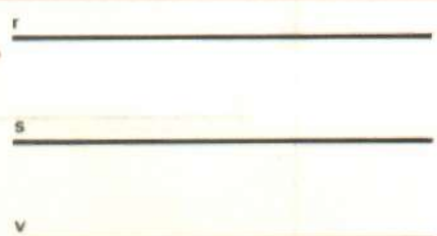
$\exists$ existe
$\nexists$ não existe

413 EXEMPLO **(de problema que não pode ser resolvido por homotetia):**

No terno ($\overleftrightarrow{r}$ // $\overleftrightarrow{s}$ // $\overleftrightarrow{v}$), inscrever um $\triangle$XYZ eqüilátero (a forma foi dada, mas a direção não).

EG





Construções auxiliares

UMA SÓ **resposta, pois a incógnita é o tamanho do $\triangle$XYZ.**

ROTEIRO:

1.º) À parte (construções auxiliares), construa um $\triangle$X'Y'Z' $\sim$ $\triangle$XYZ procurado (eqüilátero).

2.º) Divida (internamente) $\overline{X'Z'}$ na razão m : n, sendo $\overleftrightarrow{t}$ uma transversal arbitrária.

3.º) Transporte θ, obtendo $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

4.º) $\overline{Z}$ dista $\overline{XY}$ de $\overline{Y}$ e de $\overline{X}$. Dá para conferir...

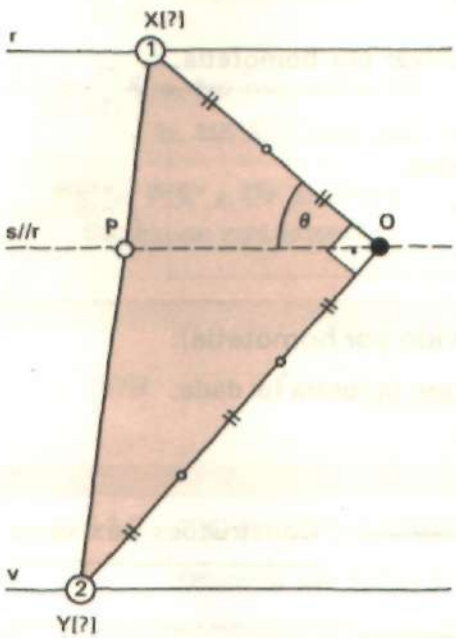
414 EXERCÍCIO:

DADOS: $\overleftrightarrow{r} /\!/ \overleftrightarrow{v}$ e $\overline{O}$.

PEDE-SE $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{v}$, tais que:
$X\hat{O}Y = 90°$ e $OX : OY = 2 : 3$.

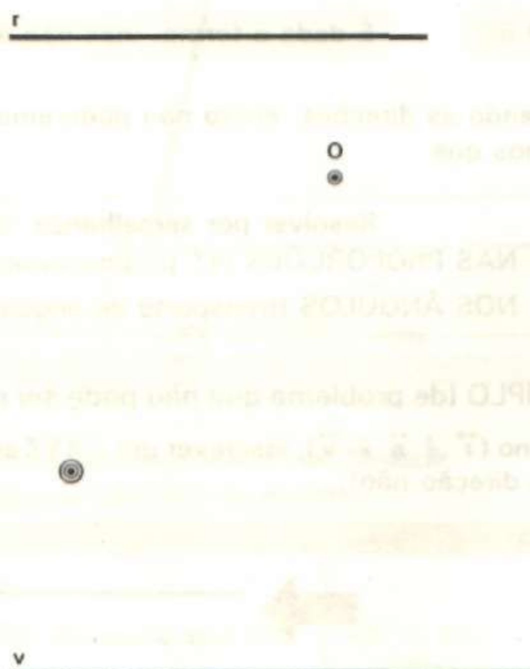
A figura procurada está camuflada...

EG



O △XOY tem forma determinada.

Construções auxiliares



Alvo em $\overline{XY}$.

Como foi fixada a posição, este problema tem uma 2.ª resposta.

415 EXERCÍCIO **(Dados $\overleftrightarrow{r} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{s} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{v}$ e $\overline{O}$):**

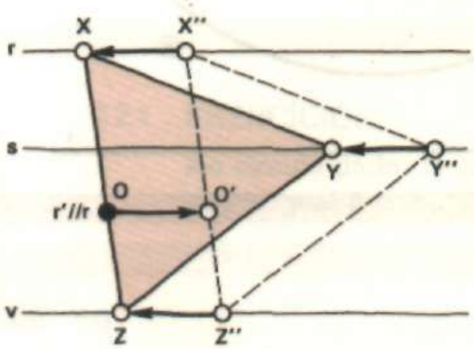
Obter $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{r}$, $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{s}$ e $\overline{Z}$ em $\overleftrightarrow{v}$, de modo que:
XY = YZ = ZX e que $\overline{XZ}$ contenha $\overline{O}$.

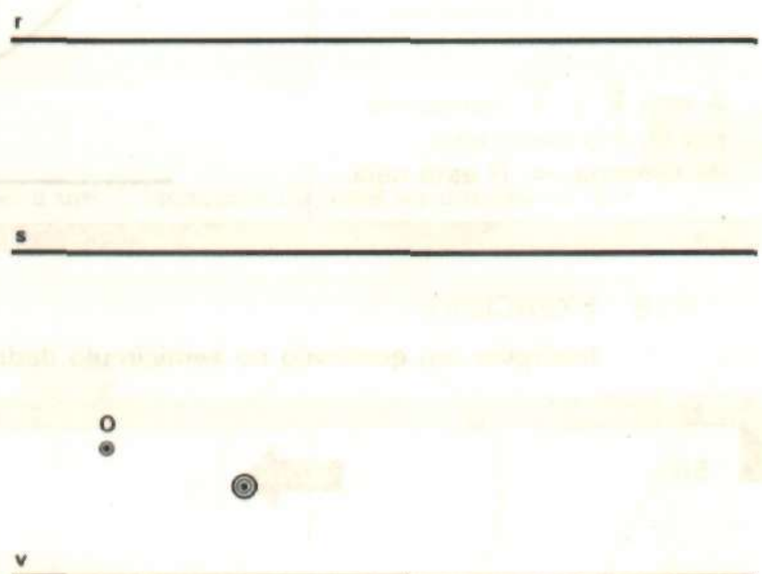
Outra camuflagem...

EG

O △XYZ (procurado) é EQÜILÁTERO.

Construções auxiliares





Como no n.º 413, obtemos o △X'' Y'' Z''.

Com $\overleftrightarrow{r}' \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{r}$, deslocamos $\overline{O}$ para $\overline{O}'$ e depois deslocamos $\overline{X}''$, $\overline{Y}''$ e $\overline{Z}''$ em sentido contrário:

$\overline{OO'} = \overline{X''X} = \overline{Y''Y} = \overline{Z''Z}$.

Alvo em $\overline{YZ}$.

Este problema — como foi determinada a posição — tem duas respostas.

416 TIPO **5D** — **A inscrita e a circunscrita formam um CONJUNTO SIMÉTRICO.**

No Ptt', a bissetriz é eixo de simetria.

Neste caso, $\overline{H}$ está no EIXO DE SIMETRIA **($\overleftrightarrow{e}$); se houver 2 eixos ($\overleftrightarrow{e}$, $\overleftrightarrow{e}'$), $\overline{H}$ estará em ambos.**

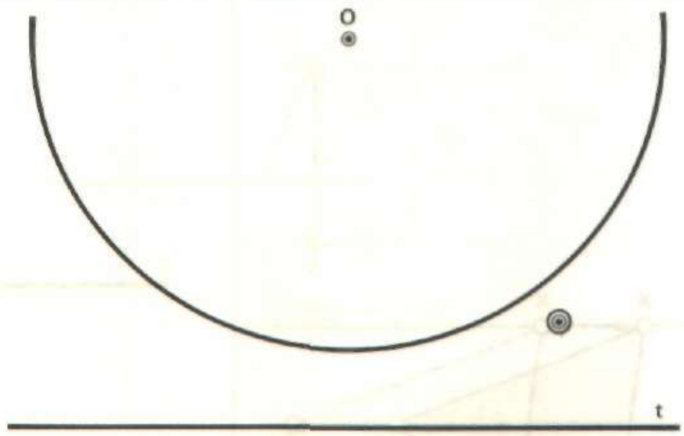
417 EXERCÍCIO:

No PAR **formado pela ⊙ e pela reta, inscrever um retângulo de lados na razão 3 : 2 (*), com o lado menor na reta (**).**

(*) forma
(**) direção

EG

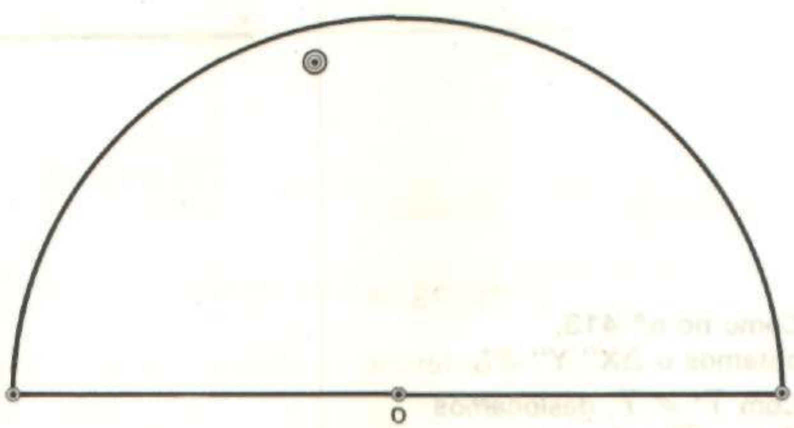
A reta $\overleftrightarrow{e} \perp \overleftrightarrow{t}$, conduzida por $\overline{O}$, é o único eixo de simetria ⇒ $\overline{H}$ está nela.



418 EXERCÍCIO:

Inscrever um quadrado no semicírculo dado.

EG

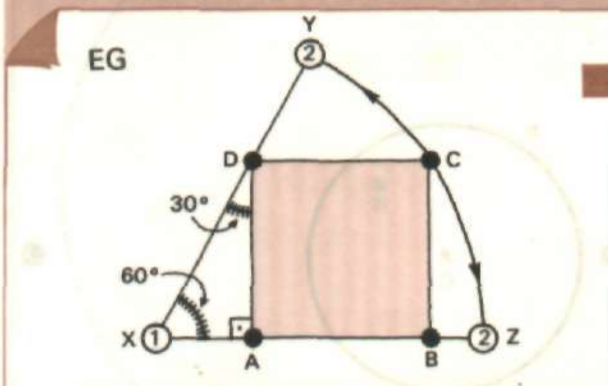


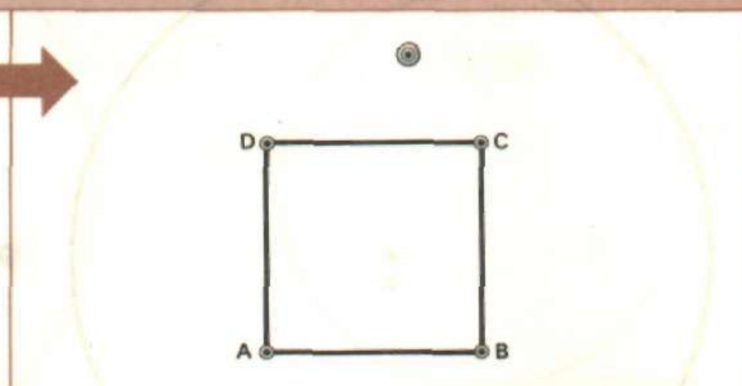
419 TIPO 5E CIRCUNSCREVER

Em geral basta copiar ângulos e/ou proporções do EGT (bem-feito).

420 EXERCÍCIO:

Circunscrever ao quadrado ABCD um setor circular de ângulo central de 60° (*) e com um raio contendo $\overline{AB}$ (**).

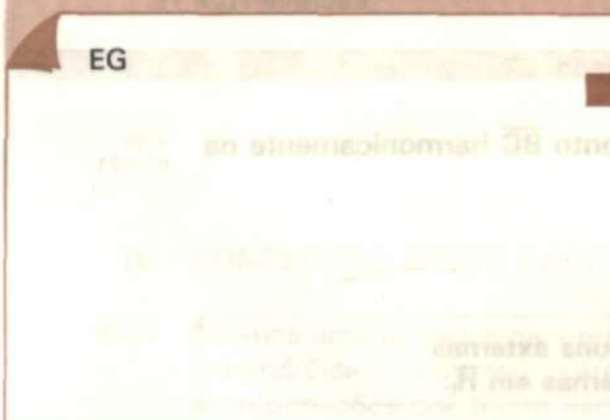


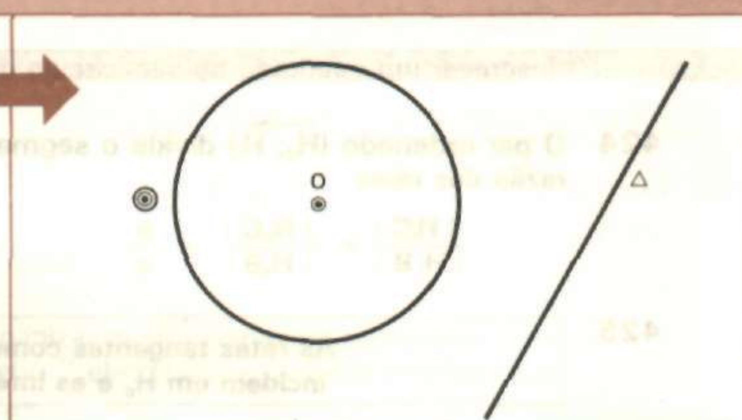


421 EXERCÍCIO:

Ao círculo dado, circunscreva um △ isósceles de base na direção $\overleftrightarrow{\triangle}$ e altura igual à base.

"Misturou" forma e direção...





422 CENTROS DE HOMOTETIA DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

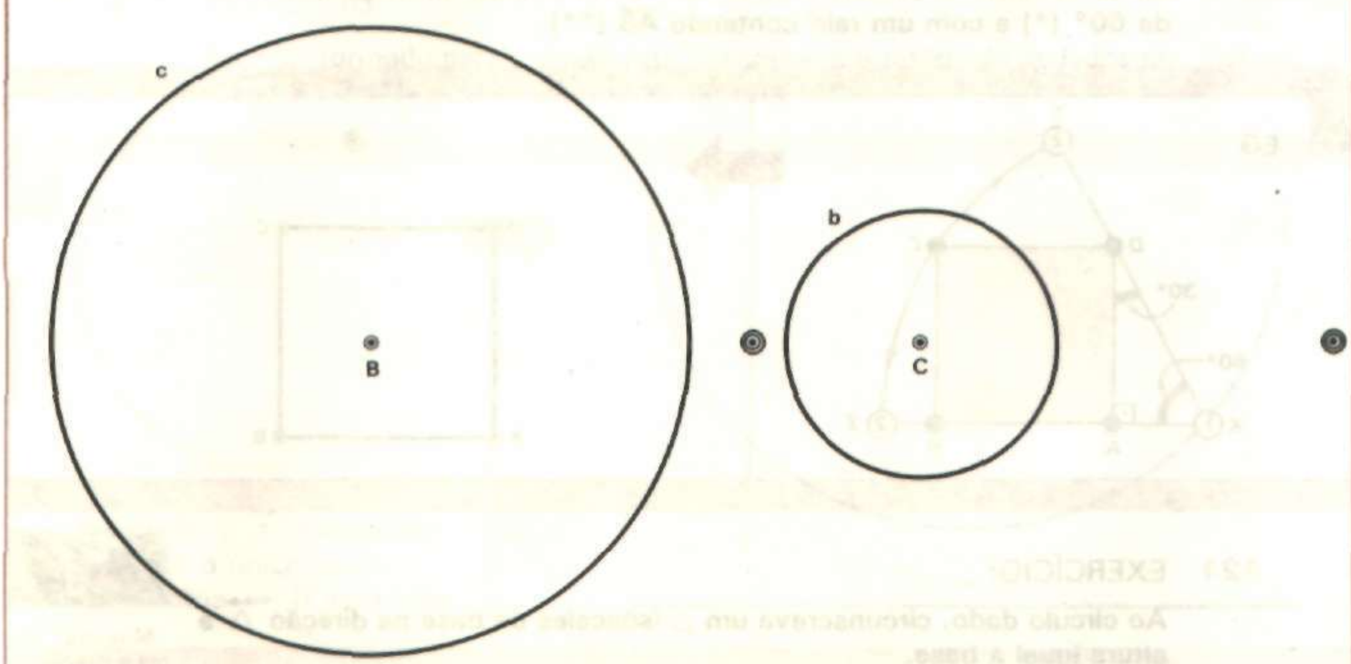
Duas circunferências são sempre homotéticas, tanto direta como inversamente.

$\overline{H}_d$ e $\overline{H}_i$ estão na reta que passa pelos centros (que são homotéticos); para obtê-los, basta ligar mais 2 pontos homotéticos para $\overline{H}_d$ e mais 2 para $\overline{H}_i$.

Obtêm-se pontos homotéticos traçando RAIOS de mesmo sentido (para $\overline{H}_d$) *e de sentidos opostos (para* $\overline{H}_i$).

423 EXERCÍCIO:

Obter o $\overline{H_d}$ e o $\overline{H_i}$ das ⊙s $(\overline{B}; c)$ e $(\overline{C}; b)$.



Escreva H_d e H_i.

424 **O par ordenado $(\overrightarrow{H_d; H_i})$ divide o segmento $\overline{BC}$ harmonicamente na razão dos raios:** Vide n.º 021.

$$\frac{|H_iC|}{|H_iB|} = \frac{|H_dC|}{|H_dB|} = \frac{b}{c}$$

425

As retas tangentes comuns externas incidem em $\overline{H_d}$ e as internas em $\overline{H_i}$.

426 EXERCÍCIO ***(no desenho do n.º 423)*:**

Traçar as retas tangentes comuns externamente às ⊙s dadas.

ROTEIRO:

1.º) $\overline{H_d}$ já foi obtido por você. Obteve-o?

2.º) Os pontos $\overline{E}$ de tangência na maior:

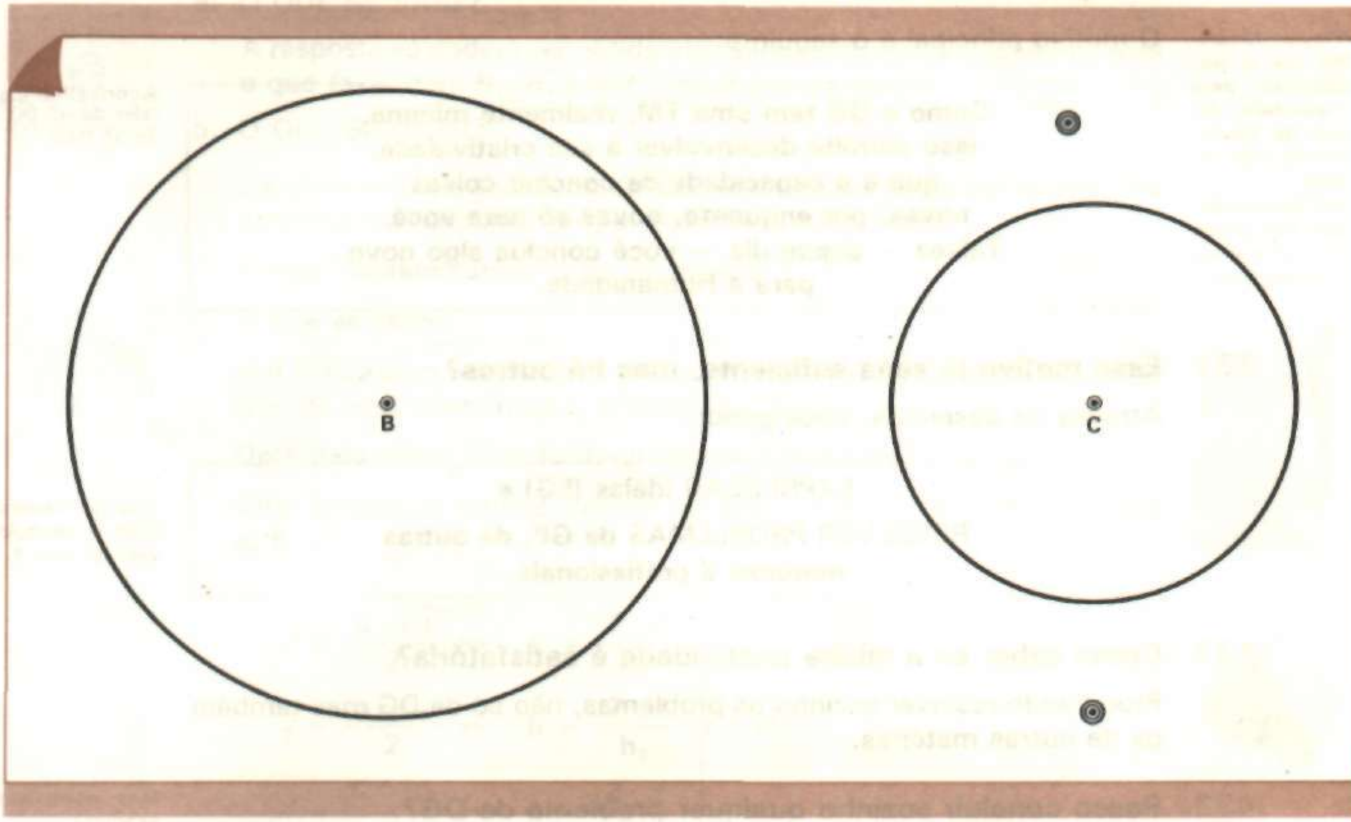
$\overline{E}$ [?] { a. Vêem $\overline{BH_d}$ sob 90° ⇒ L5a.
b. Estão em $(\overline{B}; c)$.

Já resolvemos estes problemas (por translação) nos n.os 103 e 104.

3.º) Os pontos de tangência na menor podem ser obtidos analogamente, mas é melhor traçar os raios $\overline{CE'}$ paralelos aos $\overline{BE}$.

427 EXERCÍCIO:

Traçar as retas tangentes comuns internamente às ⊙s dadas abaixo.



IV CONCLUSÃO DESTE CAPÍTULO

428 **Fizemos uma tentativa para organizar os problemas de homotetia, mas um andróide — com seu "cérebro" eletrônico — acharia insuficientes as informações que foram dadas...**

Felizmente o cérebro humano tem "algo mais" e, se estiver motivado, poderá suprir — com sua força de vontade, com sua persistência e com um treinamento adequado — as possíveis deficiências nas informações.

Sem registro...
Sem registro...

Cale-se!

429 **O número de problemas é ilimitado.**

Você próprio pode (e deve...) inventá-los.

Lembre-se que "a boa pinga se conhece no dia seguinte".

Não é possível decorar todos. Então, como proceder?

Procure "encaixar" um problema NOVO num dos tipos que estudamos. É "quase" certo que conseguirá; mas, se não conseguir:

USE O SEU CÉREBRO HUMANO!

430 Por que estudar DG?

A região do cérebro que é responsável pela criatividade, depois de desenvolvida, *não regride*. Isso facilita o estudo das outras matérias e o estudo das profissões.

O motivo principal é o seguinte:

Aconselhamos reler do n.º 001 ao n.º 010.

> **Como o DG tem uma TM, realmente mínima, isso permite desenvolver a sua criatividade, que é a capacidade de concluir coisas novas; por enquanto, novas só para você. Talvez — algum dia — você conclua algo novo para a Humanidade.**

431 Esse motivo já seria suficiente, mas há outros?

Através de desenhos, você pode:

> EXPRESSAR **idéias (EG) e**
> RESOLVER PROBLEMAS **de GP, de outras matérias e profissionais.**

Aconselhamos reler o capítulo zero do livro 1.

432 Como saber se a minha criatividade é satisfatória?

Procurando resolver sozinho os problemas, não só de DG mas também os de outras matérias.

433 Posso concluir sozinho qualquer problema de DG?

Mas caem em exames?...

Lembrar que falta ainda estudar os assuntos do livro 3.

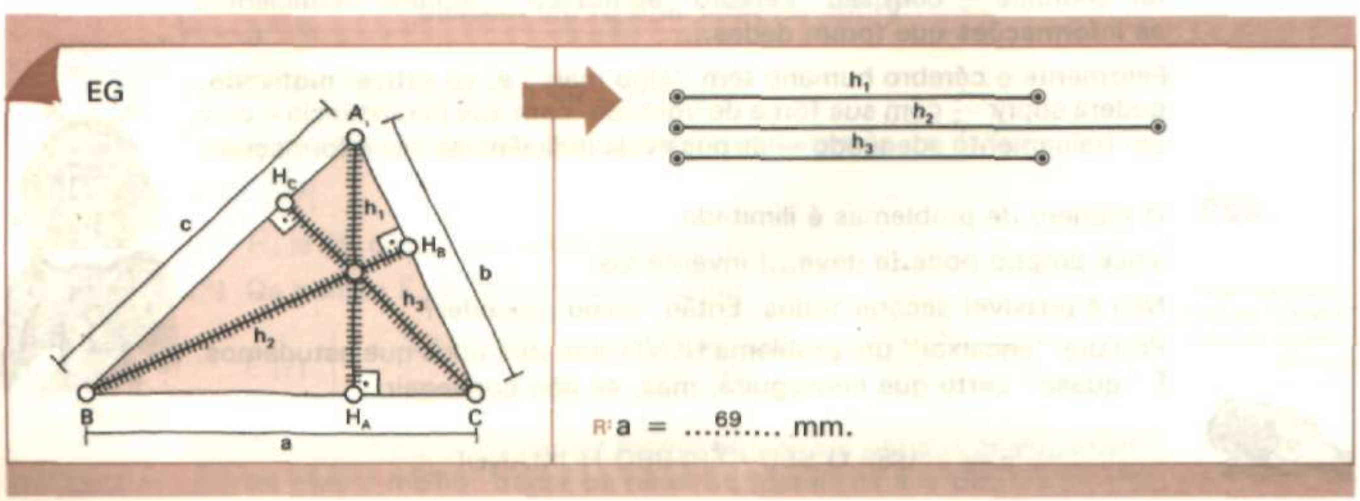
Pode, mas não no curto prazo de um exame! Há problemas cuja resolução ninguém conclui no curto prazo de uma prova...

434 Gostaria de conhecer um desses problemas...

Vamos mostrar como resolver um deles:

435 PROBLEMA ESPECIAL:

"Construir um △ABC, dados": h_1 h_2 h_3



RACIOCÍNIO (Para mostrar que é possível concluir):

a. O QUE SE SABE?

A resposta só poderá ser obtida utilizando os dados do problema, mas o que fazer com h_1, h_2 e h_3? Essa é a questão...

b. O QUE SE QUER?

Se obtivermos a forma do $\triangle ABC$, então poderemos construí-lo por semelhança (ângulos) ou por homotetia (paralelas).

Como "desemaranhar o fio da meada"?

É o "nó górdio"...

O que se sabe?

Um $\triangle$ fica com o tamanho ($\Rightarrow$ forma) determinado pelo tamanho de três de seus elementos... e temos h_1, h_2 e h_3...

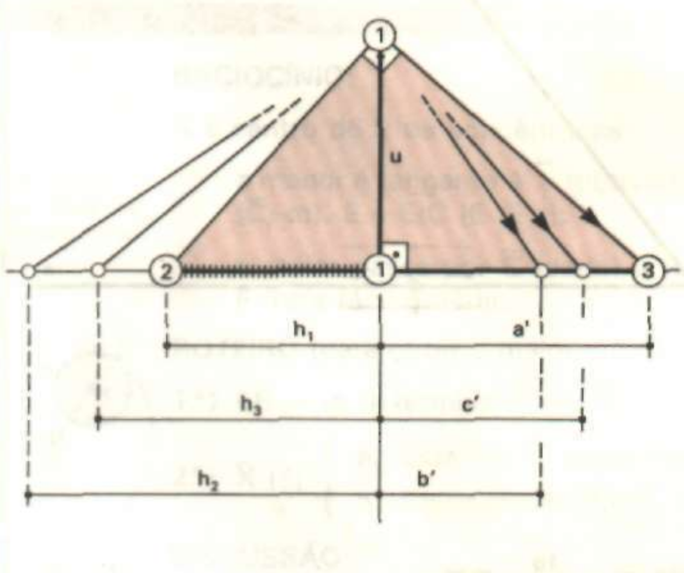
Dará para obter 1.º a forma e depois o tamanho?

Uma tentativa: vamos pensar na área $\mathcal{A}$ do $\triangle ABC$? Procuramos **a, b, c...**

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} = \dfrac{a \cdot h_1}{2} \Rightarrow a = \dfrac{2\mathcal{A}}{h_1} \\ \mathcal{A} = \dfrac{b \cdot h_2}{2} \Rightarrow b = \dfrac{2\mathcal{A}}{h_2} \\ \mathcal{A} = \dfrac{c \cdot h_3}{2} \Rightarrow c = \dfrac{2\mathcal{A}}{h_3} \end{array}\right\} \quad (*)$$

Uma das pouquíssimas coisas que poderemos fazer com os dados h_1, h_2 e h_3 é o seguinte:

u arbitrário



Com h_3 e h_2 procede-se analogamente.

$$\left.\begin{array}{l} u^2 = h_1 \cdot a' \Rightarrow a' = \dfrac{u^2}{h_1} \\ u^2 = h_2 \cdot b' \Rightarrow b' = \dfrac{u^2}{h_2} \\ u^2 = h_3 \cdot c' \Rightarrow c' = \dfrac{u^2}{h_3} \end{array}\right\} \quad (**)$$

Dividindo (*) por (**) temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{2\mathcal{A}}{u^2} = \text{const. } k$$

Isso prova que a', b', c' são lados de um △A'B'C' semelhante ao procurado △ABC.

Ufff!...

ROTEIRO:

1.º) Obtém-se (com u arbitrário) a', b', c'.

2.º) Constrói-se o △A'B'C' ∼ △ABC (mesma forma).

3.º) Por homotetia: marca-se $\overline{AH_A} \cong \overline{h_1}$ em $\overline{A'H'_A}$ (A' = A = H) e traça-se por $\overline{H_A}$ o segmento $\overline{BC}$ // $\overline{B'C'}$, achando o △ABC.

Só resolve o problema quem já o conhece...

436 **Num exame, esse problema examina o quê?**

A memória do examinando...

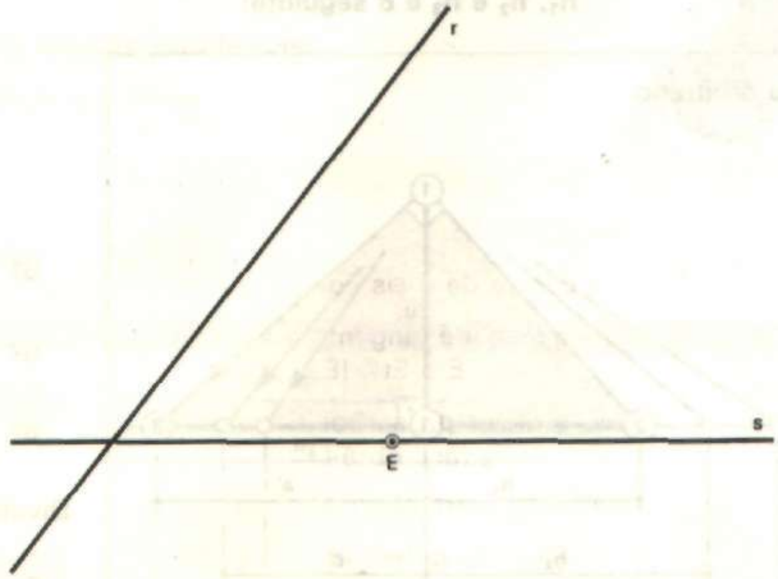
437 MISCELÂNEA

Daremos agora alguns exercícios sem especificar a qual ou a quais assuntos se referem. Isso torna mais difícil a pesquisa da resolução de cada um.

438 EXERCÍCIO:

Obter em $\overleftrightarrow{s}$ um ponto $\overline{X}$ eqüidistante de $\overline{E}$ e de $\overleftrightarrow{r}$.

EG



R: distância = ...16... mm.

RACIOCÍNIO:

Feito o EG (começando por uma das respostas), verifica-se que $\overline{X}$ é centro de uma ⊙ que:

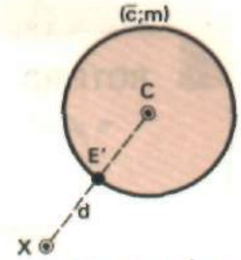
É o problema tt't'' de tangência (os centros são intersecções das bissetrizes).

a. tangencia $\overleftrightarrow{r}$;

b. tangencia $\overleftrightarrow{r}'$, simétrica de $\overleftrightarrow{r}$ com relação à $\overleftrightarrow{s}$ e

c. tangencia $\overleftrightarrow{t} \perp \overleftrightarrow{s}$ em $\overline{E}$.

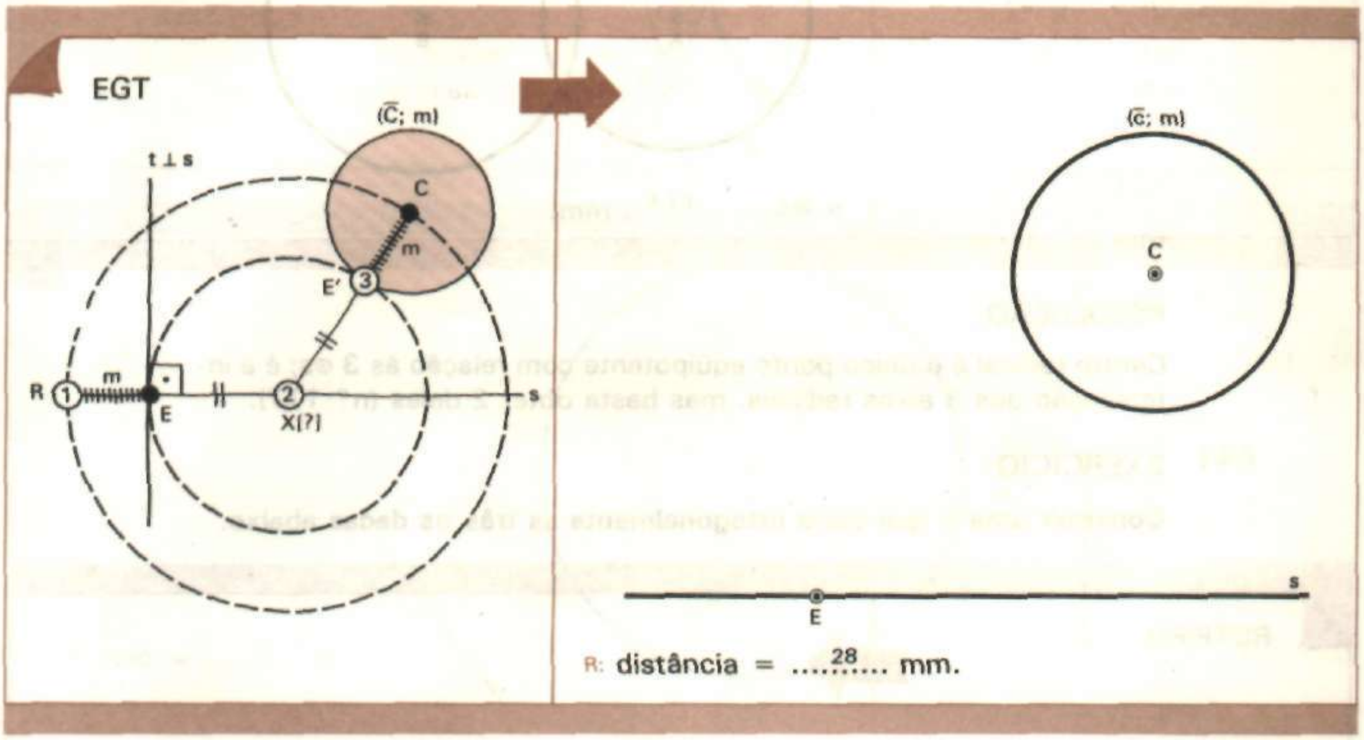
Trata-se de obter 2 ⊙s tangentes à $\overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{r}'$ e $\overleftrightarrow{t}$.



XE' = d é a distância entre $\overline{X}$ e $(\overline{C}; m)$.

439 EXERCÍCIO:

Obter em $\overleftrightarrow{s}$ um ponto $\overline{X}$ eqüidistante de $\overline{E}$ e da circunferência $(\overline{C}; m)$.



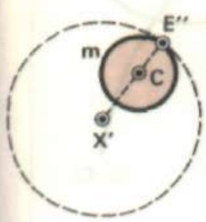
RACIOCÍNIO:

$\overline{X}$ é centro de 2 ⊙s concêntricas:

Essas duas ⊙s estão determinadas.

a menor é tangente à $\overleftrightarrow{t}$ (obtível) em $\overline{E}$ (dado) e também tangente à $(\overline{C}; m)$. É o EtC [E ∈ t];

a maior passa por $\overline{C}$ (dado) e $\overline{R}$ (obtível) e tem centro $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{s}$. É mais fácil obtê-la.



ROTEIRO (para obter a maior):

1.º) ER = m determina $\overline{R}$ em $\overleftrightarrow{s}$.

2.º) $\overline{X}$ [?] { a. Está em $\overleftrightarrow{s}$ (mera cópia).
b. Eqüidista de $\overline{R}$ e $\overline{C}$ ⇒ L3.

DISCUSSÃO:

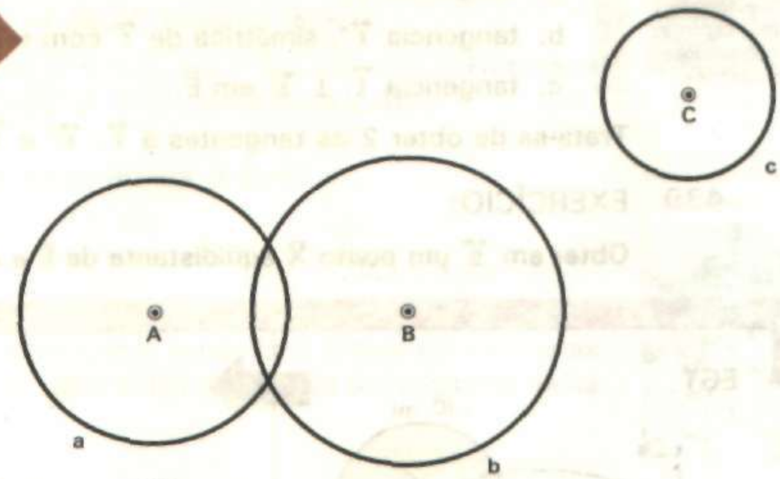
X'E'' não é a distância entre $\overline{X'}$ e $(\overline{C}; m)$ não é "a menor".

O problema EtC [E ∈ t] tem duas respostas, mas o centro $\overline{X'}$ da outra, tangente exteriormente, não é resposta deste problema.

440 EXERCÍCIO:

Obter o centro radical $\overline{R}$ de 3 ⊙s dadas.

ROTEIRO



R: RA = ...67,5... mm.

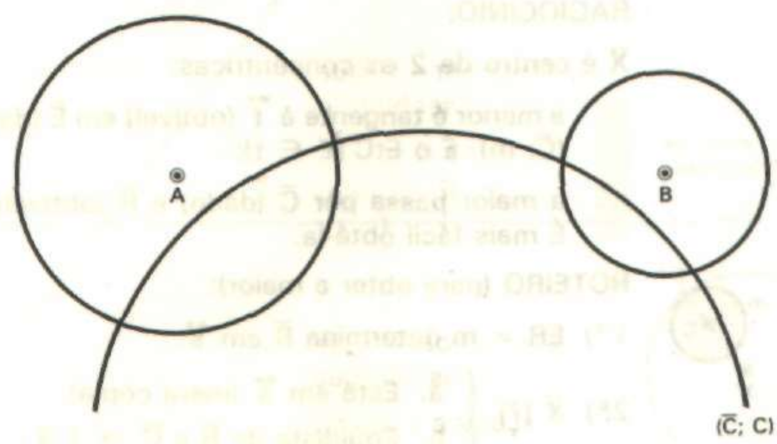
RESOLUÇÃO:

Centro radical é o único ponto eqüipotente com relação às 3 ⊙s; é a intersecção dos 3 eixos radicais, mas basta obter 2 deles (n.º 177).

441 EXERCÍCIO:

Construir uma ⊙ que corta ortogonalmente as três ⊙s dadas abaixo.

ROTEIRO



n.º 188 (se precisar)

R: raio = ...31... mm.

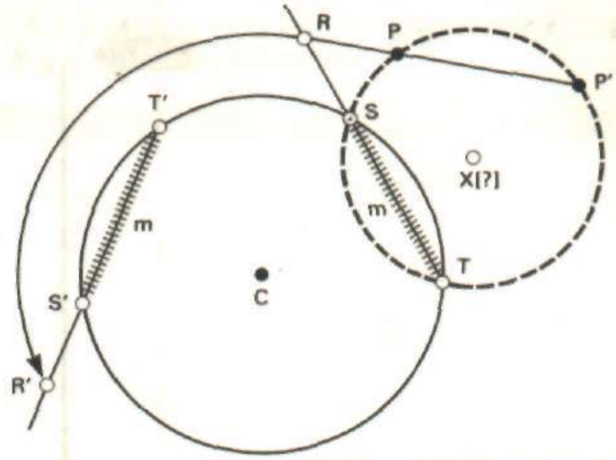
442 EXERCÍCIO:

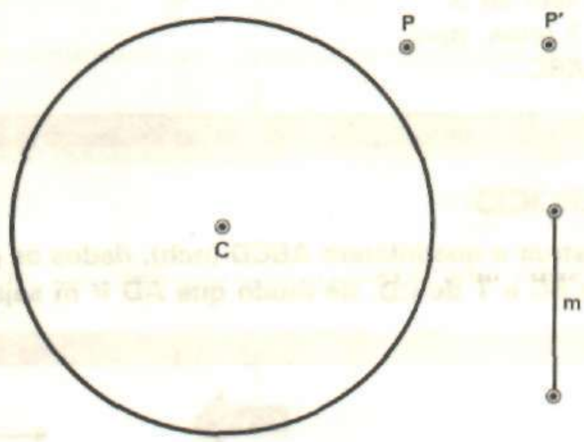
Construir uma ⊙ que contém $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ e determina na ⊙ dada uma corda de comprimento m.

RACIOCÍNIO:

Todas as ⊙s que passam por $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ e cortam a ⊙ dada, determinam cordas que passam por $\overline{R}$ (centro radical).

EGT





R: raio = ...17.... mm.

ROTEIRO:

1.º) Trace uma ⊙ qualquer por $\overline{P}$ e $\overline{P}'$, determinando uma corda $\overline{MN}$ (não desenhada no EGT).

2.º) Obtenha $\overline{R} = \overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{MN}$.

3.º) Obtido $\overline{R}$, usaremos:

ROTAÇÃO:

4.º) Marcamos T'S' = m numa posição qualquer.

5.º) Traçamos o arco ($\overline{C}$; CR), obtendo $\overline{R}'$.

6.º) O arco ($\overline{R}$; R'T') determina $\overline{T}$ e $\overline{T}''$ (não desenhado nesse EGT).

7.º) $\overline{X}$ [?] $\begin{cases} \text{a. na mediatriz de } \overline{PP'} \Rightarrow \text{L3} \\ \text{b. na mediatriz de } \overline{ST} \Rightarrow \text{L3} \end{cases}$

Giramos a ⊙ dada, com sua corda $\overline{T'S'}$, no sentido contrário ao da flecha, até $\overline{R'}$ "bater" em $\overline{R}$.

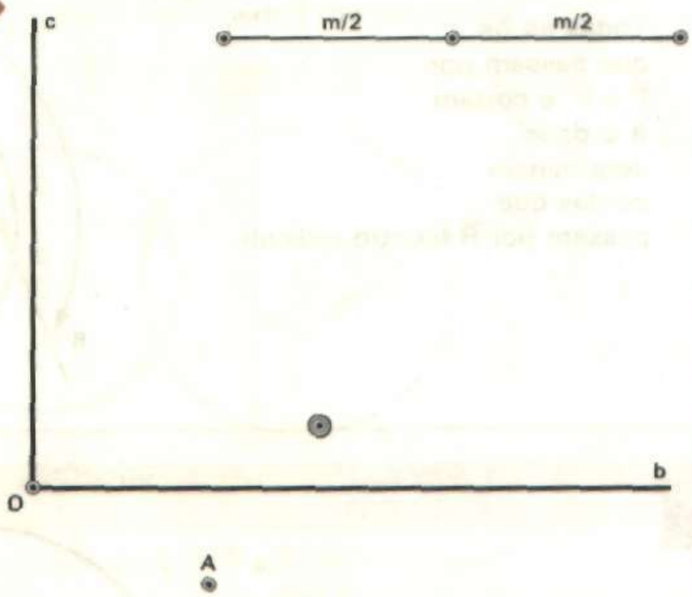
443 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle ABC$, retângulo em $\overline{A}$, com $\overline{B}$ em $\overrightarrow{Ob}$, $\overline{C}$ em $\overrightarrow{Oc}$ e $BC = m$.

EG

Basta descobrir QUAL PONTO AUXILIAR pode ser obtido.

A construção tem só 3 arcos de ⊙ e 3 retas, para construir o $\triangle ABC$...

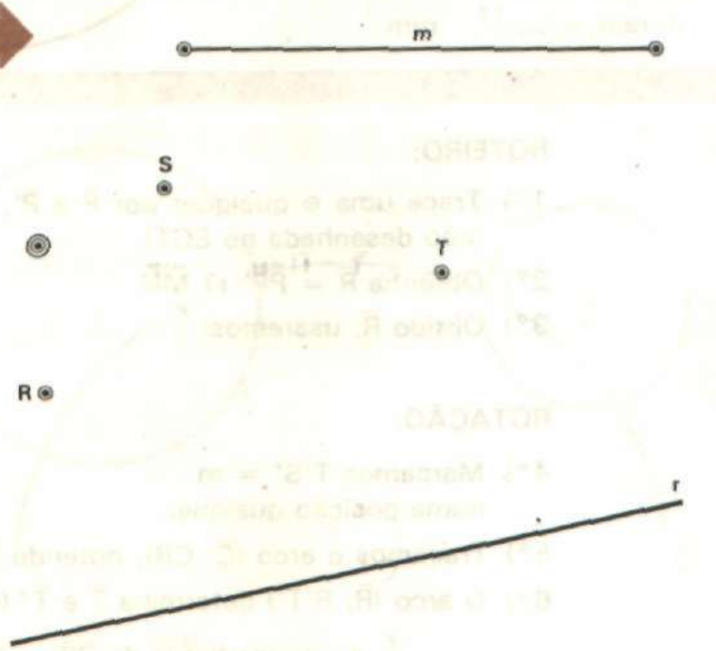


444 EXERCÍCIO:

Construir o quadrilátero ABCD (nch), dados os pontos médios $\overline{R}$ de $\overline{AB}$, $\overline{S}$ de $\overline{BC}$ e $\overline{T}$ de $\overline{CD}$, de modo que $\overline{AD} \cong \overline{m}$ seja $/\!/$ $\overleftrightarrow{r}$.

EG

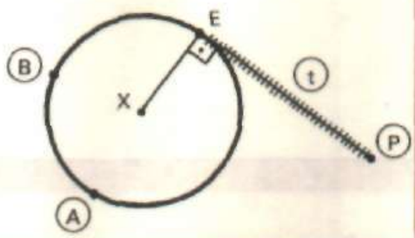
Foram dados 3 dos pontos médios; seja $\overline{X}$ o pt.m. de $\overline{AD}$.
RSTX é um ....



Nos exercícios seguintes são fornecidos os enunciados e os EGs.
Faça, nos locais indicados, os EGTs e os ROTEIROS.

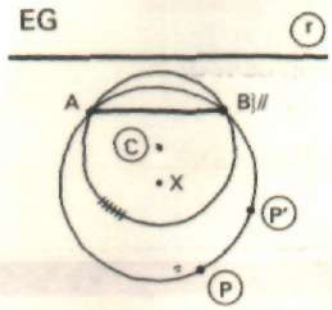
445 EXERCÍCIO:

Construir uma ⊙ que passa por $\overline{A}$ e $\overline{B}$ tal que uma reta a ela tangente e conduzida por $\overline{P}$ meça t entre $\overline{P}$ e o ponto de tangência.

EG	EGT	ROTEIRO
		

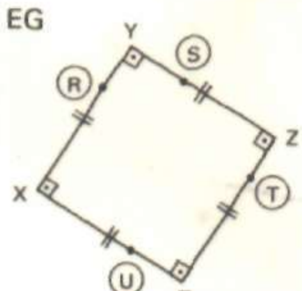
446 EXERCÍCIO:

Uma ⊙ contém $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ e determina na ⊙ dada uma corda paralela à $\overleftrightarrow{r}$. Obtenha seu raio.

EG	EGT	ROTEIRO
		

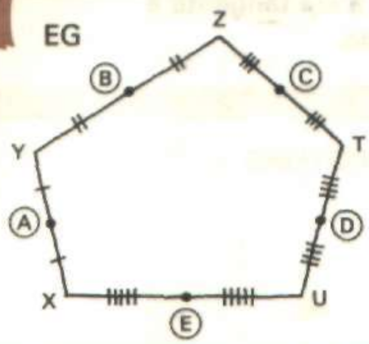
447 EXERCÍCIO:

Dados $\overline{R}$, $\overline{S}$, $\overline{T}$ e $\overline{U}$, um de cada lado de um quadrado, construí-lo.

EG	EGT	ROTEIRO
		

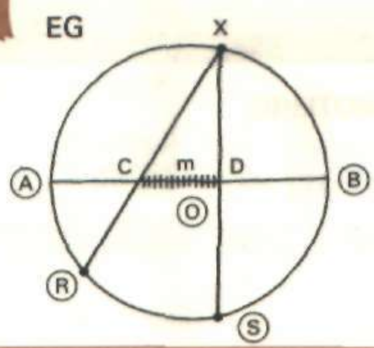
448 EXERCÍCIO:

Construa um pentágono, dados os pontos médios $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ e $\overline{E}$ dos seus lados.

EG	EGT	ROTEIRO
		

449 EXERCÍCIO:

Obtenha $\overline{X}$ na ⊙ dada, de modo que o ∢ RXS determine no diâmetro $\overline{AB}$ um segmento $\overline{RS} \cong \overline{m}$.

EG	EGT	ROTEIRO
		

450 EXERCÍCIO:

m_1 m_2 m_3 (comprimento das medianas)

EG	EGT	ROTEIRO