3

DESENHO GEOMÉTRICO

MARMO

S MARMO E NICOLAU MARMO

editora scipione

editora scipione

DIRETORIA
Luiz Esteves Sallum
Maurício Fernandes Dias
Vicente Paz Fernandez
Patrícia Fernandes Dias
José Gallafassi Filho
Antonio Nicolau Youssef
Joaquim Nascimento

GERÊNCIA EDITORIAL
Aurelio Gonçalves Filho

RESPONSABILIDADE EDITORIAL
Valdemar Vello

REVISÃO
chefia - Sâmia Rios
assistência - Miriam de Carvalho Abões
preparação - Irene Hikichi
revisão- Eloiza Helena Rodrigues,
Claudia Blanco Padovani e Dráusio de Paula

GERÊNCIA DE PRODUÇÃO
Gil Naddaf

ARTE
chefia - Antonio Tadeu Damiani
coordenação geral - Sérgio Yutaka Suwaki
coordenação de arte - Edson Haruo Toyota
assistência - Young Lee Kim
capa e miolo - Ulhôa Cintra Comunicação Visual
ilustrações - Ricardo Henrique e Maurício Negro

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
José Antônio Ferraz

COMPOSIÇÃO E ARTE-FINAL
Diarte Editora e Comercial de Livros
coordenação geral - Nelson S. Urata
coordenação de arte-final - Silvio Vivian
coord. de composição - Armando F. Tomiyoshi
composição - José Anderson Campos e
Célia Harumi Sato Loures
arte-final - João Passos, Jorge L. Barriunuevo e
Rogério Sardella

IMPRESSÃO E ACABAMENTO
Artes Gráficas e Editora Parâmetro Ltda.

Editora Scipione Ltda.

MATRIZ
Praça Carlos Gomes, 46
01501-040 São Paulo SP

DIVULGAÇÃO
Rua Fagundes, 121
01508-030 São Paulo SP

Tel. (011) 239 1700
Telex (11) 26732
Caixa Postal 65131

1995
ISBN 85-262-1870-0

Dedicamos o presente curso de Desenho Geométrico aos professores que permaneceram lecionando esta matéria durante os últimos vinte anos e, também, aos nossos alunos, com os quais tanto aprendemos.

SUMÁRIO

CAPÍTULO

3 TANGÊNCIA

CAPÍTULO

4 CURVAS CÔNICAS

APRESENTAÇÃO

"Devemos tornar as coisas simples, mas não mais simples do que são."

Einstein

Pensando na escola como um centro de formação de indivíduos aptos a exercer a sua cidadania, dotados de juízo crítico, capazes de expressar com clareza suas idéias e de compreender os principais problemas que afligem a sociedade atual, não temos dúvidas de que se torna necessário aos estudantes dominar três tipos de linguagem: verbal, simbólica e gráfica. A linguagem gráfica tem sido relegada a um plano secundário, abrindo uma lacuna na formação dos alunos.

O Desenho estabelece um canal de comunicação universal para a transmissão da linguagem gráfica. É disciplina que permite ao estudante tirar uma série muito grande de conclusões a partir de um mínimo de informações, liberando a criatividade. Interliga as demais disciplinas ajudando a compreensão de desenhos em geral e a resolução de questões de natureza prática do cotidiano. O Desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria, fortalecendo o ensino desta importante matéria.

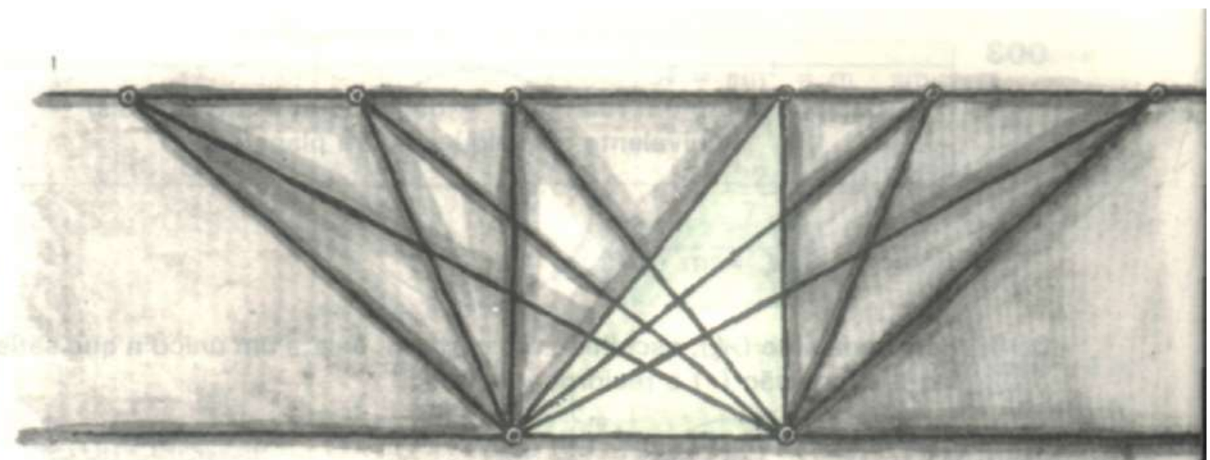
Neste curso de Desenho também estudaremos Geometria, sempre que julgarmos necessário, sem assumir compromisso com a ordenação lógica que tão bem a caracteriza.

Percebe-se uma tendência mundial no sentido de restaurar o ensino do Desenho. Não poderíamos nos omitir.

Agradecemos à Editora Scipione a oportunidade que nos concede de participar desse processo publicando esta obra que pretende, acima de tudo, evidenciar a importância do Desenho como disciplina formativa.

Receberemos, com muito prazer, críticas e sugestões para melhorar este trabalho.

Os Autores



CAPÍTULO

1 EQUIVALÊNCIA

I PRELIMINARES

001 *Qual a diferença entre* superfície *e* área?

A superfície de uma figura pode ser pintada com uma tinta qualquer.

Superfície é uma figura limitada por uma linha, ou seja, é um CONJUNTO DE PONTOS. **Área de uma figura ($\mathcal{A}_{fig.}$) é um** NÚMERO **que expressa a medida da superfície da figura, numa dada unidade.**

Releia...

$\mathcal{A}_{fig.}$	=	25	cm^2
(área)		(número)	(unidade)

002 Figuras diferentes podem ter a mesma área?

= Igual ou coincidente
≈ Aproximadamente igual
~ Semelhante
≅ Congruente
≈ Equivalente

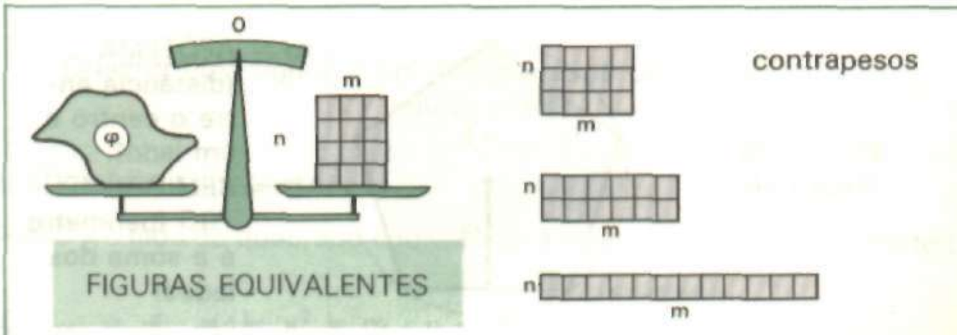
Podem e, quando isso acontece, dizemos que essas figuras são **equivalentes** (≈).

Essa coleção de símbolos parece uma coleção de minhocas...

Figuras são EQUIVALENTES (≈) se, e somente se, têm a mesma área e na mesma unidade.

II

Todas essas figuras são recortadas em chapas de mesma espessura.



m e n são *comprimentos. Chamamos de comprimento a medida de um segmento.*

003

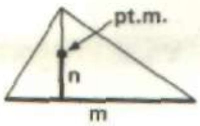
A demonstração geométrica não é assunto deste curso de DG.

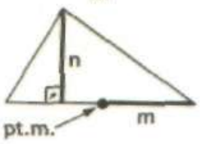
> Sempre existe um **retângulo** — de lados **m** e **n** (variáveis) — **equivalente** a qualquer figura plana (φ).

Então: $\mathcal{A}_\varphi = m \cdot n$ (*)

004 **Para cada área ($\mathcal{A}_\varphi$), escolhido um certo m, existe um único n que satisfaz a expressão (*) e reciprocamente.**

É o n do retângulo de lado m e que equilibra a balança.





EXEMPLO: num triângulo (φ),

se m = BASE $\Leftrightarrow$ n = METADE DA ALTURA;

se m = METADE DA BASE $\Leftrightarrow$ n = ALTURA;

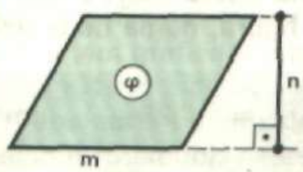
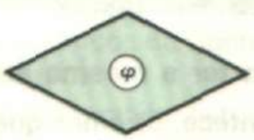
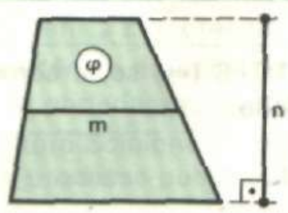
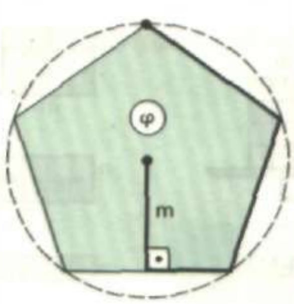
etc.

005 **E para as outras figuras geométricas?**

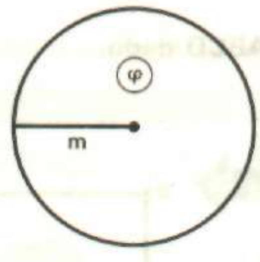
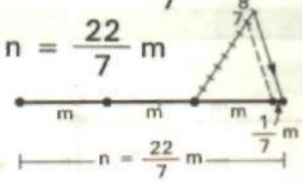
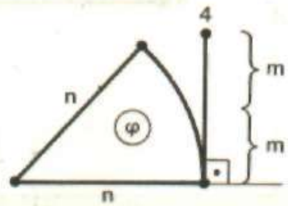
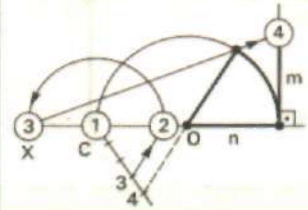
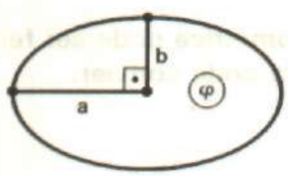
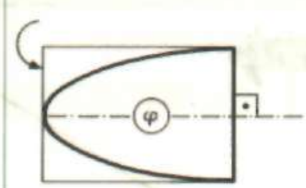
A seguir mostraremos uma tabela com as fórmulas das várias áreas:

006

A área é sempre $\boxed{\mathcal{A}_\varphi = m \cdot n}$

NOME	FIGURA	OBSERVAÇÕES
PARALELOGRAMO (// GR.)		ou outro lado e a respectiva altura ou dois triângulos
LOSANGO		ou como // GR ou como 2 $\triangle$s
TRAPÉZIO		m = BASE MÉDIA (semi-soma das bases) n = ALTURA
POLÍGONO REGULAR		m = APÓTEMA (distância entre o centro e um lado) n = SEMIPERÍMETRO (perímetro é a soma dos lados)

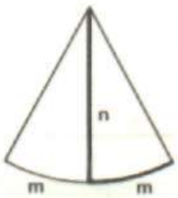
Este livro 3 deve ser estudado após os livros 1 e 2.

CÍRCULO		$\mathcal{A} = \pi m^2 = m \cdot \pi m$ $\mathcal{A} \simeq m \cdot \frac{22}{7} m$ $n = \frac{22}{7} m$ 
SETOR CIRCULAR		
ELIPSE		$\boxed{\mathcal{A}_\varphi = \pi ab}$ $\begin{cases} m \simeq \frac{22}{7} a \\ n = b \end{cases}$ ou o contrário
SEGMENTO DE PARÁBOLA	Retâng. circunscrito 	$\mathcal{A}_\varphi = \frac{2}{3} \mathcal{A}_{\text{retâng.}}$ m = 2/3 de um lado n = o outro lado

Se precisar:

Vide livro 2 (nº 233).

Vide livro 2 (nº 240).



Só para decorar: é como um △ de base (2 m) curva e altura (n).

A elipse e a parábola serão estudadas no cap. 3.

III PROBLEMAS TÍPICOS

007 Os problemas de equivalência estão reunidos em problemas típicos. Ao explicar cada tipo, daremos apenas os exercícios necessários e suficientes para aprender a resolução de qualquer outro problema do tipo que está sendo estudado.

008

TIPO 1 QUADRATURAS

> Quadrar uma figura φ significa construir um quadrado a ela equivalente.

RESOLUÇÃO GENÉRICA:

Sendo **x** o lado do quadrado equivalente à figura dada φ, deveremos ter:

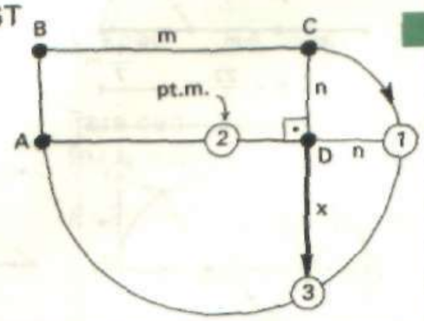
$$\mathcal{A}_{\text{quadrado}} = \mathcal{A}_\varphi \overset{(*)}{\Longrightarrow} x^2 = m \cdot n \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{m \cdot n}}$$

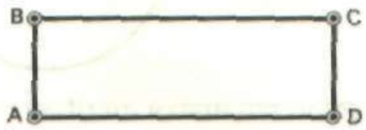
x é a média geométrica entre o m e o respectivo n de φ.

009 EXERCÍCIO:

Quadratura do retângulo ABCD dado.

EGT





R: x

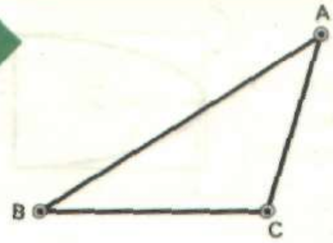
010 A obtenção da média geométrica pode ser feita por qualquer processo — gráfico — e desenhada onde convier.

Simplificações *devem ser espontâneas* e não ensinadas...

011 EXERCÍCIO:

Quadrar o △ABC dado.

EG



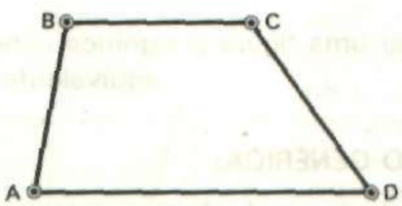
Procure economizar espaço no desenho final.

R: x

012 EXERCÍCIO:

Construir um quadrado equivalente ao trapézio ABCD dado.

EG



R: x

013 EXERCÍCIO:

Construa um decágono regular (convexo) inscrito numa ⊙ de raio r e faça a sua quadratura.

EG

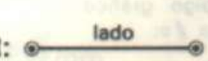
Desenhe com precisão. R: 

014 EXERCÍCIO:

Quadre um setor circular de raio r e ângulo central 60°.

EG

Para conferir, você pode calcular x = lado.

R: 

015 EXERCÍCIO:

Quadratura de um círculo de raio r dado.

EG

Calcule o valor teórico de $x = \sqrt{\pi r^2} \simeq$ .....
A diferença é devida ao erro gráfico, pois o erro teórico "some".

016

O erro gráfico pode apenas ser diminuído (livro 1).

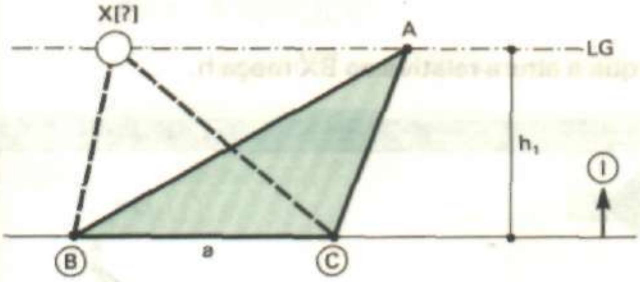
O problema da QUADRATURA DO CÍRCULO exclusivamente com régua e compasso, juntamente com a trisseção de um ângulo genérico e com a duplicação do cubo (construir graficamente um cubo de volume duplo), forma uma tríade de problemas que tem fascinado os geômetras por mais de 2 000 anos. Sabe-se hoje que esses problemas só têm solução por processos aproximados (livro 2). Desde que o erro teórico de um desses processos seja menor do que o erro gráfico inevitável ($\simeq$ 0,5 mm) em qualquer construção gráfica, os resultados são perfeitamente aceitáveis nas profissões.

017

TIPO 2 — LUGARES GEOMÉTRICOS (LG)

Código gráfico para // s:

TIPO 2A: EM TRIÂNGULOS



Mantendo $\overline{B}$ e $\overline{C}$ fixos e variando $\overline{A}$ na reta $\overleftrightarrow{LG}$ // $\overline{BC}$, a área do △ABC não se altera.

"Fixo" refere-se à posição.

De fato, a base BC = a e a altura h_1 mantêm-se constantes.

"Constante" refere-se ao tamanho.

$\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{LG} \Leftrightarrow \triangle BCX \approx \triangle ABC$

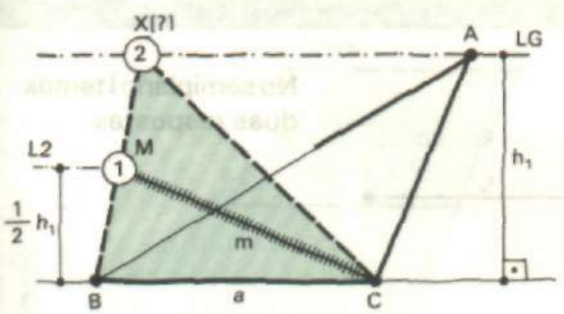
Enunciar que o △BCX (procurado) é equivalente ao △BCA (dado) é o mesmo que dar $\overline{B}$, $\overline{C}$ (BC = a) e h_1.
Para determinar a forma, o tamanho e a posição (no semiplano I) do △BCX, falta apenas o tamanho de mais um elemento do △BCX: ou um ângulo interno, ou um ângulo externo, ou uma mediana, ou uma altura (exceto h_1), ou o raio da circunscrita, etc.
A aplicação do MF, com um EG bem-feito, permite resolver todos os problemas do TIPO 2A.
Faremos alguns exercícios que permitem recordar a matéria anterior (livros 1 e 2).

Manual do examinador...

018 EXERCÍCIO:

Construir um △BCX ≈ △BCA, de modo que a mediana relativa ao $\overline{BX}$ tenha comprimento m.

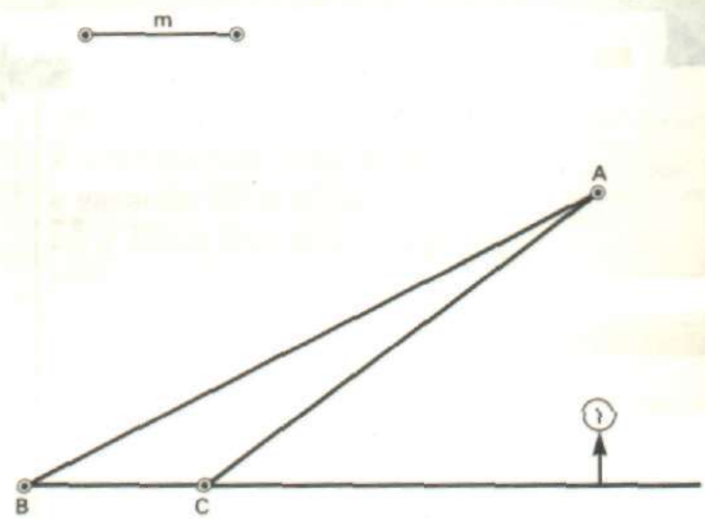
EGT



ROTEIRO:

1º) $\overline{M}$ [?]
- a. Dista m de $\overline{C} \Rightarrow$ L1.
- b. Dista $\frac{h_1}{2}$ de $\overleftrightarrow{BC} \Rightarrow$ L2.

2º) $\overline{X}$ [?]
- a. Em $\overrightarrow{BM}$ *(mera cópia)*.
- b. Em $\overleftrightarrow{LG}$ (idem).

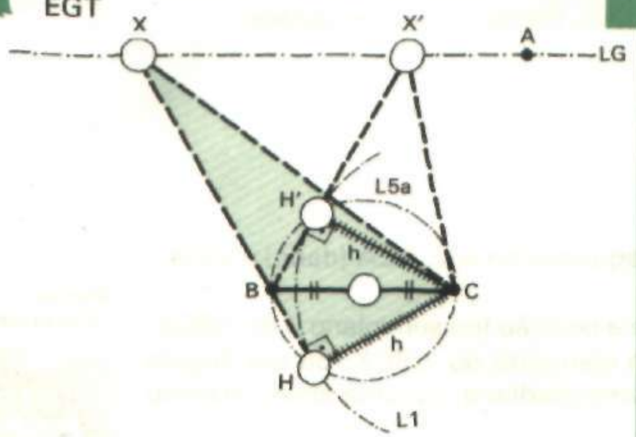


No semiplano I há duas respostas.
R: BX ≈ ...52,5... mm. BX' ≈ ...71,5... mm.

019 EXERCÍCIO:

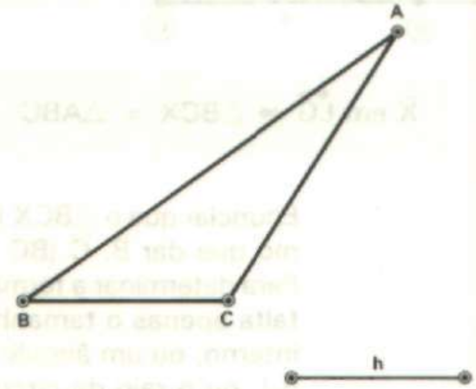
Construir um $\triangle BCX \approx \triangle BCA$, de modo que a altura relativa ao $\overline{BX}$ meça h.

EGT



Excepcionalmente, fizemos o EGT com as duas respostas para mostrá-las (visualmente).

$\overline{H}$ e $\overline{H'}$
- a. Distam h de C ⇒ L1.
- b. Vêem $\overline{BC}$ sob 90° ⇒ L5a.



No $\triangle BCX$ a altura CH = h é externa.
No $\triangle BCX'$ a altura CH' = h é interna.

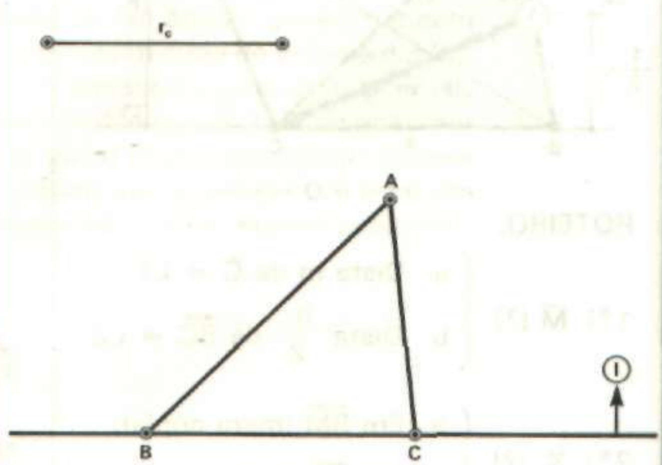
R: BX ≃ 42,0 mm; BX' ≃ 41,5 mm.

020 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle BCX \approx \triangle BCA$, sendo dado o raio r_C da ⊙ circunscrita ao $\triangle BCX$.

EG

No semiplano I temos duas respostas.

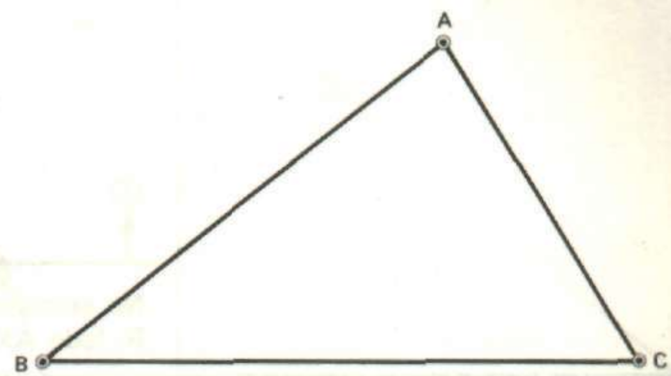


R: BX ≃ 33,0 mm; BX' ≃ 57,5 mm

021 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle BCX \approx \triangle BCA$ e com $\sphericalangle BXC = 75°$.

EG



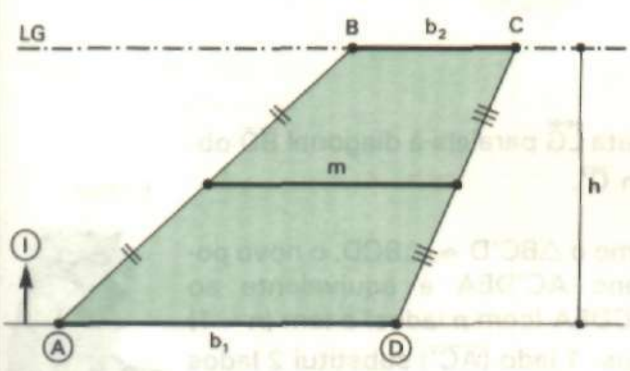
$$75° = 60° + \frac{1}{2} \cdot 30°$$

Sempre convém reforçar as respostas

R: $BX \simeq 44{,}5$ mm; $BX' \simeq 77{,}5$ mm

022

TIPO 2B: EM TRAPÉZIOS



$$m = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \text{ e } \mathcal{A} = m \cdot h$$

Mantendo:

$\overline{A}$ e $\overline{D}$ fixos ($AD = b_1$), b_2 constante e variando $\overline{BC} \cong \overline{b_2}$ na reta $\overleftrightarrow{LG} \parallel \overline{AD}$, a área do trapézio não varia.

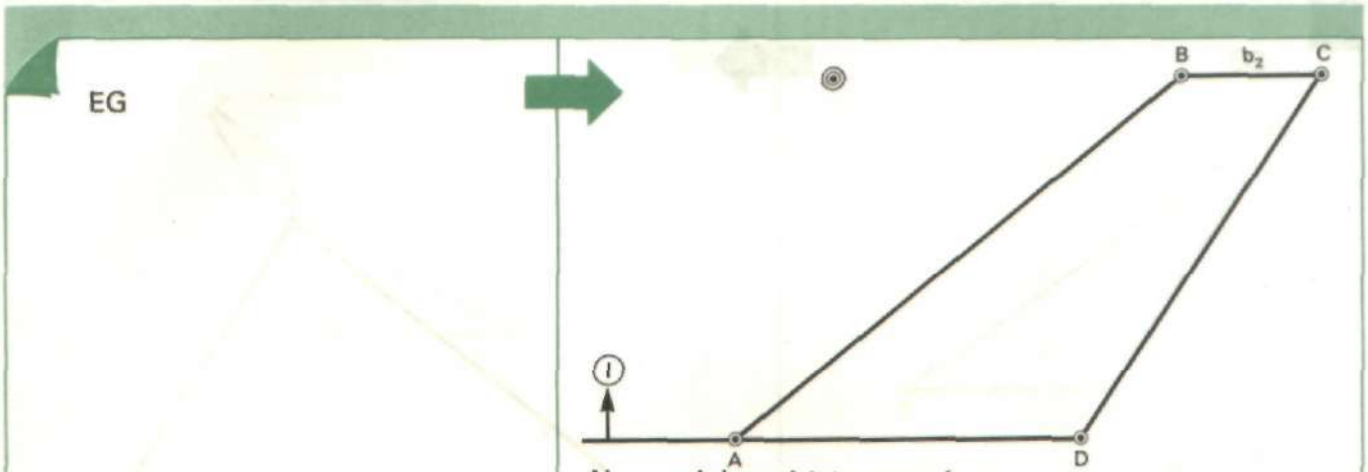
Com "chapéu" é figura. Sem "chapéu" é número (medida).

De fato: b_1, b_2, h constantes $\Rightarrow$ área constante.

Essa propriedade nos permite resolver uma coleção de problemas, mas basta um:

023 EXERCÍCIO:

Mantendo $\overline{A}$ e $\overline{D}$ fixos e b_2 constante, construir no semiplano I o trapézio isósceles AXYD ≈ ABCD.



No semiplano I há uma só resposta.
R: lado AX ≈ 49,5 mm.

ROTEIRO:

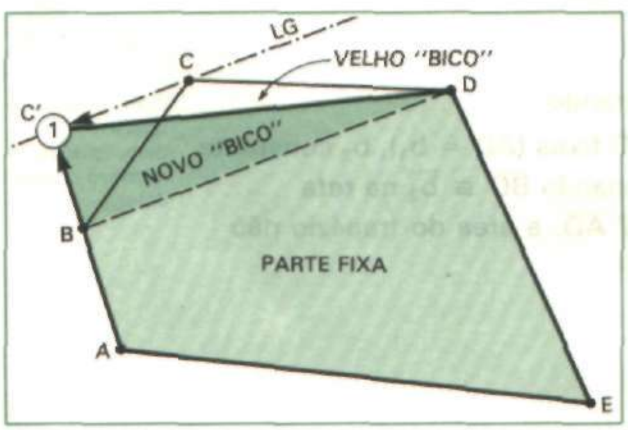
1º) A mediatriz de $\overline{AD}$ determina $\overline{M}$ em $\overleftrightarrow{LG}$.

2º) $XM = MY = \frac{1}{2} b_2 \rightarrow \overline{X}$ e $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{LG}$.

024

TIPO 3 "BICOTOMIA" I

"Bicotomia": a arte de cortar bicos...



A diagonal deve isolar um único vértice, pelo qual se traça a paralela.

A reta $\overleftrightarrow{LG}$ paralela à diagonal $\overline{BD}$ obtém $\overline{C'}$.

Como o △BC'D ≈ △BCD, o novo polígono AC'DEA é equivalente ao ABCDEA (com n lados) e tem (n − 1) lados: 1 lado ($\overline{AC'}$) substitui 2 lados ($\overline{AB}$ e $\overline{BC}$).

É "bico"...

Cada tramóia nos dá um novo polígono com um lado a menos. A repetição nos conduz a um triângulo equivalente ao polígono dado. Menos do que 3 lados, não dá...
A cada procedimento inverso aumentará de 1 o número de lados.

Há várias respostas.

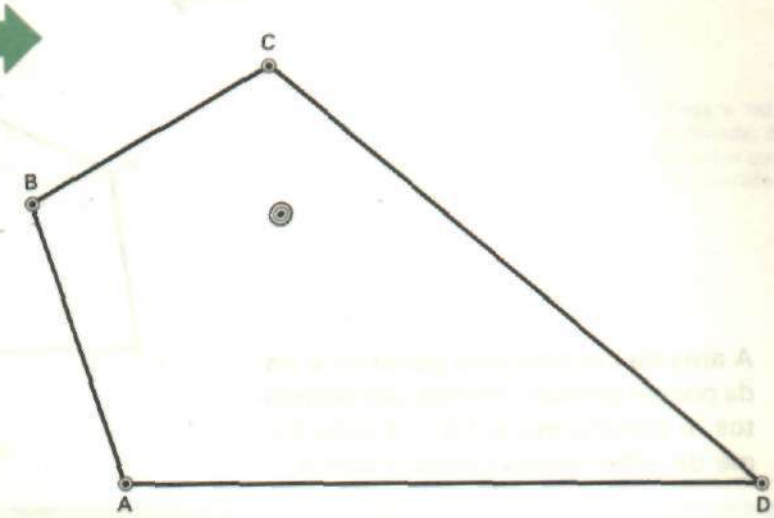
É só fazer a construção "de trás para diante".

Polígono de (n) lados ⇔ polígono de (n + 1) lados.

025 EXERCÍCIO:

Transformar o polígono ABCD num △ isósceles equivalente e com base $\overline{AD}$.

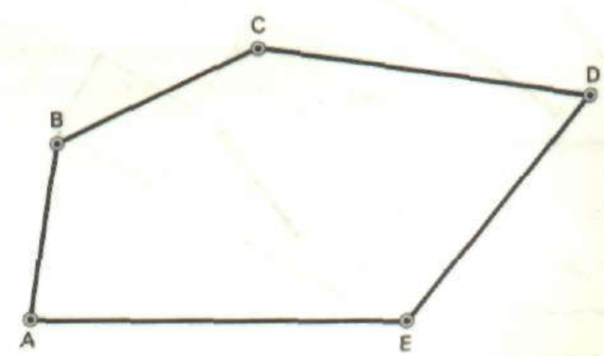
EG



026 EXERCÍCIO:

Transformar o polígono ABCDE num △ equivalente.

EG

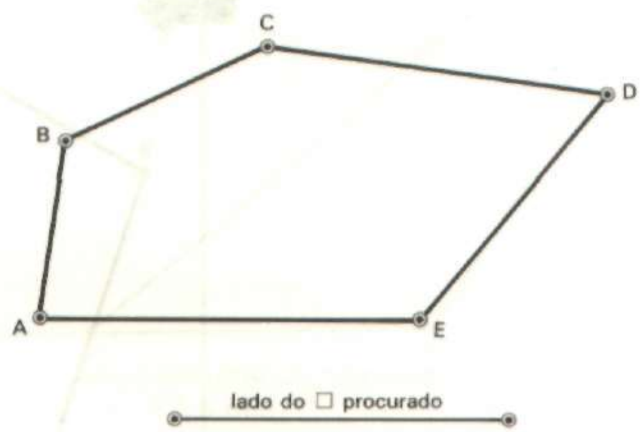


027 EXERCÍCIO:

Quadrar o polígono ABCDE do item 026.

EG

A área de um polígono genérico é dada por um produto de dois comprimentos, e transformá-lo no △ é uma forma de obter esses comprimentos.

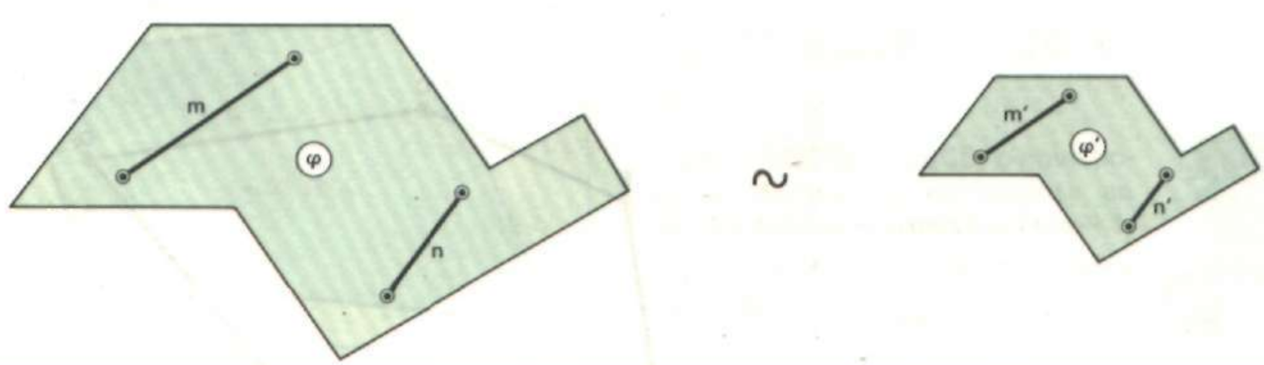


ROTEIRO (do exercício 027):

1º) Transforma-se, mudando "bicos", o polígono dado num △ equivalente (você já o fez).

2º) Constrói-se um quadrado (□) equivalente ao △.

028 TEORIA **É útil também em outras matérias.**



029 Você já sabe que há infinitos pares (m; n) de comprimentos **m** e **n** que multiplicados entre si dão a área de qualquer figura φ, isto é:

m e n são lados de um dos infinitos retângulos equivalentes à φ (nºs 003 e 004).

$$\mathcal{A}_\varphi = m \cdot n \qquad (*)$$

030 Em duas figuras φ e φ' semelhantes (mesma forma), esses comprimentos formam pares ordenados $\overrightarrow{(m;\ m')}$ e $\overrightarrow{(n;\ n')}$ de elementos homólogos. Então:

φ é a 1ª figura.

$$\mathcal{A}_\varphi = m \cdot n \xRightarrow{\varphi \sim \varphi'} \mathcal{A}_{\varphi'} = m' \cdot n'$$

031 Quando, e somente quando, $\varphi \sim \varphi'$, temos:

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \mathbf{k} \left(\text{Razão de semelhança } \frac{\varphi}{\varphi'}\right) \qquad \text{(I)}$$

Toda a razão é ordenada: deve-se saber qual é o "numerador".

032 Como $\varphi \sim \varphi'$, poderemos fazer o seguinte:

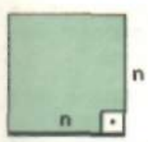
$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} \xRightarrow{\text{propr. das proporções}} \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = t \qquad \text{(II)}$$

033 Esse número **t** não tem nome genérico, não é a razão de semelhança (k) e:

a. só depende da forma da figura e do **m** (e, portanto, do **n**) escolhidos e,

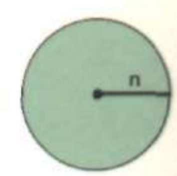
b. em figuras semelhantes, para **m** e **m'** (e, portanto, **n** e **n'**) homólogos, esse número **t** é o mesmo.

034 Consideremos a figura φ sozinha:



$\mathcal{A}_\square = 1 \cdot n^2$

$$(*) \Rightarrow \mathcal{A}_\varphi = m \cdot n \xRightarrow{\text{II}} \mathcal{A}_\varphi = tn \cdot n \Rightarrow \mathcal{A}_\varphi = t \cdot n^2 \qquad (**)$$



$\mathcal{A}_\circ = \pi \cdot n^2$

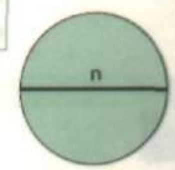
Analogamente, para φ' sozinha:

$$\mathcal{A}_{\varphi'} = m' \cdot n' \xRightarrow{\text{II}} \mathcal{A}_{\varphi'} = tn' \cdot n' \Rightarrow \mathcal{A}_{\varphi'} = t \cdot (n')^2$$

$\mathcal{A}_\square = \frac{1}{2} n^2$

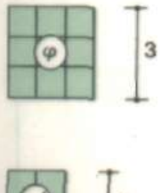
A área de uma figura é também o produto de um nº **t** pelo quadrado de um comprimento **n**.

Esse nº **t** depende da forma e do **n** escolhido.



$\mathcal{A}_\circ = \frac{\pi}{4} n^2$

035 Relacionemos as áreas de figuras semelhantes:



$$(*) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathcal{A}_\varphi = m \cdot n \\ \mathcal{A}_{\varphi'} = m' \cdot n' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_\varphi}{\mathcal{A}_{\varphi'}} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{n}{n'} \xRightarrow{\text{I}} \frac{\mathcal{A}_\varphi}{\mathcal{A}_{\varphi'}} = k \cdot k$$

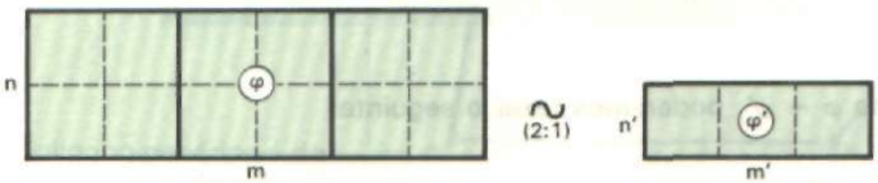
Logo: $\dfrac{\mathcal{A}_\varphi}{\mathcal{A}_{\varphi'}} = k^2 \qquad (***)$

Em figuras semelhantes, mas somente nelas, a razão das áreas (ordenada) é igual ao quadrado da razão de semelhança **k** (na mesma ordem).

036 **Para entender melhor, gostaria de ver mais um exemplo completo...**

Todo exemplo é um caso particular, mas ajuda a compreender o genérico.

037 EXEMPLO:



$m = 3\,n \quad \Leftrightarrow \quad m' = 3\,n'$

Os retângulos são semelhantes na razão 2:1, logo k = 2.

a. (*) $\mathcal{A}_\varphi = m \cdot n \overset{\{\varphi \sim \varphi'\}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{A}_{\varphi'} = m' \cdot n'$

b. $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'} = k = 2$ (I) (depende da razão de $\sim$)

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'} = t = 3$ (II) (depende da forma)

c. $\mathcal{A}_\varphi = m \cdot n \overset{\{II\}}{\Longrightarrow} \mathcal{A}_\varphi = 3n \cdot n \Rightarrow \mathcal{A}_\varphi = 3 \cdot n^2$ (**)
Analogamente $\Rightarrow \mathcal{A}_{\varphi'} = 3 \cdot (n')^2$

d. $\left.\begin{array}{l}\mathcal{A}_\varphi = m \cdot n \\ \mathcal{A}_{\varphi'} = m' \cdot n'\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\mathcal{A}_\varphi}{\mathcal{A}_{\varphi'}}} = \dfrac{m}{m'} \cdot \dfrac{n}{n'} \overset{\{I\}}{\Longrightarrow} \boxed{\dfrac{\mathcal{A}_\varphi}{\mathcal{A}_{\varphi'}}} = 2^2 = 4$

De fato, cada retângulo dado é a soma de 3 quadrados.

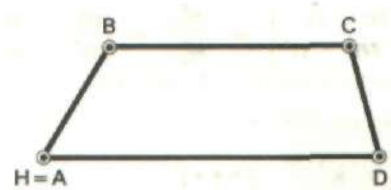
De fato, φ' cabe 4 vezes em φ; verifique, vendo os desenhos.

O pior cego é aquele que não quer ver...

038 EXERCÍCIO:

Ampliar, com centro de homotetia em $\overline{A}$, o polígono ABCD, de modo a quadruplicar a sua área.

Basta duplicar um raio vetor e traçar paralelas.



039 **Você já sabe que:**

Todos significa: os inerentes e os latentes.

Figuras de mesma forma são semelhantes e reciprocamente.

Chamamos de abertura a medida de um ângulo.

Uma figura tem FORMA DETERMINADA **quando, e somente quando:**

> TODOS **os ângulos têm aberturas determinadas e**
> TODOS **os segmentos estão em proporções determinadas.**

No livro 2, n.º 315, demos como exercício uma lista de 28 figuras com forma determinada.

040

Vou chamá-lo de problemão...

A figura **F** dada está dando a área de φ'.

Então φ' está sendo determinada pela forma e pela área.

TIPO 4 | DADAS A FORMA E A ÁREA

> DADA **uma figura F qualquer,**
>
> OBTER **uma figura φ' de forma determinada**
> ***e equivalente à* F.**

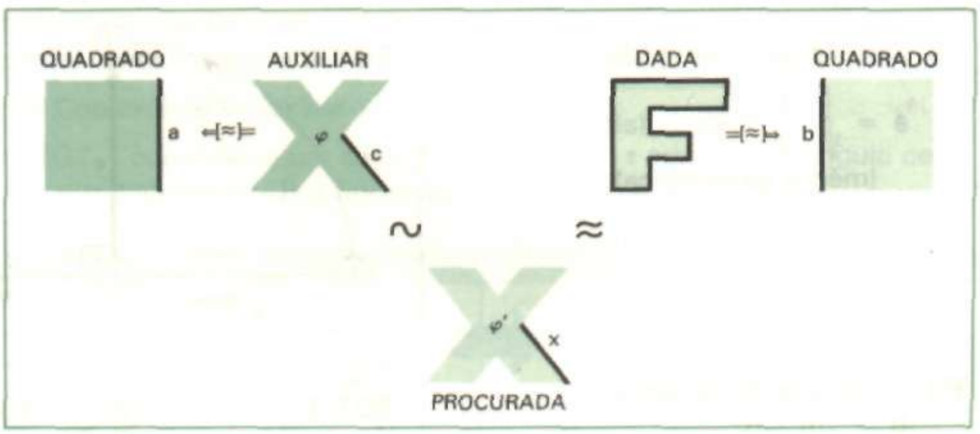
Você imagina quantos problemas particulares se encaixam neste TIPO 4**? Há dezenas de figuras F que podem ser dadas e há dezenas de figuras de forma determinada que podem ser pedidas, de modo que há centenas de problemas que podem ser propostos.**

Manual do examinador...

041 **É possível aprender** TODOS **de uma vez?**

Perfeitamente. E não é difícil para quem já assimilou a Teoria de Equivalência.

042 ESQUEMA:



RESOLUÇÃO:

Vá acompanhando pelo esquema.

a. Como temos a forma da figura procurada (φ'), poderemos construir uma figura auxiliar (φ) semelhante a ela e de tamanho arbitrário.

b. Poderemos quadrar φ, obtendo o lado **a**, e quadrar F (dada), obtendo o lado **b**. Então:

$\mathcal{A}_{\varphi} = a^2$ e $\mathcal{A}_{\varphi'} = \mathcal{A}_F = b^2$ (III)

c. Como $\varphi \sim \varphi'$, vimos no nº 035 que:

$$\frac{\mathcal{A}_{\varphi}}{\mathcal{A}_{\varphi'}} = k^2 \overset{\text{(III)}}{\Longrightarrow} \frac{a^2}{b^2} = k^2 \text{ (IV)}$$

A boa escolha de x pode facilitar muito a posterior construção da figura φ' procurada.

d. Para obter **k**:

1º) Escolhemos qual [x] comprimento de φ' (procurada) convém obter.

2º) Tomamos em φ (já construída) o comprimento **c** homólogo de **x**.

3º) Então, como $\varphi \sim \varphi'$ temos $\frac{c}{x} = k$.

e. Substituindo em (IV) $\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{x^2} \Rightarrow$ $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{x}}$

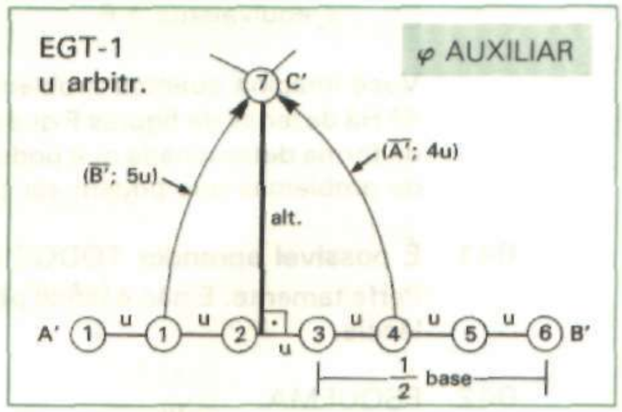
f. Obtém-se **x** (4ª proporc.) e constrói-se φ'.

043 EXEMPLO **(apenas os EGTs):**

Construir △ABC, de lados na proporção 4 : 5 : 6, equivalente ao retângulo RSTU dado no EGT-3.

ROTEIRO:

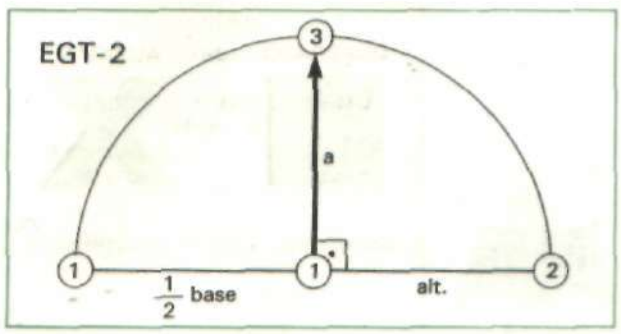
1º) Constrói-se φ auxiliar semelhante à φ' procurada. Com **u** arbitrário, construímos o △A'B'C' ~ △ABC.



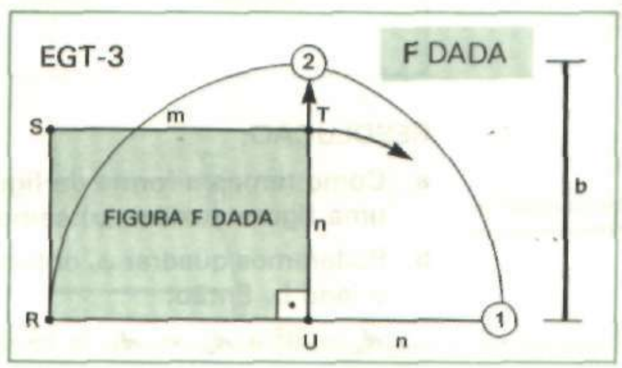
2º) Quadra-se φ, obtendo

$$a = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\text{ base}\right) \cdot (\text{alt.})}$$

(média geométrica)



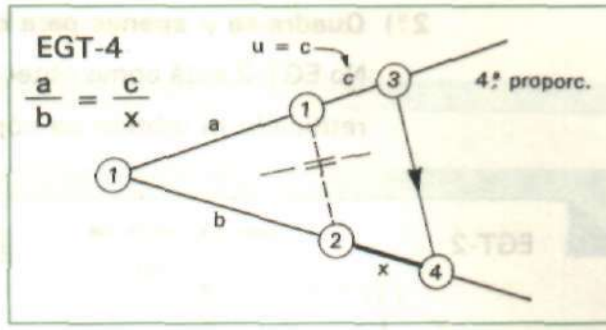
3º) Quadra-se F, obtendo $b = \sqrt{m \cdot n}$ (média geométrica entre os lados **m** e **n**).



A boa escolha de x (e portanto de c) pode facilitar muito a construção da figura φ' procurada.

4.º) **Escolhe-se qual x convém obter. Escolhemos para x 1/6 do lado maior, logo:**

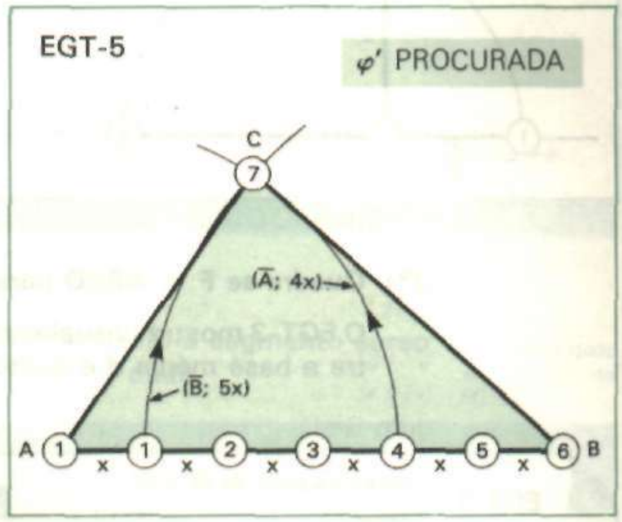
c = u.



5.º) Obtido x, constrói-se a procurada (φ'):

Por semelhança: 4.ª proporc. Por homotetia: paralelas.

ou diretamente (como fizemos)
ou por semelhança
ou por homotetia.



044 EXERCÍCIO:

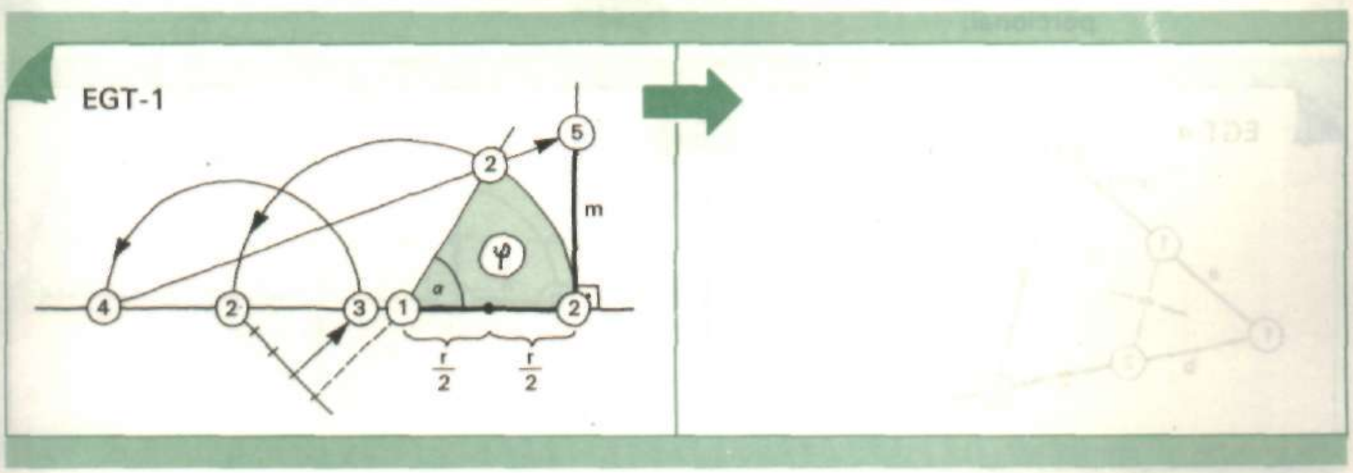
Construir um setor circular de ângulo central $\hat{\alpha}$ equivalente ao trapézio ABCD. Dados ao lado do EGT-3.

ROTEIRO:

Convém reunir os desenhos para diminuir o número de operações e, portanto, o erro gráfico, mas neste problema faremos os desenhos desmembrados, para melhor explicar o processo genérico.

1.º) ***Constrói-se φ auxiliar ~ φ' procurada.***

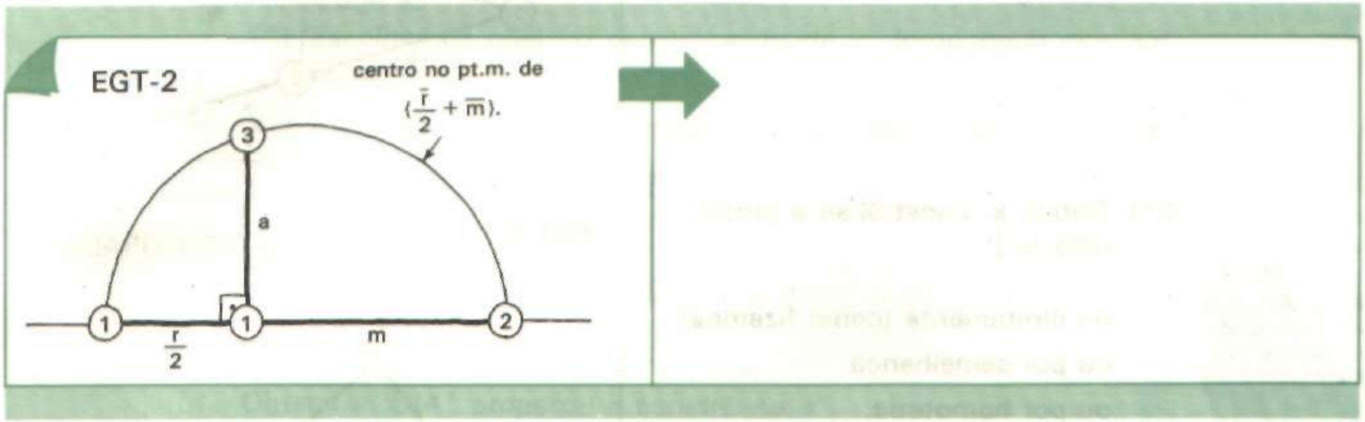
No EGT-1 constrói-se um setor circular de raio **r** arbitrário e ângulo central α (transporte α). É a figura φ.



2º) Quadra-se φ apenas para obter a.

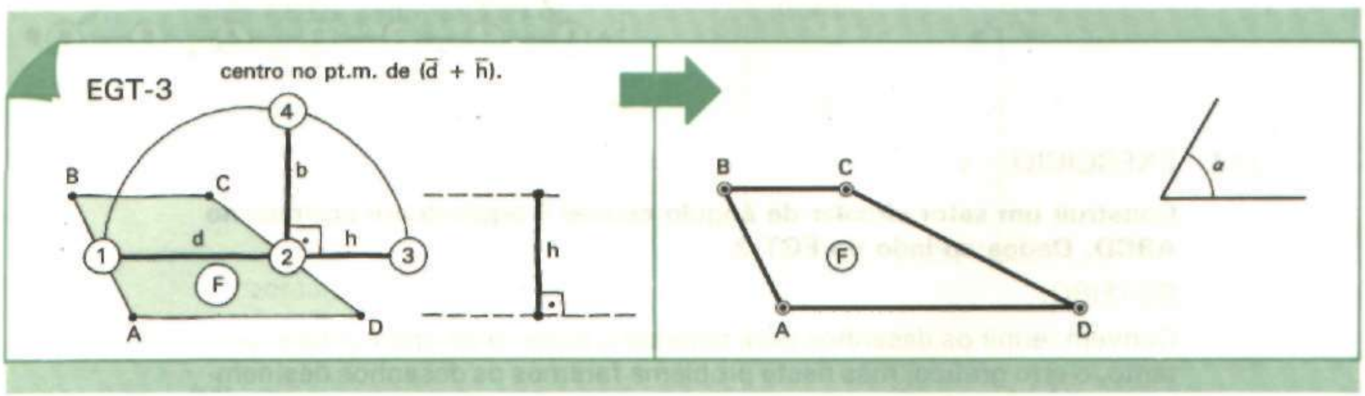
No EGT-2 está como obter **a**, média geométrica entre $\frac{1}{2}$ **r** e o arco retificado **m** (obtido na cópia do EGT-1).

Ou r e 1/2 m.



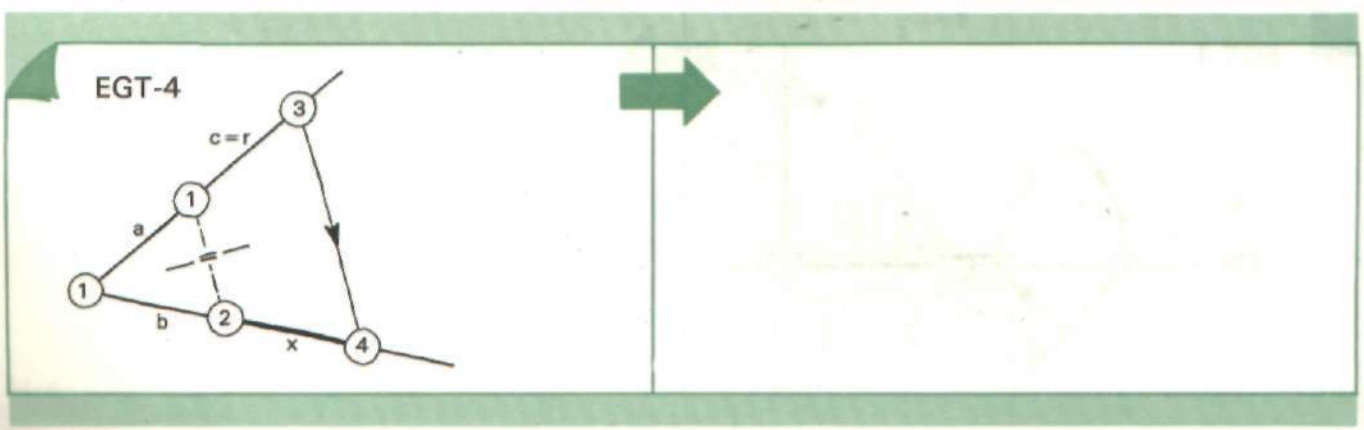
3º) Quadra-se F = ABCD para obter b.

O EGT-3 mostra (visualmente) como obter **b**, média geométrica entre a base média **d** e a altura **h**.



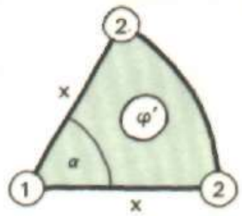
4º) Escolhe-se qual x (de φ') queremos obter e c (de φ) será o seu homólogo.

Já tendo α (dado), é mais fácil construir φ' tendo o seu raio, que será o nosso **x**; portanto **c** será o raio **r** de φ. No EGT-4 está a 4ª proporcional.



5º) **Obtido x, constrói-se φ' (fizemos direto).**

EGT-5 (dispensável)



R: x

045 EXERCÍCIO:

Construir um △ isósceles A'B'C', cujos lados valem o segmento áureo da base e que seja equivalente ao círculo ($\overline{O}$; r) dado.

($\overline{O}$; r) está dado ao lado do EGT-3.

ROTEIRO:

Neste exercício vamos reunir o EGT-1 com o EGT-2:

1º) **Constrói-se φ auxiliar ~ φ' procurada.**

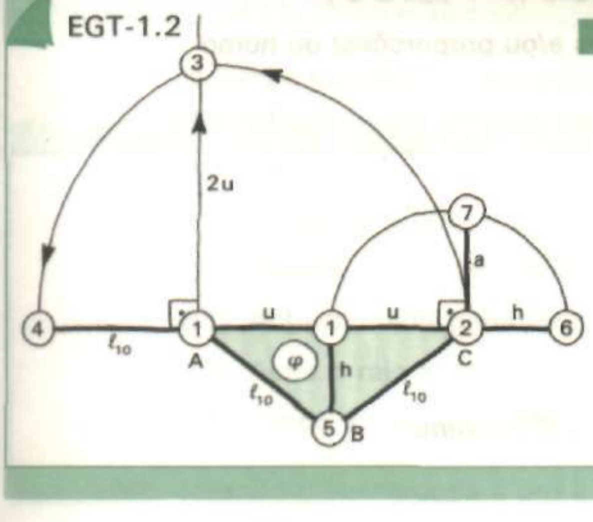
Chamamos de ℓ_{10} para lembrar que a construção do áureo é a mesma do ℓ_{10}.

No EGT-1.2, partimos de **u** arbitrário e obtivemos ℓ_{10} que é o segmento áureo de **2u**.
Construímos φ = △ABC de base **2u** e de lados ℓ_{10} e achamos a sua altura **h**.

2º) **Quadra-se φ para obter** a.

No mesmo EGT-1.2, obtivemos **a** = $\sqrt{u \cdot h}$
(média geométrica entre a altura **h** e metade (**u**) da base (**2u**) de φ).

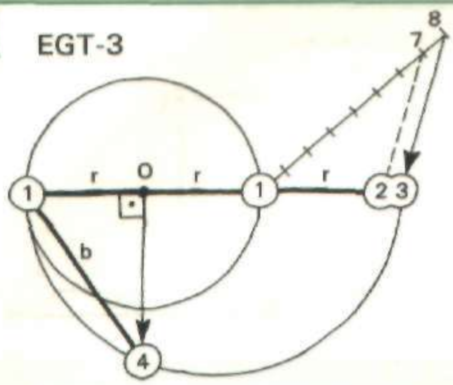
EGT-1.2

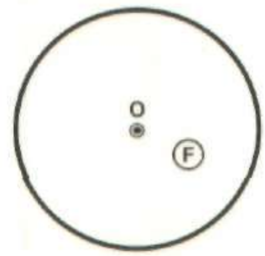


3º) Quadra-se F (dada) para obter b (EGT-3):

Fizemos a média geométrica **(b)** entre **r** e π **r** ≃ 22/7 · **r** (agora **b** é cateto...).

EGT-3

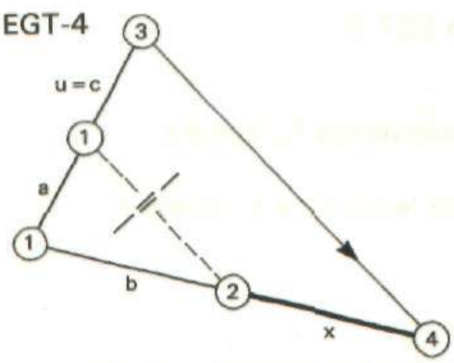




4º) Escolhe-se x ⇔ c.

É mais fácil construir o **△A'B'C' = φ' tendo x (homólogo de u = c).**
Cuidado para não se enganar na 4ª proporcional.

EGT-4



5ª) Obtido x, constrói-se a figura procurada (φ = △A'B'C').

Poderíamos fazer por semelhança (ângulos e/ou proporções) ou homotetia (paralelas).

EGT-5

R: Base ≃ ...66,5... mm.

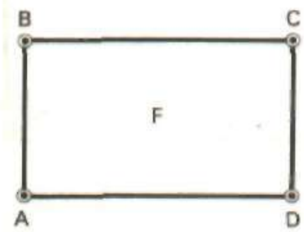
046 Agora você vai andar de bicicleta sozinho:

No livro 1 era bicicleta: agora é moto...

047 EXERCÍCIO:

Construir um pentágono regular equivalente a um retângulo ABCD dado.

EGT



R: $\ell_5 \simeq$ .....21..... mm.

Desenhe tudo no espaço acima, mesmo que parte de um desenho se superponha a outro. Reforce as linhas da resposta.

ROTEIRO:

1º) Construa φ, que é um pentágono regular de tamanho arbitrário.

2º) Ache **a**, média geométrica entre o apótema e o semiperímetro de φ.

3º) Ache **b**, média geométrica entre os lados do retângulo ABCD dado.

4º) Ache o raio **x** da circunscrita em φ'.

5º) Tendo **x**, construa φ'.

048 Quando a figura dada é um quadrado, o seu lado já é **b**.

049 EXERCÍCIO:

Construir um círculo equivalente a um quadrado ABCD dado.

EGT

R: raio

050 EXERCÍCIO:

Construir um heptágono regular equivalente ao quadrado ABCD dado.

EGT

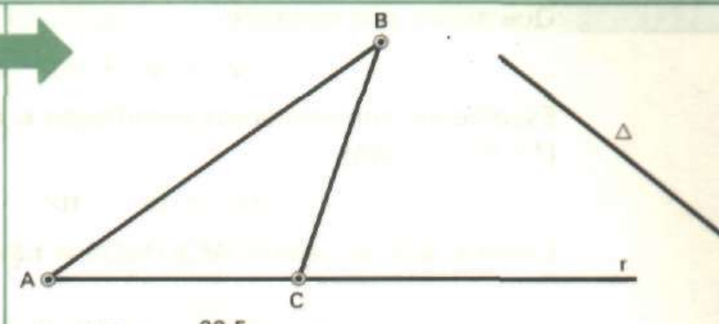
Heptágono regular: livro 2, nº 295.
(Deve ser permitida a consulta.)

R: $\ell_7 \simeq$ ....11,5.... mm.

051 EXERCÍCIO:

Obter $\overline{X}$ em $\overline{AB}$ e $\overline{Y}$ em $\overrightarrow{Cr}$, de modo que $\overline{XY}$ // $\overleftrightarrow{\triangle}$ e que $\triangle AXY \approx \triangle ABC$.

EG



R: AX ≃ ...33,5... mm.

RESOLUÇÃO:

Qualquer reta paralela a $\overleftrightarrow{\triangle}$ determina $\overline{X'}$ em $\overrightarrow{AB}$ e $\overline{Y'}$ em $\overrightarrow{Ar}$, tais que $\triangle AX'Y' \sim \triangle AXY$.

Então: $\triangle ABC$ = F (figura dada),

$\triangle AX'Y'$ = φ (figura auxiliar) e

$\triangle AXY$ = φ' (figura procurada).

Basta, então, proceder como vimos: obter **a**, **b**, escolher x ⇔ c, obter **x** e construir o $\triangle AXY$.

052 EXERCÍCIO **(mesmos dados acima):**

Obter $\overline{X}$ em $\overline{AB}$, $\overline{Z}$ em $\overline{BC}$ e $\overline{Y}$ em $\overrightarrow{Cr}$, de modo que X, Z, Y sejam colineares, XY // $\overleftrightarrow{\triangle}$ e $\triangle BXZ$ seja equivalente ao $\triangle CZY$.

RESOLUÇÃO: verifique que é o mesmo problema.

053 ORIENTAÇÃO:

Sempre há uma ordenação adequada para se aprender cada assunto (e cada matéria). Não segui-la acarretará transtornos.

Por exemplo, não se deve estudar o TIPO 4 ("problemão") antes de saber muito bem quadraturas (TIPO 1).

054

Não se deve também estudar os problemas sem dominar a teoria. Sabendo bem a teoria, é possível concluir sozinho as resoluções dos problemas.

Andar de moto...

055

A área é dada pela soma algébrica.

TIPO 5

Construir uma figura φ_x de forma determinada e equivalente à soma algébrica de figuras φ_1, φ_2, φ_3, ... dadas.

FORMA + ÁREA ⇒ TAMANHO

1º CASO: $\varphi_x \sim \varphi_1 \sim \varphi_2 \sim \varphi_3 \sim \ldots$

RESOLUÇÃO:

Queremos, por exemplo:

$$\varphi_x \approx \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \ldots$$

Escolhendo comprimentos homólogos **x, a, b, c** ... nessas figuras, temos (** do nº 034):

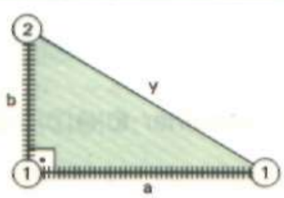
$$tx^2 = ta^2 + tb^2 - tc^2 + \ldots$$

Como **x, a, b, c**... são HOMÓLOGOS ⇒ **t é o mesmo e pode ser "cortado"**:

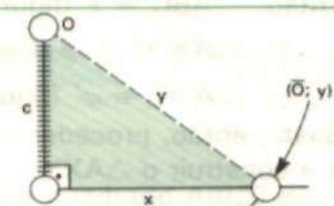
$$x^2 = a^2 + b^2 - c^2 + \ldots$$

056 ***Como obter graficamente*** $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + \ldots}$ **?**

Aplicando, quantas vezes forem necessárias, o TEOREMA DE PITÁGORAS [P5]:



Temos a, b, c ...



$$y^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow x = \sqrt{y^2 - c^2 \ldots} \Rightarrow x = \sqrt{\underbrace{a^2 + b^2}_{y^2} - c^2 \ldots}$$

Havendo mais, prossegue-se...

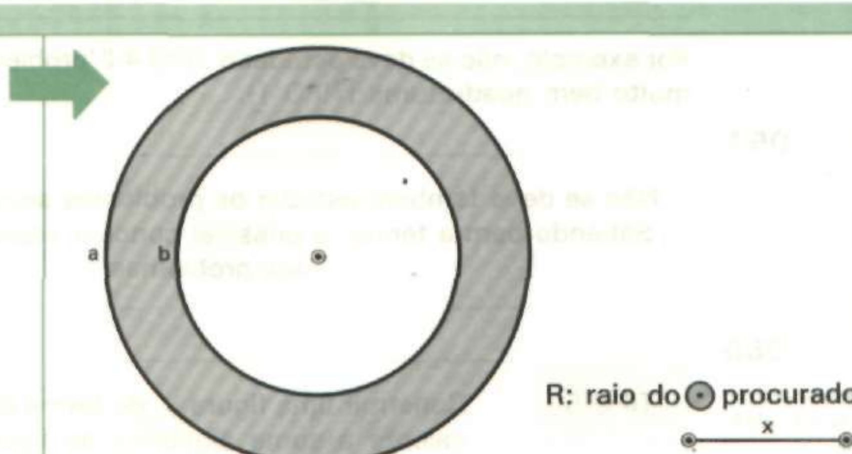
Única restrição: o radicando deverá ser positivo.

057 Escolhe-se **x** e, portanto, **a, b, c** ... de modo a facilitar a construção da φ procurada.

058 EXERCÍCIO:

Construir um círculo equivalente a uma coroa circular dada.

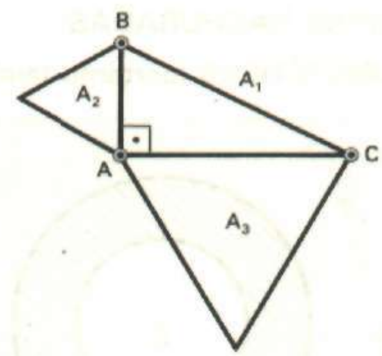
EG (basta o △ retângulo)



059 EXERCÍCIO:

Com lado $\overline{BC}$, construa um △ eqüilátero equivalente à soma dos △s eqüiláteros de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

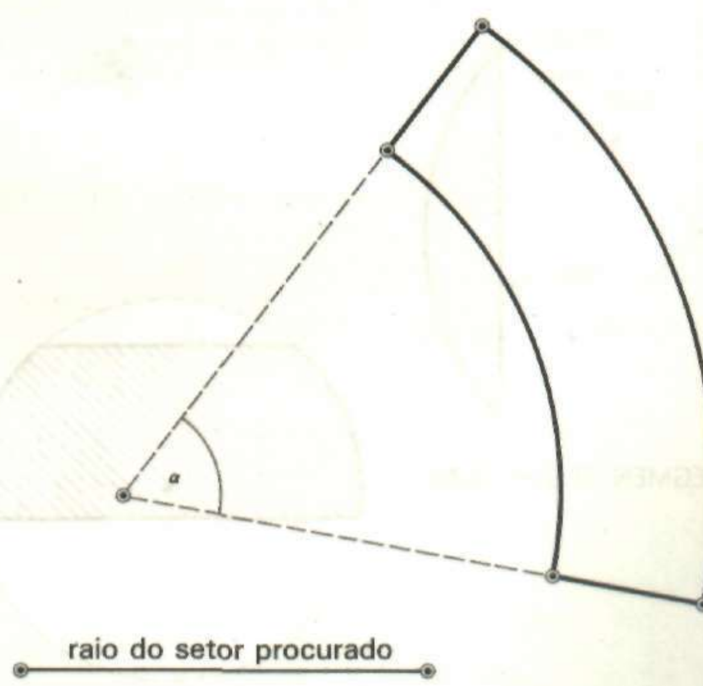
EG



060 EXERCÍCIO:

Construir um setor circular, de ângulo central α, equivalente à coroa de setor dada.

EG



061 2º CASO: As figuras NÃO SÃO semelhantes.

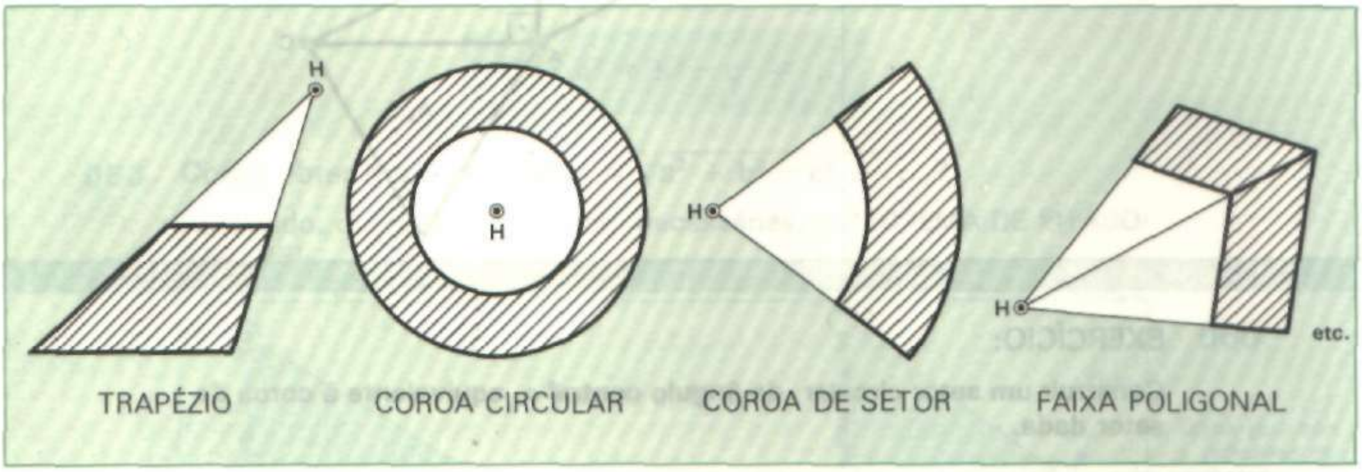
RESOLUÇÃO:

Inicialmente devem ser transformadas em figuras equivalentes e semelhantes entre si, para recair no 1º caso.
Em casos comuns, convém quadrá-las. Como é costume hachurar a figura dada, vejamos algumas das figuras que chamaremos de:

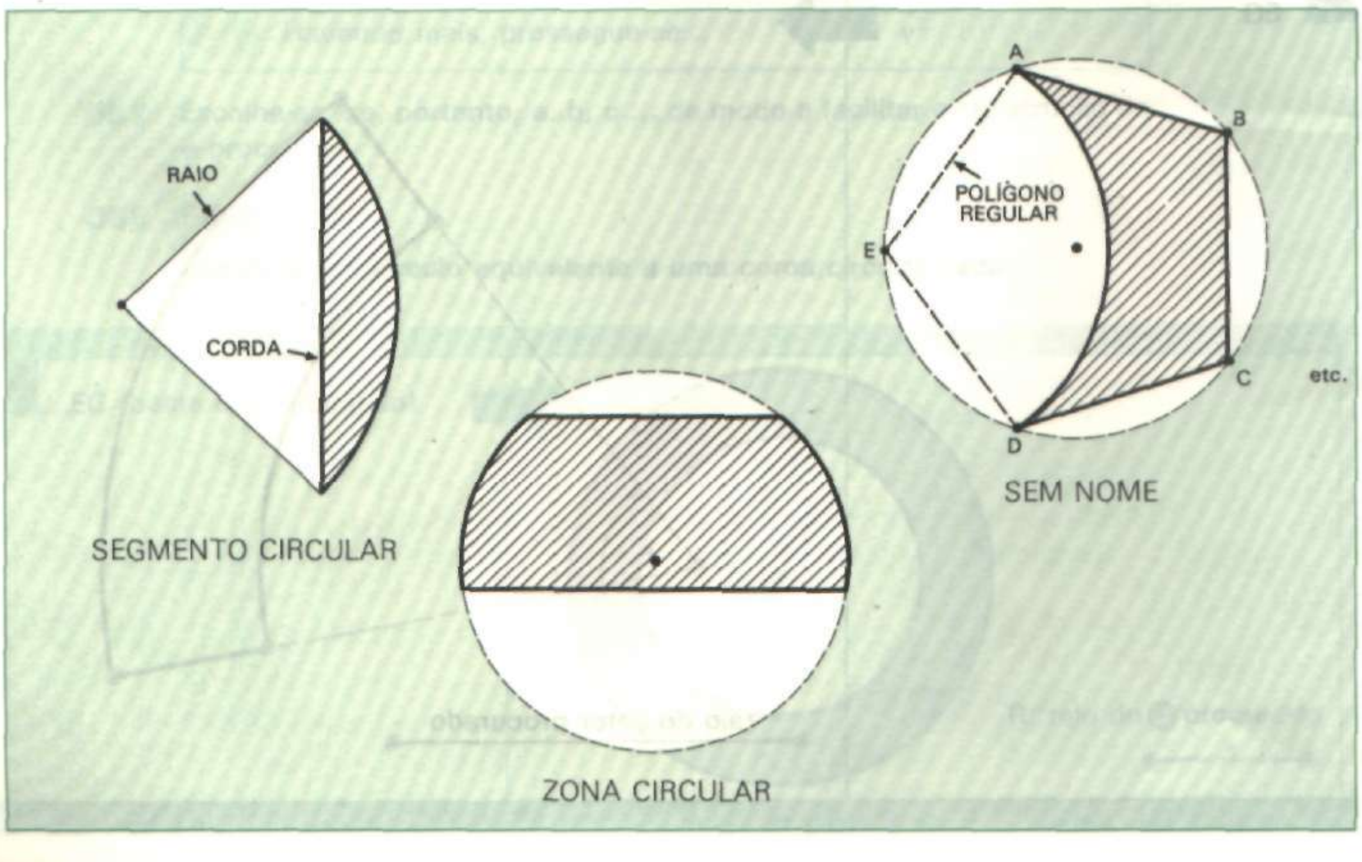
E quando todas menos uma são círculos?

062 "FIGURAS HACHURADAS"

a. HOMOTÉTICAS (portanto também semelhantes):



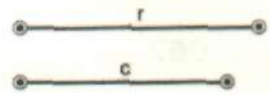
b. NÃO HOMOTÉTICAS (nem semelhantes):



063 EXERCÍCIO:

Construir um quadrado equivalente a um segmento circular de raio r e corda c.

EG



ROTEIRO:

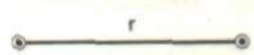
1º) Construa o segm. circular.
2º) Ache o lado **a** de um □ ≈ ao setor.
3º) Ache o lado **b** de um □ ≈ ao △.
4º) Ache o lado $\mathbf{x} = \sqrt{a^2 - b^2}$.

R: r (lado do □) ≈ 7,5 mm.

064 EXERCÍCIO:

Quadrar a figura hachurada ABCDA (desenho do nº 062, b) dado o raio r da ⊙ circunscrita.

EG



ROTEIRO:

1º) Construa a figura.
2º) □ ≈ pent. regular ⇒ lado **a**.
3º) □ ≈ setor EAD ⇒ lado **b**.
4º) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

R: x (lado do □) ≈ 26 mm.

065 Esses exercícios são suficientes para entender os problemas do TIPO 5.

E a minha "munheca"?

066

TIPO 6	$\varphi_x \sim \varphi_y \sim \varphi_{dada}$ obter φ_x e φ_y.	$\Rightarrow$	$\triangle$ RETÂNGULO

067

TIPO 6A	$\varphi_x + \varphi_y \approx \varphi_{dada}$	+ "ALGO"

RESOLUÇÃO:

Sejam **x**, **y**, **h** comprimentos homólogos.

$tx^2 + ty^2 = th^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = h^2}$

Então **x**, **y** são catetos de um $\triangle$ retângulo de hipotenusa **h** (dada). Para construir esse $\triangle$, precisamos de "algo" mais:

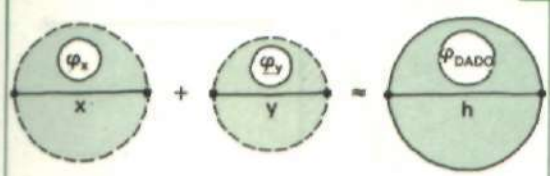
ou sua forma; resolve-se por semelhança (ângulos ou 4.ª proporc.) ou homotetia (paralelas);

$\left.\begin{array}{l}\textbf{ou a soma } (x + y) \\ \textbf{ou a diferença } |x - y|\end{array}\right\} \Rightarrow$ "ovo isósceles" (livro 2, n.º 082).

068 EXERCÍCIO:

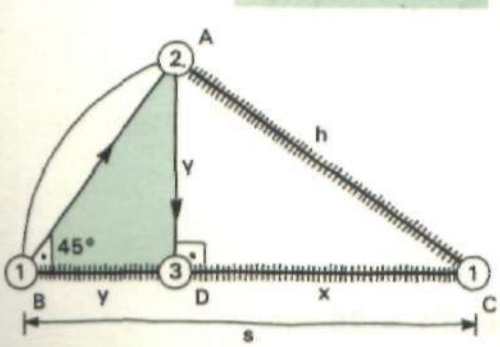
Construir dois círculos cujos diâmetros somam s e cujas áreas somam a do círculo dado.

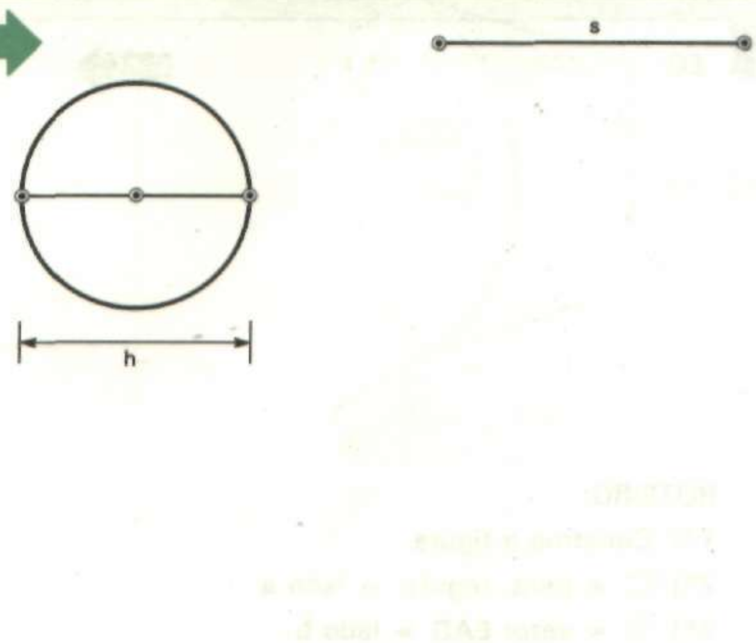
RACIOCÍNIO:



EGT

$$x^2 + y^2 = h^2$$
$$x + y = s$$

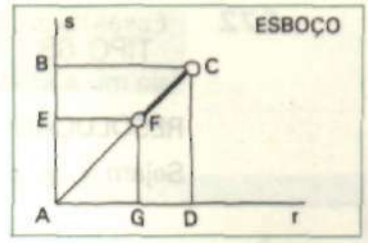




R: x ≃ ....27.... mm. y ≃ ....13.... mm.

069 EXERCÍCIO:

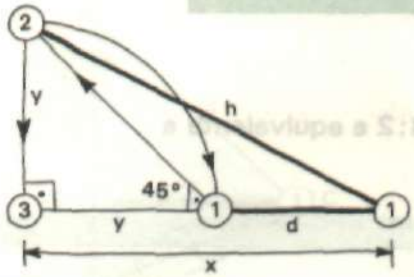
Construir dois quadrados como os do esboço, de modo que as suas áreas somem a área do quadrado dado RSTU e que FC seja igual a d (dado).

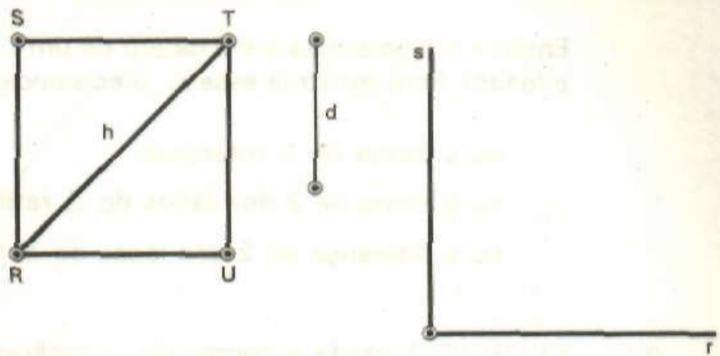


RACIOCÍNIO:

Como foi dada a diferença das diagonais, **x, y, h** serão diagonais.

$$x^2 + y^2 = h^2$$
$$x - y = d$$





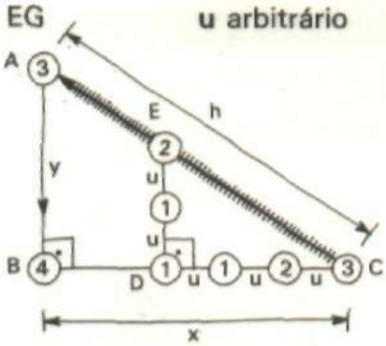
R: x ≃ 48,0 mm; y ≃ 28,0 mm.

070 Gostaria de fazer um exercício em que é dada a forma do △ retângulo...

071 EXERCÍCIO:

Construir dois hexágonos regulares de lados na razão 3 : 2 cuja soma seja equivalente a um hexágono regular de lado h dado.

EG u arbitrário



$$x^2 + y^2 = h^2$$
$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

R: x ≃ 25,0 mm; y ≃ 17,0 mm.

072 TIPO 6B $\varphi_x - \varphi_y \approx \varphi_{dado}$ + "ALGO"

RESOLUÇÃO:

Sejam x, y, c comprimentos homólogos.

$$tx^2 - ty^2 = tc^2 \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = c^2}$$

Então x é hipotenusa e y é cateto de um △ retângulo cujo outro cateto é c (dado). **Para construir esse △, precisamos de "algo" mais, que pode ser:**

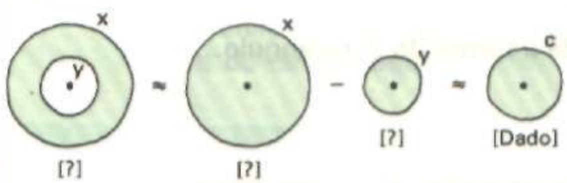
- **ou a forma** do △ retângulo
- **ou a soma** de 2 dos lados do △ retângulo
- **ou a diferença** de 2 dos lados do △ retângulo.

Lados do △ retângulo: hipotenusa e catetos.

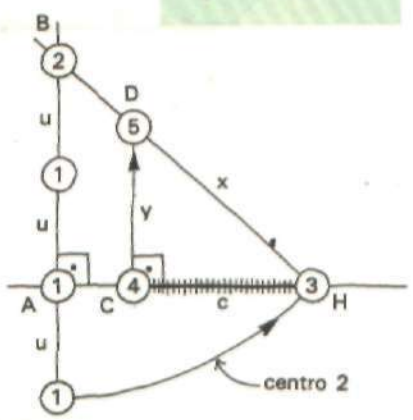
073 EXERCÍCIO **(dada a forma do △ retângulo):**

Construir uma coroa circular de raios na proporção 3:2 e equivalente a um círculo dado.

RACIOCÍNIO:



$$x^2 - y^2 = c^2$$
$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$



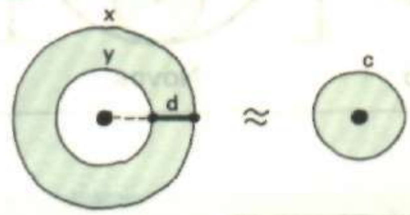
Poderia ser do TIPO 4 (forma dada).

R: $x \approx 27{,}0$ mm; $y \approx 18{,}0$ mm

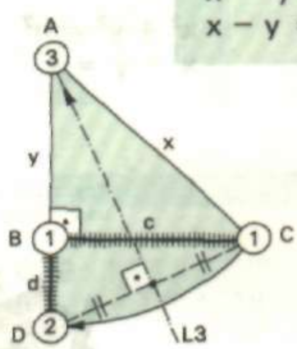
074 EXERCÍCIO (dada a diferença |x − y|):

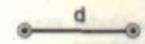
Construir uma coroa circular de espessura d dada e equivalente a um círculo dado.

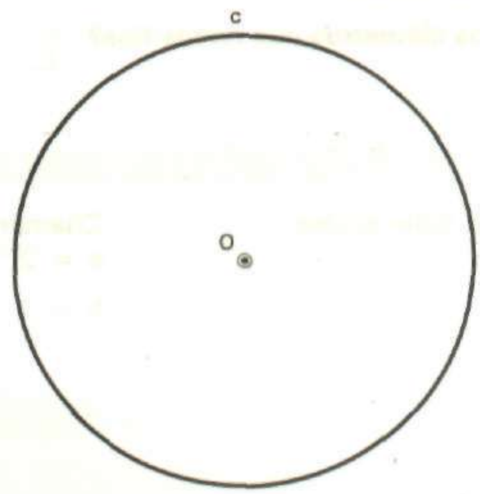
RACIOCÍNIO:



$$x^2 - y^2 = c^2$$
$$x - y = d$$







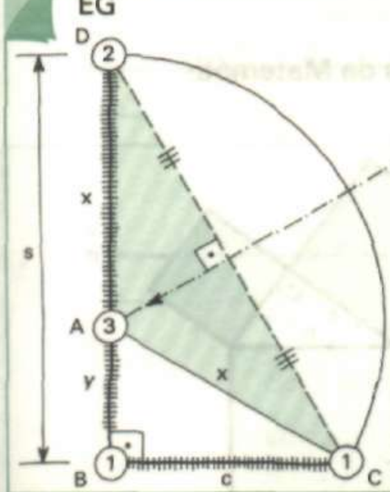
Construa a coroa com centro $\overline{O}$.

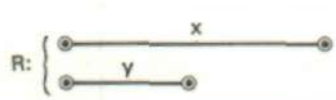
075 EXERCÍCIO (dada a soma x + y):

Resolva o sistema de equações $\begin{array}{l} x^2 - y^2 = c^2 \\ x + y = s \end{array}$

É mais uma aplicação do DG.

EG





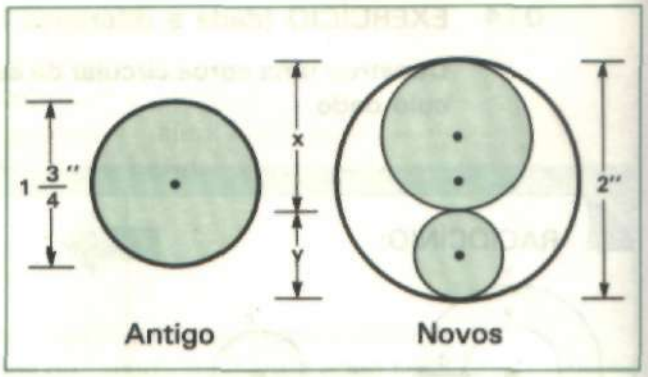
076 EXERCÍCIO (problema técnico):

∅ = 1¾": diâmetro 1 e 3/4 polegada.

Encarregado de reformar a instalação elétrica de um prédio, um engenheiro precisa substituir um fio de ∅ = 1¾" por dois (equivalentes a ele) e que caibam justo no conduíte de ∅ = 2" que vai permanecer embutido na parede.

Vou ajudar esse engenheiro...

Quais os diâmetros dos novos fios?

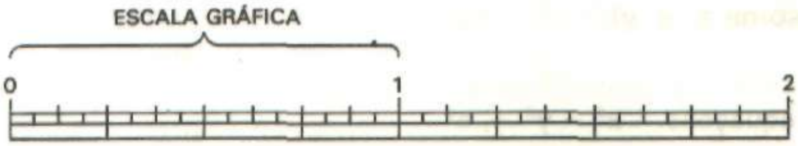


Faça o EG numa folha avulsa.

Chamemos de
s = 2" e
$h = 1\frac{3}{4}$"

$$x^2 + y^2 = h^2$$
$$x + y = s$$

Por que ainda usam essa unidade?



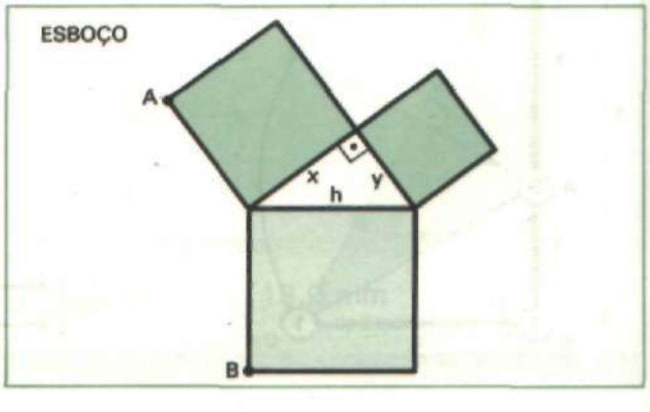
R: $x \simeq 1{,}74$"
$y \simeq 0{,}26$"

077 **O teorema de Pitágoras e a razão áurea são duas jóias da Matemática. Vamos reuni-las?**

078 EXERCÍCIO:

***Os quadrados construídos sobre os* catetos têm seus lados na razão áurea. Desenhar (ao lado) essa figura, sendo dado o lado h do quadrado construído sobre a hipotenusa.**

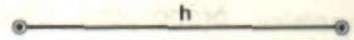
Pode caprichar à vontade...



$$x^2 + y^2 = h^2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{\ell_{10}}$$

Sendo ℓ_{10} o lado do decágono regular inscrito numa ⊙ de raio **r** arbitrário.



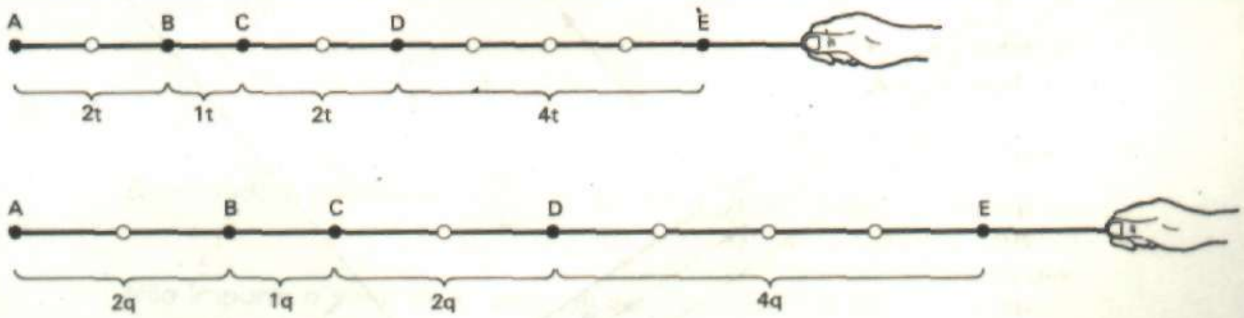
R: 

079 "ELASTICOLOGIA"

Para a perfeita compreensão de inúmeras propriedades geométricas e, inclusive, de leis científicas, é fundamental ter uma correta noção do que significa proporção entre grandezas ou entre números.

O próprio Euclides de Alexandria, protótipo do geômetra, percebeu a dificuldade de transmitir aos seus leitores o conceito de proporção, tanto que somente tratou do assunto no seu livro V de *Elementos*.

A Matemática do secundário, exageradamente preocupada com conceitos rigorosos, não esclarece o assunto. Secundaristas freqüentemente se atrapalham quando empregam proporções. Tentemos a "elasticologia"...



Se o elástico for uniforme, então:

A ÚNICA COISA QUE NÃO VARIA É A "PROPORÇÃO".

Esticar o elástico equivale a ampliá-lo na razão ordenada $\frac{q}{t}$.

Esse é o conceito abstrato de proporção. Se você adquiriu esse conceito, então poderá aceitar sem longas demonstrações as propriedades das proporções. Citaremos algumas:

a. Pode-se ''cortar'' o **t** (ou o **q**) que a proporção (abstrata) não se altera.

b. Pode-se elevar todos os termos ao quadrado que a proporção se conserva (inversamente, pode-se extrair a raiz quadrada de todos).

Etc.

Depende do conceito de proporção o bom entendimento do conceito de FORMA DETERMINADA, tão útil no estudo das ciências e das técnicas:

$$\text{FORMA DETERMINADA} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{PROPORÇÕES DETERMINADAS} \\ \text{ABERTURAS DETERMINADAS} \end{cases}$$

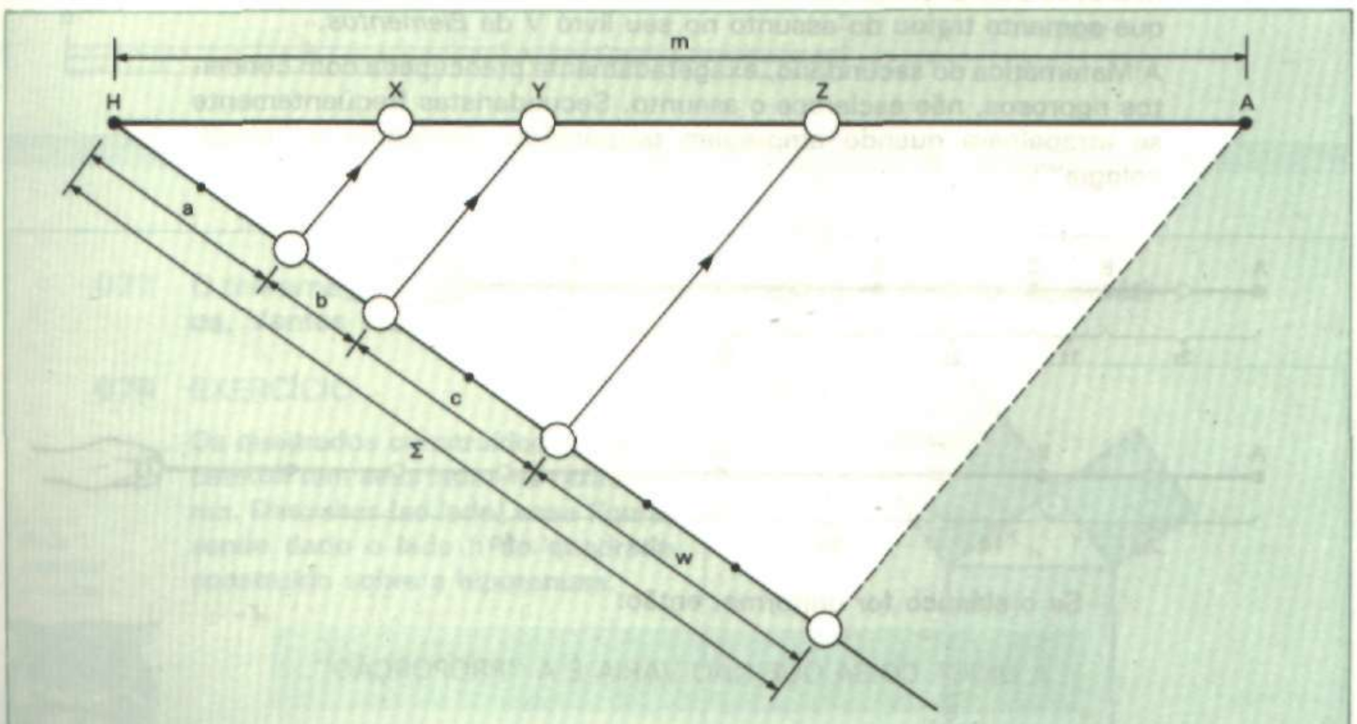
Insistimos no termo técnico abertura (medida de um ângulo), porque, dizendo-se ângulos determinados, a mensagem não fica clara: Ângulos determinados como? Em tamanho ou em posição? Lembrar que ângulo é uma figura (conjunto de pontos).

080 TEORIA **É necessária para entender problemas muito úteis.**

Consideremos um segmento HA, de comprimento **m** e dividido na proporção **a : b : c : w**.

Chamemos de Σ a soma $\Sigma = a + b + c + w$ (*)

No desenho fizemos a proporção 2 : 1 : 2 : 3, de modo que
$\Sigma = 2 + 1 + 2 + 3 \Rightarrow \Sigma = 8$.



Calculemos os comprimentos HX, XY, YZ e ZA:

a. No caso genérico a:b:c:w, temos:

$$HX = \frac{a}{\Sigma}m;\ XY = \frac{b}{\Sigma}m;\ YZ = \frac{c}{\Sigma}m;\ ZA = \frac{w}{\Sigma}m.$$

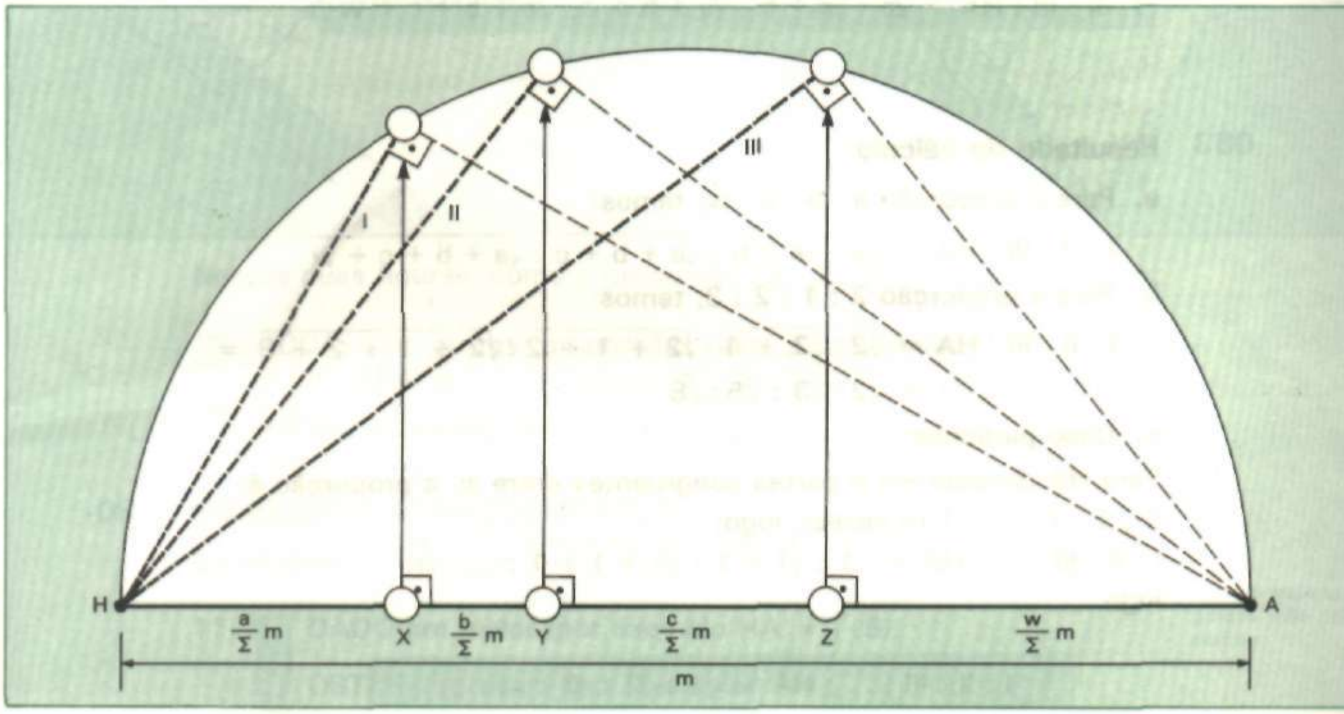
b. No caso particular 2:1:2:3, temos:

$$HX = \frac{2}{8}m;\ XY = \frac{1}{8}m;\ YZ = \frac{2}{8}m;\ ZA = \frac{3}{8}m$$

Entenda essa parte antes de prosseguir.

O pior cego...

081 **Consideremos o desenho abaixo e vejamos como foi construído (observe as flechas...):**



082 **Calculemos I, II, III, HA:**

P3: Ângulos inscritos.

P5: Relações métricas num △ retângulo.

Fazem parte da TM do DG.

Os △s inscritos no semicírculo são retângulos, logo os catetos I, II e III valem (P5):

$$\left.\begin{array}{l} I^2 = \left(\frac{a}{\Sigma}m\right)\cdot m = \frac{m^2}{\Sigma}\cdot a \Rightarrow I = \frac{m}{\sqrt{\Sigma}}\cdot\sqrt{a} \\ \text{Chamando a constante } \frac{m}{\sqrt{\Sigma}} \text{ de } k \quad (**) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{I = k\sqrt{a}}$$

Não importa o valor de k, pois vai ser "cortado".

$$II^2 = \left(\frac{a}{\Sigma}m + \frac{b}{\Sigma}m\right)\cdot m = \frac{m^2}{\Sigma}(a+b) \Rightarrow II = \frac{m}{\sqrt{\Sigma}}\sqrt{a+b} \overset{(**)}{\Longrightarrow}$$

$$\boxed{II = k\sqrt{a+b}}$$

$$\mathrm{III}^2 = \left(\frac{a}{\Sigma}m + \frac{b}{\Sigma}m + \frac{c}{\Sigma}m\right)\cdot m = \frac{m^2}{\Sigma}(a+b+c) \Rightarrow$$

$$\mathrm{III} = \frac{m}{\sqrt{\Sigma}}\sqrt{a+b+c} \overset{(**)}{\Rightarrow} \boxed{\mathrm{III} = k\sqrt{a+b+c}}$$

Multiplicando e dividindo HA = m por $\sqrt{\Sigma}$, temos:

$$\mathrm{HA} = \frac{m}{\sqrt{\Sigma}}\cdot\sqrt{\Sigma} \overset{(**)}{\Rightarrow}\overset{(*)}{\Rightarrow} \boxed{\mathrm{HA} = k\sqrt{a+b+c+w}}$$

$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} : \mathrm{HA} = k\sqrt{a} : k\sqrt{a+b} : \sqrt{a+b+c} : k\sqrt{a+b+c+w}$

"cortando" o k:

$$\boxed{\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} : \mathrm{HA} = \sqrt{a} : \sqrt{a+b} : \sqrt{a+b+c} : \sqrt{a+b+c+w}}$$

083 **Resultado do cálculo:**

a. Para a proporção a : b : c : w, temos:

$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} : \mathrm{HA} = \sqrt{a} : \sqrt{a+b} : \sqrt{a+b+c} : \sqrt{a+b+c+w}$

b. Para a proporção 2 : 1 : 2 : 3, temos:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} : \mathrm{HA} = \sqrt{2} : \sqrt{2+1} : \sqrt{2+1+2} : \sqrt{2+1+2+3} = \\ = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5} : \sqrt{8}$$

c. Caso particular:

Para HA dividido em **n** partes congruentes entre si, a proporção é:

1 : 1 : 1 : ... : 1 (**n** vezes), logo:

$\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} : \ldots : \mathrm{HA} = \sqrt{1} : \sqrt{1+1} : \sqrt{1+1+1} : \ldots : \sqrt{n}$

logo:

$$\boxed{\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} : \ldots : \mathrm{HA} = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \ldots : \sqrt{n}}$$

084 Interpretando **essas conclusões:**

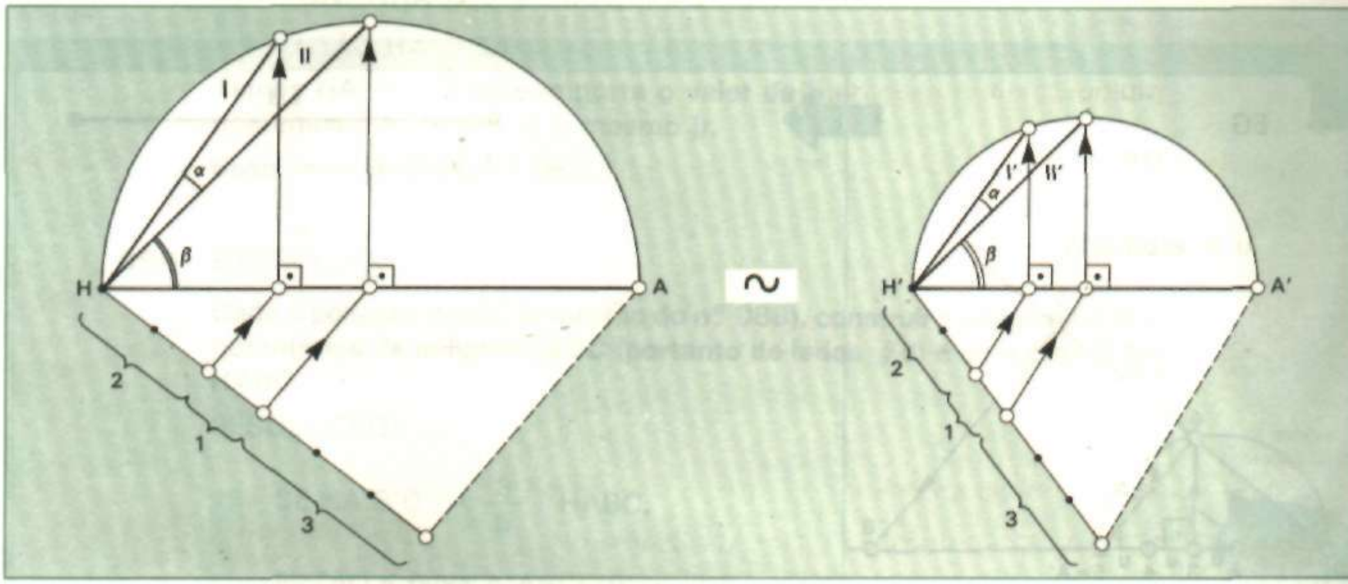
> SE $\overline{\mathrm{HA}}$ está dividido numa proporção
>
> a : b : c : ... : w,
>
> ENTÃO os comprimentos I, II, III, ..., HA estarão na proporção
>
> $\sqrt{a} : \sqrt{a+b} : \sqrt{a+b+c} : \ldots : \sqrt{a+b+c+\ldots+w}$

085

> Dada a proporção a : b : c : ... : w,
> a forma desse tipo de figura está determinada.

EXEMPLO:

Se dividirmos $\overline{HA}$ e $\overline{H'A'}$ na mesma proporção (por exemplo, 2 : 1 : 3), as duas figuras obtidas serão semelhantes:



Nessas duas figuras, como a proporção (2 : 1 : 3) é a mesma, então:

TODAS as outras proporções são as mesmas: I : II : HA = I' : II' : H'A' e

TODAS as aberturas (α, β...) são iguais.

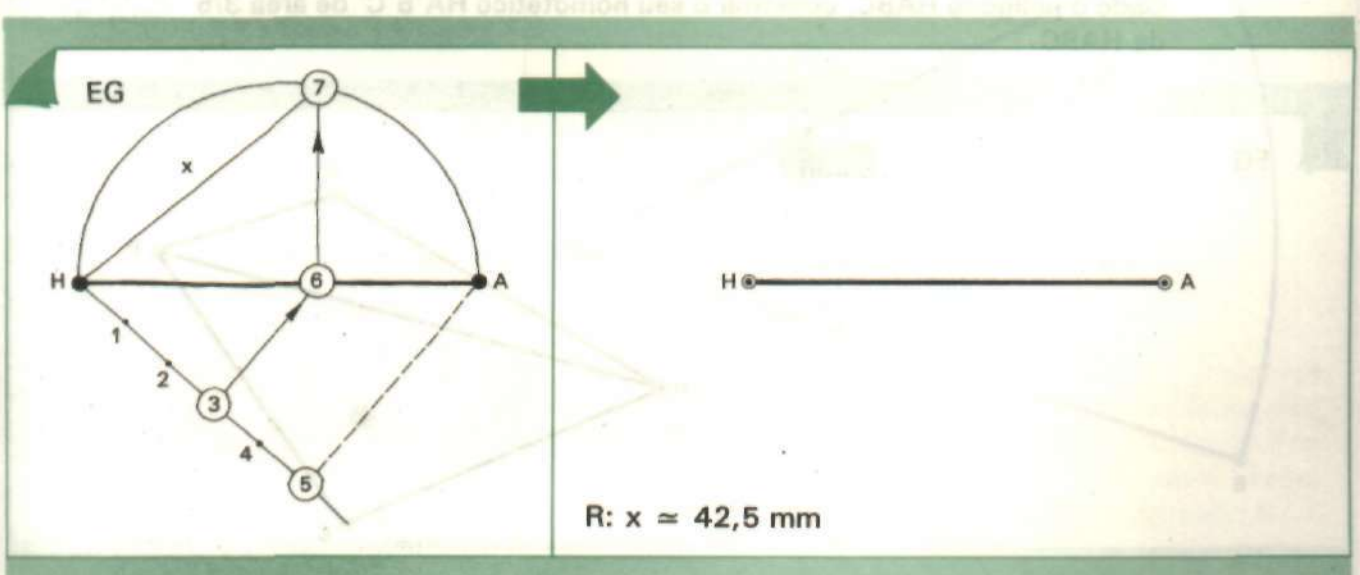
086 PROBLEMAS COM SEGMENTOS

Só há dois:

1º) **DADO um maior** (por exemplo HA = $j\sqrt{5}$),

OBTER um menor (por exemplo: x = $j\sqrt{3}$)

O j não importa, porque não foi pedido.

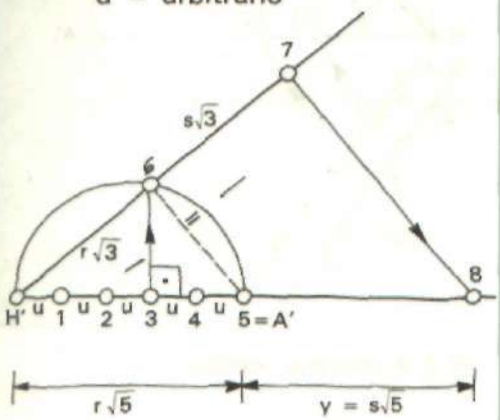


087 2º) DADO **um menor** (por exemplo $s\sqrt{3}$),

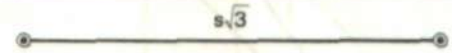
OBTER **um maior** (por exemplo: $y = s\sqrt{5}$)

EG

u = arbitrário



"Cortam-se" r e s.



R: y = 70,5 mm.

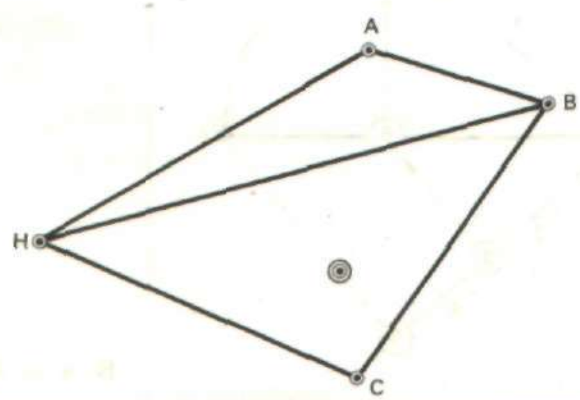
088 TIPO 7A CONSTRUÇÃO DE FIGURAS HOMOTÉTICAS

089 PROBLEMA:

Dado o polígono HABC, construir o seu homotético HA'B'C' de área 3/5 de HABC.

Designaremos uma área pelas letras do seu contorno.

EG



RACIOCÍNIO:

$$\text{SE } \underbrace{HA'B'C'} : \underbrace{HABC} = 3 : 5$$

$$t \cdot (HA')^2 : t \cdot (HA)^2 = 3 : 5$$

nº 034

nº 079, a e b. ENTÃO $HA' : HA = \sqrt{3} : \sqrt{5}$

Temos $HA = j\sqrt{5}$ (não importa o valor de j) e queremos $HA' = j\sqrt{3}$ (é o mesmo j).

Resolve-se como o nº 086.

090 EXERCÍCIO:

Dado o polígono HABC (o mesmo do nº 089), construir a poligonal A'B'C', homotética da poligonal ABC (portanto de lados // s) e com área 2/5 de HABC.

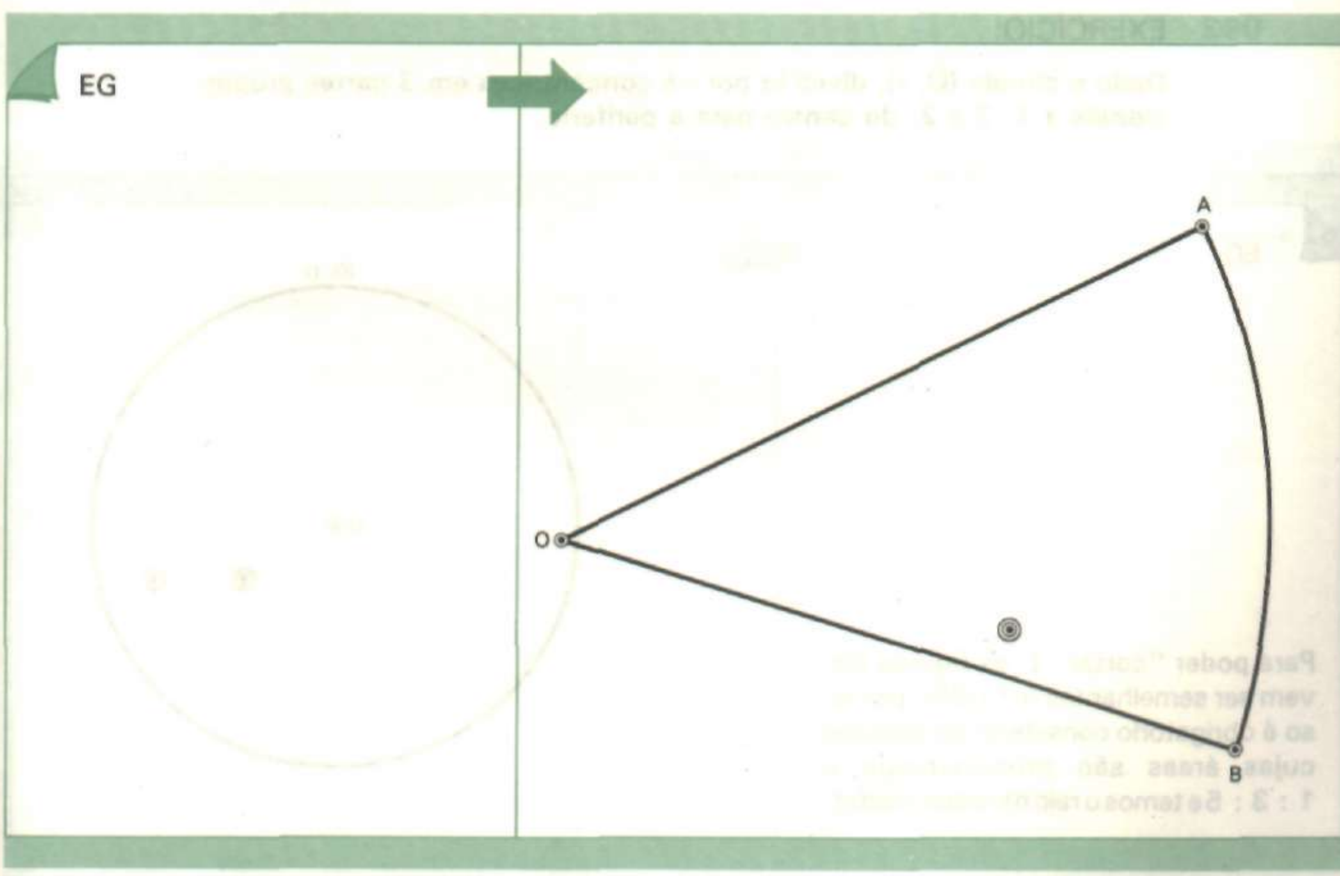
RESOLUÇÃO:

SE $HA'B'C' = \frac{3}{5} \cdot HABC$,

ENTÃO a faixa $A'ABCC'B' = 2/5 \cdot HABC$.

091 EXERCÍCIO:

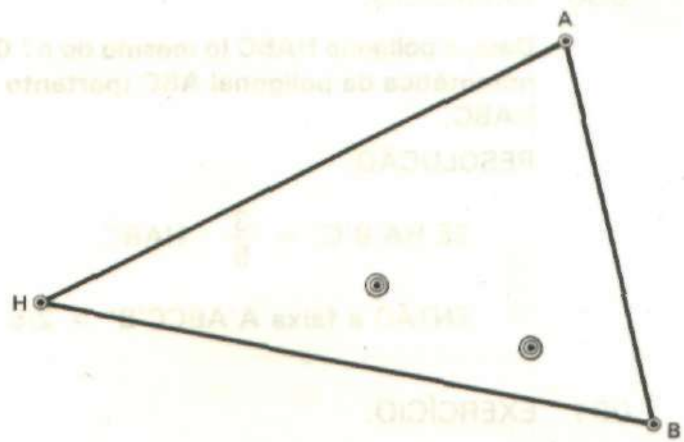
Dado o setor circular OAB, construir o arco $\widehat{A'B'}$, homotético do $\widehat{AB}$, de modo que a coroa de setor tenha área 2/5 da do setor.



092 EXERCÍCIO:

Dividir $\triangle HAB$, por paralelas ao $\overline{AB}$, em 3 figuras equivalentes entre si.

EG

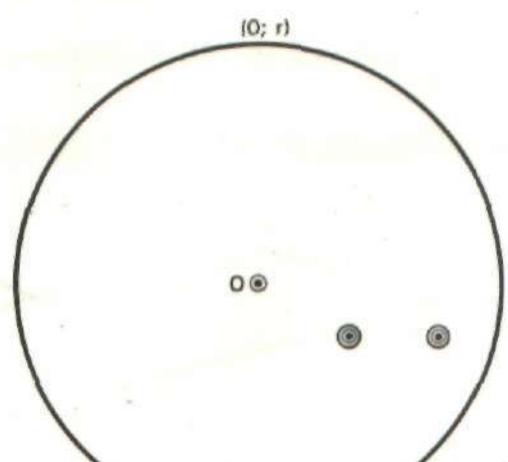


093 EXERCÍCIO:

Dado o círculo ($\overline{O}$; r), dividi-lo por ⊙s concêntricas em 3 partes proporcionais a 1, 2 e 2, do centro para a periferia.

EG

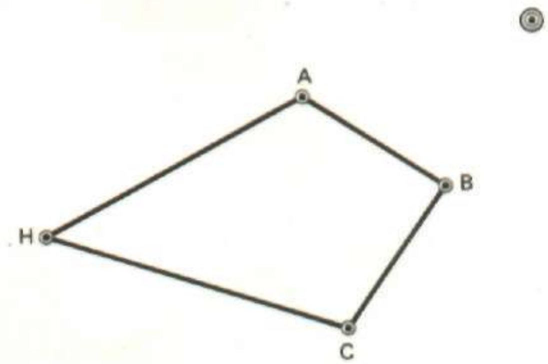
Para poder "cortar" t, as figuras devem ser semelhantes (n.º 033); por isso é obrigatório considerar os círculos cujas áreas são proporcionais a 1 : 3 : 5 e temos o raio da maior (dada).



094 EXERCÍCIO:

Dado o polígono HABC, construir o HA'B'C' homotético do HABC e com área tripla.

EG

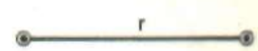


Temos $\overline{HA}$ e queremos $\overline{HA'}$, sabendo que HA : HA' = $\sqrt{1}$: $\sqrt{3}$; é aplicação do problema do nº 087.

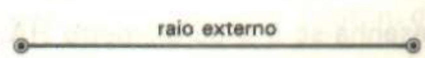
095 EXERCÍCIO:

Uma coroa circular é equivalente ao dobro do círculo interno, que tem raio r dado. Construir essa coroa.

EG



R:

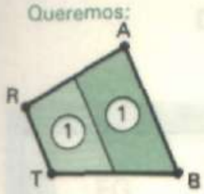


TIPO 7B

DIVISÃO DE FIGURAS "HACHURADAS" HOMOTÉTICAS

Referidas no nº 062a.

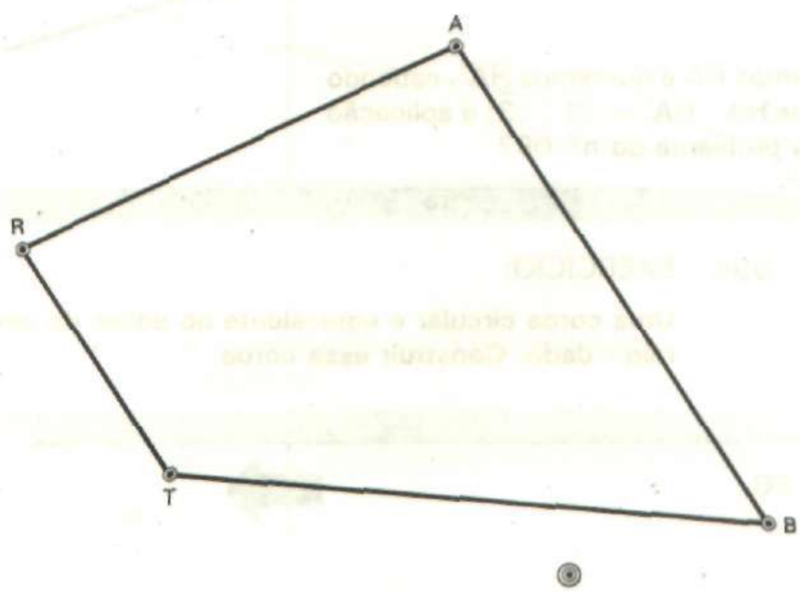
Queremos:



mas as partes não são semelhantes.

PROBLEMA:

Dividir o trapézio RABT, por uma paralela às bases, em duas figuras equivalentes entre si.



PESQUISA DA RESOLUÇÃO:

Resolve-se no rascunho — no EGT — o seguinte problema auxiliar:

Como as partes não são semelhantes (não é o mesmo t), temos que recorrer aos △s homotéticos.

Dividir um △HAB, por // ao $\overline{AB}$, em 3 figuras de áreas na proporção 1 : 1 : a, de $\overline{AB}$ para $\overline{H}$, sendo a arbitrário.

a é arbitrário porque é um problema auxiliar.

ROTEIRO PARA DESENHAR O EGT:

O centro dessa ⊙ é o pt.m. de $\overline{HA}$, não desenhado no EGT.

1º) Desenha-se a ⊙ de diâmetro $\overline{HA}$.

2º) Divide-se $\overline{AH}$ na proporção 1 : 1 : a, de $\overline{A}$ para $\overline{H}$, pelos pontos $\overline{Y}$ e $\overline{X}$. As linhas para essa divisão não estão desenhadas nesse EGT.

3º) Traçam-se as ⊥s ao $\overline{HA}$ por $\overline{Y}$ e $\overline{X}$, obtendo os comprimentos II e I.

4º) Os arcos ($\overline{H}$; II) e ($\overline{H}$; I) determinam $\overline{S}$ e $\overline{R}$, pelos quais traçamos as //s ao $\overline{AB}$.

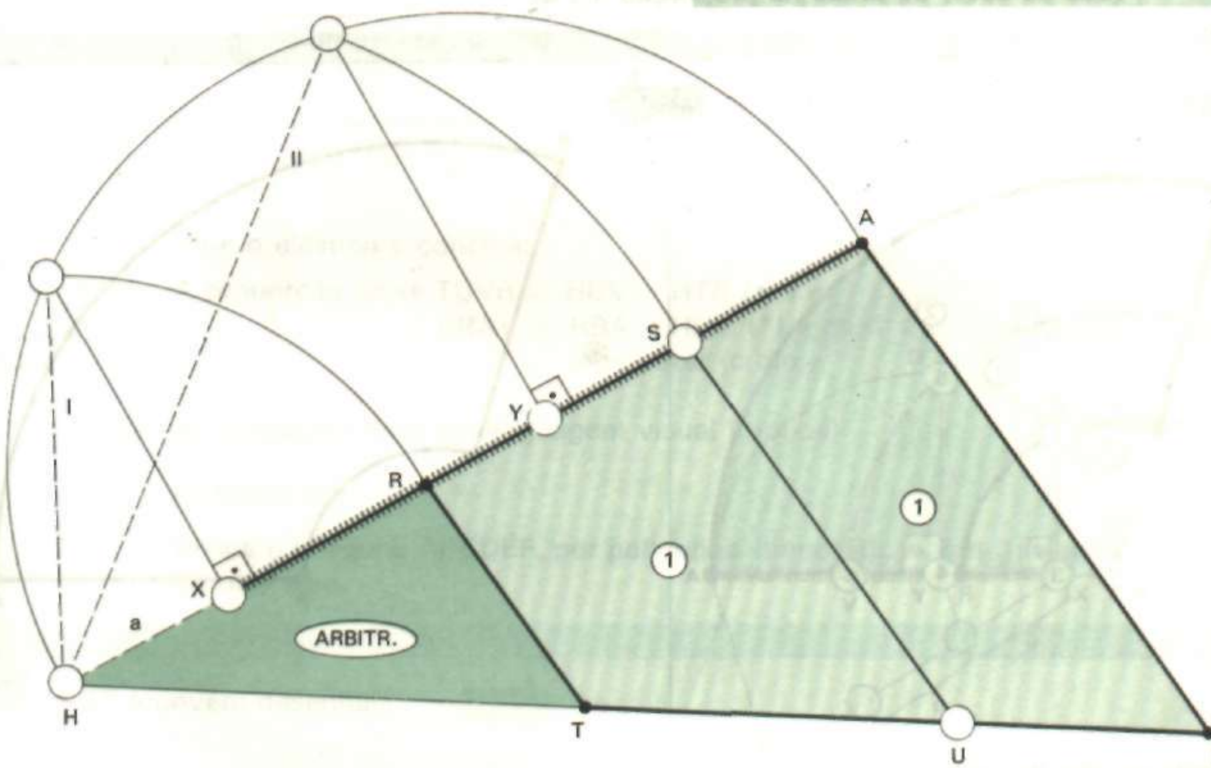
$\overline{SU}$ divide a figura dada na proporção 1:1.

EGT

O segmento $\overline{XA}$, que corresponde à figura dada, chama-se

BUSÍLIS

do problema.



O △HAB está dividido na proporção ARBITR.: 1:1.

ROTEIRO PARA RESOLVER O PROBLEMA DO nº 096:

(vá numerando as "bolinhas" no EGT acima):

Sempre deve existir um centro de homotetia.

1º) Obtenha o centro de homotetia $\overline{H}$ (1).

2º) ⊙ de ∅$\overline{HA}$. Depois ($\overline{H}$; HR). Depois $\overline{X}$ em $\overline{HA}$.

∅: diâmetro

3º)

> Divida o "busílis" $\overline{XA}$ na mesma proporção que se quer dividir a figura dada.

No caso, divide-se $\overline{XA}$ na proporção 1:1, obtendo $\overline{Y}$ (pt.m. de $\overline{XA}$).

4º) Por $\overline{Y}$, traça-se a ⊥ ao $\overline{HA}$, obtendo II.

5º) O arco ($\overline{H}$; II) determina $\overline{S}$ e a reta $\overleftrightarrow{SU}$ // $\overline{AB}$, que é a resposta.

097

Essa é a essência do MF:

1º) Desenha-se o EGT "de trás (resposta) para diante (dados)".

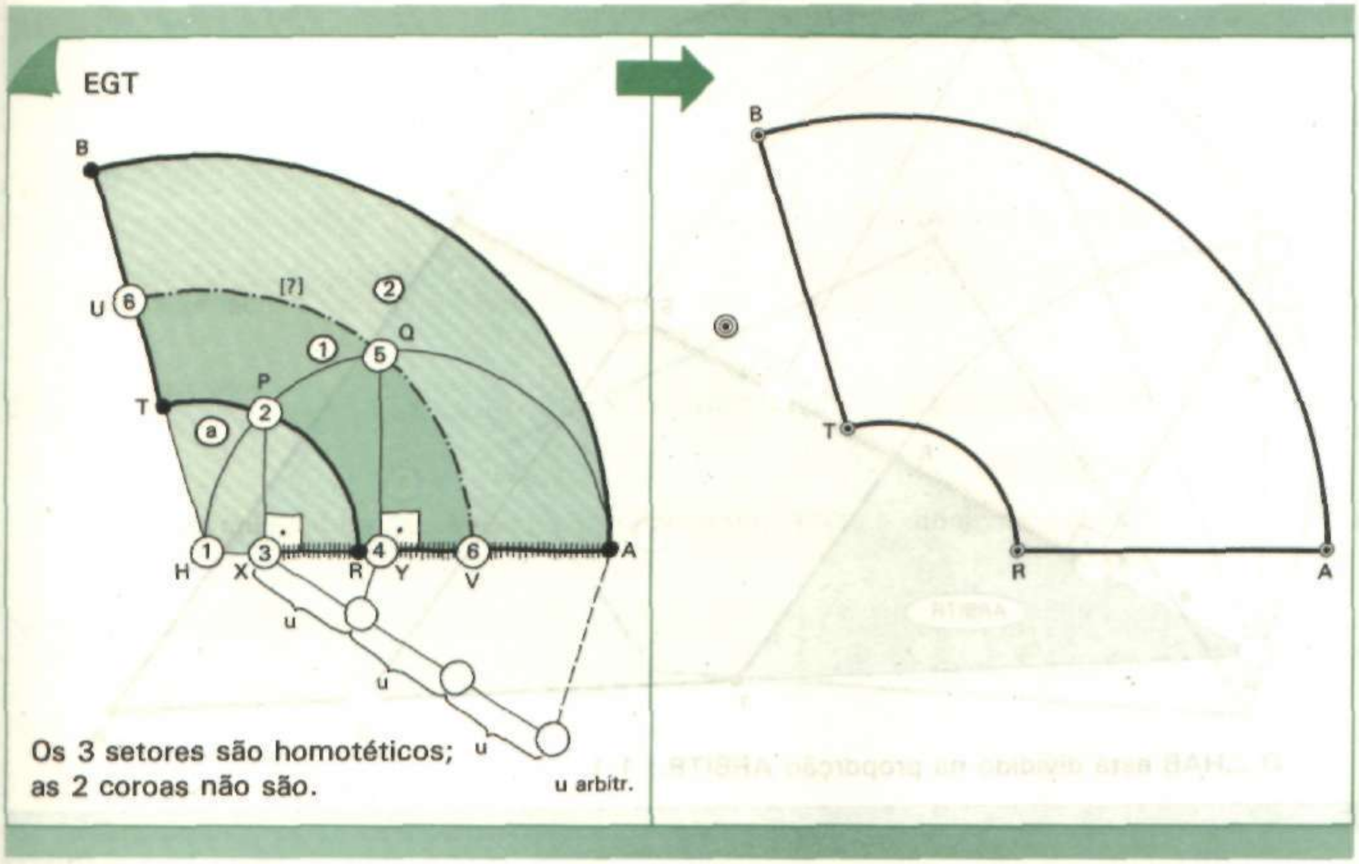
2º) Copia-se esse EGT "de diante (dados) para trás (resposta)".

Nos próximos exercícios, faça sempre isso.

098 EXEMPLO:

Por um arco $\overset{\frown}{UV}$ concêntrico, dividir a coroa de setor RABT em duas coroas de setor de áreas na proporção 1 : 2.

Do centro para a periferia.



RACIOCÍNIO (é o MF!...):

a. Desenha-se um EGT mostrando (visualmente) um setor HAB dividido na proporção a : 1 : 2, sendo **a (que corresponde ao setor menor) de qualquer tamanho**, pois não importa qual seja.

b. Copia-se esse EGT obrigando a coroa RABT (do EGT) a superpor-se à coroa RABT dada.

ROTEIRO (vá numerando as "bolinhas" vazias):

1º) Obtenha o centro de homotetia $\overline{H}$, que obrigatoriamente existe (número 1).

2º) Construa o "círculo esotérico" de $\varnothing\overline{HA}$.

3º) Obtenha $\overline{P}$ (nº 2) e depois $\overline{X}$ (nº 3).

Esotérico. Diz-se de um conhecimento ministrado a um grupo restrito e fechado de pessoas.

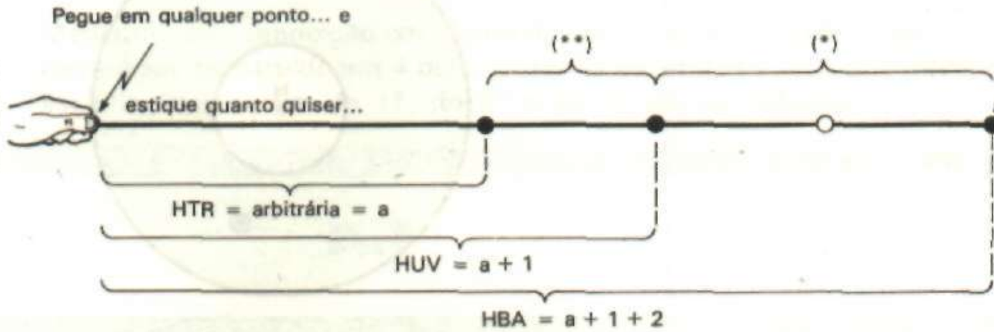
Exotérico. Diz-se um conhecimento para a "plebe".
Decida qual o seu grupo...

4º) *Divida o "busflis" $\overline{XA}$ na mesma proporção (ordenada) das áreas* procuradas.
Neste exemplo, na proporção 1 : 2, obtém-se $\overline{Y}$. Continue numerando...

5º) Obtenha $\overline{Q}$ e trace o arco $\widehat{UV}$ procurado.

099 "ELASTICOLOGIA" (do nº 098):

Liberte-se um pouco de equações! Aprenda a compreender também por outros caminhos.



Lembrar que área é um número.

Computadores é que só "raciocinam" baseados em equações que os programam... Você não tem cérebro eletrônico.

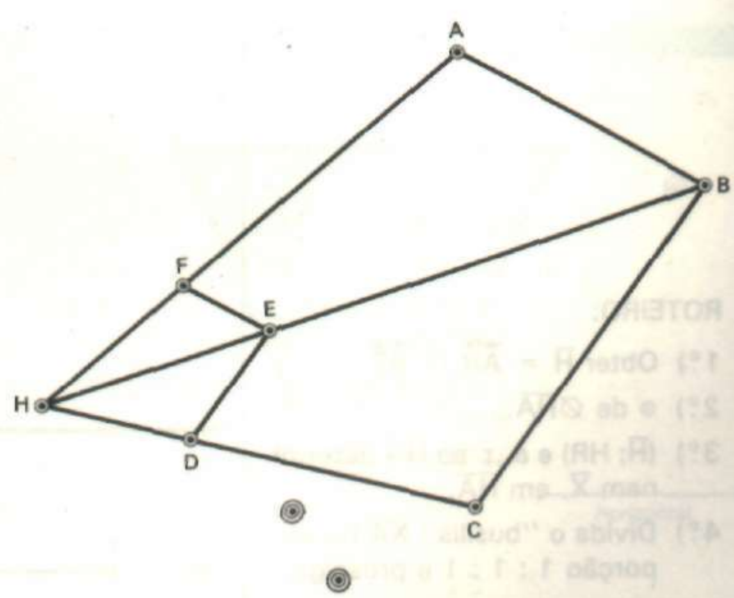
Olhe o elástico e conclua:
A proporção entre TUVR = HUV − HTR (**) e
UBAV = HBA − HUV (*) *é de* 1 : 2, *como queríamos obter* (c.q.o.)

100 A mensagem está em linguagem visual (gráfica).

101 EXERCÍCIO:

Divida o polígono ABCDEF, por poligonais homotéticas, em 3 faixas de *mesma área*.

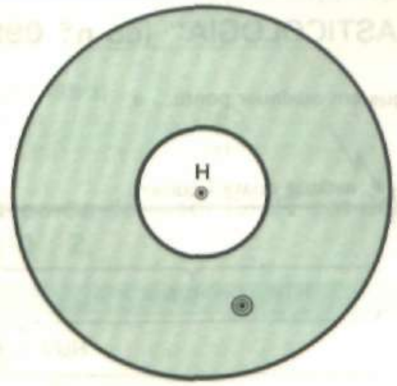
EGT (convém desenhar)



102 EXERCÍCIO:

Por uma ⊙ concêntrica, dividir a coroa circular em partes de áreas na proporção 3 : 2, ordenada da periferia para o centro.

EGT



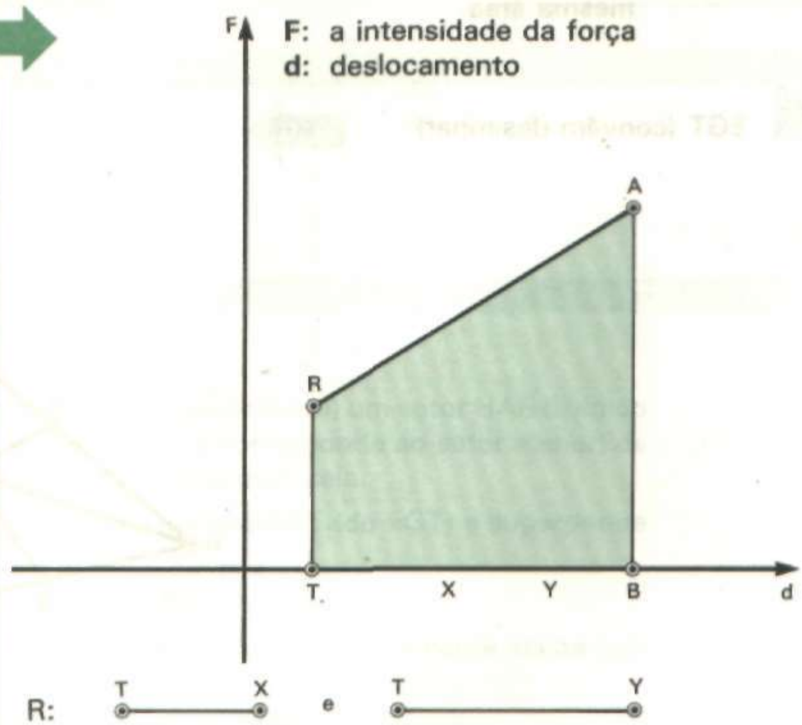
103 É grande o número de aplicações destes problemas do TIPO 7B nas ciências e nas técnicas. Daremos algumas como exercícios.

104 EXERCÍCIO:

O trabalho é dado pelo produto da intensidade da força pelo deslocamento.

O TRABALHO executado por uma força, entre $\overline{T}$ e $\overline{B}$, é numericamente igual à área do trapézio TRAB. Após quais deslocamentos TX e TY o trabalho é, respectivamente, igual a 1/3 e a 2/3 desse trabalho?

EGT



ROTEIRO:

1º) Obter $\overline{H} = \overleftrightarrow{AR} \cap \overleftrightarrow{BT}$

2º) ⊙ de $\varnothing\overline{HA}$.

3º) ($\overline{H}$; HR) e a ⊥ ao $\overline{HA}$ determinam $\overline{X}$, em $\overline{HA}$.

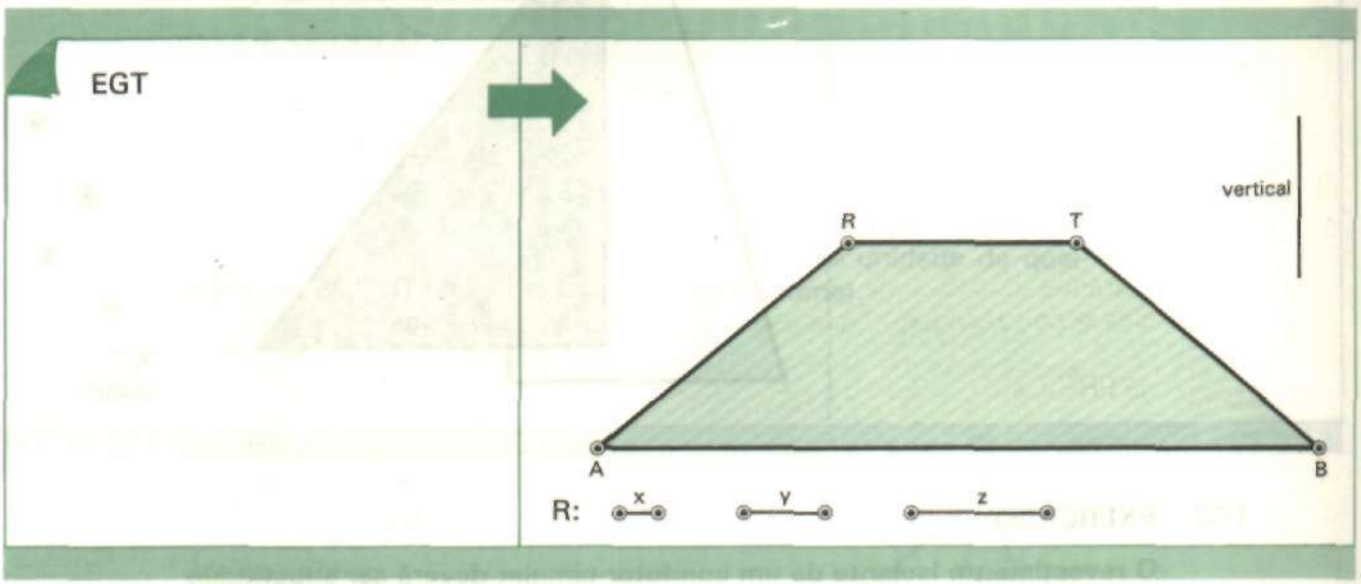
4º) Divida o "busílis" $\overline{XA}$ na proporção 1 : 1 : 1 e prossiga.

RESOLUÇÃO:

As áreas dos trapézios procurados são dadas pelo produto de uma constante pelo *quadrado de um comprimento, mas, como esses trapézios não* têm a mesma forma, essas constantes não são iguais e não podem ser "cortadas". Por isso é que deveremos obter H e trabalhar com os triângulos, que são homotéticos entre si.

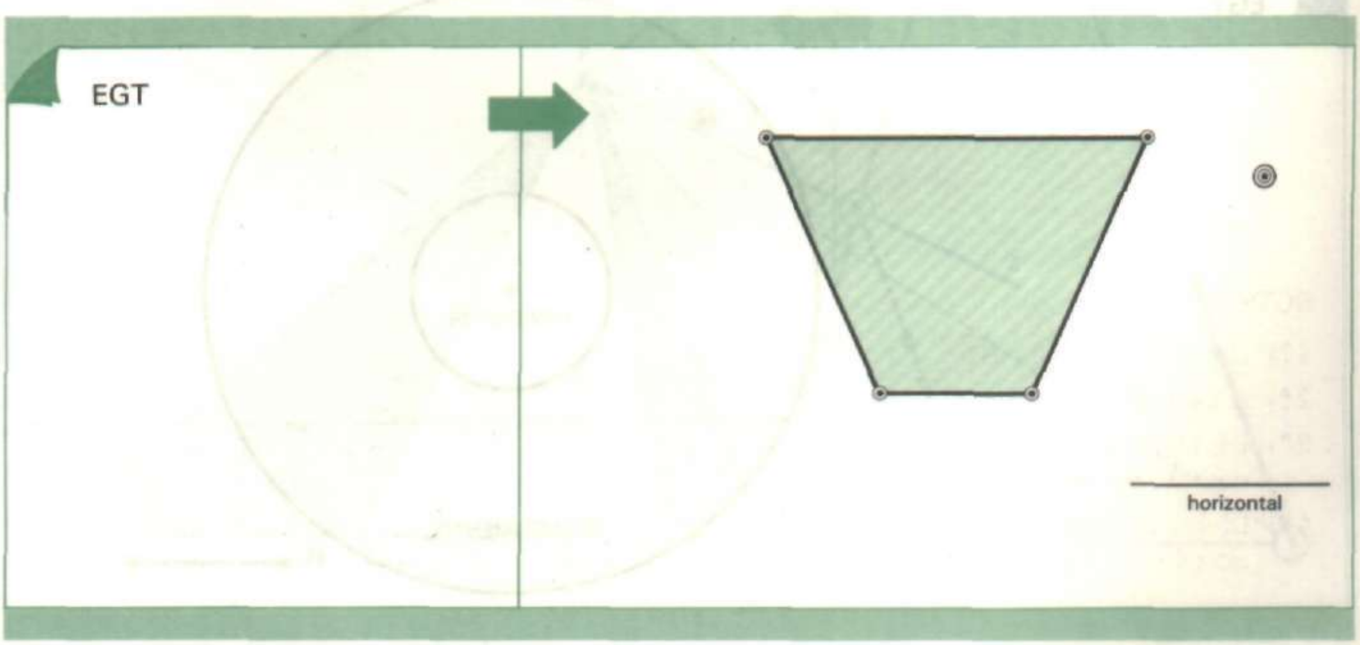
105 EXERCÍCIO:

Mediante uma deposição constante de terra, o aterro ARTB, trapezoidal, deverá ser construído em 4 dias. Obtenha as alturas x, y, z **que deverão ser atingidas no fim do 1º, do 2º e do 3º dia de trabalho.**



106 EXERCÍCIO:

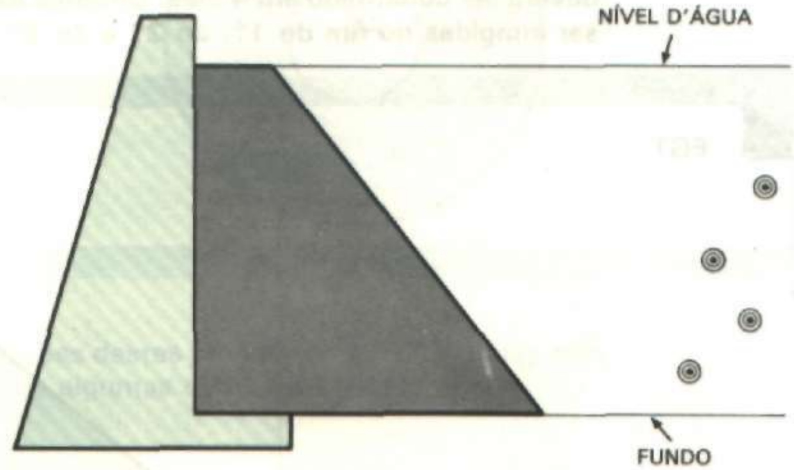
O barco de seção trapezoidal flutua na água mantendo submerso 4/5 de sua área. Desenhe a linha que indica o nível da água.



107 EXERCÍCIO:

Para o cálculo de uma barragem, o diagrama das pressões precisa ser dividido, por exemplo, em 5 partes equivalentes. Faça graficamente essa divisão.

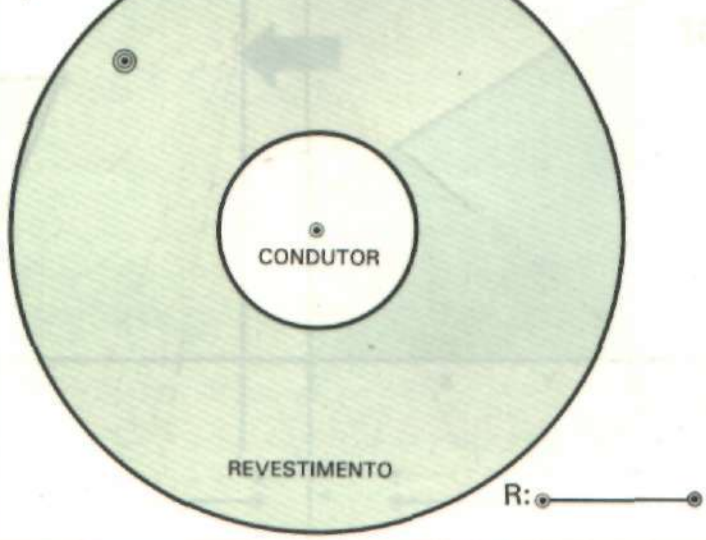
EGT



108 EXERCÍCIO:

O revestimento isolante de um condutor circular deverá ser substituído por outro, mais eficiente, de área 2/3 da área do antigo. Qual a espessura do novo revestimento?

EGT



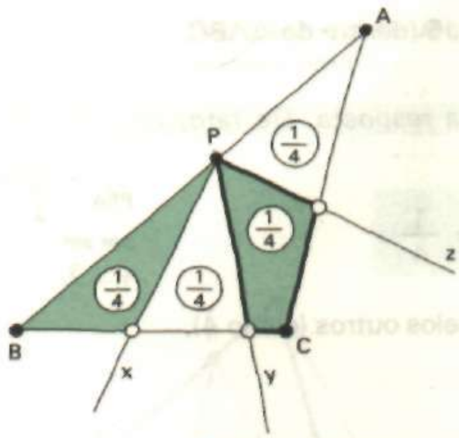
TIPO 8 "BICOTOMIA" II

Dividir um polígono dado em figuras de áreas numa dada proporção, por retas incidentes num ponto dado num dos lados.

Por exemplo:

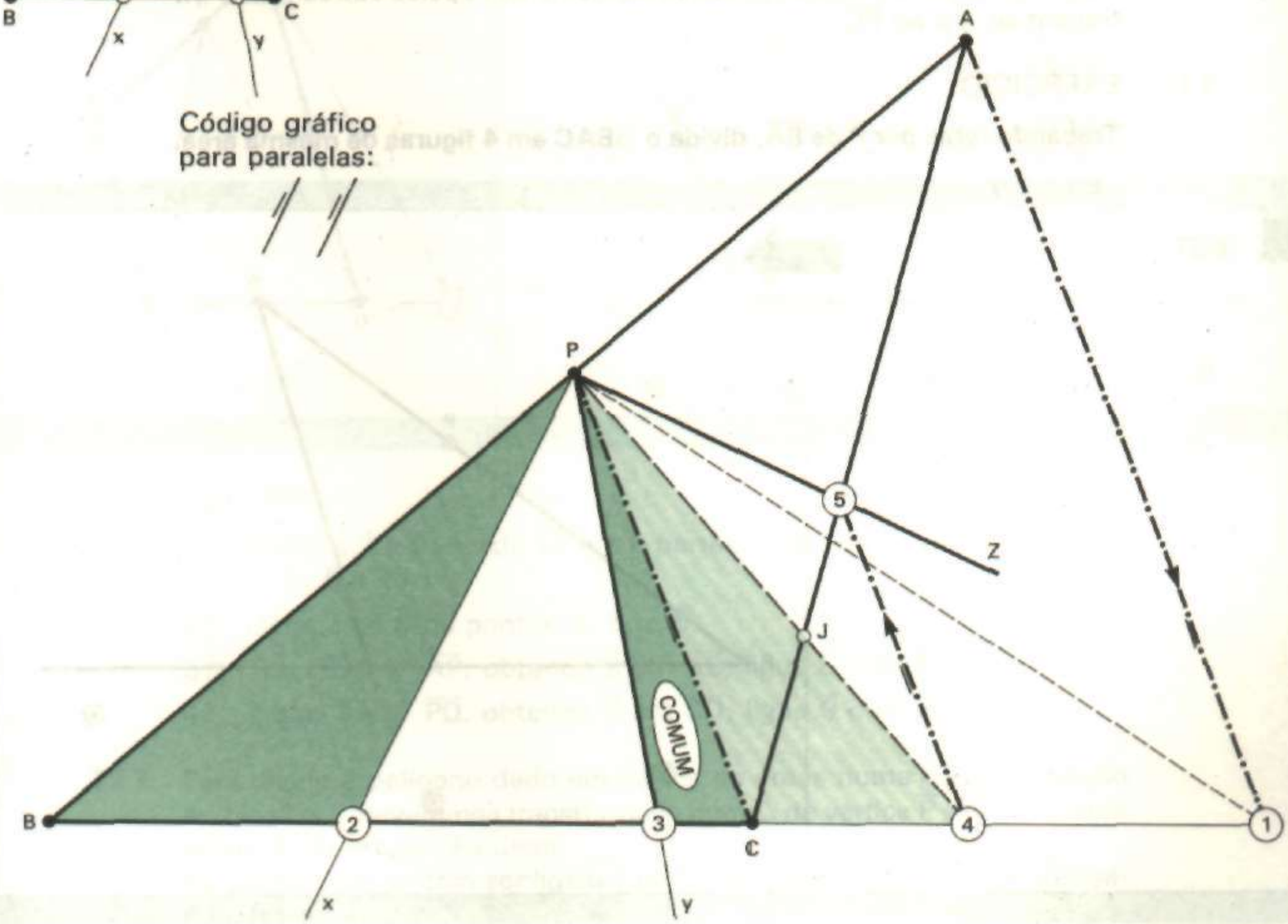
Dividir o △ABC em 4 partes de mesma área por retas conduzidas pelo ponto $\overline{P}$ do lado $\overline{AB}$.

O QUE SE QUER?



Chamemos a área do △ABC de 1 (uma unidade de qualquer nome).

Código gráfico para paralelas:



110 RESOLUÇÃO:

Estamos designando pontos por algarismos arábicos...

a. Traçando $\overleftrightarrow{A1} \parallel \overline{PC}$, trocamos o "bico" PCA pelo "bico" PC1 e transformamos o $\triangle$ABC dado no $\triangle$B1P equivalente e com vértice no ponto dado $\overline{P}$.

b. Dividindo a base $\overline{B\dot{1}}$ (do $\triangle$BP1) da mesma maneira como se quer dividir o $\triangle$ dado – no caso, em 4 partes congruentes, pelos pontos $\dot{2}$, $\dot{3}$ e $\dot{4}$ –, obtemos 4 $\triangle$s cujas áreas valem 1/4 (as bases valem 1/4 e têm a altura do $\triangle$BP1).

c. As retas $\overleftrightarrow{P2} = \overleftrightarrow{x}$ e $\overleftrightarrow{P3} = \overleftrightarrow{y}$ já são duas das respostas, mas a reta $\overleftrightarrow{P4}$ não é a resposta $\overleftrightarrow{Z}$, apesar de que

$$3P4 = 1/4 \qquad (*)$$

Por quê? Porque CJ4 tem que ser colocada em PJ5 (dentro do $\triangle$ABC, para que 3P5C seja 1/4.

d. Isso se consegue com $\overleftrightarrow{45} \parallel \overleftrightarrow{CP}$; $\overleftrightarrow{P5} = \overleftrightarrow{Z}$ é a resposta. De fato, trocamos o "bico" PC4 pelo "bico" PC5:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{por construção} & \Rightarrow PC4 = PC5 \\ \text{como vimos } (*) & \Rightarrow 3P4 = 1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3P5C = \frac{1}{4}$$

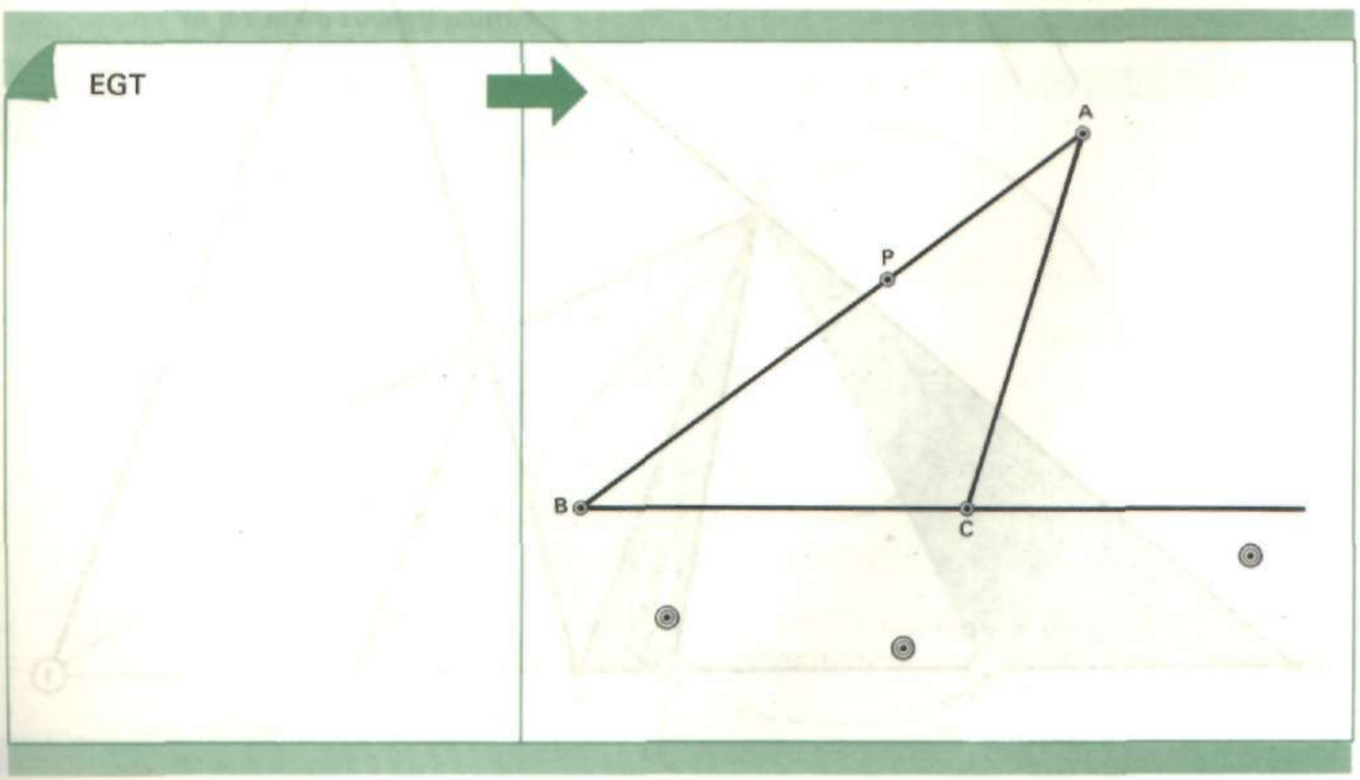
$P5A = \frac{1}{4}$ por ser $1 - \frac{3}{4}$.

111

Os pontos entre $\overline{B}$ e $\overline{C}$ são ligados diretamente ao $\overline{P}$; pelos outros (como $\dot{4}$), traçam-se $\parallel$s ao $\overline{PC}$.

112 EXERCÍCIO:

Traçando retas por $\overline{P}$ de $\overline{BA}$, divida o $\triangle$BAC em 4 figuras de mesma área.



113 RESUMO:

a. Os pontos de divisão que caem em $\overline{BC}$ são ligados diretamente ao $\overline{P}$.

b. Pelo ponto que cai entre $\overline{C}$ e $\overline{1}$, traça-se a // ao $\overline{PC}$, obtendo $\overline{5}$ em $\overline{AC}$; $\overline{5}$ é ligado com $\overline{P}$.

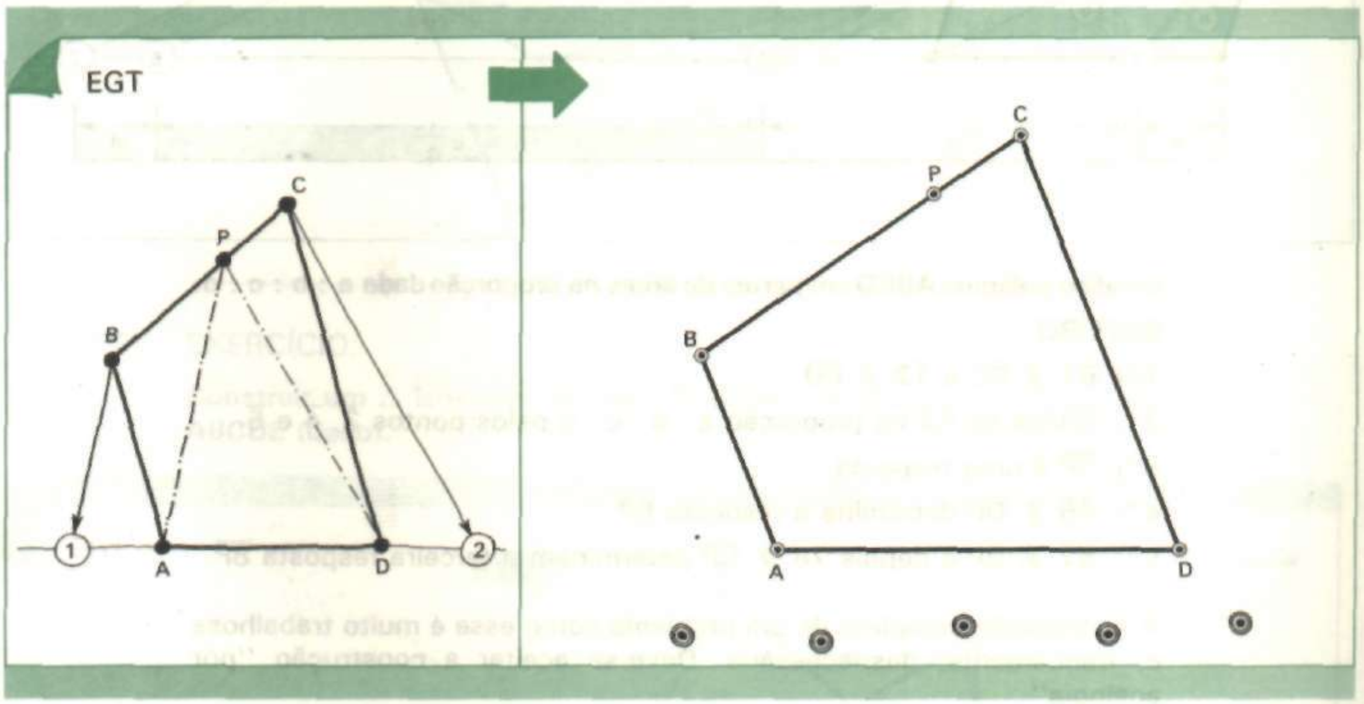
114 **E se caírem mais pontos entre $\overline{C}$ e $\overline{1}$?**

Por todos eles traçam-se //s ao $\overline{PC}$, obtendo pontos em $\overline{AC}$, que são ligados ao $\overline{P}$. A demonstração é análoga, mas complexa.

115 Estes são problemas de eqüidecomposição de superfícies, puramente geométricos. Na resolução desses problemas, os desenhos das figuras (e não expressões algébricas) justificam as resoluções.

116 EXERCÍCIO:

Por retas incidentes em $\overline{P}$, dividir o quadrilátero ABCD em 6 partes de mesma área.



ROTEIRO:

1º) Obtidos $\overline{1}$ e $\overline{2}$, divida $\overline{12}$ em 6 partes congruentes pelos pontos $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$ e $\overline{7}$.

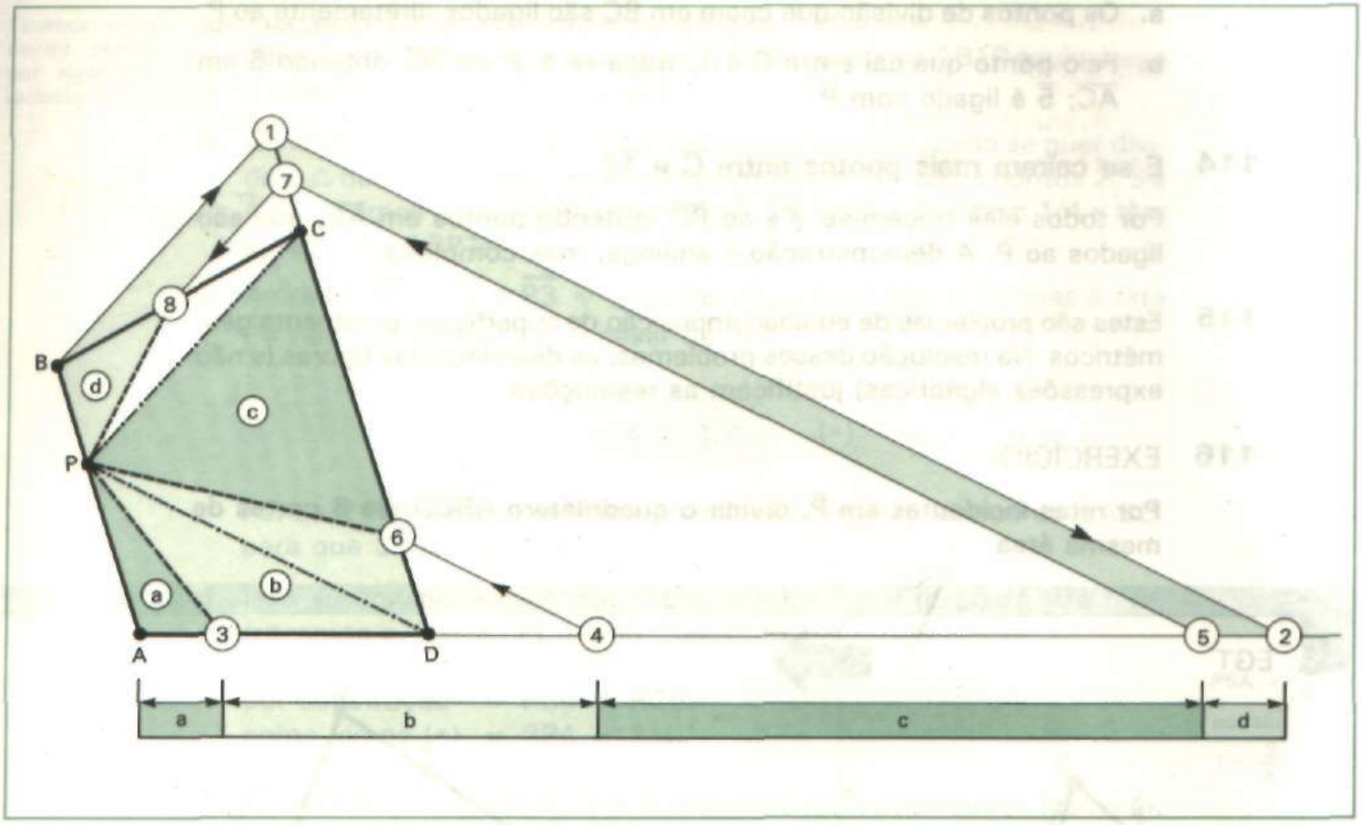
2º) Ligue com $\overline{P}$ os pontos $\overline{4}$, $\overline{5}$, e $\overline{6}$.

3º) Trace $\overline{38}$ // $\overline{AP}$, obtendo $\overline{8}$ em $\overline{AB}$; ligue $\overline{8}$ com $\overline{P}$.

4º) Trace $\overline{79}$ // $\overline{PD}$, obtendo $\overline{9}$ em $\overline{CD}$; ligue $\overline{9}$ com $\overline{P}$.

117 Para dividir o polígono dado em partes de áreas numa dada proporção a : b : c : ..., deveremos transformá-lo num $\triangle$ de vértice $\overline{P}$ e dividir a base desse $\triangle$ na proporção dada.
Há pontos que podem ser ligados ao $\overline{P}$ e há pontos pelos quais precisamos traçar //s.

118 **Pode acontecer o seguinte:**



Dividir o polígono ABCD em partes de áreas na proporção dada a : b : c : d.

ROTEIRO:

1º) $\overline{B1} \parallel \overline{PC}$ e $\overline{12} \parallel \overline{PD}$.

2º) Divide-se $\overline{A2}$ na proporção a : b : c : d pelos pontos $\overline{3}$, $\overline{4}$ e $\overline{5}$.

3º) $\overline{3P}$ é uma resposta.

4º) $\overline{46} \parallel \overline{DP}$ determina a resposta $\overline{6P}$.

5º) $\overline{57} \parallel \overline{DP}$ e depois $\overline{78} \parallel \overline{CP}$ determinam a terceira resposta $\overline{8P}$.

119 A justificação completa de um problema como esse é muito trabalhosa e, francamente, desnecessária. Deve-se aceitar a construção "por analogia".

120

Operações gráficas possíveis:
a. soma ⇒ difer.
b. prod. ⇒ quoc.
c. 4ª⇒3ª prop.
d. M. geom.
e. Pitágoras e só...

TIPO 9 PROCEDIMENTO ALGÉBRICO

1º) Escolhe-se qual o melhor comprimento **x** que convém obter, para facilitar a construção da figura procurada.

2º) Equacionando e obtendo a expressão de **x**, resta ajeitar para recair nas operações gráficas possíveis.

121

TIPO 9A A FORMA NÃO É DADA

122 EXEMPLO:

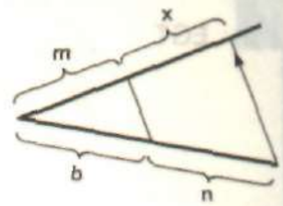
Só é possível resolver expressões que recaem nas 5 operações citadas anteriormente.

Construir um △ isósceles de base $\overline{b}$ (dada) equivalente a um polígono dado.

RESOLUÇÃO:

1º) Transforma-se, mudando "bicos", o polígono dado num △ equivalente, de base **m** e altura **n**.

2º) Convém obter a altura **x** do △ procurado.

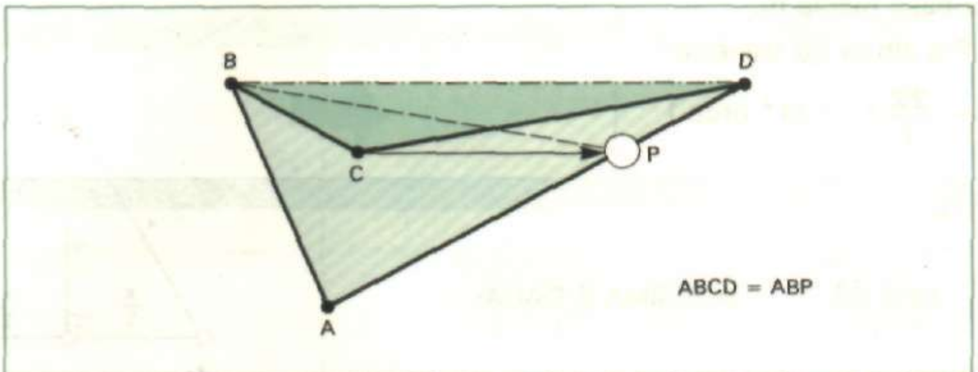


3º) Equacionando:

$$\frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}mn \Rightarrow \frac{m}{b} = \frac{x}{n}$$

4º) Obtém-se a 4ª proporcional **x** e constrói-se o △ procurado.

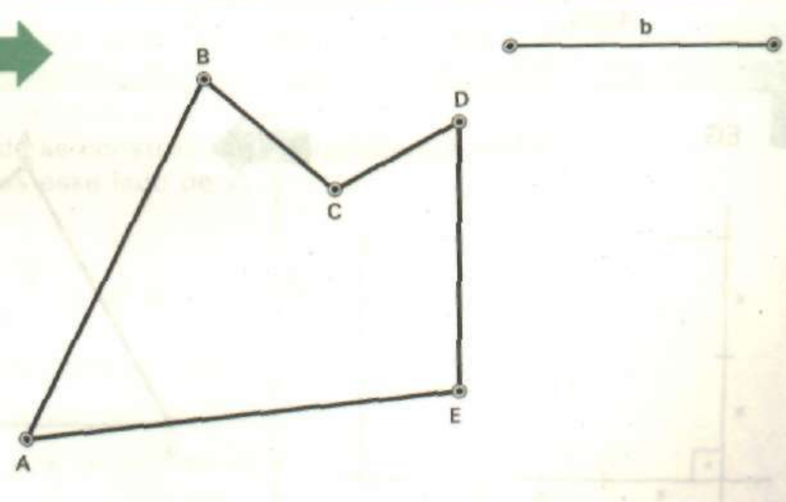
123 "BICO NEGATIVO" **(polígono côncavo):**



124 EXERCÍCIO:

Construir um △ isósceles de base $\overline{b}$ (dada) e equivalente ao polígono ABCDE (dado).

EGT

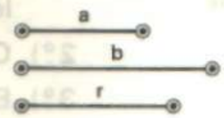


R: altura

125 EXERCÍCIO:

Construir um trapézio retângulo de bases $\overline{a}$ e $\overline{b}$ dadas e equivalente a um círculo de raio $\overline{r}$ dado.

EGT



Confira fazendo a conta.

ROTEIRO:

1º) Obter a base média $\overline{m}$.

2º) Sendo $\overline{x}$ a altura do trapézio:

$$x \cdot m = \frac{22}{7} r \cdot r \text{ (4ª prop.)}$$

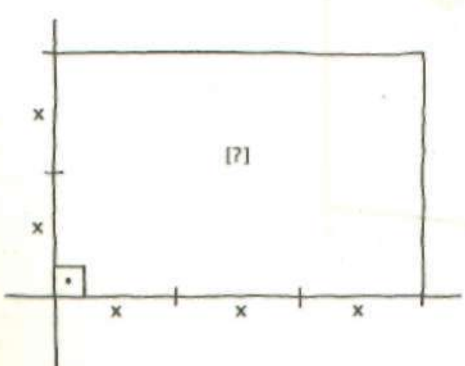
126 TIPO 9B | A FORMA É DADA

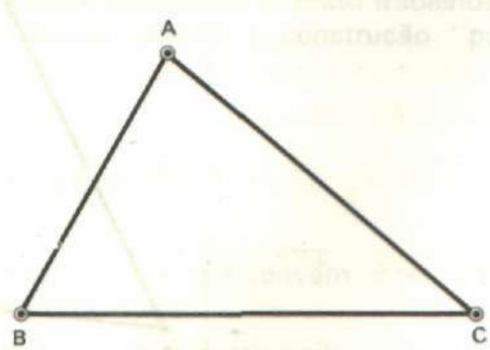
A forma sendo dada é um problema do TIPO 4, mas, se as áreas das figuras dada e procurada forem expressas por fórmulas relativamente simples, convém usar o procedimento algébrico.

127 EXEMPLO:

Construir um retângulo de lados na razão 2/3 e equivalente a um △ABC dado.

EG





R: lados do retângulo: 39,5 mm e 26,0 mm.

RESOLUÇÃO:

a. *A maneira mais fácil de construir o retângulo procurado é obter* **x** (vide EG).

b. Equacionando:
No $\triangle$ dado, sejam **m** = base e **n** = $\frac{1}{2}$ altura.

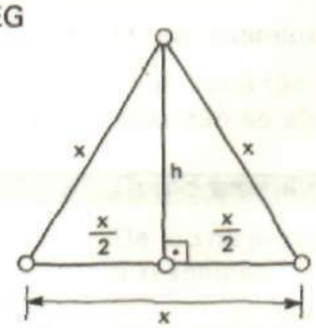
Deveremos ter:
$$3x \cdot 2x = m \cdot n \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{3} \cdot \frac{n}{2}}$$

c. Obtém-se **x**, que é a média geométrica entre $\frac{m}{3}$ e $\frac{n}{2}$.

128 EXERCÍCIO:

Construir um $\triangle$ eqüilátero equivalente a um quadrado de lado $\bar{a}$ dado.

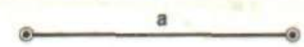
EG



$$h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$



Confira fazendo a conta.

R: x ≃ 53 mm.

RESOLUÇÃO:

a. A maneira mais fácil de se construir um $\triangle$ eqüilátero é tendo o seu lado; então, chamemos esse lado de **x**.

b. Equacionando:

$$\frac{1}{2} x \cdot h = a^2 \Rightarrow \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4a^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x^2 = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$$

Ajeitando, para resolver graficamente:

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}a \cdot a\sqrt{3}}$$

1º) Acha-se 4/3 · a. 2º) Acha-se a $\sqrt{3}$.

3º) Acha-se a média geométrica **x**.

c. Obtido **x**, constrói-se o $\triangle$ eqüilátero.

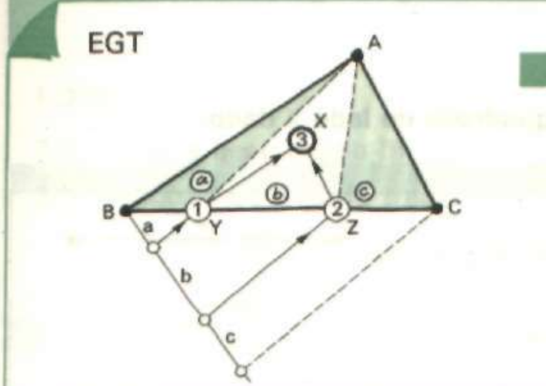
129 TIPO 10 CHARADAS

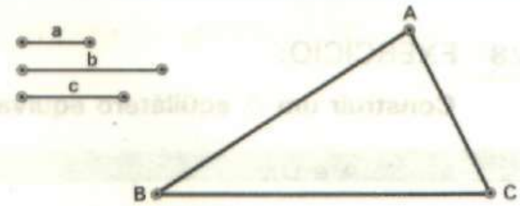
Artifícios podem ser concluídos (basta examinar tudo o que pode ser feito), mas não no curto prazo de uma prova.

São problemas que dependem de algum artifício para a sua resolução.

130 1º EXEMPLO:

Obter um ponto interno $\overline{X}$, de modo que a proporção das áreas XBA, XBC e XCA seja a : b : c, sendo $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ ou TODOS segmentos ou TODOS números dados.





R: AX = 14,5 mm.

ROTEIRO:

1ª ETAPA:

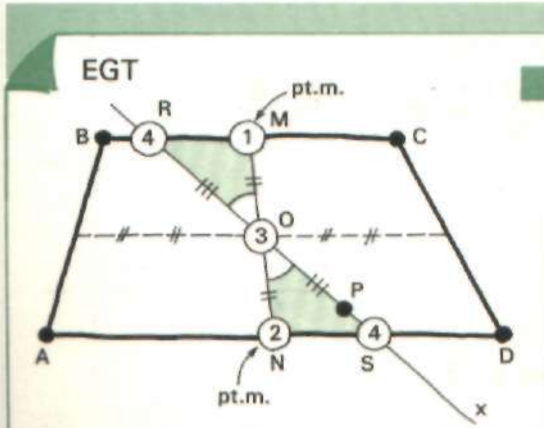
Divide-se $\overline{BC}$ na proporção dada, obtendo as áreas BAY, YAZ e ZAC na proporção a : b : c, por terem mesma altura e bases nessa proporção.

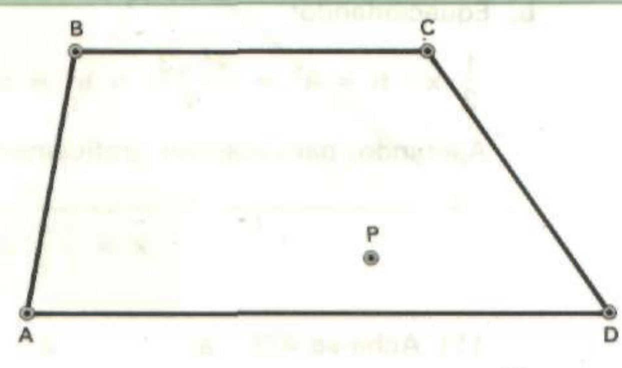
2ª ETAPA:

Fixando $\overline{B}$ e $\overline{A}$ e variando Y na // ao $\overline{BA}$, fixando $\overline{C}$ e $\overline{A}$ e traçando $\overline{ZX}$ // $\overline{CA}$, obtemos $\overline{X}$.

131 2º EXEMPLO:

Traçar por $\overline{P}$ uma reta que divide o trapézio dado em duas figuras equivalentes entre si.





ROTEIRO:

1ª ETAPA:

Sendo $\overline{M}$ e $\overline{N}$ os pontos médios das bases, os trapézios ABMN e NMCD são equivalentes, por terem mesma altura e bases médias congruentes (valem metade da base média do trapézio dado).

2ª ETAPA

Sendo $\overline{O}$ o pt.m. de $\overline{MN}$, $\triangle ONS \cong \triangle ORM$ [critério LAL], logo $\triangle ONS \approx \triangle ORM$.

Figuras congruentes são obrigatoriamente equivalentes, mas a recíproca é falsa.

> SE da metade (ABMN) da área dada, subtrairmos e somarmos áreas iguais,
> ENTÃO **ABRSA = SRCDS**, c.q.o.

NOTA:

É obrigatório $\overline{P}$ ser dado de modo que $\overline{R}$ caia entre $\overline{B}$ e $\overline{C}$ (logo, $\overline{S}$ cairá entre $\overline{A}$ e $\overline{D}$).

132 **O que examinará um problema do** tipo 10 **numa prova?**

Examinará tão-somente se o estudante conhece ou não o tal problema, mas não se ele conhece o assunto equivalência.

133 **Como examinar se um aluno conhece o assunto equivalência?**

Dando na prova um problema tal que o estudante possa concluir sozinho a resolução.

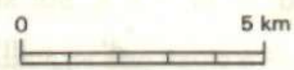
134 **Seria bom um exemplo...**

De fato, resolva o seguinte

EXERCÍCIO:

É dada uma escala gráfica. Desenhe uma outra, de modo que os novos desenhos tenham área dupla.

EG



Confie em você.

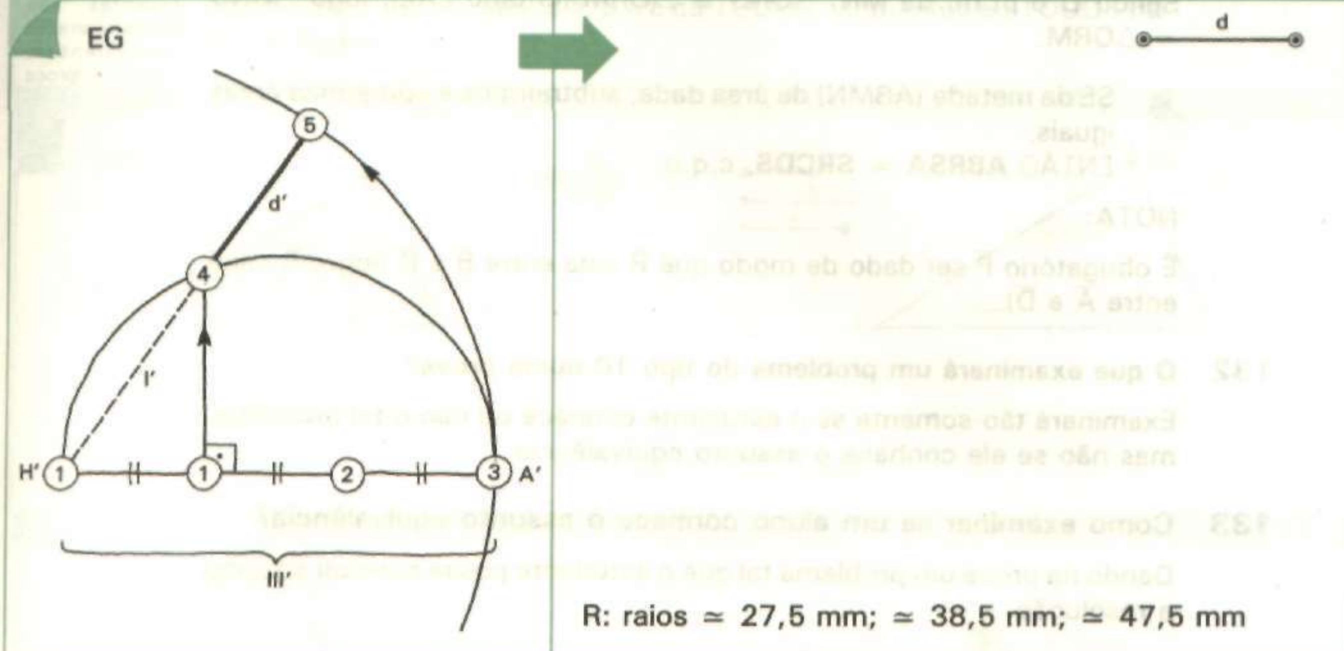
135 Mais um...

Será o último deste capítulo 1.

EXERCÍCIO:

Construir 3 círculos concêntricos, de áreas na proporção 1 : 2 : 3, de modo que a diferença entre os raios do maior e do menor seja $\overline{d}$.

EG



R: raios ≃ 27,5 mm; ≃ 38,5 mm; ≃ 47,5 mm

RACIOCÍNIO:

a. SE **as áreas estão na proporção 1 : 2 : 3,**
ENTÃO **os raios estarão na proporção $\sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.**

b. Dada a proporção 1 : 2 : 3, a forma do "círculo esotérico" está determinada. Poderemos, então, construir um de $\varnothing\overline{H'A'}$ arbitrário.

Poderemos também obter III, II e I por homotetia (paralelas).

c. Obtemos d' = III' − I' e, por semelhança:

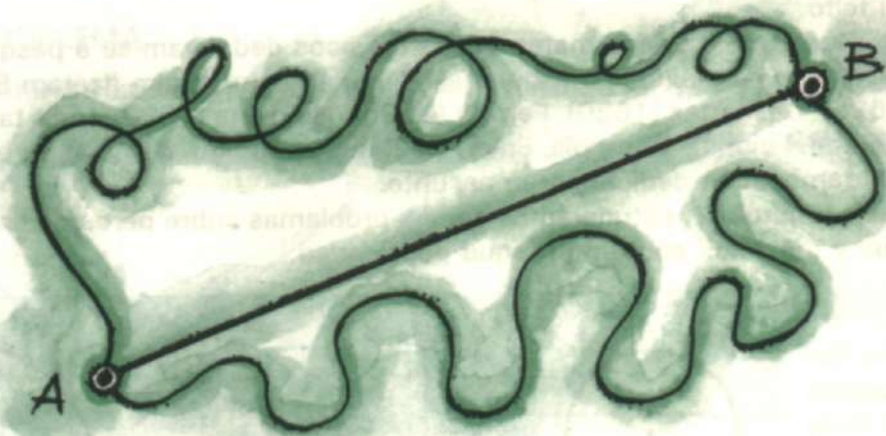
$$\frac{d'}{d} = \frac{III'}{III} = \frac{II'}{II} = \frac{I'}{I}$$

d. Obtemos III, II e I por 4as proporcionais.

Esotérico com s...

CAPÍTULO

2



MÍNIMOS E MÁXIMOS

I INTRODUÇÃO

136 Os conceitos de MÍNIMO e de MÁXIMO estão freqüentemente relacionados entre si. A lei do mínimo esforço pode ser entendida como a lei da máxima eficiência. O que realmente importa é a razão entre o esforço e a eficiência, que deve ser mínima; inversamente, a razão da eficiência para o esforço deve ser a máxima possível. É importante ressaltar o termo ''possível'', porque toda pesquisa de mínimo e/ou de máximo está vinculada a certas condições impostas.

Toda razão é ordenada; o 1º citado é o dividendo (numerador).

Quando se trata de percursos mínimos (ou máximos), deve-se sempre considerar quais as condições impostas. Mínimo (ou máximo) **o quê?**
Exemplos:

1º) **Qual o mínimo percurso entre duas casas da mesma cidade?**
Fica subentendida a condição:
caminhando a pé pelas ruas existentes.

Por princípio, todo percurso é reversível, isto é, o percurso de ida é igual ao de volta.

A pé não há contramão...

2º) **Qual o mínimo percurso entre a cidade de São Paulo e Roma, na Itália?**
Fica subentendida a condição:
num vôo sem escala, caso em que o percurso mínimo é o comprimento de um arco de circunferência.

O raio desse arco é o raio da Terra.

137 PEQUENO HISTÓRICO:

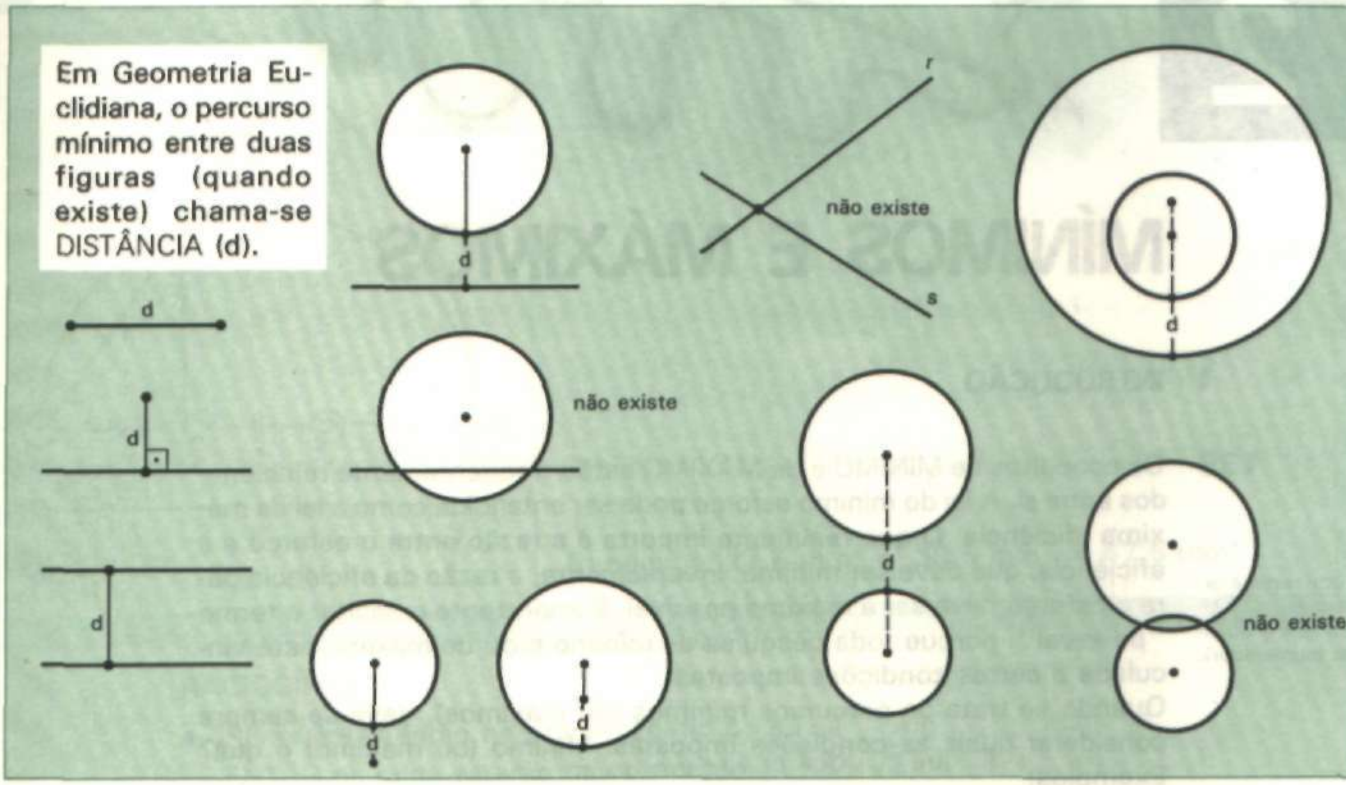
Os nossos problemas dão menos trabalho...

Foi procurando diminuir os seus esforços e aumentar a sua eficiência que o Homem se desenvolveu tecnologicamente, criando suas ferramentas, instrumentos, armas, etc.

Uma das primeiras histórias sobre a resolução de um problema de máximo e mínimo é a da Rainha Dido, que ordenou a construção de Cartago, exigindo que cortassem um couro de boi em tiras bem finas, emendassem umas às outras e com a tira resultante cercassem a máxima área possível, à beira do Mar Mediterrâneo. Os engenheiros da época concluíram que Cartago deveria ter a forma de um semicírculo e, dizem, assim foi feito.

No século XVII, vários matemáticos e físicos dedicaram-se à pesquisa de mínimos e máximos, por processos algébricos. Assim fizeram Snell (1626), Descartes (1630), Fermat (1636), Huygens (1690); mais tarde, Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler, Le Blanc, Lagrange, D'Alembert e outros também se dedicaram ao assunto.

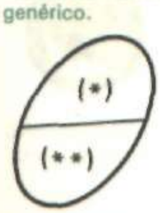
Neste capítulo 2, estudaremos alguns problemas sobre percursos mínimos e máximos sob um enfoque geométrico.



138 ELEMENTO GENÉRICO

Convém repetir o que já foi explicado no livro 1 (nº 040):

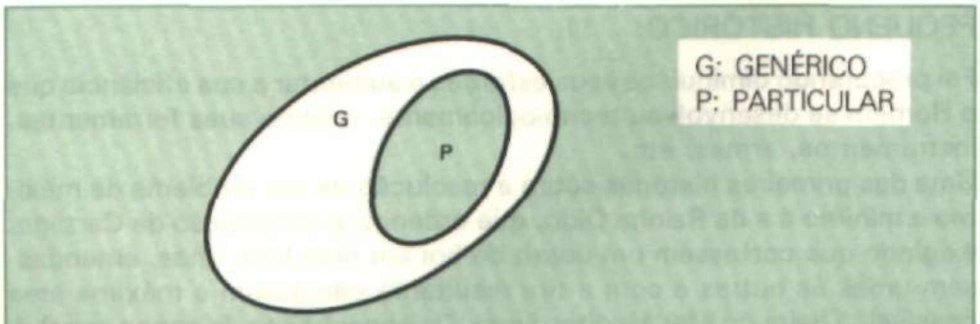
No caso abaixo não há elemento genérico.



Um elemento:
{ ou é (*)
{ ou é (**).

Elemento genérico (G) de um conjunto é um elemento que somente tem a propriedade característica (que define o conjunto).

Um elemento genérico tem SOMENTE a propriedade característica dos elementos do conjunto e, por isso, qualquer coisa que se prove para um dos elementos genéricos valerá para TODOS os outros elementos genéricos do conjunto.

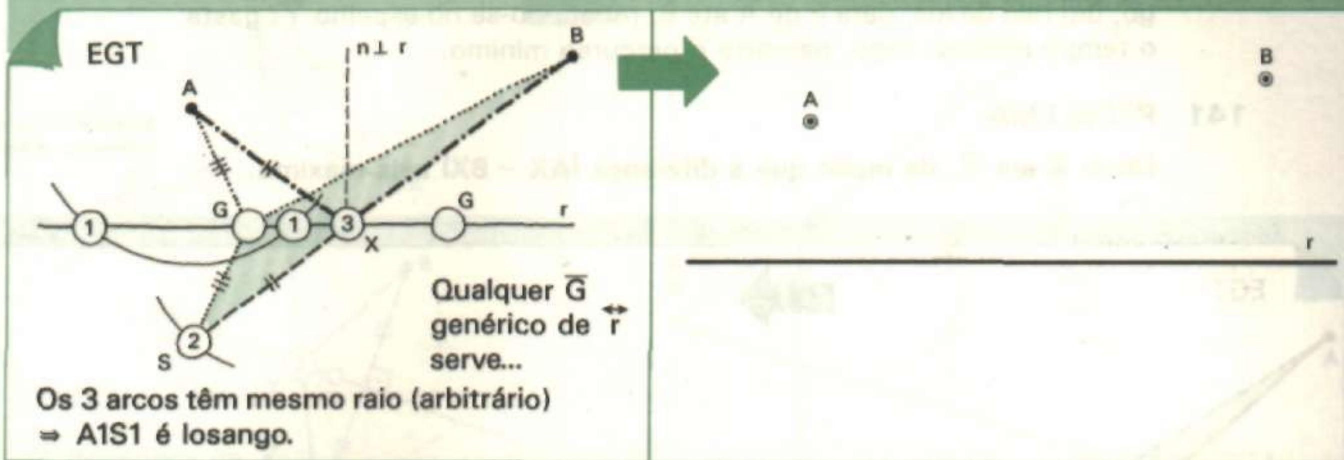


II PROBLEMAS

139 PROBLEMA:

Obter o percurso mínimo entre $\overline{A}$ e $\overline{B}$, tocando na reta $\overleftrightarrow{r}$, isto é, AXB.

AXB é um número, como se fosse o perímetro.



ROTEIRO:

É o L3!

1º) Acha-se $\overline{S}$, simétrico de $\overline{A}$ com relação à $\overleftrightarrow{r}$. A reta $\overleftrightarrow{r}$ torna-se mediatriz de $\overline{AS}$.

2º) $\overline{SB}$ determina $\overline{X}$. AXB é o percurso mínimo procurado.

JUSTIFICAÇÃO:

a. Para provar que AXB é mínimo, é obrigatório provar que AXB é menor do que qualquer outro.

Qualquer outro que satisfaça à condição imposta: tocar em $\overleftrightarrow{r}$.

b. Para provar que é menor do que qualquer outro, basta provar que é menor do que um dos percursos genéricos.

Obtendo $\overline{B'}$ (simétrico de $\overline{B}$) e ligando com $\overline{A}$, obtém-se o mesmo $\overline{X}$.

c. Seja $\overline{G}$ um dos pontos genéricos de $\overleftrightarrow{r}$. Deveremos provar a

Qualquer um dos dois $\overline{G}$ serve...

$$T \{ AXB < AGB$$

De fato:

I. Como $\overleftrightarrow{r}$ é mediatriz de $\overline{AS}$, temos:

$$\left.\begin{array}{r} SX = AX \\ e\ SG = AG \end{array}\right\} (*) \text{ (vale para qualquer } \overline{G}).$$

É óbvio, porque o caminho mínimo é único.

II. No $\triangle SGB$, o lado $\overline{SB}$ é menor do que a soma ($\overline{SG}$ + $\overline{GB}$) dos outros dois:

$$\overbrace{SX + XB}^{SB} < SG + GB$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow * & & \Downarrow * \end{array}$$

$$\underbrace{AX + XB}_{} < \underbrace{AG + GB}_{}$$

$$AXB < AGB \qquad \text{c.q.d.}$$

140 Verifica-se que $\overline{AX}$ e $\overline{XB}$ formam ângulos congruentes com $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{r}$ em $\overline{X}$. AXB (ou BXA) representa o caminho (mínimo) que a luz segue para ir de $\overline{A}$ até $\overline{B}$ (ou de $\overline{B}$ até $\overline{A}$), refletindo-se num espelho plano $\overleftrightarrow{r}$, com o ângulo de incidência AXn igual ao ângulo de reflexão nXB.

$\overline{A}-\overline{X}-\overline{B} = \overline{B}-\overline{X}-\overline{A}$. É o princípio da reversibilidade dos raios luminosos.

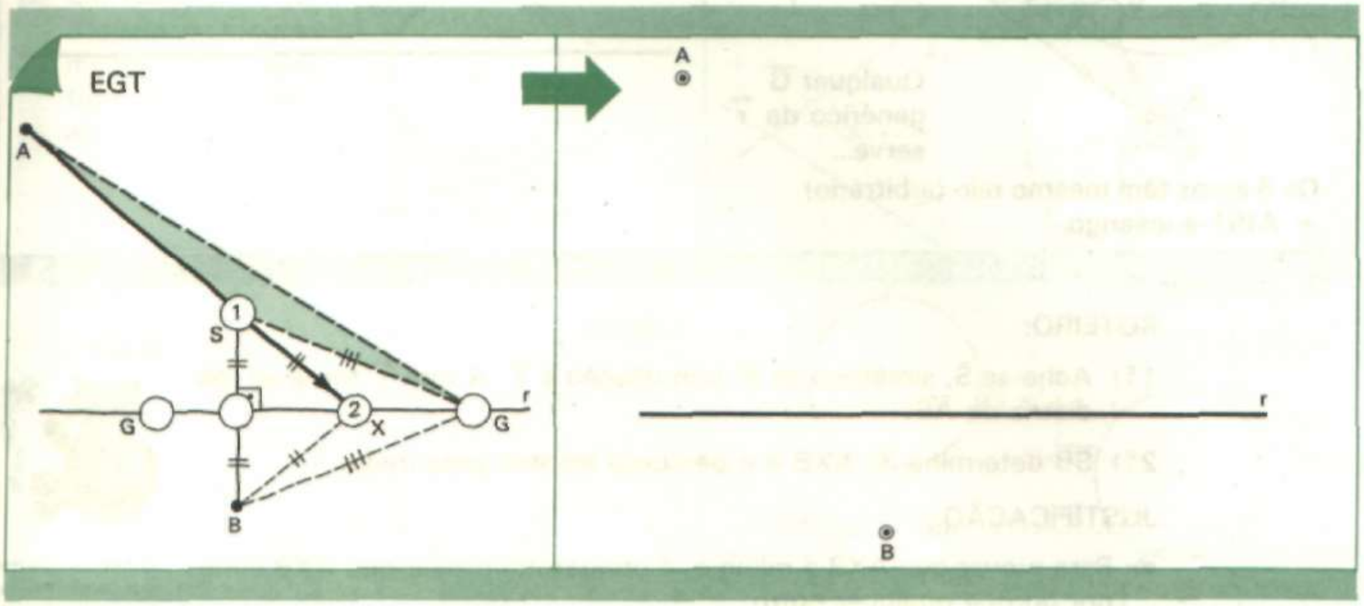
Em Óptica, $\overleftrightarrow{n}$ chama-se normal ao espelho.

Num meio de densidade constante, a velocidade da luz é constante, logo, um raio de luz, para ir de $\overline{A}$ até $\overline{B}$, refletindo-se no espelho $\overleftrightarrow{r}$, gasta o tempo mínimo, logo, percorre o percurso mínimo.

141 PROBLEMA:

Obter $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{r}$, de modo que a diferença $|AX - BX|$ seja máxima.

Soma mínima e diferença máxima.



JUSTIFICAÇÃO:

Como $\overline{S}$ e $\overline{B}$ são simétricos: SX = BX e SG = BG.

Seja $\overline{G}$ um dos pontos genéricos de $\overleftrightarrow{r}$.
No $\triangle$ASG (qualquer um dos $\overline{G} \neq \overline{X}$ serve), o lado $\overline{AS}$ é maior do que a diferença dos outros dois ($\overline{AG} - \overline{SG}$):

$$AS > AG - SG$$
$$\overbrace{AX - \underbrace{SX}} > AG - \underbrace{SG}$$
$$AX - BX > AG - BG \text{ (todas as outras), c.q.d.}$$

142 Tanto no n.º 140 como no n.º 141, as retas $\overleftrightarrow{AX}$ e $\overleftrightarrow{BX}$ formam ângulos congruentes entre si com a reta $\overleftrightarrow{r}$.

143 PROBLEMA:

Dados $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overleftrightarrow{r}$, obter $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{r}$, de modo que $\overleftrightarrow{AX}$ e $\overleftrightarrow{BX}$ formem ângulos de mesma abertura com $\overleftrightarrow{r}$.

RESOLUÇÃO:

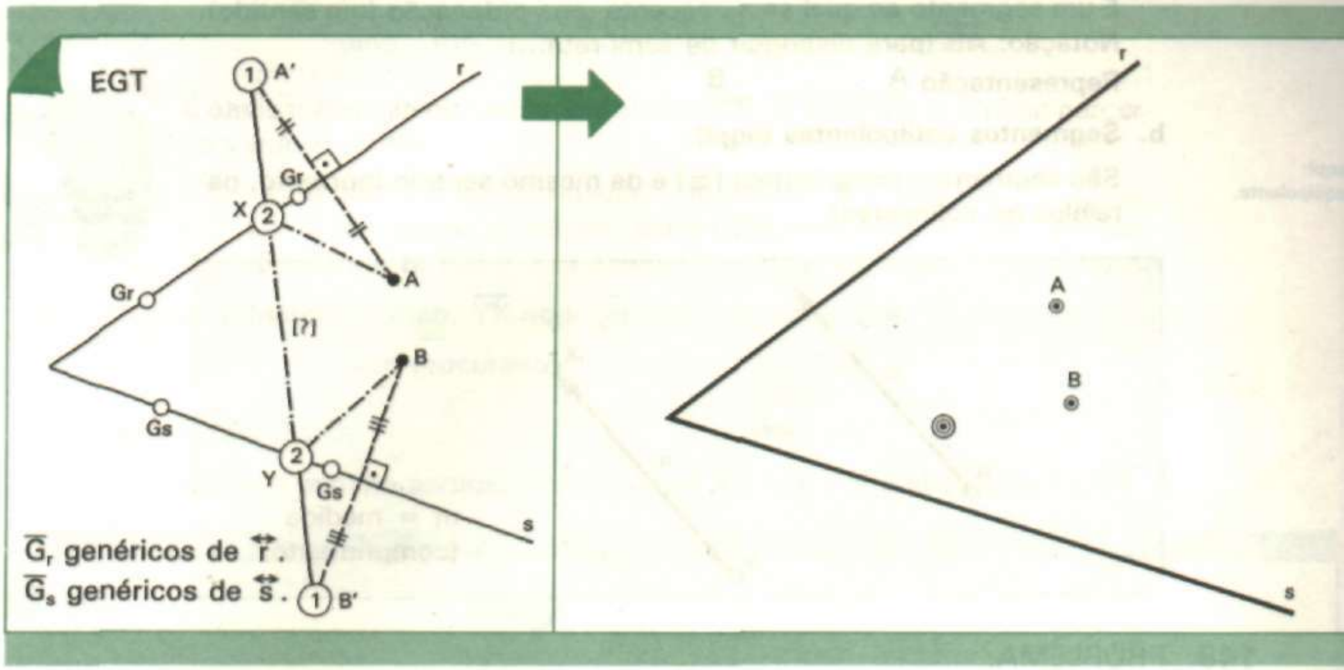
Há duas respostas:

1.ª) Uma (n.º 140) onde A SOMA É MÍNIMA e

2.ª) outra (n.º 141) onde A DIFERENÇA É MÁXIMA.

144 PROBLEMA:

Obter o menor percurso AXYB, com $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{r}$ e $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{s}$.



Por que AXYB é mínimo?

O segmento $\overline{A'B'}$ é menor do que qualquer poligonal $A'G_rG_sB'$.

145 EXERCÍCIO (sem desenho):

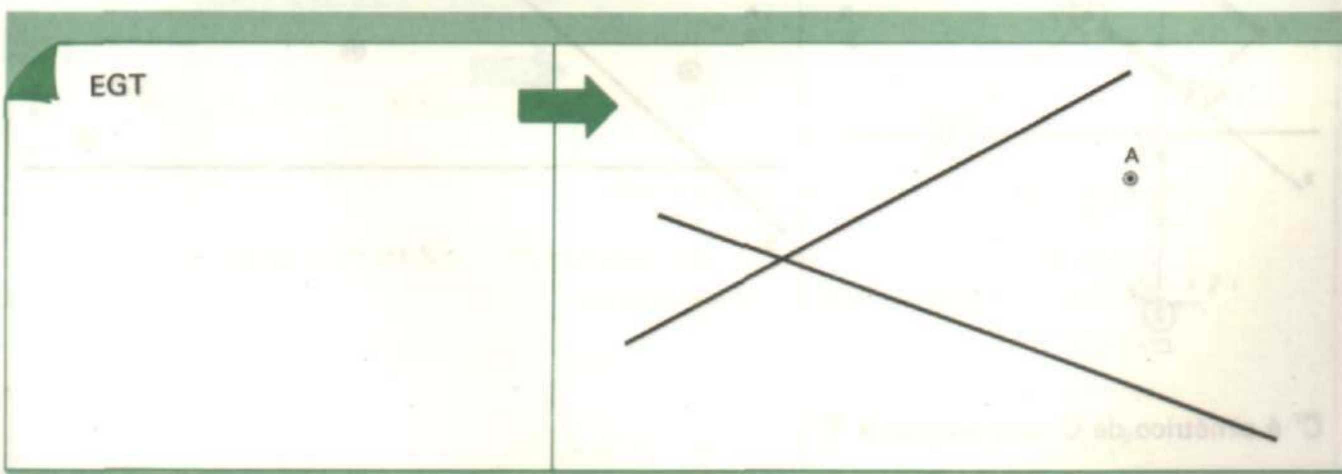
Obter o mínimo percurso AXYB, com $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{s}$ e $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{r}$. Agora $\overline{X}$ está em $\overleftrightarrow{s}$ e não em $\overleftrightarrow{r}$.

ROTEIRO:

Basta ligar $\overline{A''}$ (simétrico de $\overline{A}$ com relação à $\overleftrightarrow{s}$) com $\overline{B''}$ (simétrico de $\overline{B}$ com relação à $\overleftrightarrow{r}$) para achar $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

146 EXERCÍCIO:

Construir o △AXY, de perímetro mínimo, com um vértice em cada reta dada.



147 DEFINIÇÕES:

a. Segmento orientado

É um segmento ao qual se acrescenta uma ordenação (um sentido).

Notação: $\overleftrightarrow{AB}$ (para distinguir de semi-reta...)

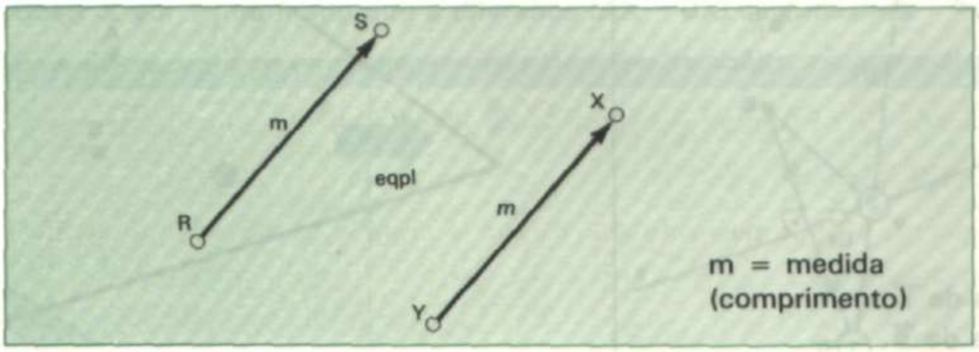
Representação 

b. Segmentos eqüipolentes (eqpl):

eqpl: eqüipolente.

São segmentos congruentes (≅) e de mesmo sentido (portanto, paralelos ou colineares).

Chega de "minhocas"...



148 PROBLEMA:

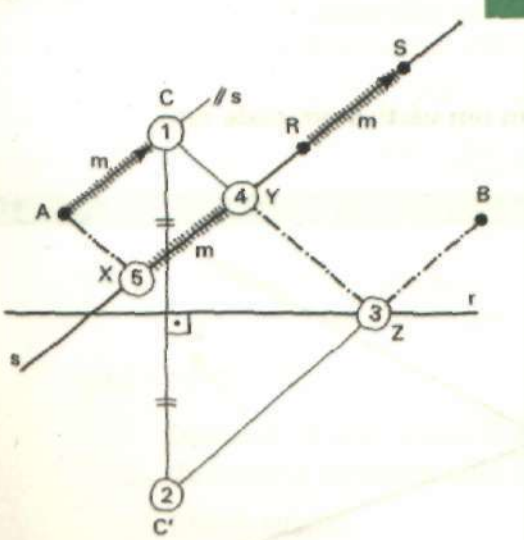
Obter o percurso AXYZB mínimo, com as seguintes condições impostas:

a. $\overline{X}$ **e** $\overline{Y}$ **em** $\overleftrightarrow{s}$**;**

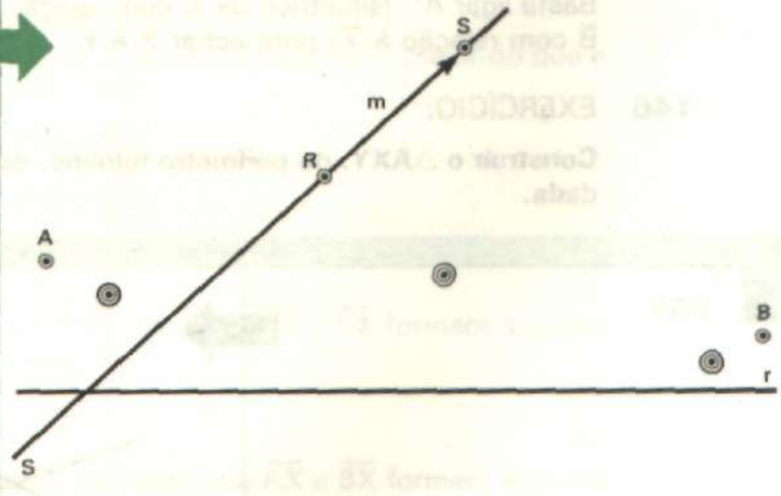
b. $\overleftrightarrow{XY}$ **eqpl** $\overleftrightarrow{RS}$ **e**

c. $\overline{Z}$ **em** $\overleftrightarrow{r}$**.**

EGT



$\overline{C}'$ é simétrico de $\overline{C}$ com relação à $\overleftrightarrow{r}$.



Ao acordar, cumpra logo sua obrigação, ficando com o resto do dia livre.


Para cumprir outras...

RACIOCÍNIO (BOM SENSO):

Todos os percursos que satisfazem às três condições a, b, c constam de

uma parte constante (m) + uma parte variável.

É óbvio que o mínimo percurso total se obtém achando o mínimo percurso variável. Então:

1º) "Cumpra logo sua obrigação", marcando $\overrightarrow{AC}$ eqpl $\overrightarrow{RS}$.
De $\overline{C}$ em diante, o mínimo seria CZB, mas falta cumprir as condições **a** e **b**.

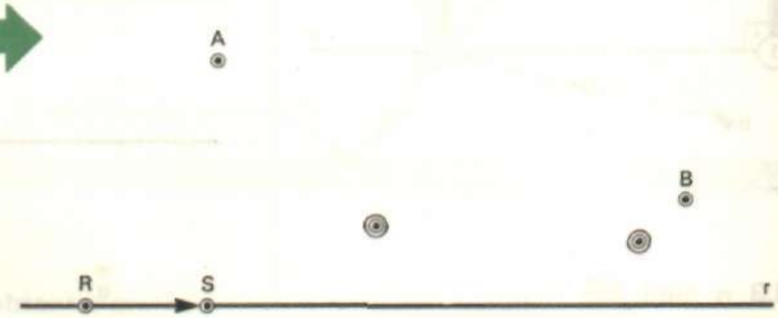
2º) Marque, então, $\overrightarrow{YX}$ eqpl $\overrightarrow{SR}$ (sentido oposto) em $\overleftrightarrow{s}$, obtendo $\overline{X}$.

3º) O percurso procurado é AXYZB (ou BZYXA).

149 EXERCÍCIO:

Obter o mínimo percurso AXYB, com $\overrightarrow{XY}$ em $\overleftrightarrow{r}$ e eqüipolente ao $\overrightarrow{RS}$.

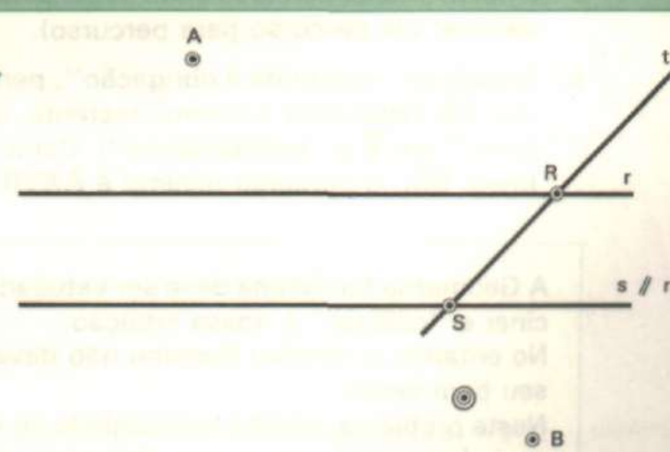
EGT



150 EXERCÍCIO:

Obter o mínimo percurso AXYB, com $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{r}$, $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{s}$ e $\overline{XY} \parallel \overleftrightarrow{t}$.

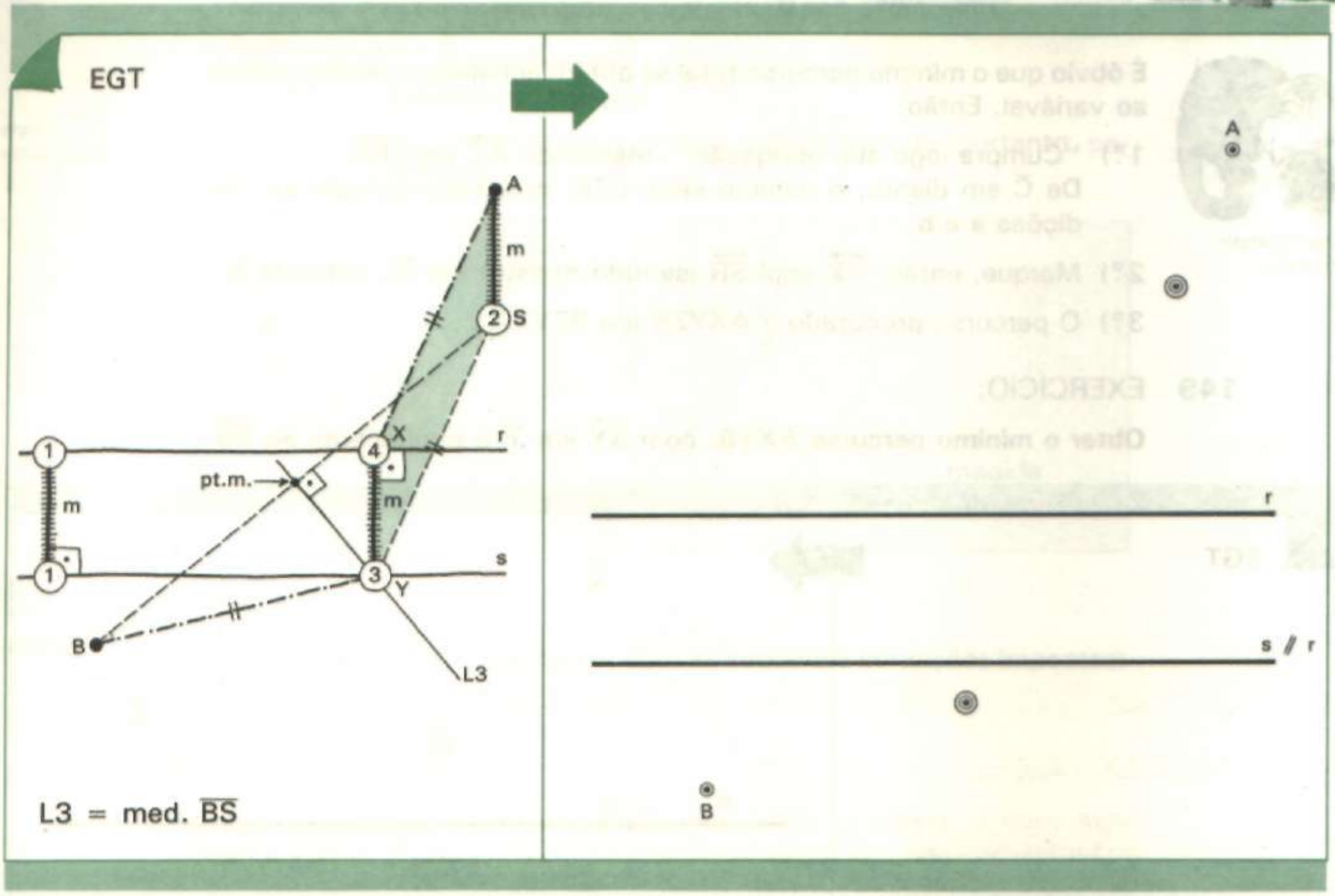
EGT



151 EXERCÍCIO ("eqüipercurso"):

Obtenha o mínimo percurso AXYB, com $\overline{X}$ em $\overleftrightarrow{r}$ (1ª condição), $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{s}$ (2ª), $\overline{XY} \perp \overleftrightarrow{r}$ (3ª) e AX = BY (4ª condição).

Esse neologismo tem trema?...



RACIOCÍNIO (pelo MF):

a. Desenha-se o EG com todos os dados ($\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overleftrightarrow{r} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{s}$) e "uma das" respostas (AXYB).

Depois conclui-se que essa "uma das" respostas é a única.

b. Precisamos obter o menor dentre todos os percursos que satisfazem as 4 condições impostas. Todos eles consistem de uma parte constante **m** (menor percurso entre as paralelas $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$) somada a uma parte variável (de percurso para percurso).

c. Depois de "cumprida a obrigação", percorrendo ficticiamente o trecho $\overleftrightarrow{AS}$, falta obter o mínimo restante, isto é, o menor percurso SYB (com $\overline{Y}$ em $\overleftrightarrow{s}$ e "eqüidistância"). Como SY = AX (// gr) e SY = BY (med. $\overline{BS}$), o percurso mínimo é AXYB.

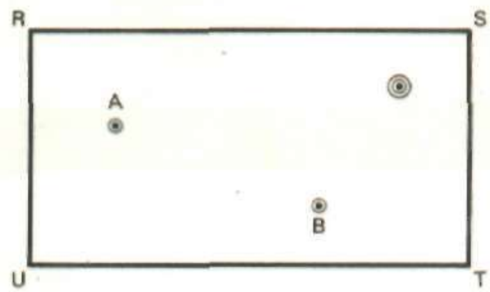
É o "ovo do // gramo", estudado no livro 2 (nº 099).

A Geometria Euclidiana deve ser estudada para nos ensinar a raciocinar e "calibrar" a nossa intuição.
No entanto, o cérebro humano não deve ser bitolado, perdendo o seu bom senso.
Neste problema, não há necessidade de tomar um percurso genérico e demonstrar que o que obtivemos é menor.

152 EXERCÍCIO:

Supondo que a bola se "reflete" com ângulo de incidência igual ao de "reflexão", desenhe a trajetória da bola $\overline{A}$ para que, batendo em $\overline{RS}$ e depois em $\overline{ST}$, atinja a bola $\overline{B}$.

EGT



E se houver uma bola no alvo?

153 EXERCÍCIO:

Num cubo de aresta $\overline{a}$, obtenha graficamente o percurso mínimo, pela superfície do cubo, do vértice $\overline{A}$ da face ABCD ao centro $\overline{O}$ da face CDEF.

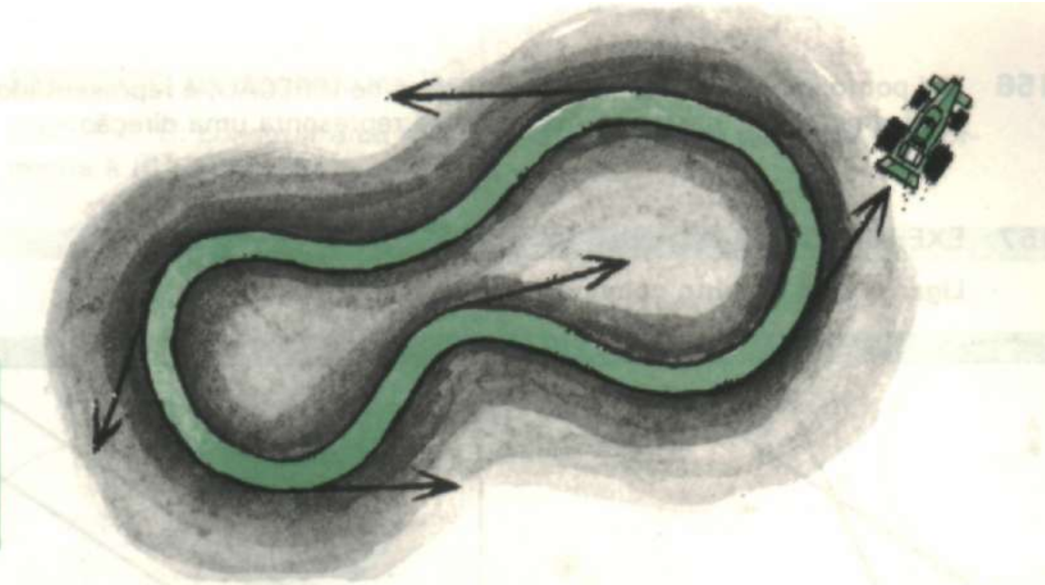
EG (desenhe as duas faces no plano de desenho e com $\overline{CD}$ comum).

R: percurso mínimo

Se dá
para concluir,
por que decorar?

CAPÍTULO

3

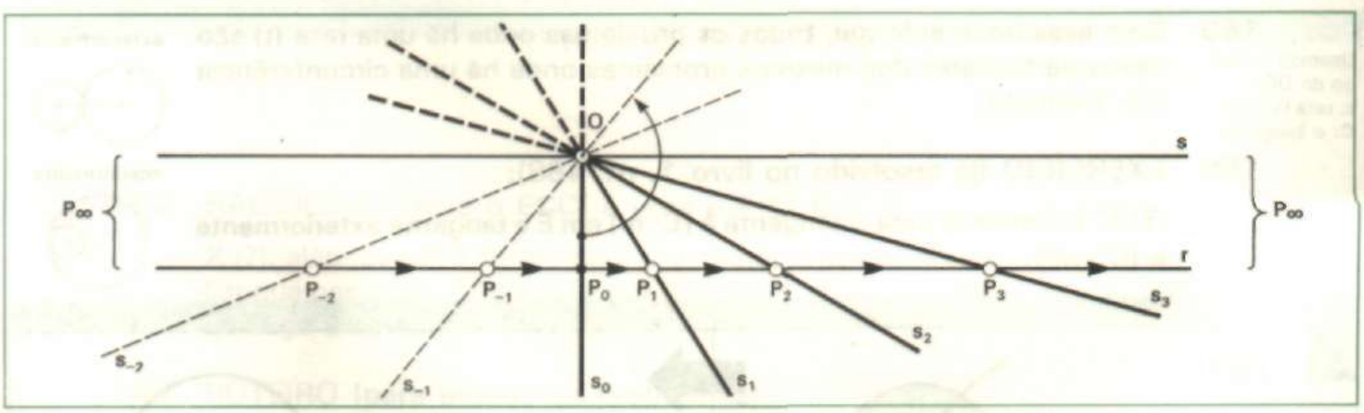


TANGÊNCIA

I CONCEITOS BÁSICOS

154 PONTO IMPRÓPRIO:

Consideremos uma reta $\overleftrightarrow{r}$ e um ponto $\overline{O}$ fora dela e ambos fixos.



É interessante observar que o ponto comum, após "sumir" pela direita, "surge" pela esquerda e continua...

Seja $\overleftrightarrow{s}$ uma reta que gira em torno de $\overline{O}$ no sentido anti-horário. O ponto comum à $\overleftrightarrow{s}$ e à $\overleftrightarrow{r}$ vai se deslocando sempre para a direita. Quando $\overleftrightarrow{s}$ torna-se paralela à $\overleftrightarrow{r}$, dizemos que o ponto comum tornou-se PONTO IMPRÓPRIO (P_∞).

155 Mensagem unificada:

Mensagens curtas são mais bem compreendidas.

> Duas retas distintas e coplanares têm sempre um único ponto comum:
>
> ou IMPRÓPRIO (P_∞), quando paralelas,
>
> ou PRÓPRIO ($\overline{P}$), quando concorrentes.

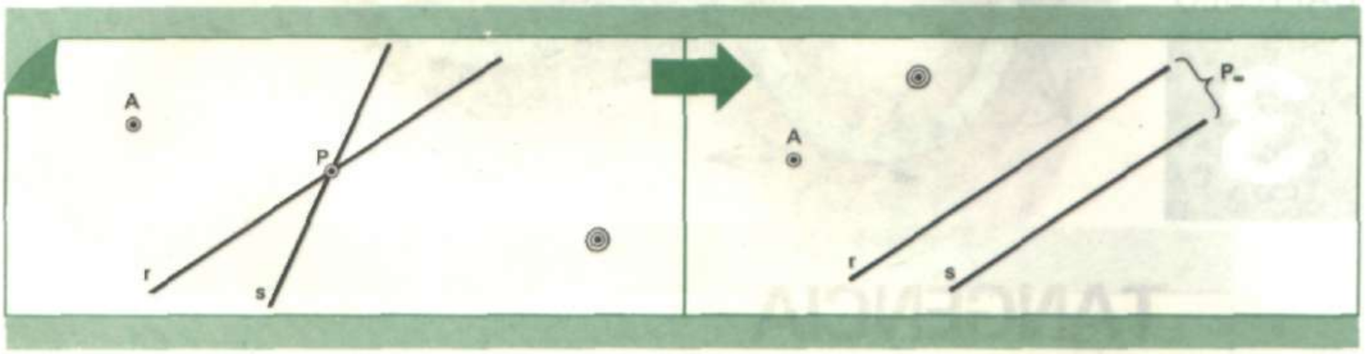
Tanto o ponto impróprio como o ponto próprio são entes geométricos igualmente abstratos.

156 Um ponto impróprio ($\overline{P}_\infty$), que é sinônimo de DIREÇÃO, é representado graficamente da mesma forma como se representa uma direção:

$$\longleftarrow P_\infty \longrightarrow$$

157 EXERCÍCIO:

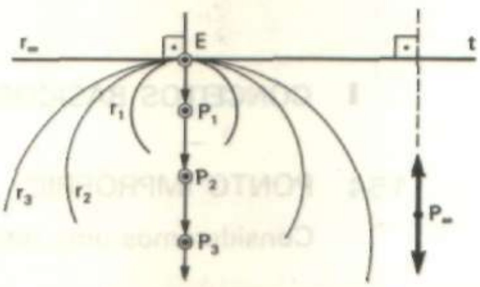
Ligar $\overline{A}$ com o ponto comum às retas $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{s}$.



158 CIRCUNFERÊNCIA DE CENTRO IMPRÓPRIO

A reta $\overleftrightarrow{t}$ não é uma ⊙, mas, plagiando Sir Isaac Newton, "tudo se passa como se fosse..."

Uma circunferência que contém $\overline{E}$ e cujo raio é tão grande quanto se queira (r_∞) — isto é, infinitamente grande — tem centro impróprio ($\overline{P}_\infty$) e tem as propriedades da reta $\overleftrightarrow{t}$.

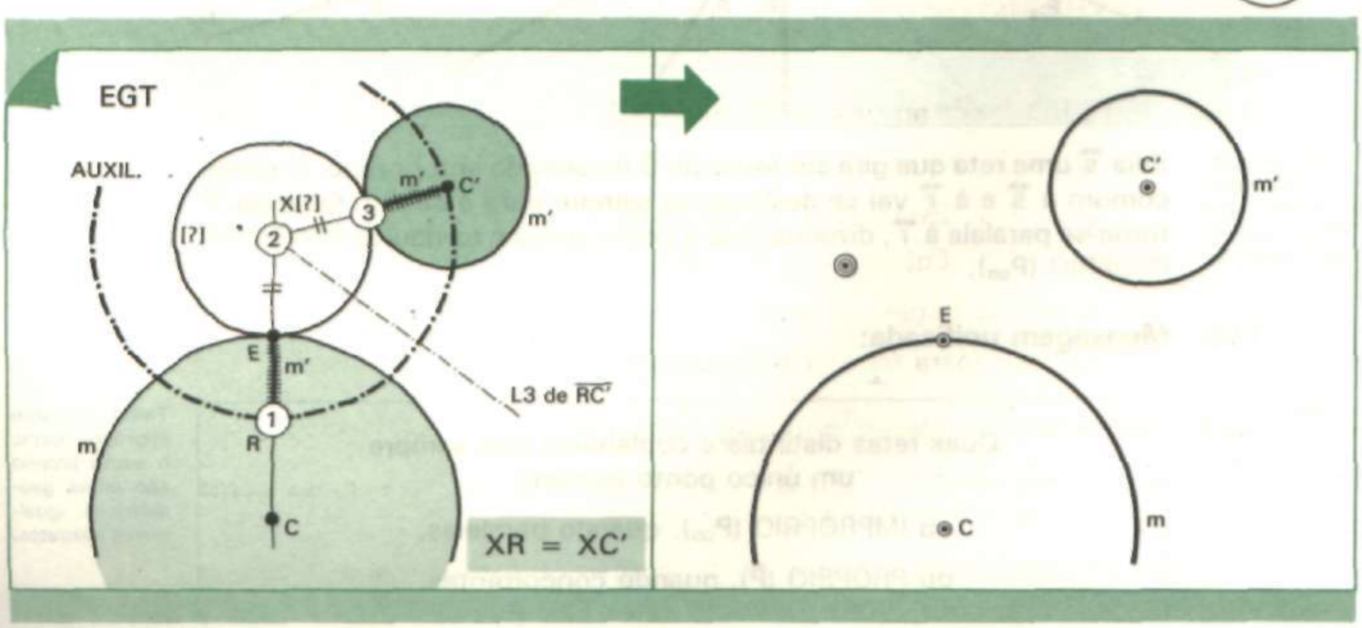


159 Com esse novo enfoque, todos os problemas onde há uma reta (t) são casos particulares dos mesmos problemas onde há uma circunferência (C). Exemplo:

Usamos o código do DG:
t: reta tangente;
C: ⊙ tangente.

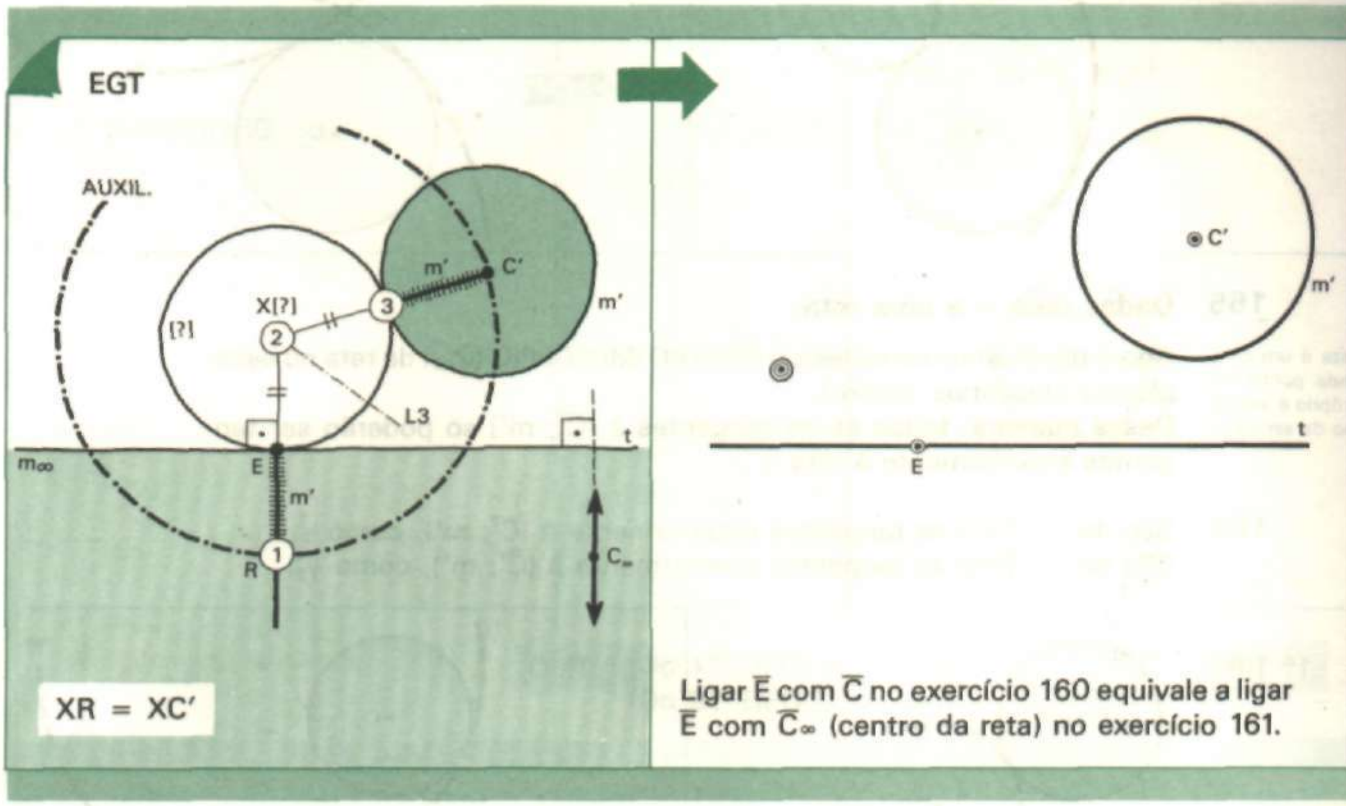
160 EXERCÍCIO **(já resolvido no livro 1, nº 488):**

[ECC']: construir uma ⊙ tangente à ($\overline{C}$; m) em $\overline{E}$ e tangente exteriormente à ($\overline{C'}$; m').



161 EXERCÍCIO **(já resolvido no livro 1, n.º 483):**

[EtC; E ∈ t]: construir uma ⊙ tangente à $\overleftrightarrow{t}$ em $\overline{E}$ e tangente exteriormente à ($\overline{C'}$; m').



162 RACIOCÍNIO **(para o ECC' e para o EtC; E ∈ t):**

$\overline{X}$ [?], além de ser o centro da ⊙ procurada, é também centro da ⊙ auxiliar que passa por $\overline{C'}$ (dado) e por $\overline{R}$ (obtível, marcando ER = m' na reta que liga $\overline{E}$ ao centro $\overline{C}$ ou $\overline{C}_\infty$.

163 ROTEIRO **(para ambos os problemas):**

Cuidado: $\overrightarrow{ER}$: semi-reta; $\overline{ER}$: segmento orientado

1.º) Obter $\overline{R}$, marcando ER = m'.

2.º) $\overline{X}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está em } \overrightarrow{ER} \text{ (mera cópia).} \\ \text{b. Eqüidista de } \overline{R} \text{ e de } \overline{C'} \Rightarrow \text{L3.} \end{cases}$

3.º) Antes de traçar a ⊙ procurada, ache o ponto de tangência $\dot{3}$.

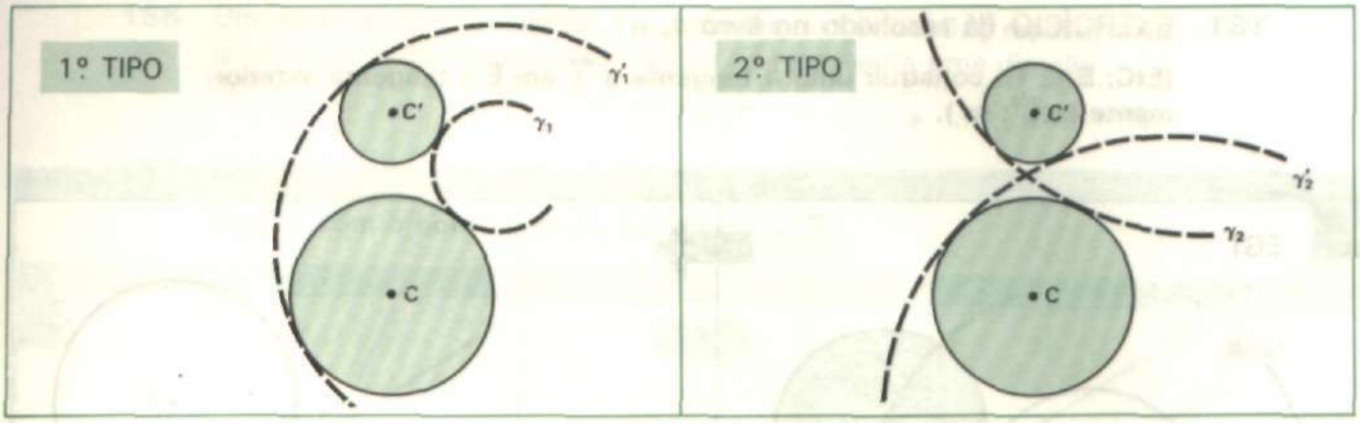
DEFINIÇÕES **(para facilitar a linguagem):**

164 **Dadas duas ⊙s (desenho na pág. seguinte):**

a. Chamam-se do 1.º TIPO as ⊙s tangentes exteriormente a ambas (como γ_1) e as interiormente a ambas (como o γ_1').

b. Chamam-se do 2.º TIPO as ⊙s tangentes exteriormente a uma e interiormente à outra (como as γ_2).

Tangentes interiormente: uma delas é interior à outra.

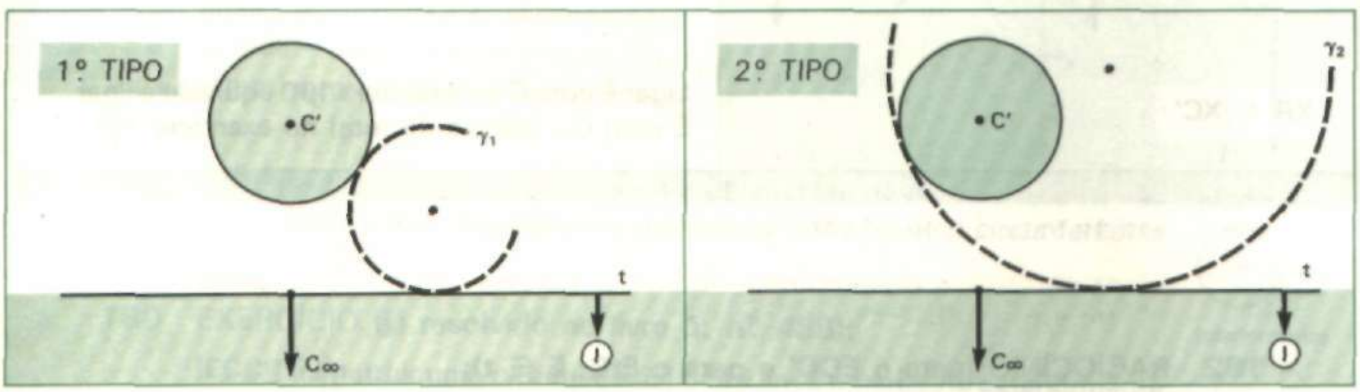


165 **Dadas uma ⊙ e uma reta:**

Este é um caso *onde ponto impróprio* é sinônimo de sentido.

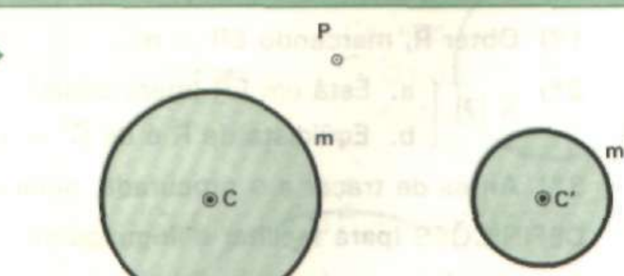
Agora precisamos considerar o CENTRO IMPRÓPRIO **($\overline{C}_\infty$) da reta no semiplano I (desenhos abaixo).**
Dessa maneira, todas as ⊙s tangentes à ($\overline{C'}$; m') só poderão ser tangentes exteriormente à reta $\overleftrightarrow{t}$.

166 **São do** 1º TIPO **as tangentes exteriormente à ($\overline{C'}$; m'), como γ_1.**
São do 2º TIPO **as tangentes interiormente à ($\overline{C'}$; m'), como γ_2.**



167 EXERCÍCIO:
Passando por $\overline{P}$, quantas ⊙s do 1º TIPO e quantas do 2º TIPO existem tangentes à ($\overline{C}$; m) e à ($\overline{C'}$; m')? Enxergue-as...

RASCUNHO

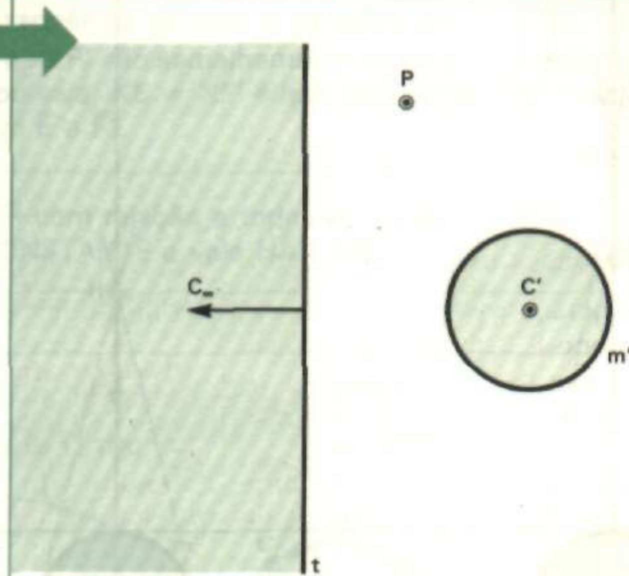


R: Do 1º TIPO: ......2......
Do 2º TIPO: ......2......

168 EXERCÍCIO:

Contendo $\overline{P}$, quantas $\odot$s há do 1º TIPO e quantas há do 2º TIPO tangentes à $(\overline{C'};\ m')$ e à $\overleftrightarrow{t}$?

RASCUNHO



R: {Do 1º TIPO: ....
{Do 2º TIPO: ....

169 PROBLEMA DE REVISÃO (já resolvido no livro 2, nº 423):

Numa homotetia direta, todos os segmentos homólogos são $\parallel$s e de mesmo sentido.

Obter os centros de homotetia direta ($\overline{H}$) e inversa ($\overline{H'}$) das $\odot$s dadas $(\overline{C};\ m)$ e $(\overline{C'};\ m')$.

ROTEIRO:

a. Para obter $\overline{H}$:

1º) $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{C'E'}$ e de mesmo sentido.

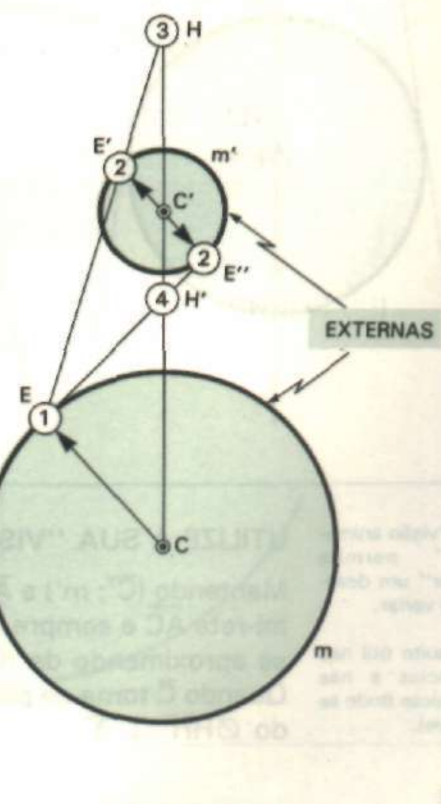
2º) $\overline{H} = \overleftrightarrow{CC'} \cap \overleftrightarrow{EE'}$.

Numa homotetia inversa, todos os segmentos homólogos são $\parallel$s e de sentidos opostos.

b. Para obter $\overline{H'}$:

1º) $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{C'E''}$ e de sentidos opostos.

2º) $\overline{H'} = \overline{CC'} \cap \overline{EE''}$.



170 RETAS TANGENTES COMUNS

a. As retas tangentes comuns externas incidem em $\overline{H}$.

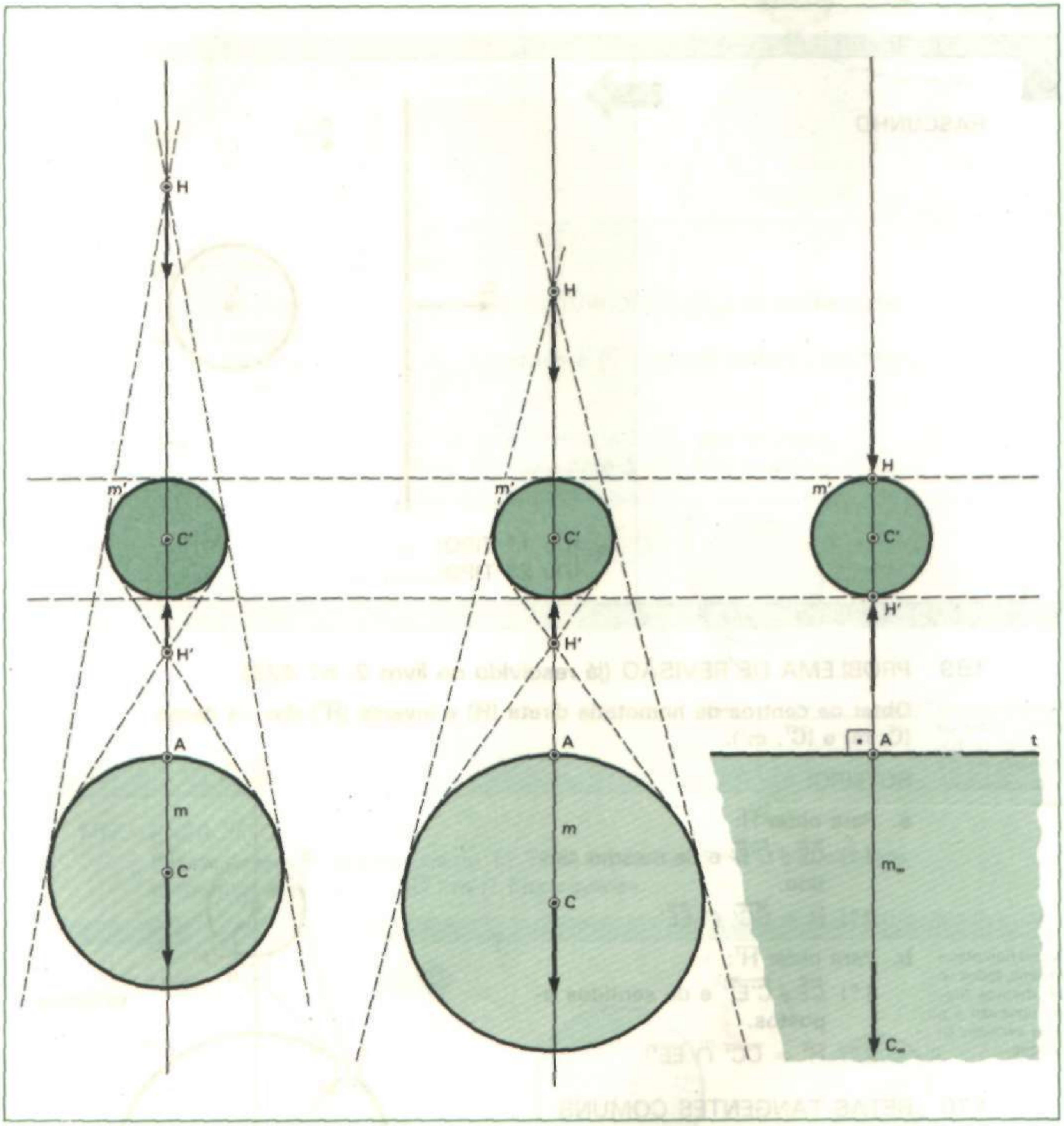
$\overline{H}$: centro de homotetia direta.

b. As retas tangentes comuns internas incidem em $\overline{H'}$.

$\overline{H'}$: centro de homotetia inversa.

171 EXTENSÃO DO CONCEITO DE CENTROS DE HOMOTETIA DIRETA ($\overline{H}$) E INVERSA ($\overline{H'}$)

Extensão de conceito são muito comuns na Matemática.



A "visão animada" permite "ver" um desenho variar.

É muito útil nas ciências e nas técnicas (tudo se move).

UTILIZE A SUA "VISÃO ANIMADA":

Mantendo ($\overline{C'}$; m') e $\overline{A}$ fixos e aumentando m, mas sempre com $\overline{C}$ na semi-reta $\overrightarrow{AC}$ e sempre ($\overline{C}$; m) passando por $\overline{A}$, percebe-se que $\overline{H}$ e $\overline{H'}$ vão se aproximando de ($\overline{C}$; m').
Quando $\overline{C}$ torna-se ponto impróprio ($\overline{C}_\infty$), $\overline{H}$ e $\overline{H'}$ tornam-se extremidades do $\varnothing\overline{HH'} \perp \overleftrightarrow{t}$.

172 TEOREMA

$\overline{A'}$ e $\overline{B'}$ também são pontos de tangência de uma ⊙ particular do 1º tipo.

Analogamente, prova-se que $\overline{F}$ e $\overline{E'}$ são pontos de tangência de uma ⊙ do 1º tipo (tangente interiormente às duas dadas).

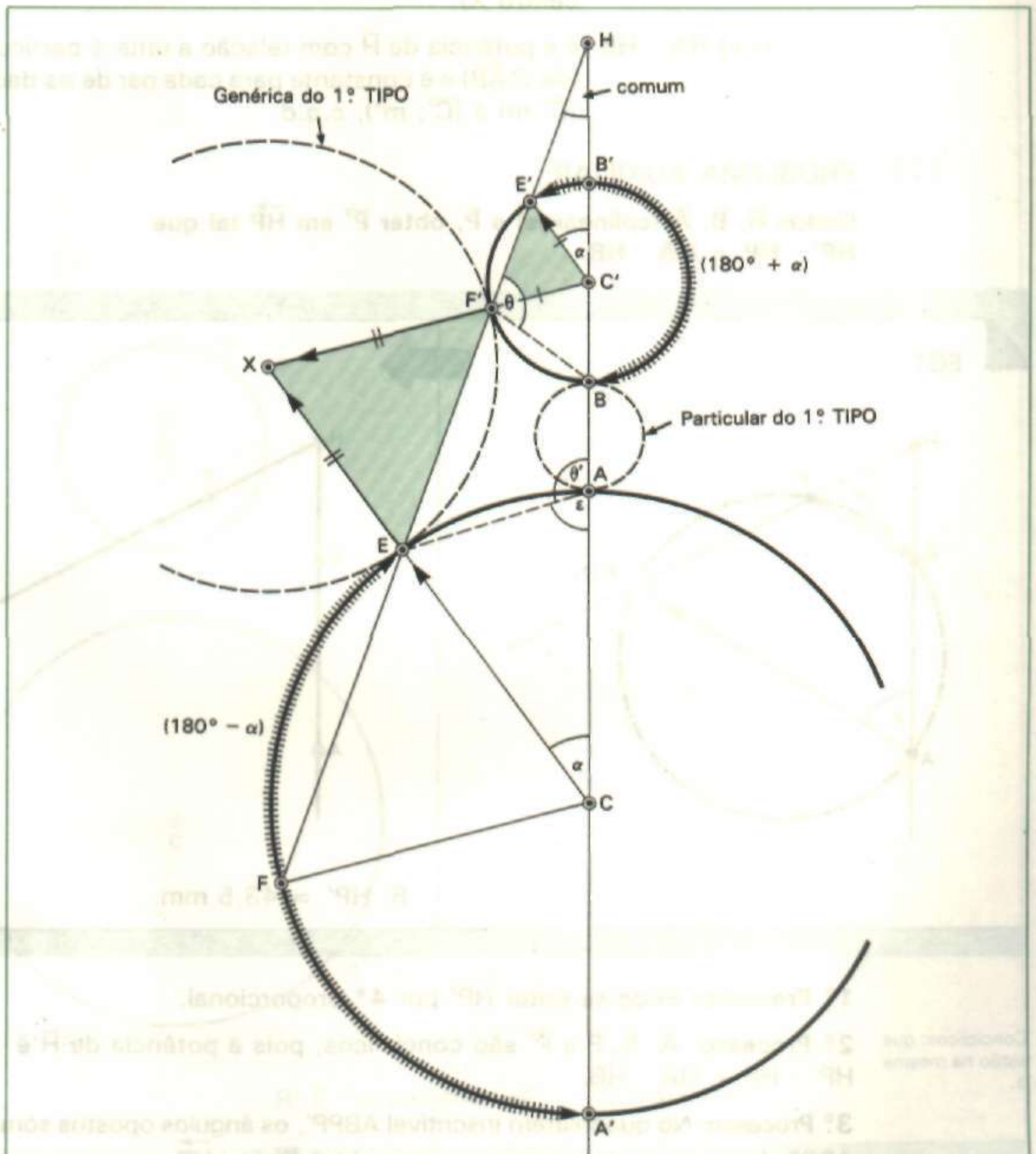
a. **Sejam as ⊙s ($\overline{C}$; m) e ($\overline{C'}$; m') com seu centro de homotetia direta $\overline{H}$, obtido como no nº 169, a, traçando $\overleftrightarrow{C'E'} \parallel \overleftrightarrow{CE}$.**

b. **$\overline{A}$ e $\overline{B}$ são pontos de tangência de uma ⊙ particular do 1º** TIPO.

c. **$\overline{E}$ e $\overline{F'}$ são pontos de tangência de uma ⊙ genérica do 1º** TIPO.
De fato, os △s E'F'C' e XEF' são semelhantes e como o 1º é isósceles, o 2º também é, ou seja, XE = XF' e isso prova que $\overline{X}$ é centro de uma ⊙ tangente em $\overline{E}$ e $\overline{F'}$.

d.

> A POTÊNCIA DE $\overline{H}$ **com relação a todas as ⊙s do 1º** TIPO
> **é** CONSTANTE **e vale HA · HB.**



DEMONSTRAÇÃO:

1) O $\sphericalangle$ inscrito $\Theta = \frac{1}{2}(180° + \alpha) \Rightarrow \Theta = 90° + \frac{\alpha}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \Theta' = 180° - \varepsilon \text{ mas} \\ \text{O} \sphericalangle \text{ inscrito } \varepsilon = \frac{1}{2}(180° - \alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \Theta' = 90° + \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \Theta = \Theta'$$

2) Com um $\sphericalangle$ comum e $\Theta = \Theta' = (AA) \Rightarrow \triangle HF'B \sim \triangle HAE$

logo: $\dfrac{\triangle HF'B}{\triangle HAE}$ $\dfrac{HF'}{HA} = \dfrac{HB}{HE} \Rightarrow \boxed{\underset{(*)}{HF' \cdot HE} = \underset{(**)}{HA \cdot HB}}$

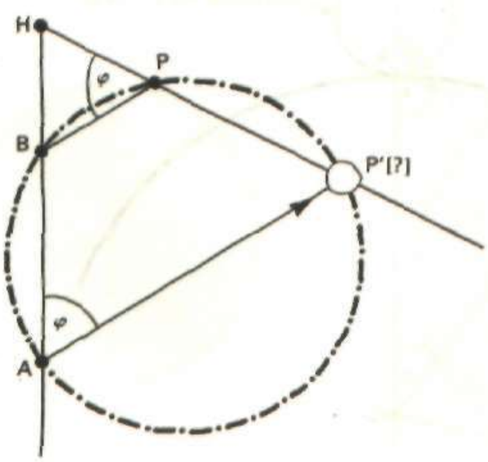
(*) HF' · HE é a potência de $\overline{H}$ com relação a uma ⊙ genérica (de centro $\overline{X}$).

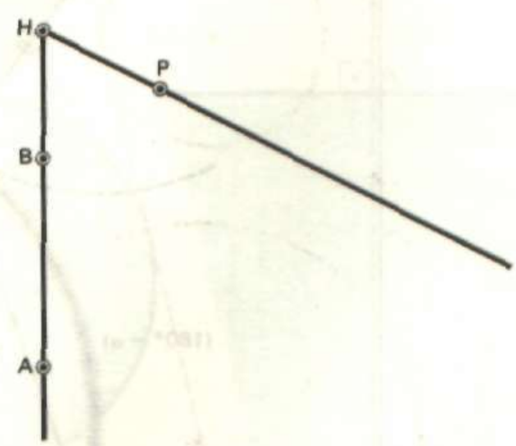
(**) HA · HB é a potência de $\overline{H}$ com relação a uma ⊙ particular (de $\varnothing\overline{AB}$) e é constante para cada par de ⊙s dadas ($\overline{C}$; m) e ($\overline{C'}$; m'), c.q.d.

173 PROBLEMA AUXILIAR:

Dados $\overline{H}$, $\overline{B}$, $\overline{A}$ (colineares) e $\overline{P}$, obter $\overline{P'}$ em $\overrightarrow{HP}$ tal que $HP' \cdot HP = HA \cdot HB$.

EGT





R: HP' = 43,5 mm.

1º Processo: Pode-se obter HP' por 4ª proporcional.

Concíclicos: que estão na mesma ⊙.

2º Processo: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ são concíclicos, pois a potência de $\overline{H}$ é $HP' \cdot HP = HA \cdot HB$.

$\overleftrightarrow{BP}$ e $\overleftrightarrow{AP'}$ chamam-se antiparalelas.

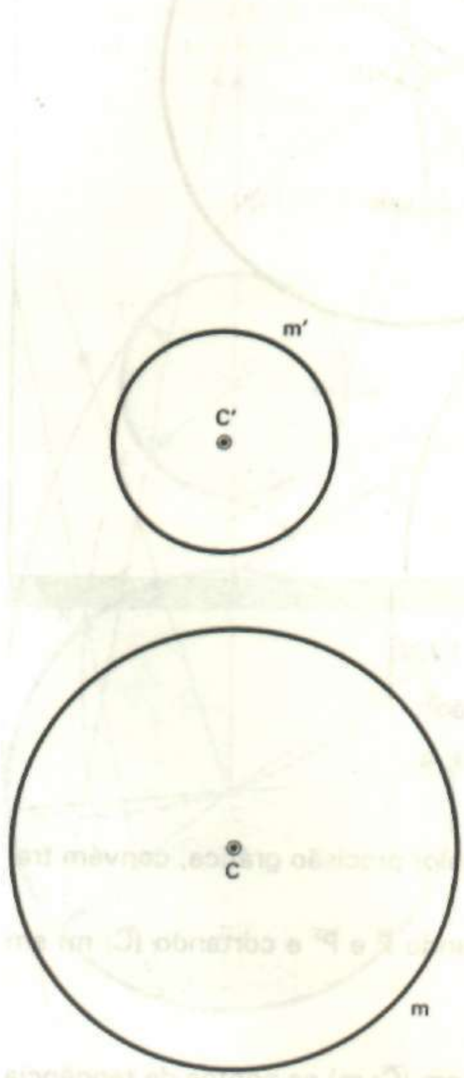
***3º Processo:** No quadrilátero inscritível ABPP', os ângulos opostos somam* 180°, logo: basta transportar φ para obter $\overline{P'}$ em $\overrightarrow{HP}$.

II PROBLEMAS

174 PCC'

PROBLEMA:

Construir uma ⊙ do 1º TIPO, contendo $\overline{P}$ e tangente à ($\overline{C}$; m) e à ($\overline{C'}$; m').



R: É "autoconferível"... (2 respostas).

RACIOCÍNIO:

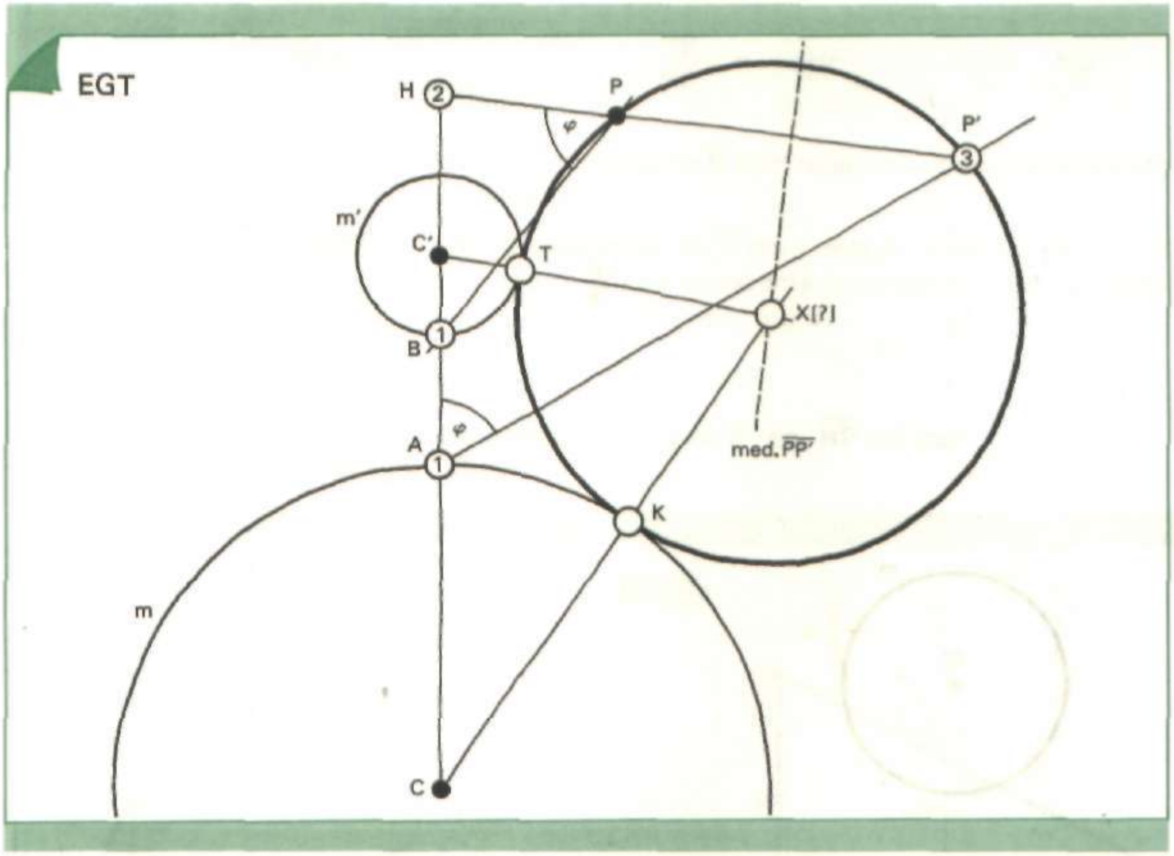
Seja $\overline{X}$ [?] o centro de uma das respostas e $\overline{H}$ obtido como no nº 169, **a.**

O PP'C foi resolvido no livro 2, nº 184.

SE obtivermos $\overline{P'}$,
ENTÃO recaímos no PP'C ou PP'C'.

Como obter $\overline{P'}$?

Pelo teorema (nº 172), a potência de $\overline{H}$ com relação à ($\overline{X}$; XP), que vale HP · HP', é constante e igual a HA · HB (nº 172, **d**).



Então $\overline{P'}$ pode ser obtido em $\overrightarrow{HP}$ (nº 173).

$\overrightarrow{HP}$: semi-reta (é ruim notação duvidosa); obriga-nos a fazer textos longos...

ROTEIRO (desenhe com muita precisão):

1º) Ache $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{H}$, como no nº 169, **a.**

2º) Obtenha $\overline{P'}$ como no nº 173.

Não fizemos o EGT do PP'C.

3º) Resolução do PP'C (para obter maior precisão gráfica, convém trabalhar com a ⊙ maior):

I. Trace uma ⊙ arbitrária contendo $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ e cortando ($\overline{C}$; m) em $\overline{M}$ e $\overline{N}$.

O centro dessa ⊙ está na mediatriz de $\overline{PP'}$.

II. Obtenha $\overline{R} = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{PP'}$.

No EGT, desenha-se uma das respostas. Ao obtê-la, vai-se procedendo analogamente para obter a(s) "clandestina(s)".

III. Trace a ⊙ de $\varnothing\overline{RC}$, obtendo em ($\overline{C}$; m) os pontos de tangência $\overline{K}$ e $\overline{K'}$ ($\overline{K'}$ não está desenhado no EGT) das duas respostas.

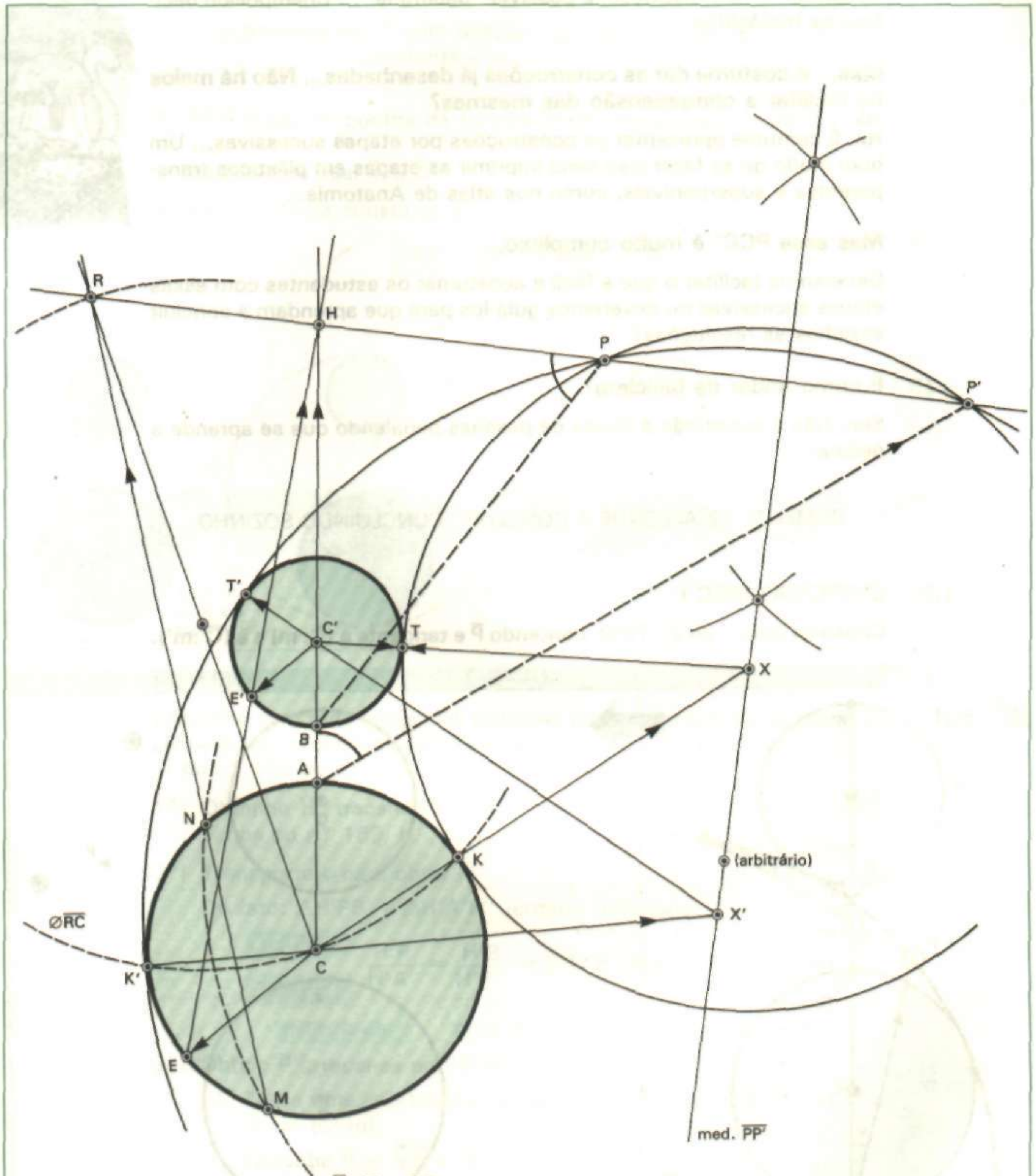
Para obter $\overline{T}$:
{ou em $\overleftrightarrow{XC'}$
{ou em $\overleftrightarrow{HK}$.
Idem para $\overline{T'}$.

IV. *Ligue $\overline{C}$ com $\overline{K}$ e $\overline{K'}$, obtendo $\overline{X}$ e $\overline{X'}$ na med. $\overline{PP'}$.*

V. Antes de traçar, ache $\overline{T}$ e $\overline{T'}$ ($\overline{T'}$ não desenhado).

175 **Deu para entender a explicação baseada apenas no EGT? Você foi capaz de executar** sozinho **a construção?**

Mostraremos abaixo a construção completa:



176 **Esse é o 1º e único problema apresentado com a construção gráfica completa, neste curso de DG... Por quê?**

Parece um "minestrone" de macarrão de "letrinhas"...

Apresentamos esse, para que o estudante apenas veja — mas não tente "decifrar" — a construção. É possível "decifrá-la"... Champollion decifrou os hieróglifos...

177 **Mas... é costume dar as construções já desenhadas... Não há meios de facilitar a compreensão das mesmas?**

Se alguém não entender a resolução dada anteriormente, então muito menos entenderá o desenho já pronto.

Há. É costume apresentar as construções por etapas sucessivas... Um bom modo de se fazer isso seria imprimir as etapas em plásticos transparentes e superponíveis, como nos atlas de Anatomia...

178 **Mas esse PCC' é muito complexo...**

Deveremos facilitar o que é fácil e acostumar os estudantes com essas etapas sucessivas ou deveremos guiá-los para que aprendam a concluir sozinhos as resoluções?

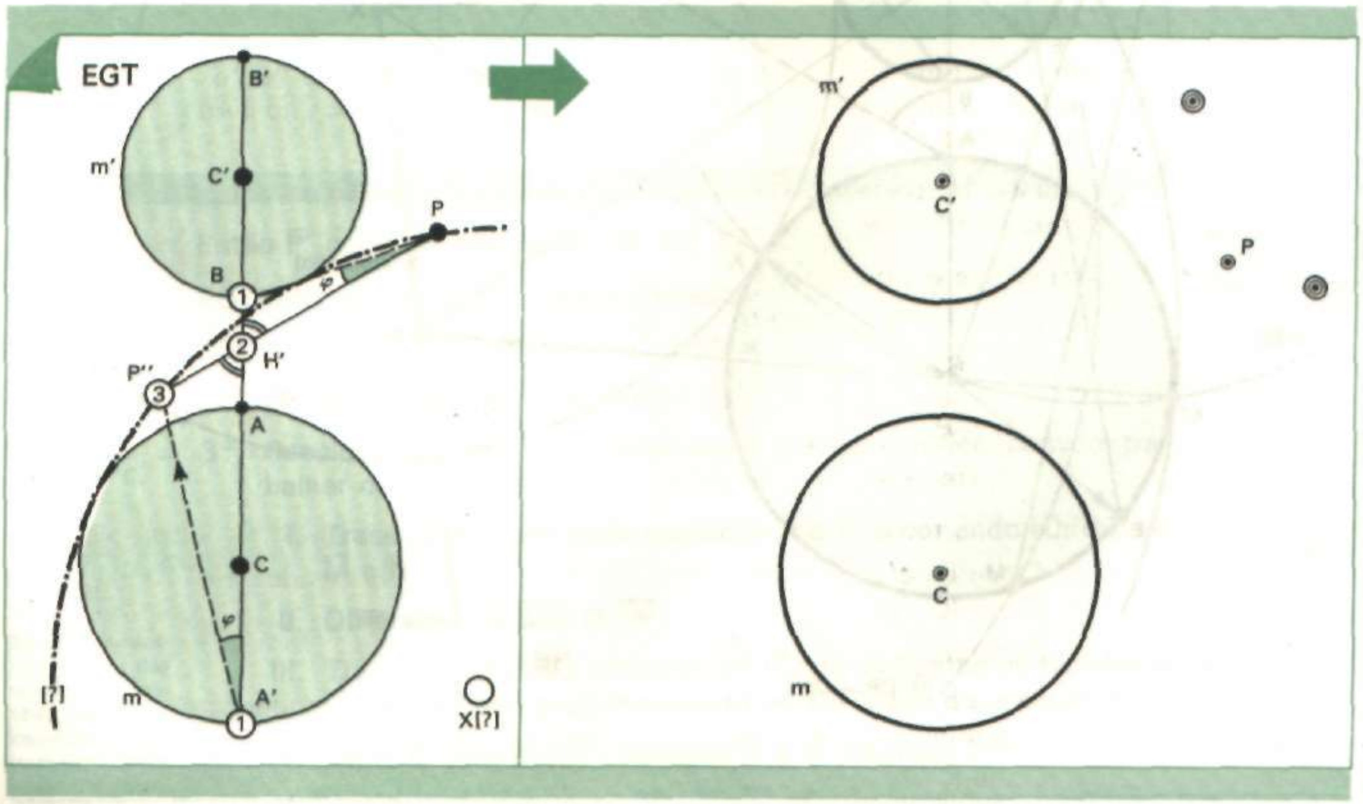
179 **É como andar de bicicleta?**

Sim. Não é assistindo a filmes de pessoas pedalando que se aprende a pedalar.

SOMENTE SE APRENDE A CONCLUIR, CONCLUINDO SOZINHO.

180 EXERCÍCIO **(PCC'):**

Construir uma ⊙ do 2º TIPO, **contendo $\overline{\text{P}}$ e tangente à ($\overline{\text{C}}$; m) e à ($\overline{\text{C'}}$;m').**



RACIOCÍNIO:

Note que $\overline{A'}$ e $\overline{B}$ são pontos de tangência de uma ⊙ particular do 2º tipo.
$\overline{A}$ e $\overline{B'}$ também são...

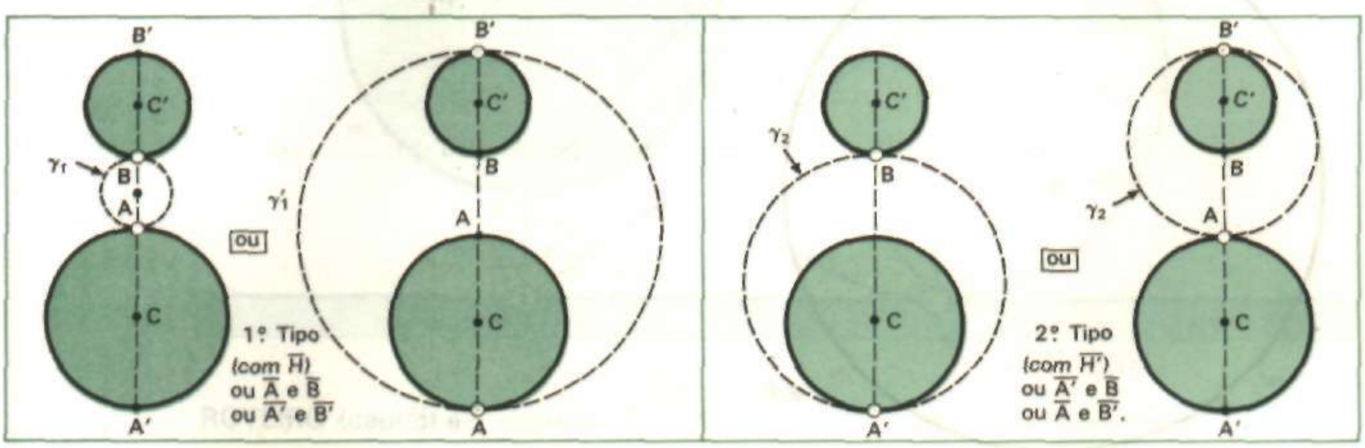
a. Procedendo como fizemos no teorema do nº 172, demonstra-se (em Geometria) que:

> A potência de $\overline{H'}$ com relação a todas as ⊙s do 2º TIPO é constante e igual a H'B · H'A'.

b. $\overline{A'}$ e $\overline{B}$ são os pontos de tangência de uma dessas ⊙s do 2º TIPO (γ_2).
Poderíamos usar $\overline{A}$ e $\overline{B'}$.

c. Essa potência constante é:

$$H'P \cdot H'P'' = H'B \cdot H'A'$$



ROTEIRO:

(Desenhe com toda a precisão possível, caso contrário não acertará os alvos; *é com problemas como este que se valoriza o que vimos no livro 1, do nº 180 ao nº 182.*)

1º) Obtenha $\overline{H'}$ traçando $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{C'E''}$ e de sentidos contrários, como vimos no nº 169, **b.**

2º) Transporte φ para obter $\overline{P''}$.
De fato: $\triangle H'PB \sim \triangle H'A'P''$ (critério AA), logo:

$\triangle H'PB$
$\triangle H'A'P''$

$$\frac{H'P}{H'A'} = \frac{H'B}{H'P''} \Rightarrow H'P \cdot H'P'' = H'B \cdot H'A'$$

c.q.o.

ENTRE ∢ e φ OPOSTOS AO φ

3º) Obtido $\overline{P''}$, recai-se no PP''C:

Não fizemos o EGT do PP''C.

I. Trace uma ⊙ arbitrária contendo $\overline{P}$ e $\overline{P''}$ e determinando $\overline{M}$ e $\overline{N}$ em ($\overline{C}$; m).

II. Obtenha $\overline{R} = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{PP''}$.

III. Trace a ⊙ de $\varnothing\overline{RC}$, obtendo em ($\overline{C}$; m) os pontos de tangência procurados $\overline{K}$ e $\overline{K'}$ (não desenhados no EGT).

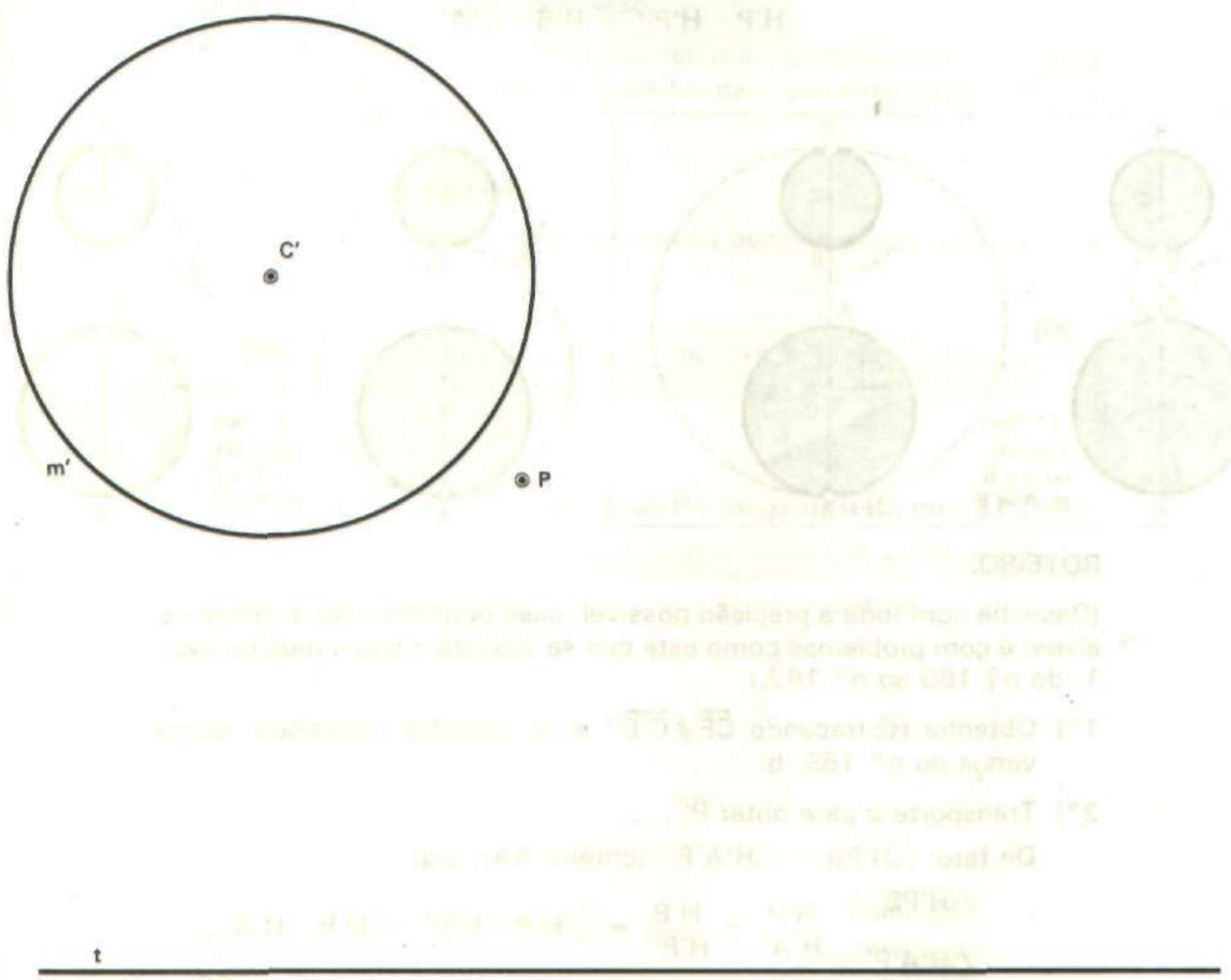
IV. Ligue $\overline{K}$ e $\overline{K'}$ com $\overline{C}$, obtendo $\overline{X}$ e $\overline{X'}$.

Antes de traçar as respostas, obtenha os pontos de tangência $\overline{T}$ e $\overline{T'}$ em ($\overline{C'}$; m').

181 PtC

PROBLEMA:

Construir uma ⊙ do 1º TIPO, contendo $\overline{P}$ e tangente à $\overleftrightarrow{t}$ e à $(\overline{C'}; m')$.



R: É "autoconferível"... (2 respostas).

RACIOCÍNIO:

$\overline{X}$ [?] é o centro de uma das respostas.

O PP't está resolvido no livro 2, nº 076 e nº 403.

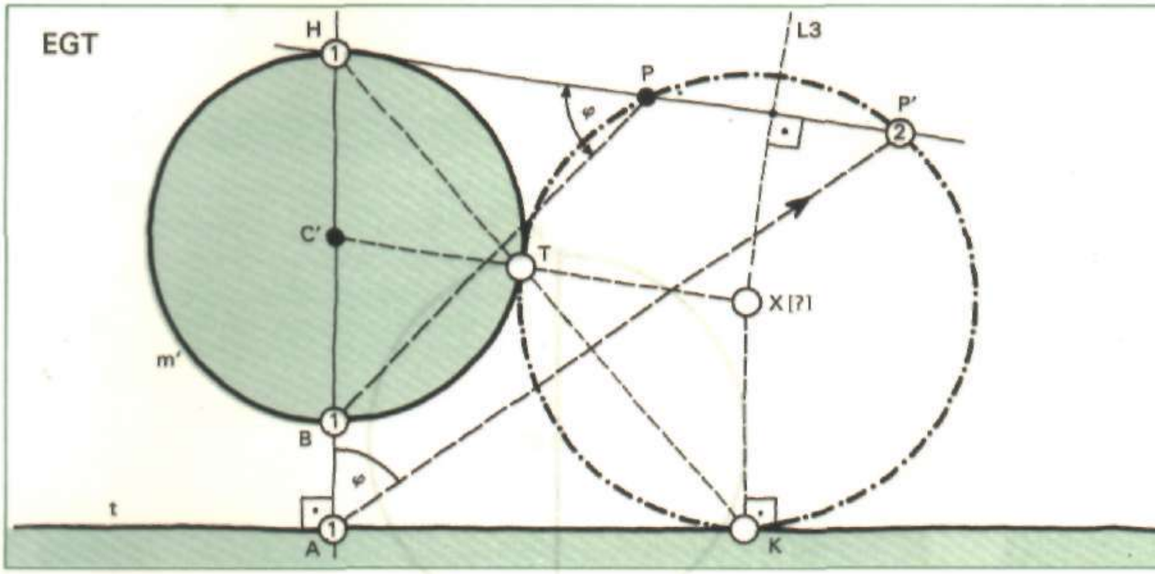
SE achamos $\overline{P'}$,

ENTÃO recaímos no PP't ou no PP'C'.

Como obter $\overline{P'}$?

Usamos $\overline{A}$ e $\overline{B}$ porque são pontos de tangência de uma ⊙ do 1º tipo (nº 166).

O teorema (nº 172) vale também neste caso: HP · HP' = HB · HA.



ROTEIRO (capriche):

1º) Ache $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{H}$.

2º) Obtenha $\overline{P'}$, transportando φ.

3º) Recaímos no PP't, que se resolve como segue (é uma revisão; não fizemos o EGT):

O PP'C poderia ser resolvido achando $x = \sqrt{RP \cdot RP'}$ em vez da ⊙ de ⌀ $\overline{RC}$.

I. $\overline{PP'}$ encontra $\overleftrightarrow{t}$ em $\overline{R}$.

II. Ache $x = \sqrt{RP \cdot RP'}$ (média geométrica).

III. Trace ($\overline{R}$; x) obtendo $\overline{K}$ e $\overline{K'}$ em $\overleftrightarrow{t}$.

IV. Agora, há dois caminhos:

1º caminho:

$$\overline{X}\ [?] \begin{cases} \text{a. Na } \perp \overleftrightarrow{t} \text{ por } \overline{K}. \\ \text{b. Na mediatriz de } \overline{PP'}. \end{cases}$$

Antes de traçar a resposta, deve-se obter $\overline{T}$.

2º caminho:

$\overline{K}$, $\overline{T}$ e $\overline{H}$ são colineares; obtido $\overline{K}$, $\overline{T}$ está em $\overleftrightarrow{HK}$.

Obtidos $\overline{K}$ e $\overline{T}$, acha-se $\overline{X}$ [?]:

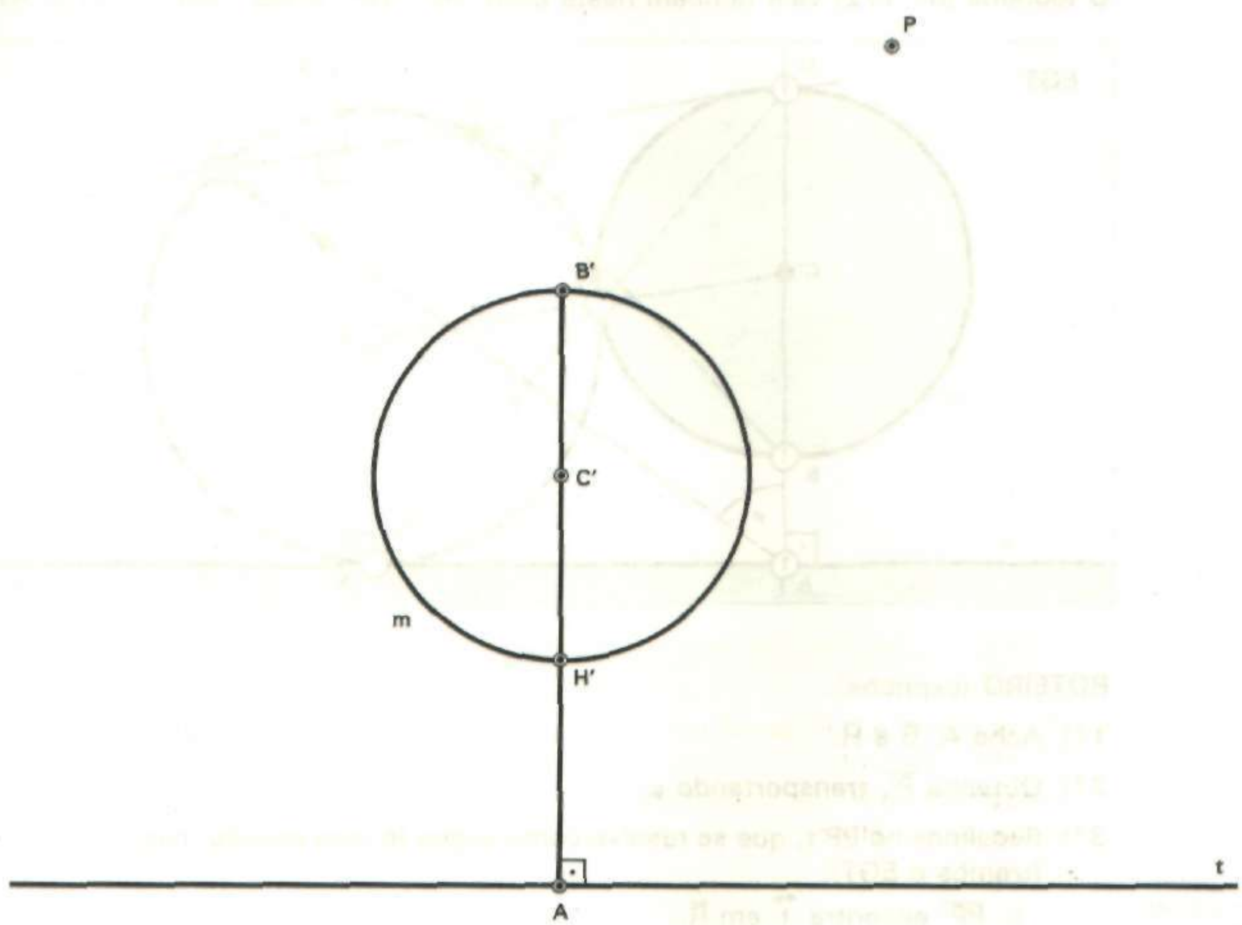
TUDO O QUE SERVE PARA CONFERIR PODE SER UTILIZADO PARA RESOLVER.

$$\overline{X}\ [?] \begin{cases} \text{a. Em } \overleftrightarrow{C'T}. \\ \text{b. Na } \perp \overleftrightarrow{t} \text{ por } \overline{K}. \end{cases}$$

O PtC admite mais duas respostas, do 2º TIPO, cuja construção é exatamente igual à anterior.

182 EXERCÍCIO **(PtC):**

Construir uma ⊙ do 2º TIPO, contendo $\overline{P}$ e tangenciando $\overleftrightarrow{t}$ e ($\overline{C'}$; m').



R: É "autoconferível"... (2 respostas)

Posso concluir sozinho a resolução?

Não só pode como deve, mas metodicamente, isto é, pelo método fundamental (MF):

a. Traduza para o "grafiquês" o enunciado acima, desenhando o EG na região do papel a ele destinada:

I. Comece por UMA DAS RESPOSTAS **e**

II. depois desenhe TODOS OS DADOS**.**

EG ⇒ EGT

b. $\overleftrightarrow{PH'}$ **encontra a ⊙ resposta em** $\overline{P''}$**. Se você obtiver** $\overline{P''}$**, então recairá no PP''t. Para obter** $\overline{P''}$ **é obrigatório saber o teorema que diz: A potência de** $\overline{H'}$ **com relação a todas as ⊙s do** 2º TIPO **é constante e vale H'B' · H'A.**

$\overline{A}$ e $\overline{B'}$ são pontos de tangência de uma ⊙ do 2º tipo (nº 166).

Potência de ponto (PG) está no livro 2, nº 073, e faz parte da TM do DG.

c. **A potência de** $\overline{H'}$ **com relação à ⊙ resposta é H'P · H'P'', portanto:**

$$H'P \cdot H'P'' = H'B' \cdot H'A$$

4ª proporcional e transporte de ângulos são problemas fundamentais que devem ser decorados (livro 2, nº 009).

d. **Ou por 4ª proporcional ou pela ⊙ que passa por** $\overline{A}$, $\overline{B'}$ **e** $\overline{P}$ **ou transportando o ∢B'PH' para H'ÂP'', obtém-se** $\overline{P''}$**.**

Como vimos no problema auxiliar (nº 173).

e. **Obtido** $\overline{P''}$**, recai-se no PP''t (ou no PP''C'); o PP''t é mais fácil.**

183

SE **dermos agora o roteiro.**
ENTÃO **estaremos admitindo que você não tem capacidade para concluir.**

Eu não iria gostar...

SE **você resolveu o problema anterior,**
ENTÃO **este** CURSO DE DG **cumpriu a sua principal finalidade.**

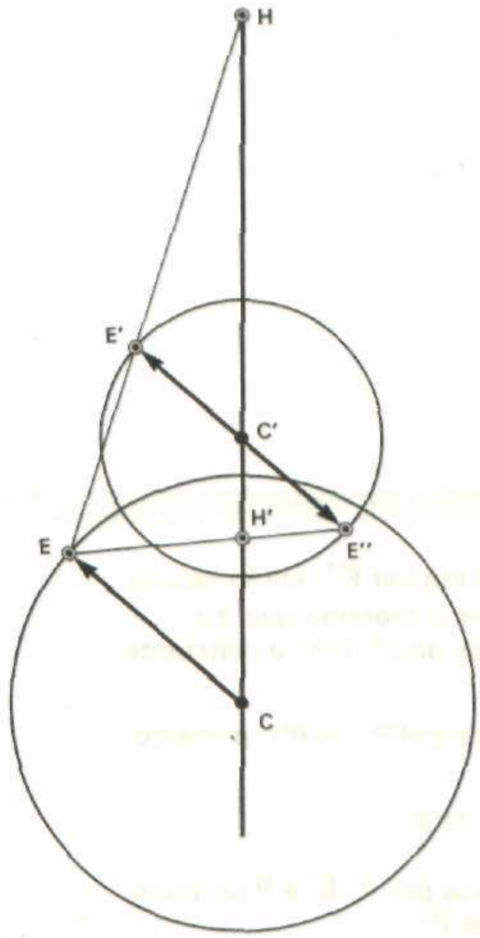
Ensinar a concluir...

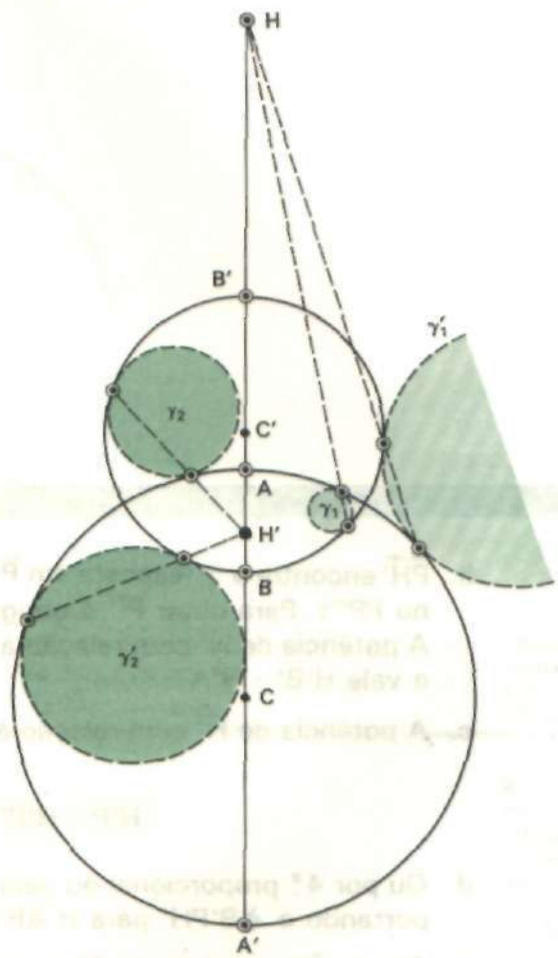
184 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PCC' E O PtC:

Nos desenhos feitos até aqui, fizemos as ⊙s C e C' externas. Como proceder quando não for assim? Vejamos:

a. Para obter $\overline{H}$, sempre $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{C'E'}$ e de mesmo sentido (homotetia direta). Para obter $\overline{H'}$, sempre $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{C'E''}$ e de sentidos opostos (homotetia *inversa*).

b. Entre $\overline{A}$, $\overline{A'}$, $\overline{B}$ e $\overline{B'}$, escolher sempre os dois que sejam pontos de *tangência de uma ⊙ do mesmo tipo que a procurada.*





$\text{Pot.}_{\overline{H};\,\gamma_1}$ = Potência de $\overline{H}$ com relação à γ_1.

1º TIPO

$\text{Pot.}_{\overline{H};\,\gamma_1} = \text{Pot.}_{\overline{H};\,\gamma_1'} =$
$= HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$

2º TIPO

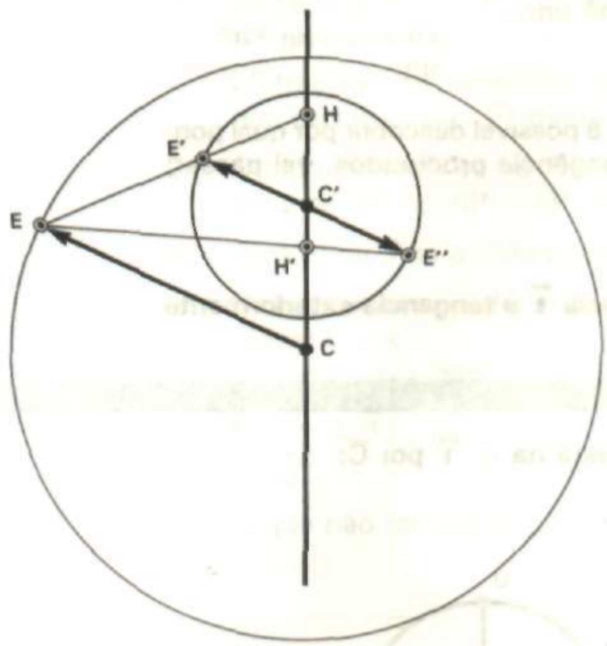
$\text{Pot.}_{\overline{H'};\,\gamma_2} = \text{Pot.}_{\overline{H'};\,\gamma_2'} =$
$= H'A \cdot H'B' = H'A' \cdot H'B$

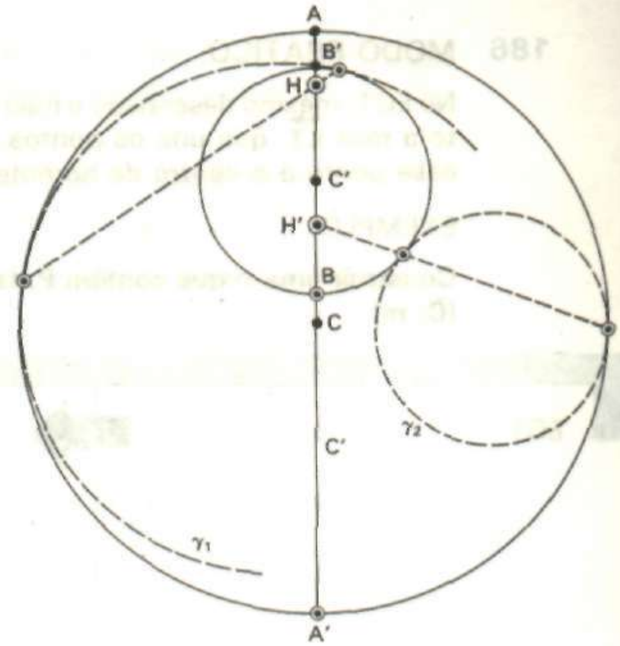
1º TIPO

γ_1 inter. às duas.
γ_1' exter. às duas.

2º TIPO

γ_2 inter. à C' e exter. à C.
γ_2' exter. à C' e inter. à C.





1º TIPO

$Pot._{\overline{H};\gamma_1} = HA \cdot HB = HA' \cdot HB'$

γ_1 inter. às duas.

2º TIPO

$Pot._{\overline{H'};\gamma_2} = H'A' \cdot H'B = H'A \cdot H'B'$

γ_2 inter. à C e exter. à C'.

185 Quando a reta $\overleftrightarrow{t}$ e a ⊙C são secantes, deveremos supor $\overline{C}_\infty$ no semiplano I e, então, $\overline{H}$ é o "de cima" e $\overline{H'}$, o "de baixo".

1º TIPO

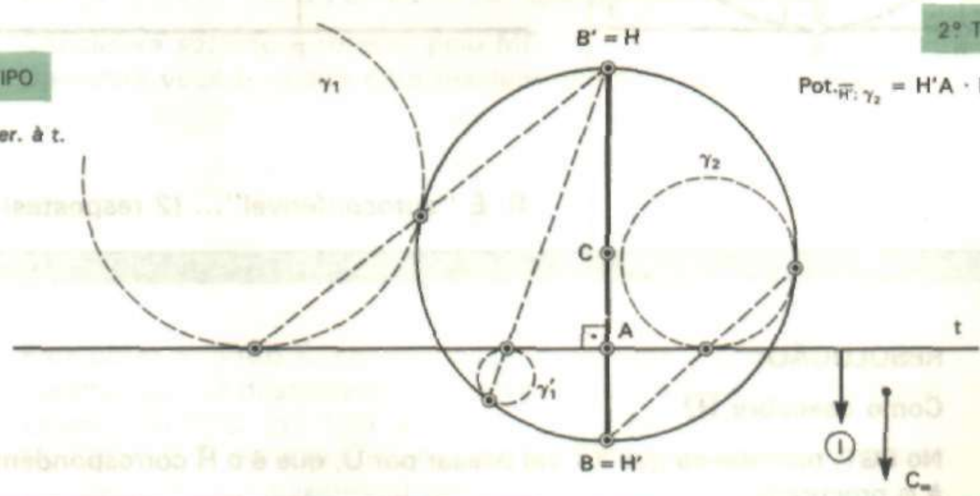
γ_1 exter. às duas (t e C).
γ_1' inter. às duas.

$Pot._{\overline{H};\gamma_1} = Pot._{\overline{H};\gamma_1'} = HA \cdot HB$

2º TIPO

γ_2 *inter. à C e exter. à t.*

$Pot._{\overline{H'};\gamma_2} = H'A \cdot H'B'$



EXERCÍCIOS SOBRE O PtC:

No PtC, a maior dificuldade reside em descobrir qual o centro de homotetia que deveremos usar. Para isso, há um...

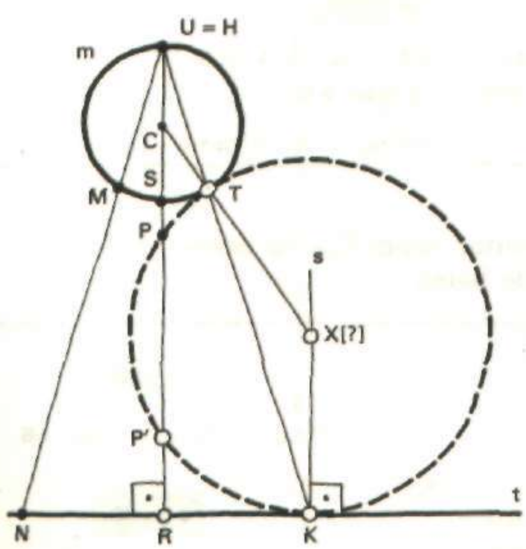
186 MODO PRÁTICO:

No EGT, mesmo desenhado a mão livre, é possível descobrir por qual ponto a reta $\overleftrightarrow{KT}$, que une os pontos de tangência procurados, vai passar; esse ponto é o centro de homotetia.

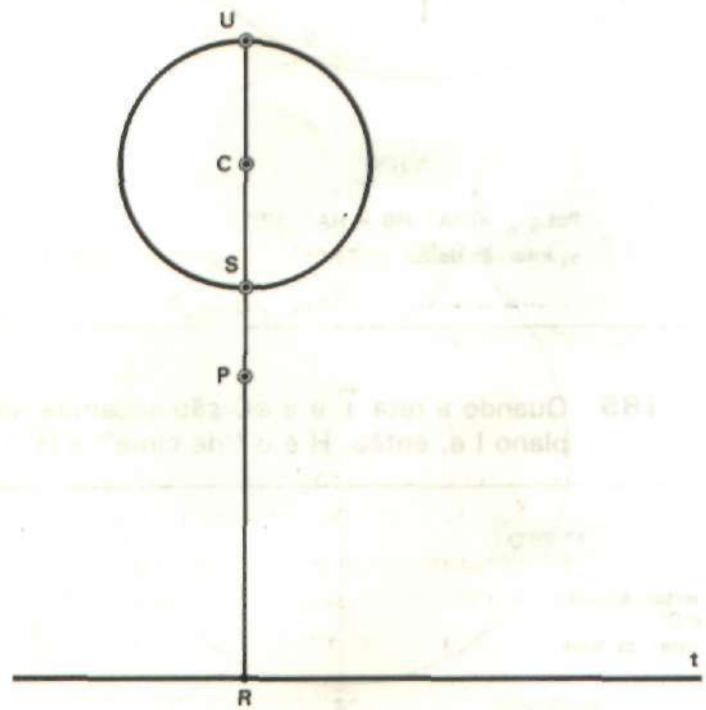
EXEMPLO:

Construir uma ⊙ que contém $\overline{P}$, tangencia $\overleftrightarrow{t}$ e tangencia exteriormente $(\overline{C}; m)$.

EGT



$\overline{P}$ está na ⊥ $\overleftrightarrow{t}$ por $\overline{C}$:



R: É ''autoconferível''... (2 respostas)

RESOLUÇÃO:

Como descobrir $\overline{H}$?

No EGT, percebe-se que $\overleftrightarrow{KT}$ vai passar por $\overline{U}$, que é o $\overline{H}$ correspondente à ⊙ procurada.

ROTEIRO:

1º) Descoberto $\overline{H}$, precisamos agora obter $\overline{P'}$:
ou fazendo HP · HP' = HS · HR, o que nos obriga a obter HP' por 4ª proporcional,
ou traçando $\overleftrightarrow{HN}$ arbitrária, para obter HM · HN = HP · HP', o que nos permite obter $\overline{P'}$ transportando o ∢ HP̂M para HN̂P'.

2º) Obtido $\overline{P'}$, recai-se no PP't (ou no PP'C);
acha-se $RK = \sqrt{RP' \cdot RP}$, obtendo $\overline{K}$ (e o "clandestino" $\overline{K'}$).

3º) Para obter $\overline{T}$ (e o "clandestino" $\overline{T'}$), liga-se $\overline{K}$ com $\overline{H}$.

4º) Dessa maneira, poderemos obter $\overline{X}$ traçando duas das 3 linhas seguintes:

a. L3 = med. $\overline{PP'}$;
b. $\overrightarrow{Ks} \perp \overleftrightarrow{t}$;
c. $\overleftrightarrow{CT}$.

A que não for usada para obter $\overline{X}$, servirá para conferir.

187 O que falta aprender sobre pesquisa de ⊙s?

Falta apenas resumir o que já vimos e resolver (depois) os três últimos problemas.

RESUMO:

Operações gráficas:
Or
OP

Dado r, só falta obter $\overline{O}$:

$\overline{O}$ [?] $\left\{ \begin{array}{l} \text{a.} \\ \text{b.} \end{array} \right.$

rPP'
rPt
rPC
rtt'
rtC
rCC'

a. Uma ⊙ já tem forma determinada; o seu tamanho é determinado pelo raio r, e sua posição no plano de desenho, pelo centro $\overline{O}$.

b. O tamanho (r) e a posição ($\overline{O}$) podem ser obtidos quando são dados 3 (só 3) dos seguintes elementos:
P, P', P''; t, t', t''; C, C', C'' e E, E', E'' (são pontos, mas de tangência).

c. Conclui-se sozinho o roteiro, pelo MF.
Descubra você o roteiro para resolver os seguintes problemas:

Etr
ECr
EtP
ECP
Ett'

Dado $\overline{O}$, só falta obter r:
Ot
OC

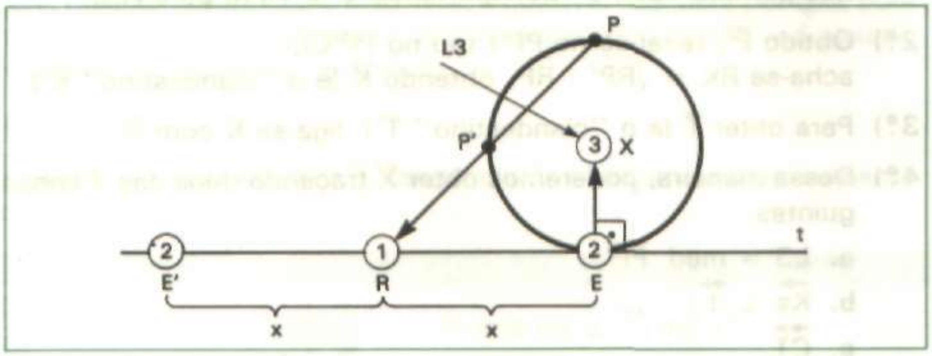
Básicos:
PP'P''
(⊙ circunscrita)
tt't''
(⊙s inscritas e 3 ex-inscritas)

d. Para obter o centro $\overline{X}$, poderemos procurar uma ⊙ concêntrica, procurando pontos dessa mesma ⊙, retas tangentes a ela, etc. Foi o que fizemos no ECC' (nº 160) e no EtC; E ∈ t (nº 161).
No Ett'; E ∈ t, por exemplo, a reta t'' ⊥ t em E é também tangente, e poderemos (se quisermos) recair no tt't''.

e. **PP't** **CLÁSSICO**

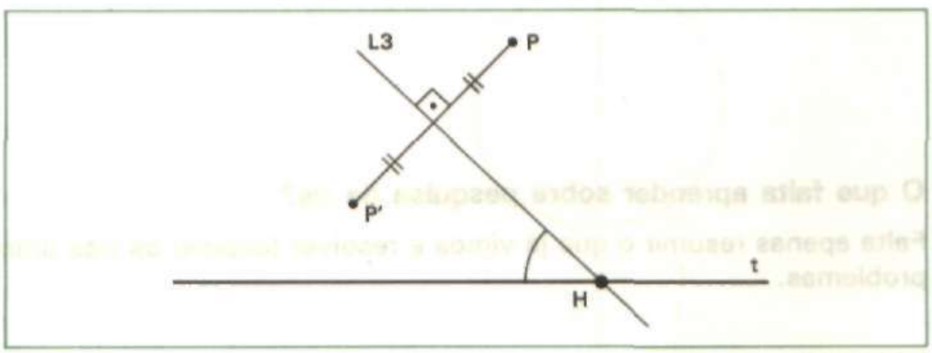
Já resolvemos por 2 processos:

1º) No livro 2, nº 076, pelo procedimento algébrico (potência de ponto), basta obter $x = \sqrt{RP \cdot RP'}$ (média geométrica) para achar $\overline{E}$ e o "clandestino" $\overline{E'}$.



2º) No livro 2, nº 403, por homotetia:
uma "circunferenciazinha nasce" em $\overline{H}$, vai "crescendo", "crescendo"... até "atropelar" $\overline{P}$ e $\overline{P'}$...

Anime-se e use a sua "visão animada"...



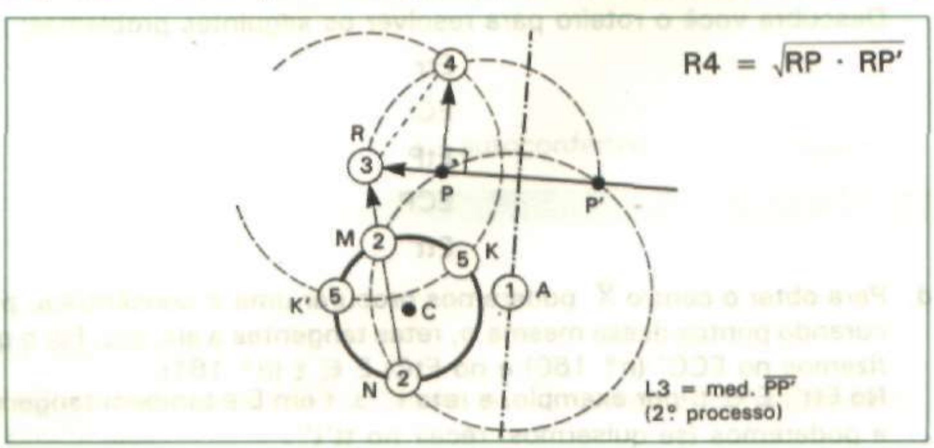
f. **PP'C** **CLÁSSICO**

Clássico e difícil...

Já resolvemos no livro 2, nº 184:
com centro $\overline{A}$ (arbitrário) na med. $\overline{PP'}$, traçamos a ⊙ auxiliar, obtendo $\overline{M}$ e $\overline{N}$ e depois $\overline{R}$ (centro radical). Agora há 2 caminhos:

1º) A ⊙ de $\varnothing\overline{RC}$ determina $\overline{K}$ e $\overline{K'}$ em ($\overline{C}$; M).

2º) $RK = RK' = \sqrt{RP \cdot RP'}$ (potência de $\overline{R}$).



188

Não se estuda uma matéria apenas para o "próximo exame", mas sim buscando-se um APRENDIZADO PARA O RESTO DA VIDA!

Saber DG significa:
1) Saber procurar pontos (duas linhas).
2) Saber procurar retas {ou 2 pontos / ou 1 ponto e a direção.
3) Saber procurar circunferências.

Um profissional — de qualquer área (Engenharia, Medicina, etc.) — só merece o diploma se, e somente se, aprendeu a concluir no seu campo e não porque decorou regras, fórmulas e procedimentos!
Será que você sabe concluir roteiros para obter circunferências?

RESUMO DO RESUMO = (RESUMO)².

Para desenhar uma ⊙, você precisa do centro e do raio.

"PROCURAI E ACHAREIS"

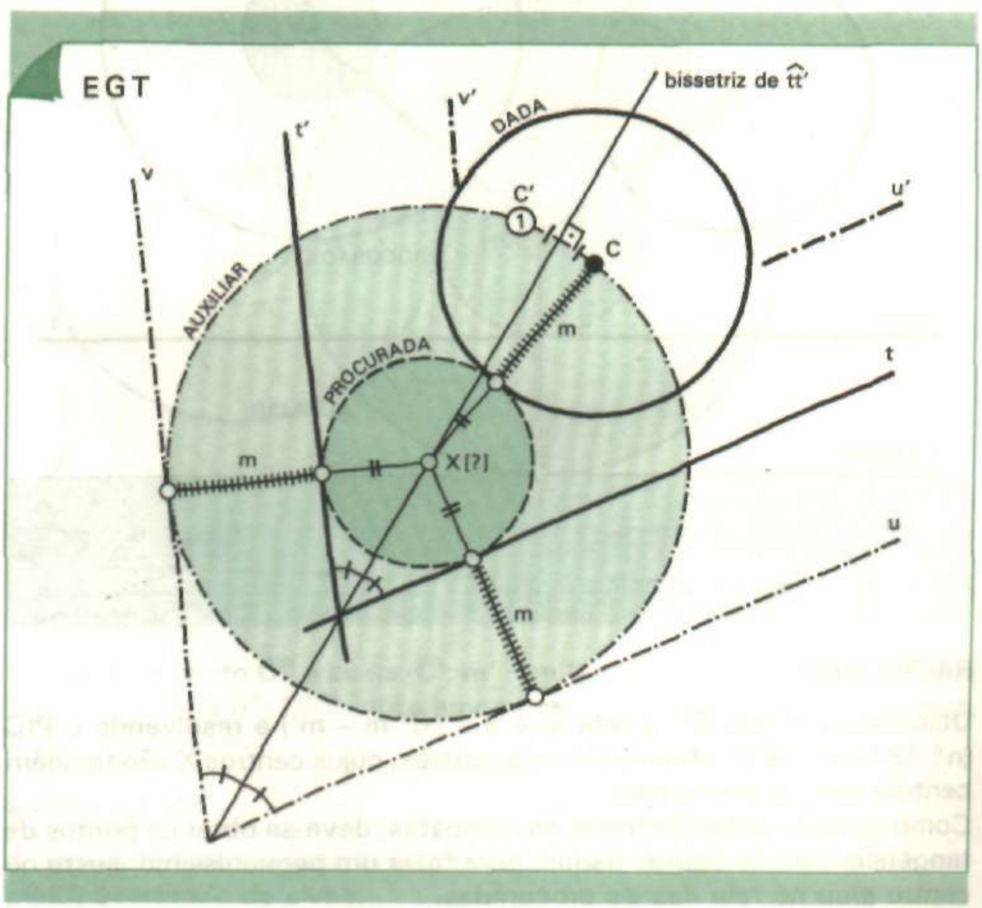
SE não conseguir obtê-los a partir dos dados,
ENTÃO: P-R-O-C-U-R-E pontos, retas tangentes... para recair num problema conhecido.

Quem não procura não acha...

Para os 3 últimos (tt'C, tCC', CC'C"), cujas construções completas nos casos genéricos são muito trabalhosas, mostraremos apenas como se concluem os roteiros e daremos alguns casos particulares como exercícios de DG.

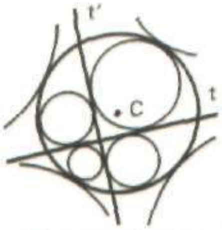
189 tt'C

Construir uma ⊙ X tangente a duas retas $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$ e a uma ⊙ C = ($\overline{C}$;m) dados.



O raio $\overline{m}$ continua com o bom costume de "encostar".

... é imantado e barato.



No caso acima, o tt'C tem 8 respostas.

RACIOCÍNIO:

$\overline{X}$, centro da procurada, é também centro de uma auxiliar que contém $\overline{C}$, contém $\overline{C'}$ (simétrico de $\overline{C}$ com relação à bissetriz de $\widehat{tt'}$), tangencia $\overleftrightarrow{u} \,/\!\!/\, \overleftrightarrow{t}$ e tangencia $\overleftrightarrow{v} \,/\!\!/\, \overleftrightarrow{t'}$. Então, $\overline{X}$ pode ser obtido resolvendo:

> ou o **CC'u** (é o PP't com outras letras)
>
> ou o **Cuv** (é o Ptt', que recai no PP't).

O Ptt' foi resolvido no livro 2, nº 406.

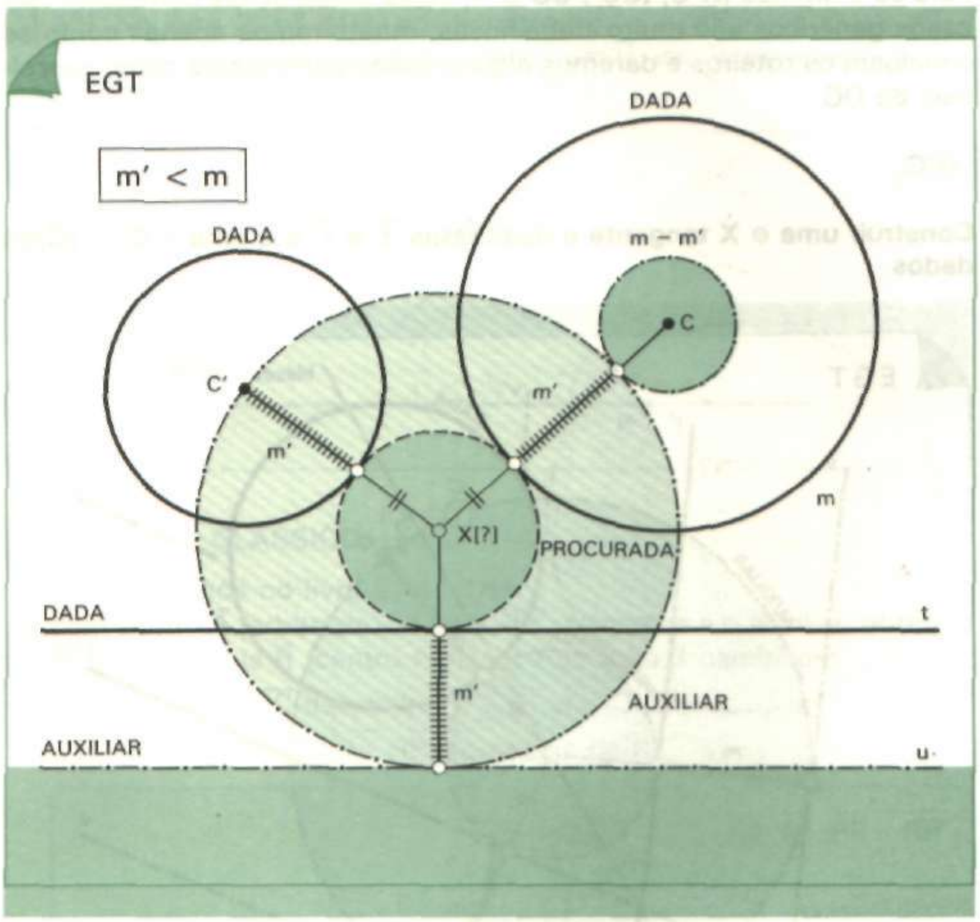
Nossa...

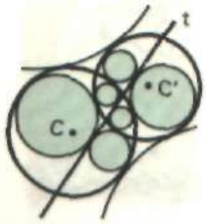
DISCUSSÃO:

Com **C**, **u**, **v** há duas respostas tangentes externamente à ⊙ dada.

190 tCC'

Construir uma ⊙ X tangente a uma reta $\overleftrightarrow{t}$ e a duas ⊙s C = ($\overline{C}$; m) e C' = ($\overline{C'}$; m') dadas.





No caso acima, há 8 respostas.

RACIOCÍNIO:

Utilizando o ponto $\overline{C'}$, a reta $\overleftrightarrow{u}$ e a ⊙ ($\overline{C}$; m − m') e resolvendo o PtC (nº 181 e nº 182), obtemos 4 ⊙s auxiliares, cujos centros X são também centros das ⊙s procuradas.

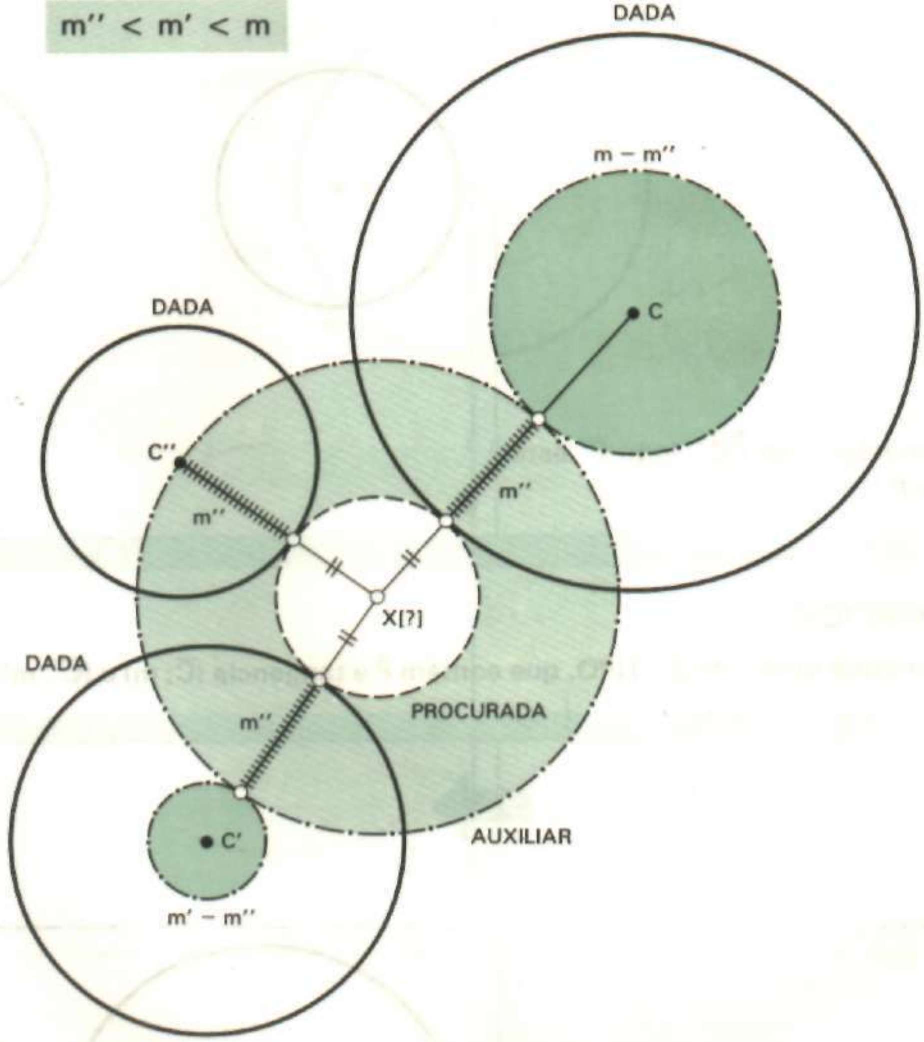
Como sempre, antes de traçar as respostas, deve-se obter os pontos de tangência com as figuras dadas, *para fazer um pequeníssimo ajuste no* centro e/ou no raio das ⊙s procuradas.

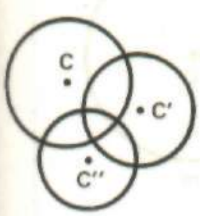
191 CC'C''

Construir uma ⊙X tangente a três ⊙s C = ($\overline{C}$; m), (C' = $\overline{C'}$; m') e C'' = ($\overline{C''}$; m'') dadas.

EGT

m'' < m' < m





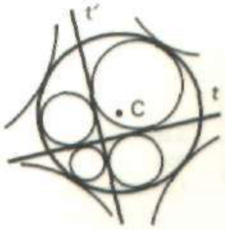
No caso acima, há 8 respostas (veja-as).

RACIOCÍNIO:

Utilizando o ponto $\overline{C''}$ e as ⊙s ($\overline{C'}$; m' − m'') e ($\overline{C}$; m − m'') e resolvendo o PCC' (nº 174 e nº 180), obteremos 4 ⊙s auxiliares, concêntricas com 4 ⊙s procuradas.

192 EXERCÍCIOS

A seguir daremos alguns exercícios que você deverá resolver por completo, acertando os alvos...



No caso acima, o tt'C *tem 8 respostas.*

RACIOCÍNIO:

$\overline{X}$, centro da procurada, é também centro de uma auxiliar que contém $\overline{C}$, contém $\overline{C'}$ (simétrico de $\overline{C}$ com relação à bissetriz de $\widehat{tt'}$), tangencia $\overleftrightarrow{u}$ // $\overleftrightarrow{t}$ e tangencia $\overleftrightarrow{v}$ // $\overleftrightarrow{t'}$. Então, $\overline{X}$ pode ser obtido resolvendo:

> *ou o* ***CC'u*** *(é o PP't com outras letras)*
>
> ou o **Cuv** (é o Ptt', que recai no PP't).

O Ptt' foi resolvido no livro 2, nº 406.

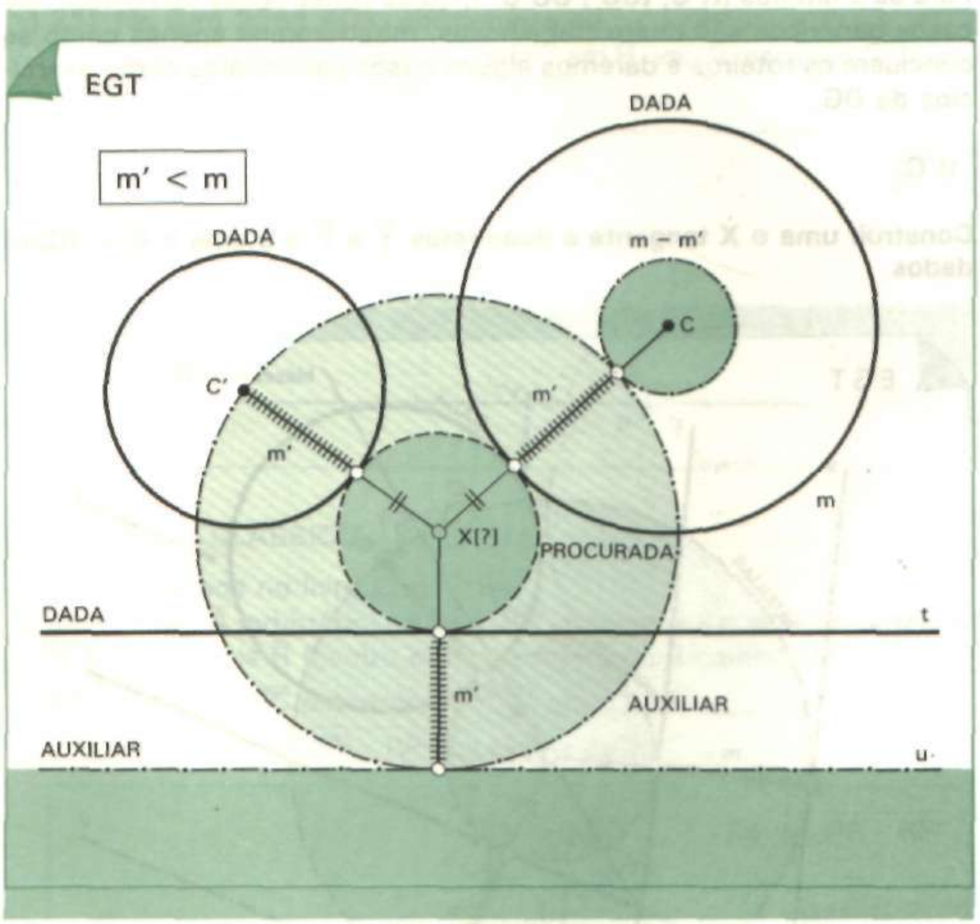
Nossa...

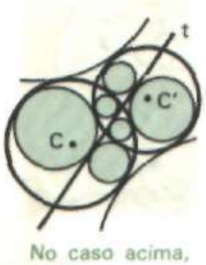
DISCUSSÃO:

Com **C**, **u**, **v** há duas respostas tangentes externamente à ⊙ dada.

190 tCC'

Construir uma ⊙ X tangente a uma reta $\overleftrightarrow{t}$ e a duas ⊙s C = ($\overline{C}$; m) e C' = ($\overline{C'}$; m') dadas.





No caso acima, há 8 respostas.

RACIOCÍNIO:

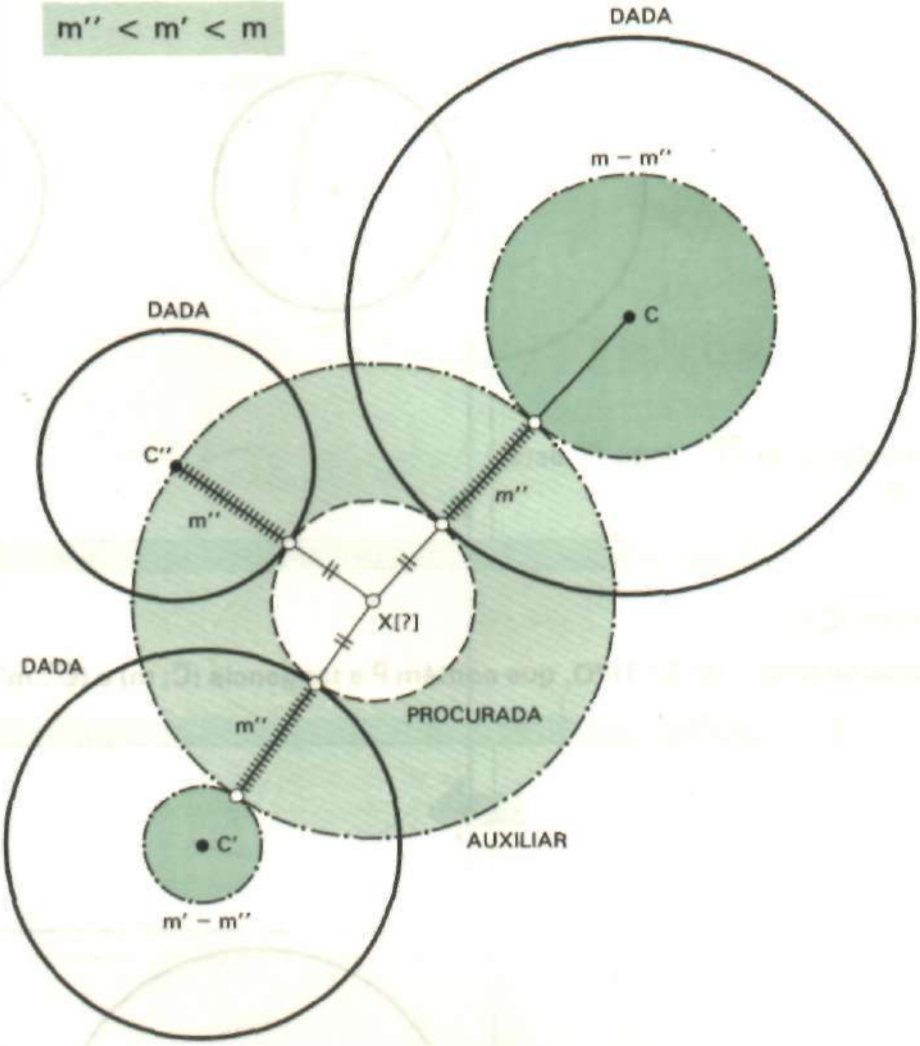
Utilizando o ponto $\overline{C'}$, a reta $\overleftrightarrow{u}$ e a ⊙ ($\overline{C}$; m – m') e resolvendo o PtC (nº 181 e nº 182), obtemos 4 ⊙s auxiliares, cujos centros X são também centros das ⊙s procuradas.
Como sempre, antes de traçar as respostas, deve-se obter os pontos de tangência com as figuras dadas, para fazer um pequeníssimo ajuste no centro e/ou no raio das ⊙s procuradas.

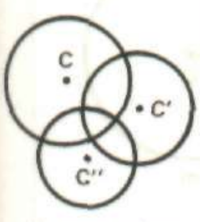
191 CC'C''

Construir uma ⊙X tangente a três ⊙s C = ($\overline{C}$; m), (C' = $\overline{C'}$; m') e C'' = ($\overline{C''}$; m'') dadas.

EGT

m'' < m' < m





No caso acima, há 8 respostas (veja-as).

RACIOCÍNIO:

Utilizando o ponto $\overline{C''}$ e as ⊙s ($\overline{C'}$; m' − m'') e ($\overline{C}$; m − m'') e resolvendo o PCC' (nº 174 e nº 180), obteremos 4 ⊙s auxiliares, concêntricas com 4 ⊙s procuradas.

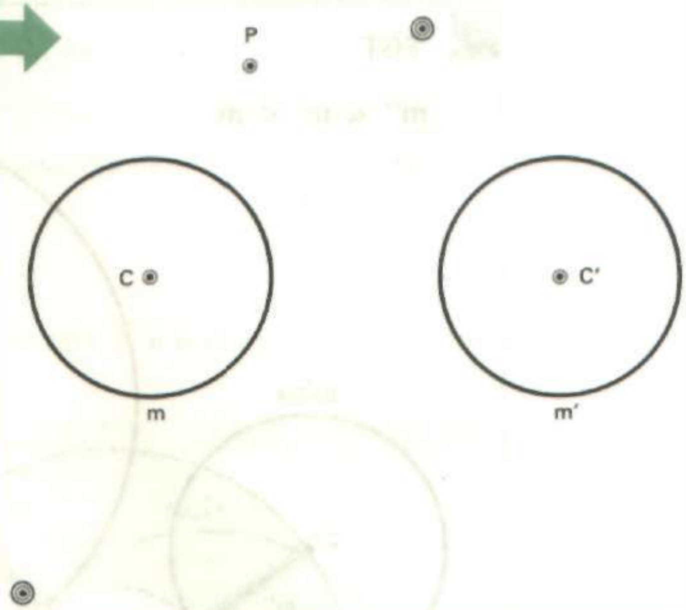
192 EXERCÍCIOS

A seguir daremos alguns exercícios que você deverá resolver por completo, acertando os alvos...

193 EXERCÍCIO:

Obter uma ⊙ do 1º TIPO, que contém $\overline{P}$ e tangencia ($\overline{C}$; m) e ($\overline{C'}$; m'), sendo m = m'.

EGT

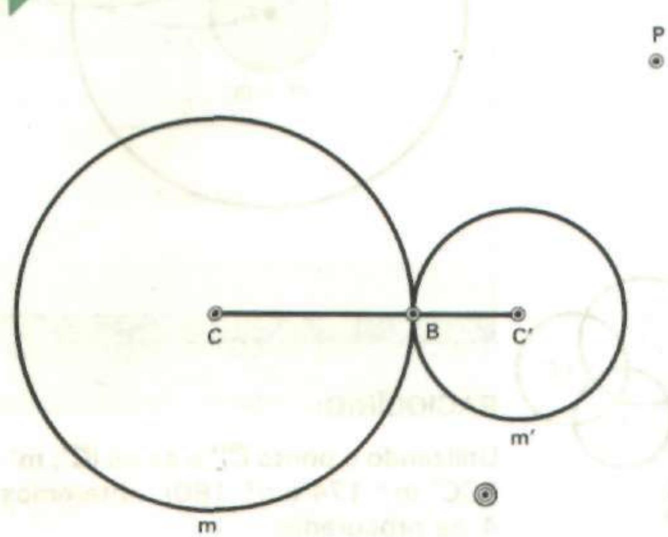


$\overline{H}$ é o ponto impróprio de $\overleftrightarrow{CC'}$, logo $\overline{P'}$ está na // $\overleftrightarrow{CC'}$ por $\overline{P}$.

194 EXERCÍCIO:

Construir uma ⊙ do 2º TIPO, que contém $\overline{P}$ e tangencia ($\overline{C}$; m) e ($\overline{C'}$; m').

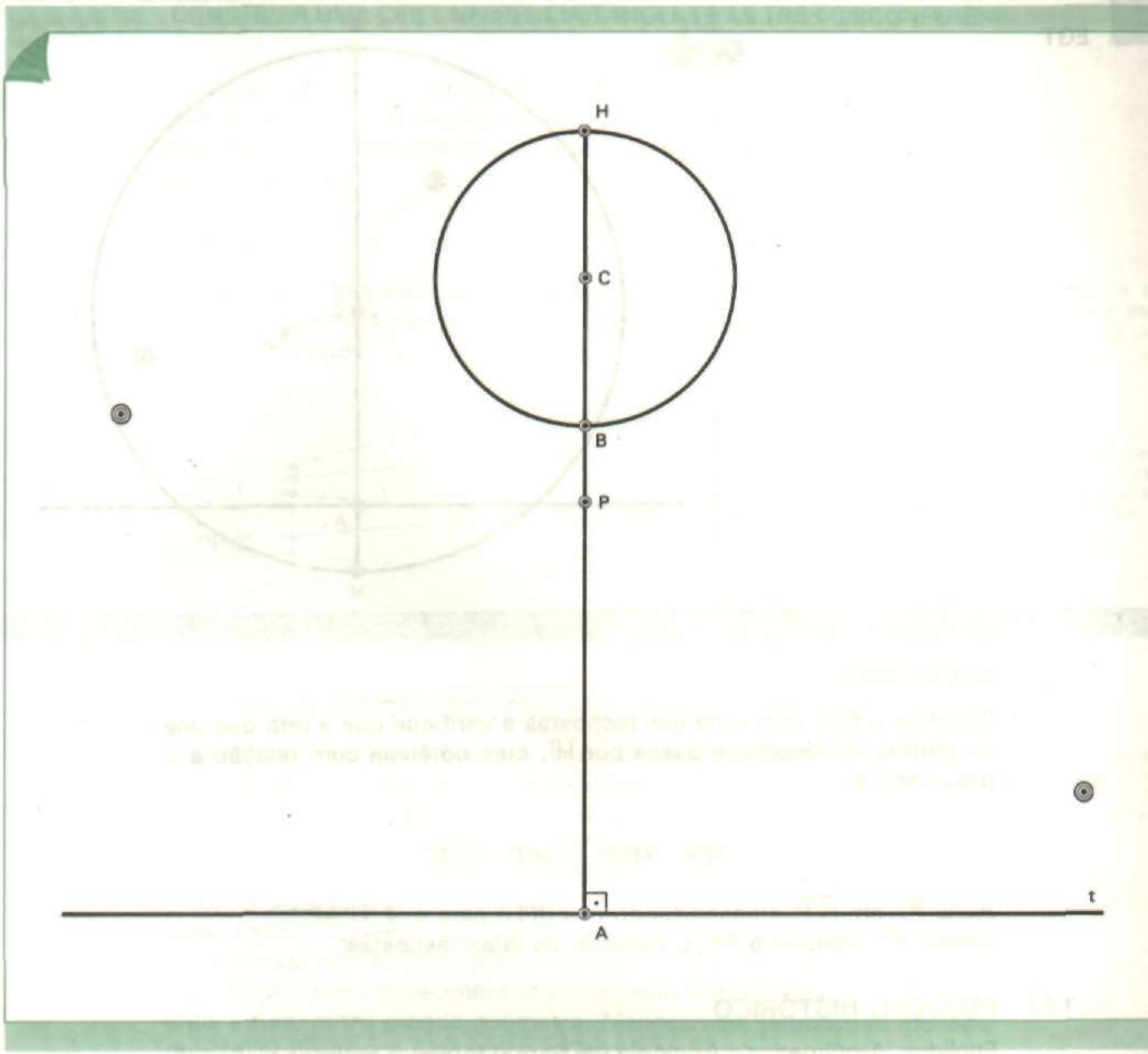
EGT



$\overline{H'} = \overline{B} \Rightarrow \overline{P''}$ coincide com ambos e $\overline{P''}$ é ponto de tangência.

195 EXERCÍCIO:

Construir uma ⊙ que contém $\overline{P}$, tangencia $\overleftrightarrow{t}$ e tangencia exteriormente ($\overline{C}$; m).



RACIOCÍNIO **(o EGT é dispensável):**

Sendo $\overline{P''}$ o ponto da reta $\overleftrightarrow{HP}$ que está na ⊙ procurada, sabemos que:

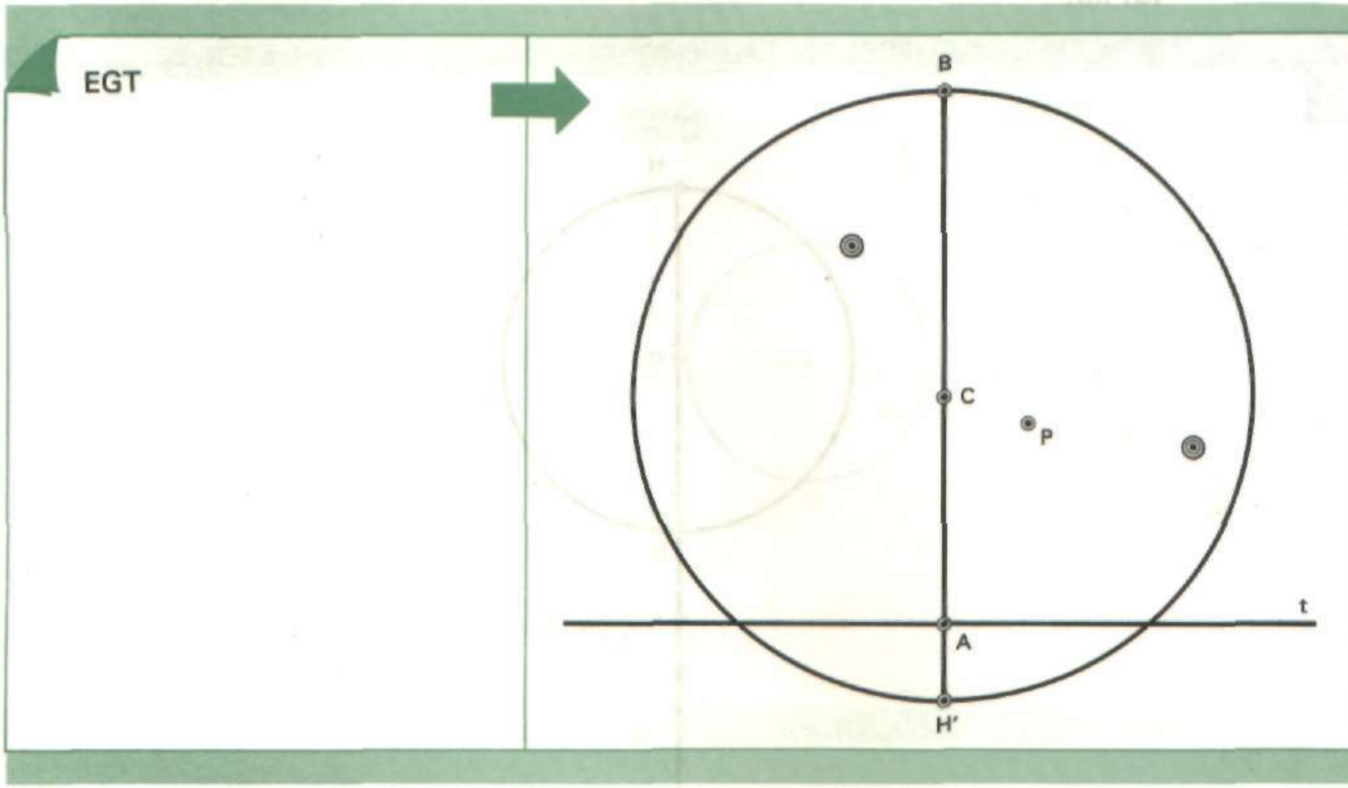
$$HP \cdot HP' = HB \cdot HA$$

No nº 173 (problema auxiliar) mostramos três processos para obter HP', mas, neste caso (com $\overline{H}$, $\overline{P}$ e $\overline{A}$ colineares), é melhor utilizar o 1º (4ª proporcional).

Obtido $\overline{P''}$, recai-se no PP''t (duas respostas de mesmo tamanho; há simetria).

196 EXERCÍCIO:

Construir uma ⊙ que contém $\overline{P}$ e tangencia $\overleftrightarrow{t}$ e $(\overline{C}; m)$.



RACIOCÍNIO:

Desenhe o EGT com uma das respostas e verifique que a reta que une os pontos de tangência passa por $\overline{H'}$, cuja potência com relação à ⊙ procurada é:

$$H'P \cdot H'P'' = H'B \cdot H'A$$

Ache $\overline{P''}$ em $\overleftrightarrow{H'P}$, transportando o ∡BPH' para o ∡ H'AP''.
Obtido $\overline{P''}$, resolva o PP''t, obtendo as duas respostas.

197 PEQUENO HISTÓRICO

Euclides, Arquimedes e Apolônio (de Perga) foram os maiores responsáveis pela "Idade Áurea" da Matemática grega nos séculos III e II a.C. Pouco se sabe da vida de Apolônio; supõe-se que ele se considerava rival de Arquimedes e ambos chegaram a estudar os mesmos assuntos. Infelizmente, grande parte da obra de Apolônio foi perdida, como a denominada "Resultado rápido", em que chegou a um valor de π com uma aproximação maior do que o valor $\frac{22}{7}$, dado por Arquimedes.

História da Matemática, de Carl B. Boyer, Edgard Blücher e Editora da USP.

Apolônio escreveu um tratado sobre tangências no qual está o problema hoje conhecido como "Problema de Apolônio":

DADAS TRÊS COISAS, CADA UMA DAS QUAIS PODE SER UM PONTO, UMA RETA OU UMA CIRCUNFERÊNCIA, TRAÇAR UMA CIRCUNFERÊNCIA QUE É TANGENTE ÀS TRÊS.

Euclides resolveu o PP'P'' e o tt't'' quando estudou a ⊙ circunscrita e a ⊙ inscrita num △. No seu *Livro I* de tangências, resolveu seis desses problemas e os dois últimos, tCC' e CC'C'', ocupavam todo o seu *Livro II*.

Deve-se admitir que um ponto é uma circunferência de raio nulo. Se admitirmos que uma reta ''funciona'' como uma circunferência de centro impróprio, poderemos enunciar o ''Problema de Apolônio'' de uma forma simplificada:

CONSTRUIR UMA CIRCUNFERÊNCIA TANGENTE ÀS TRÊS CIRCUNFERÊNCIAS DADAS.

Os matemáticos dos séculos XVI e XVII achavam que Apolônio não tinha resolvido o caso mais geral (CC'C'', nº 191) e tentaram resolvê-lo; Newton foi um dos que encontraram a resolução utilizando apenas régua e compasso.

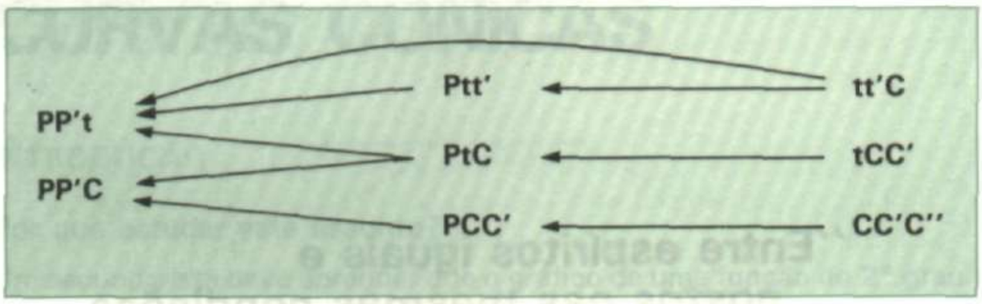
198 RESUMO:

PP'P'': 3⊙s de raios nulos.

Considerando três a três as ''circunferências'' de Apolônio, além do PP'P'' e do tt't'', há mais oito problemas, já resolvidos por nós, que podem ser assim resumidos:

tt't'': 3 ⊙s de *raios* → ∞ (tendendo ao infinito).

A flecha indica que cada problema recai no anterior.



No nº 189, fizemos o tt'C recair diretamente no PP't, o que é mais fácil.

199 CONTINUAÇÃO DO PEQUENO HISTÓRICO:

Apolônio de Perga, não Euclides, era chamado pelos antigos de ''o Grande Geômetra''. Numa de suas obras, estudou o L8, de onde se conclui o Eixo Radical (indispensável para resolver o PP'C) e o L6, que é uma circunferência conhecida como ''Círculo de Apolônio'' (apesar de já ter sido utilizada anteriormente por Aristóteles para explicar geometricamente a forma semicircular do arco-íris).

L8: livro 2, nº 168.

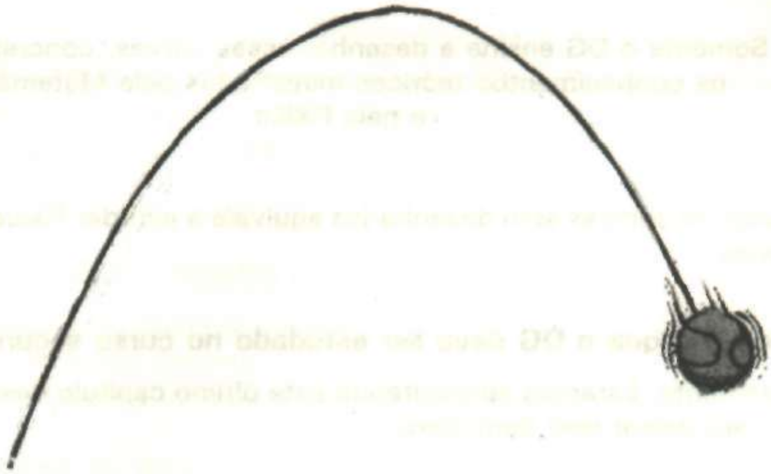
L6: livro 2, nº 149.

Esse mesmo Apolônio, em sua obra-prima *As cônicas*, estudou as curvas cônicas, que serão objeto do próximo capítulo. Nessa obra, Apolônio melhorou os conhecimentos sobre essas curvas, que, cerca de 150 anos antes, outro grande geômetra, Menaecmus, já possuía. Menaecmus foi professor de Alexandre, o Grande, que achava a Geometria difícil. A respeito disso, Menaecmus lhe disse: ''Rei, na Geometria há uma só estrada para todos''. Aliás, essa devia ser a frase da moda, na época, porque Euclides também a usou para o Rei Ptolomeu.

Tradução: vire-se...

''Entre espíritos iguais e
postos nas mesmas condições,
o que conhece Geometria tem
especial rigor.''

Pascal (1623-1662)

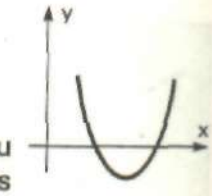


CAPÍTULO

4

CURVAS CÔNICAS

I INTRODUÇÃO



200 Por que estudar este assunto?

Um secundarista deve aprender que o gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola, que a trajetória de um projétil é uma parábola, que as órbitas dos planetas e dos satélites (naturais e artificiais) são elipses, que os telescópios têm espelhos parabólicos, que holofotes, capazes de emitir luz de raios paralelos, devem ter refletores parabólicos, etc. Em Geometria Analítica, o aluno estuda as equações da elipse, da hipérbole e da parábola. Sabe que existem antenas parabólicas domiciliares e que antenas parabólicas gigantescas são usadas em radioastronomia, etc.

201 Na Engenharia, para compreender muitos assuntos (Resistência dos Materiais, Estabilidade das Construções, etc.); na Medicina, para compreender o funcionamento de muitos aparelhos médicos; na Odontologia, na Geografia e em muitas outras profissões, é obrigatório ter um perfeito conhecimento dessas curvas.

202 Mas, em cada faculdade, esses conhecimentos serão ministrados...

Como? Em nenhuma faculdade — nem nas de Engenharia nem nas de Arquitetura — há aulas de DG...

203 Devo concluir que só o DG ensina isso?

Não é sem motivo que Stephen Hawking, um dos maiores matemáticos deste século, declarou detestar equações...

A Matemática, a Física, etc. ensinam as equações dessas curvas... Se bastasse saber as equações para compreender um assunto, a Teoria da Relatividade seria um assunto fácil, pois até leigos sabem a equação $E = mc^2$...

As equações são necessárias, mas não são suficientes!

> **Somente o DG ensina a desenhar essas curvas, concretizando os conhecimentos teóricos ministrados pela Matemática e pela Física.**

Estudar as cônicas sem desenhá-las equivale a estudar Física sem laboratórios...

204 É por isso que o DG deve ser estudado no curso secundário?

Exatamente. Estamos aproveitando este último capítulo deste curso de DG para deixar isso bem claro.

205 Mas adiantará estudar no secundário e depois esquecer?

Se você estudar uma coleção de problemas, mesmo muito bem explicados, com os roteiros bem claros e com as justificações geometricamente rigorosas, mais cedo ou mais tarde acabará esquecendo o que "aprendeu", mas

> SE *você aprender a concluir sozinho as resoluções dos problemas,* ENTÃO o aprendizado será perene.

206

> **Para concluir as resoluções, é obrigatório saber a TEORIA MÍNIMA do assunto em pauta, além da TM geral do DG: MF + LG + Geometria (do PO ao P6).**

207 E se eu esquecer a TM?

A TM é inesquecível...

A TM, sendo mesmo mínima e insistentemente repetida, é difícil de ser esquecida, mas, se isso acontecer, bastará recordá-la.

> **Como a TM é curta (mínima), em pouco tempo poderá ser revista.**

II CONCEITOS GERAIS

208 A Geometria, neste curso de DG, tem sido utilizada para "calibrar" o bom senso. No entanto, para poder esclarecer determinados assuntos, necessitamos de certos conceitos gerais que não se enquadram na Geometria Euclidiana propriamente dita, como por exemplo os conceitos de Forma, Tamanho, Posição Relativa, Ponto Impróprio, etc.
O que fazer? Não utilizar esses conceitos importantíssimos, prejudicando o aprendizado ou transmiti-los aos estudantes, mesmo que para isso deixemos de lado o rigor matemático?

209

> Neste curso de DG só demonstramos afirmações quando isso contribui para uma melhor compreensão do quê estiver sendo estudado.

Simbiose sim, parasitismo não!...

210 PONTO INTERNO E PONTO EXTERNO:

Dada uma curva $\mathscr{C}$, sempre é possível definir o que é um ponto interno e o que é um ponto externo.
Por exemplo quando $\mathscr{C}$ é uma ⊙ de centro $\overline{O}$ e raio **r**, temos:

$\overline{I}$ é interno $\Leftrightarrow$ IO < r e
$\overline{E}$ é externo $\Leftrightarrow$ EO > r.

211 $\overline{P} \in (\overline{O}; r) \Leftrightarrow PO = r$
Por isso o L1 é uma ⊙...

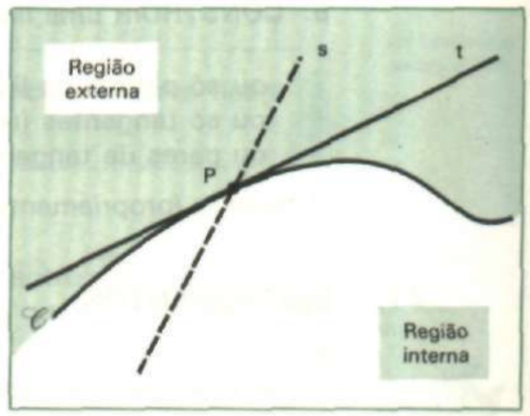
212 RETA E CURVA TANGENTES ENTRE SI:

Esse conceito só vale nas "vizinhanças" de $\overline{P}$, pois há curvas "espiraladas" e há curvas com "alças":

Uma reta $\overleftrightarrow{t}$ e uma curva $\mathscr{C}$ são tangentes (entre si) se, e somente se:

a. têm UM ÚNICO ponto comum $\overline{P}$ e

b. TODOS os outros pontos de $\overleftrightarrow{t}$ são externos à $\mathscr{C}$.



Para demonstrar que uma reta é tangente a uma curva num ponto $\overline{P}$, deveremos provar que pontos genéricos das duas semi-retas de origem $\overline{P}$ são externos, pois numa secante ($\overleftrightarrow{s}$) isso só acontece com pontos de uma das semi-retas.

213 **Demonstrar que $\overleftrightarrow{t} \perp \overline{PO}$ em $\overline{P}$ é tangente à $(\overline{O}; r)$ em $\overline{P}$.**

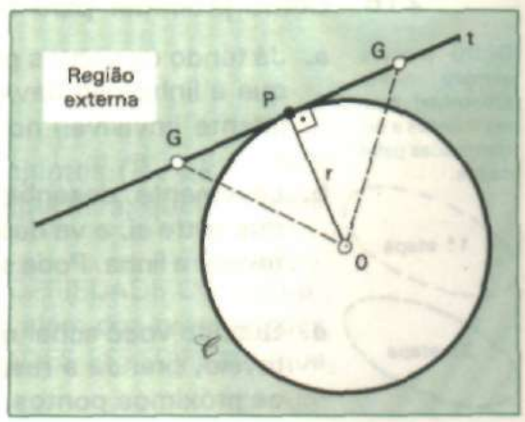
Ou não se demonstra ou se demonstra corretamente.

DEMONSTRAÇÃO:

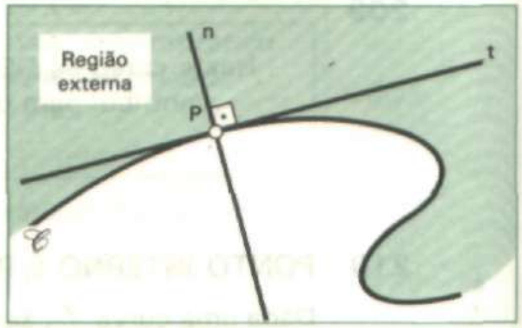
a. Como PO = r, então $\overline{P}$ é comum e

b. qualquer outro ponto $\overline{G}$ de $\overleftrightarrow{t}$ é obrigatoriamente externo à ⊙, pois $\overline{GO}$ (hipotenusa) > $\overline{PO}$ (cateto).

O ponto $\overline{G}$ deve ser tomado nas duas semi-retas de origem $\overline{P}$.



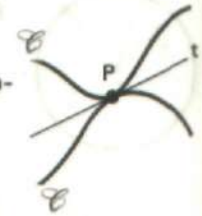
214 RETA E CURVAS NORMAIS ENTRE SI:



A (única) reta $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{t}$ no ponto de tangência $\overline{P}$ chama-se NORMAL à curva.
Cada ponto $\overline{P}$ de uma curva tem uma única tangente e uma única normal.

215 CURVAS TANGENTES ENTRE SI:

Pense em os que você entenderá bem...



Duas curvas $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ são tangentes entre si num ponto $\overline{P}$ quando, e somente quando, admitem em $\overline{P}$ uma única reta tangente comum.
$\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ podem tangenciar exteriormente ou interiormente.

216 TRAÇAR X CONSTRUIR

a. TRAÇAR **uma linha** significa desenhar um traço contínuo representando a linha.

b. CONSTRUIR **uma linha** significa obter:

> ou só pontos da linha
> ou só tangentes (retas) à linha
> ou pares de tangentes com os respectivos pontos de tangência.

O traçado (propriamente dito) da linha é feito depois a mão livre.

217 INSTRUMENTOS:

a. RÉGUA:
Só nos auxilia a traçar retas.

b. COMPASSO:
Só nos permite traçar circunferências.

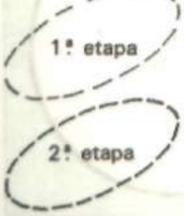
c. OUTROS INSTRUMENTOS (OU APARELHOS):
Existem para traçar outras linhas curvas; alguns deles serão apresentados nas ocasiões oportunas.

Etapas sucessivas?

218 Como proceder para traçar uma linha a mão livre?

O DG procura sempre revelar (desenhar) figuras latentes e determinadas pelos dados.

a. Já tendo os pontos por onde a linha deverá passar e/ou as tangentes que a linha não deverá ultrapassar, procure "ver" a linha que está latente (invisível) no plano de desenho.

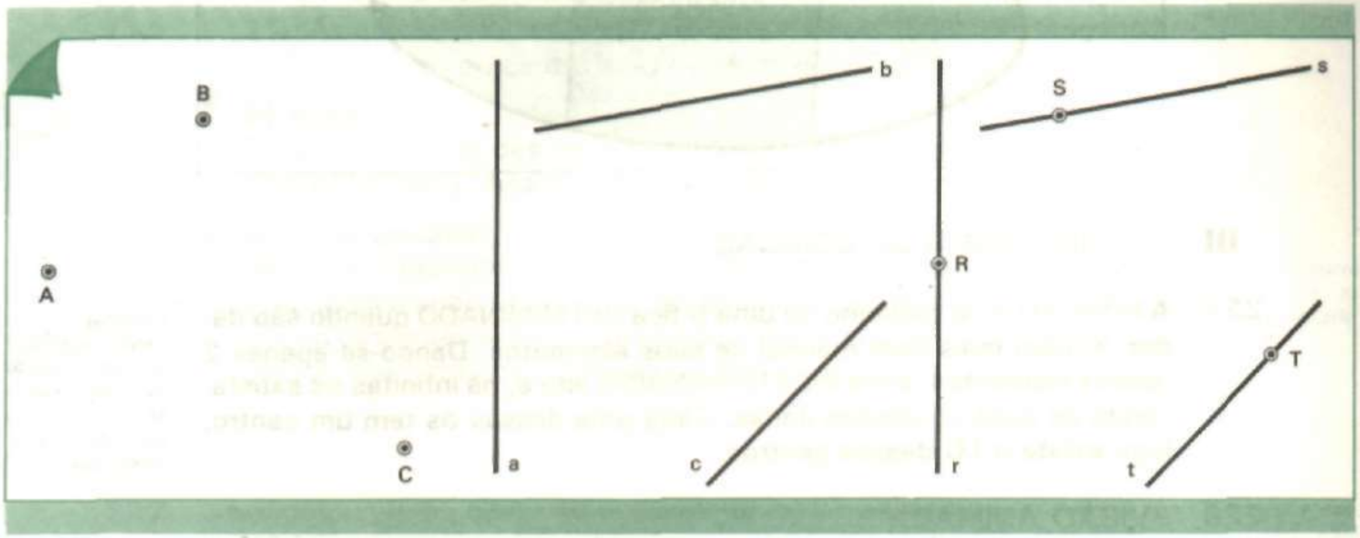


b. Levemente, desenhe "tracinhos" sobre a linha, inicialmente afastados entre si, e vá desenhando outros "tracinhos" intermediários até revelar a linha. Pode ser necessário corrigir alguns desses "tracinhos"

c. Quando você achar que a linha já está revelada, apóie a mão ou o cotovelo, prenda a respiração e trace a linha — sempre olhando para os próximos pontos...

219 EXERCÍCIO **(a mão livre):**

a. Trace a ⊙ que passa por $\overline{A}$, $\overline{B}$ e $\overline{C}$.
b. Trace a ⊙ que tangencia $\overleftrightarrow{a}$, $\overleftrightarrow{b}$ e $\overleftrightarrow{c}$.
c. Trace a ⊙ que tangencia $\overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{s}$ e $\overleftrightarrow{t}$ nos pontos $\overline{R}$, $\overline{S}$ e $\overline{T}$.



220 Você deve concordar que

> Tendo pares (tangentes + pontos de tangência), a curva ficará mais bem traçada...

As tangentes guiam a mão.

221 **Não há um jeito melhor?**

Sabendo que a curva é uma ⊙, basta obter seu centro e seu raio e traçá-la com um compasso, mas... e se for uma linha que um compasso não consegue traçar?

Compre o instrumento específico para essa linha...

222 O CONJUNTO $\mathscr{C}$ DAS CURVAS CÔNICAS

Determinaremos o conjunto $\mathscr{C}$ das cônicas por uma das propriedades características que todos os seus elementos (cônicas), e somente eles, têm.

A Teoria dos Conjuntos não foi criada à toa...

223 A seguir, dividiremos o conjunto $\mathscr{C}$ em três subconjuntos:

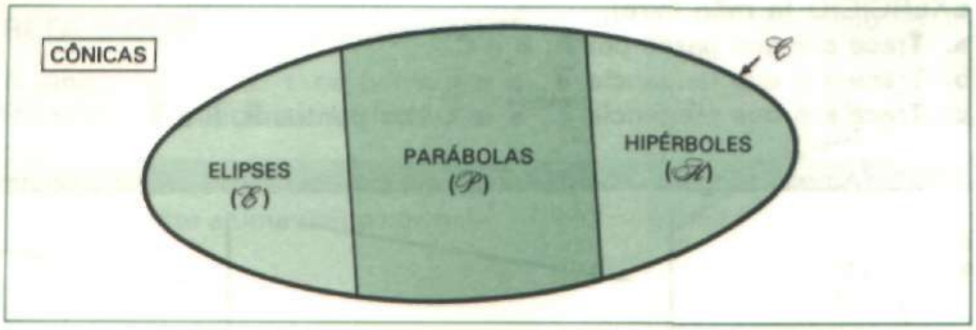
> $\mathscr{E}$ das ELIPSES,
> $\mathscr{H}$ das HIPÉRBOLES e
> $\mathscr{P}$ das PARÁBOLAS.

224 Todos os elementos de cada um desses subconjuntos ($\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$ e $\mathscr{P}$), e somente eles, têm uma segunda propriedade específica, que os distinguem entre si.

Qualquer propriedade característica serve para definir um elemento genérico de um conjunto.

a. TODAS as cônicas têm pelo menos uma PROPRIEDADE COMUM e
b. CADA cônica (elipse, hipérbole ou parábola), além das propriedades comuns às cônicas, têm também PROPRIEDADES ESPECÍFICAS (que as caracterizam).

Uma curva não pode pertencer simultaneamente a mais do que um desses subconjuntos.



Cônica genérica é aquela da qual se considera apenas uma das propriedades características do conjunto

III TEORIA MÍNIMA DE CÔNICAS

225 A POSIÇÃO ⇒ o tamanho de uma ⊙ fica DETERMINADO **quando são dados 3 (nem mais nem menos) de seus elementos. Dando-se apenas 2 desses elementos, a ⊙ é** INDETERMINADA, **isto é, há infinitas ⊙s satisfazendo às duas condições dadas. Cada uma dessas ⊙s tem um centro,** logo **existe o LG desses centros.**

Lembrar que o centro vale por 2 porque, sendo um ponto, resulta determinado por duas propriedades.

226 "VISÃO ANIMADA":

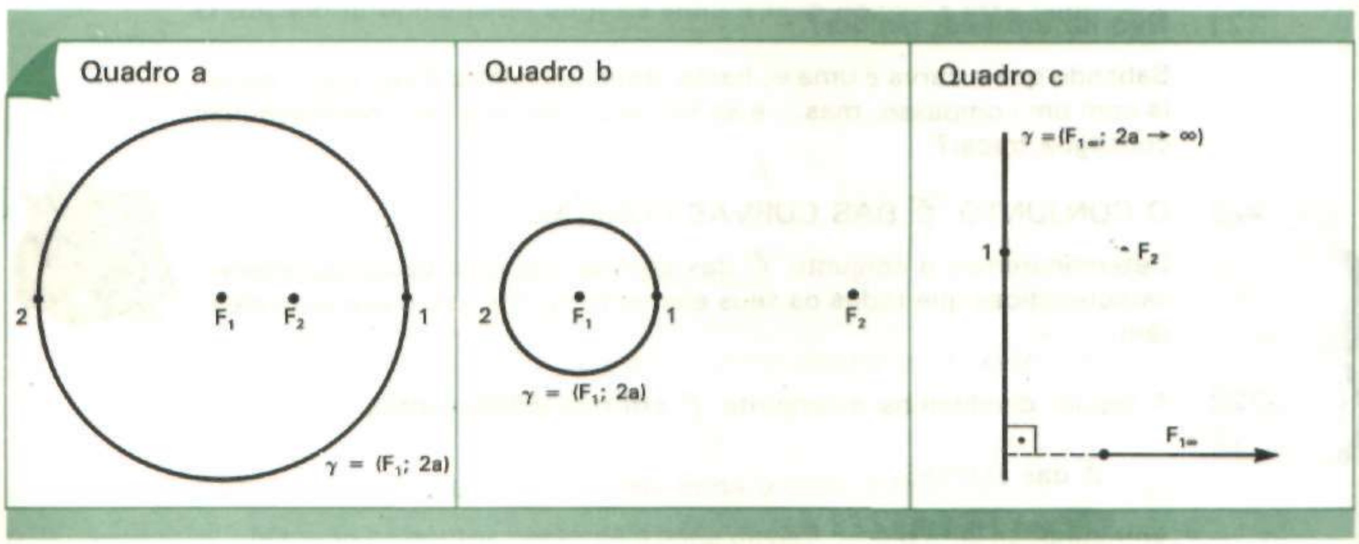
São dados:

Quadro a: uma circunferência $\gamma = (\overline{F}_1;\ 2a)$ e um ponto $\overline{F}_2$ interno.

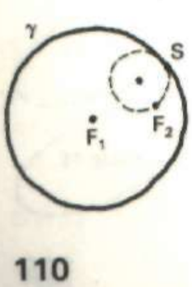
Quadro b: uma circunferência $\gamma = (\overline{F}_1;\ 2a)$ e um ponto $\overline{F}_2$ externo.
Quadro c: uma reta $\gamma = (\overline{F}_{1\infty};\ 2a \to \infty)$ e um ponto $\overline{F}_2$ interno, pois $\overline{F}_{1\infty}$ está à direita ($\overline{F}_{1\infty}$ substitui o sentido).

Essas letras F_1, F_2, 2a,... têm uso já consagrado.

É útil pensar em pontos impróprios... *Por que não fazê-lo?*



a. "Veja" a menor ⊙ que contém $\overline{F}_2$ e tangencia γ no ponto $\dot{1}$; chame de $\overline{A}_2$ o seu centro e desenhe a mão livre essa ⊙ com seu centro $\overline{A}_2$ = pt.m. $\overline{1\,F_2}$.
Faça isso nos três quadros.

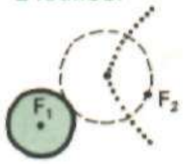


b. Só quadro a:
TODAS as ⊙s que contêm $\overline{F}_2$, e tangenciam γ, o fazem interiormente e cada uma tangencia γ num ponto $\overline{S}$; desenhe algumas dessas ⊙s (a mão livre), com os seus centros. A maior delas tangencia γ em $\dot{2}$ e seu centro $\overline{A}_1$ é pt.m. de $\overline{2\,F_2}$.

c. Só quadro b:
As ⊙s que contêm $\overline{F}_2$ e tangenciam γ podem ser de 2 TIPOS:

1º) As que tangenciam exteriormente; a menor das quais tem centro $\overline{A}_2$ = pt.m. de $\overline{1F_2}$.

2º) As que tangenciam interiormente; a menor das quais tangencia γ em $\dot{2}$ e seu centro é $\overline{A}_1$ = pt.m. de $\overline{2\ F_2}$.



d. Só quadro c:
Desenhe algumas das ⊙s que contêm $\overline{F}_2$ e tangenciam γ, cada uma num ponto de γ. Assinale seus centros (a mão livre).

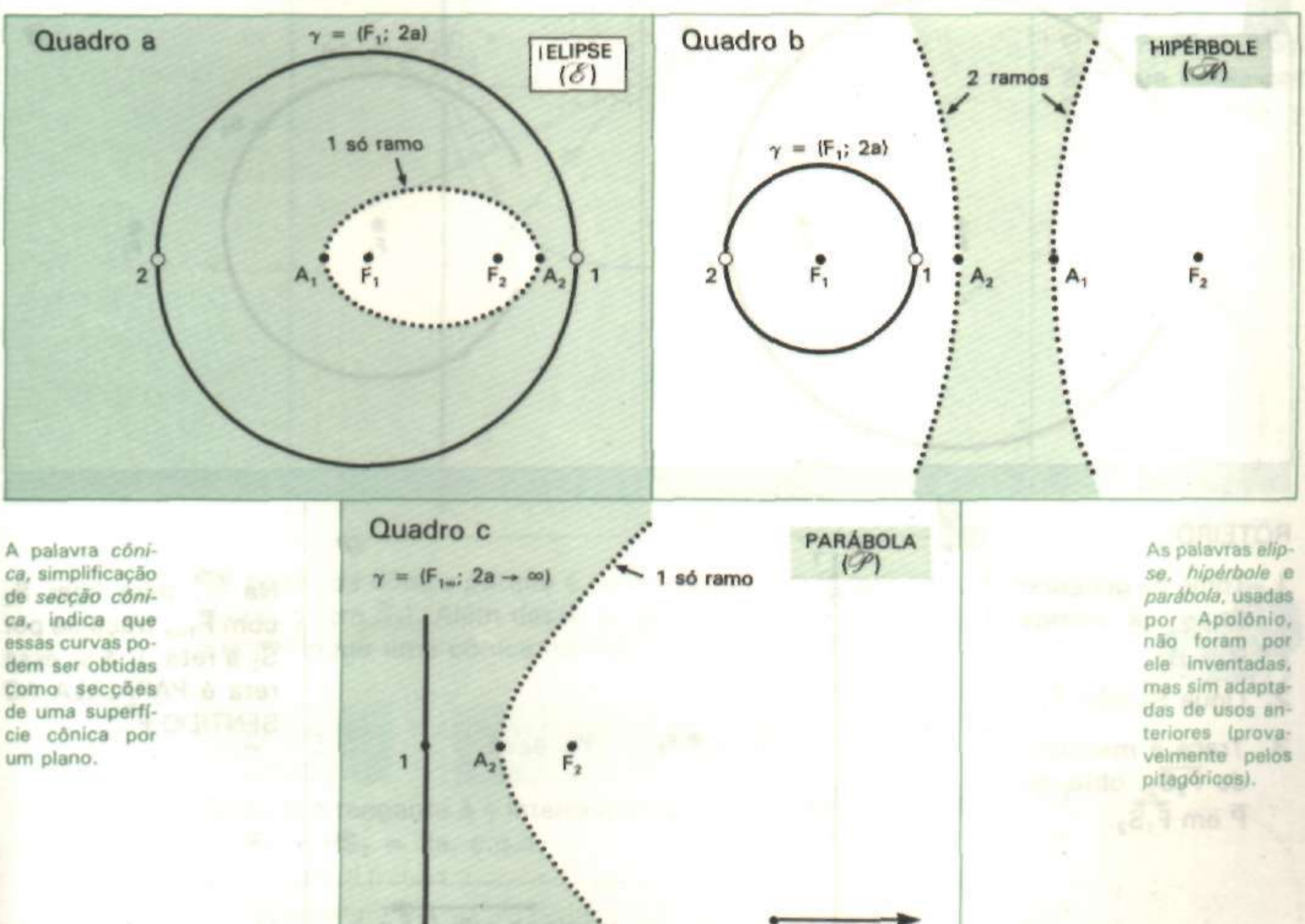
e. Nos três quadros:
Depois de desenhar um número suficiente de centros, ligue-os a mão livre, desenhando uma curva. No **quadro b**, ligue entre si os centros das ⊙s tangentes exteriormente e ligue entre si os centros das ⊙s tangentes interiormente, obtendo 2 RAMOS da mesma curva.

É a mesma curva porque tem as mesmas propriedades.

227

TM-1	CÔNICA é o LG dos centros das ⊙s que contêm $\overline{F}_2$ e tangenciam γ.

É uma das propriedades características do conjunto das cônicas.



A palavra *cônica*, simplificação de *secção cônica*, indica que essas curvas podem ser obtidas como secções de uma superfície cônica por um plano.

As palavras *elipse*, *hipérbole* e *parábola*, usadas por Apolônio, não foram por ele inventadas, mas sim adaptadas de usos anteriores (provavelmente pelos pitagóricos).

228 Chamemos $F_1 F_2$ de $2c \Rightarrow$ $\boxed{F_1 F_2 = 2c}$

ELIPSE ($\mathscr{E}$): $\overline{F}_2$ é interno à γ, logo:

$$2c < 2a \Leftrightarrow \boxed{c < a}$$

HIPÉRBOLE ($\mathscr{H}$): $\overline{F}_2$ é externo à γ, logo:

$$2c > 2a \Leftrightarrow \boxed{c > a}$$

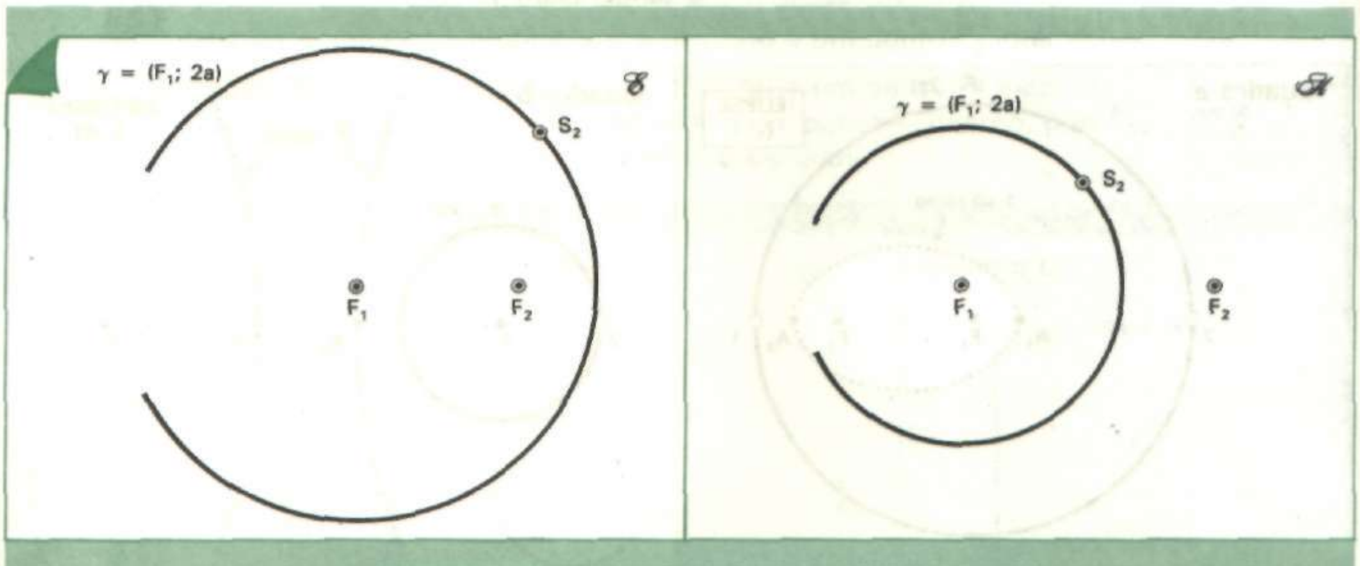
PARÁBOLA ($\mathscr{P}$): γ é reta $\Leftrightarrow$ $\overline{F}_{1\infty}$ é impróprio.

Chamemos $1\ F_2$ de $2p \Rightarrow$ $\boxed{1\ F_2 = 2p}$

229 Para estudar as propriedades das cônicas, deveremos considerar um ponto genérico $\overline{P}$ de cada uma.

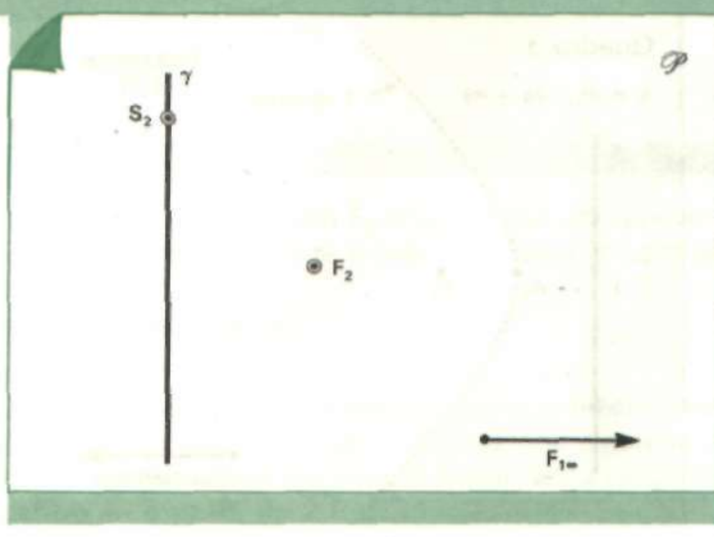
230 EXERCÍCIO:

Dados γ e $\overline{F}_2$, obtenha um ponto genérico $\overline{P}$ de cada cônica.



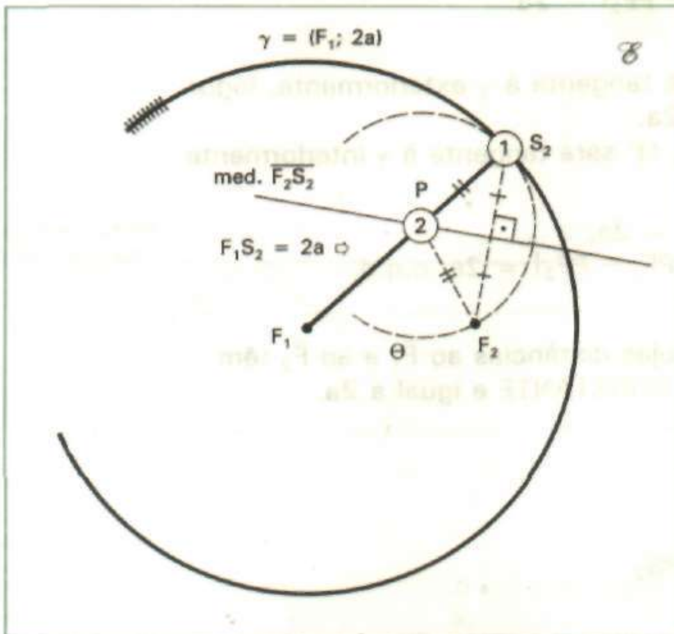
ROTEIRO:

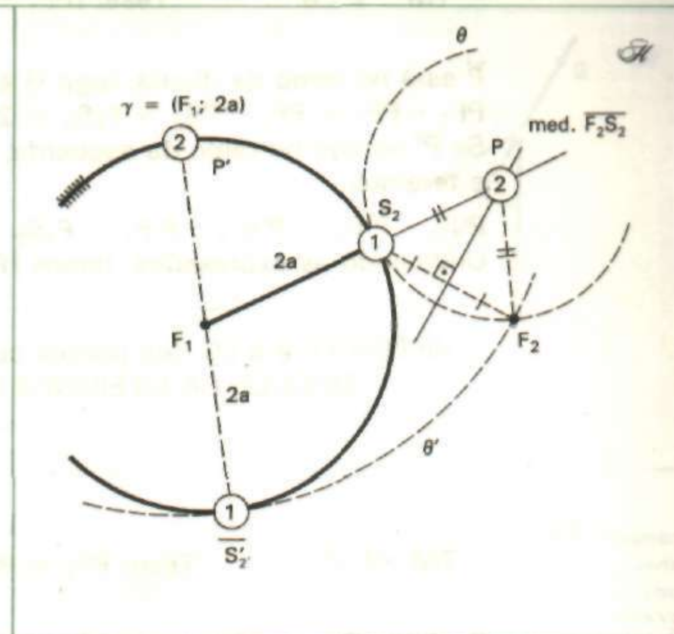
1. Tome $\overline{S}_2$ genérico de γ (já demos $\overline{S}_2$).
2. Ligue $\overline{S}_2$ com $\overline{F}_1$.
3. Trace a mediatriz de $\overline{F_2 S_2}$, obtendo $\overline{P}$ em $\overleftrightarrow{F_1 S_2}$.

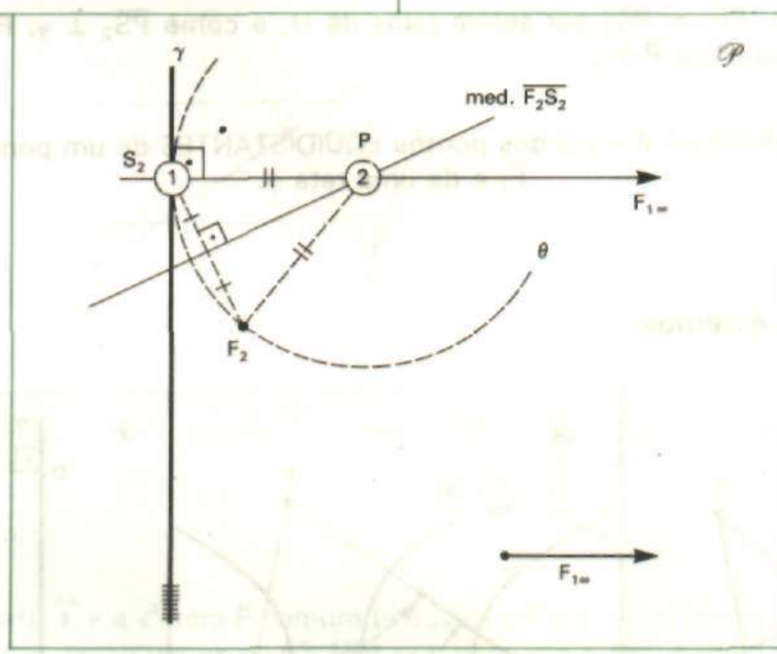


Na $\mathscr{P}$, para ligar $\overline{S}_2$ com $\overline{F}_{1\infty}$, traça-se por $\overline{S}_2$ a reta $\perp$ à γ; essa reta é PARALELA AO SENTIDO $\overrightarrow{F}_{1\infty}$.

231 Exercício anterior já resolvido:







Seja $\Theta = (P;\ PF_2 = PS_2)$ a ⊙ que passa por $\overline{F_2}$ e tangencia γ em $\overline{S_2}$.

Por isso têm nomes diferentes...

$\overline{P}$ é ponto da cônica porque é centro de uma ⊙ Θ que contém $\overline{F_2}$ e tangencia γ (em $\overline{S_2}$). Além dessa propriedade, $\overline{P}$ tem uma 2ª propriedade que distingue uma cônica da outra.

232

TM − 2 $\mathscr{E}$	Tese: $PF_1 + PF_2 = 2a$

Como Θ é tangente à γ interiormente ($c < a$), temos que $PF_1 + PF_2 = PF_1 + PS_2 = 2a$, c.q.d.

> ELIPSE é o LG dos pontos cujas distâncias ao $\overline{F_1}$ e ao $\overline{F_2}$ têm SOMA CONSTANTE e igual a **2a**.

233 TM − 2 $\mathscr{H}$ Tese: $|PF_1 - PF_2| = 2a$

$\overline{P}$ está no ramo da direita, logo Θ é tangente à γ exteriormente, logo:
$PF_1 - PF_2 = PF_1 - PS_2 = F_1S_2 = 2a$.
Se $\overline{P'}$ estiver no ramo da esquerda, Θ' será tangente à γ interiormente e teremos:
$P'F_2 - P'F_1 = P'S'_2 - P'F_1 = F_1S'_2 = 2a$.
Unificando as expressões, temos $|PF_1 - PF_2| = 2a$, c.q.d.

Módulo significa: o maior menos o menor.

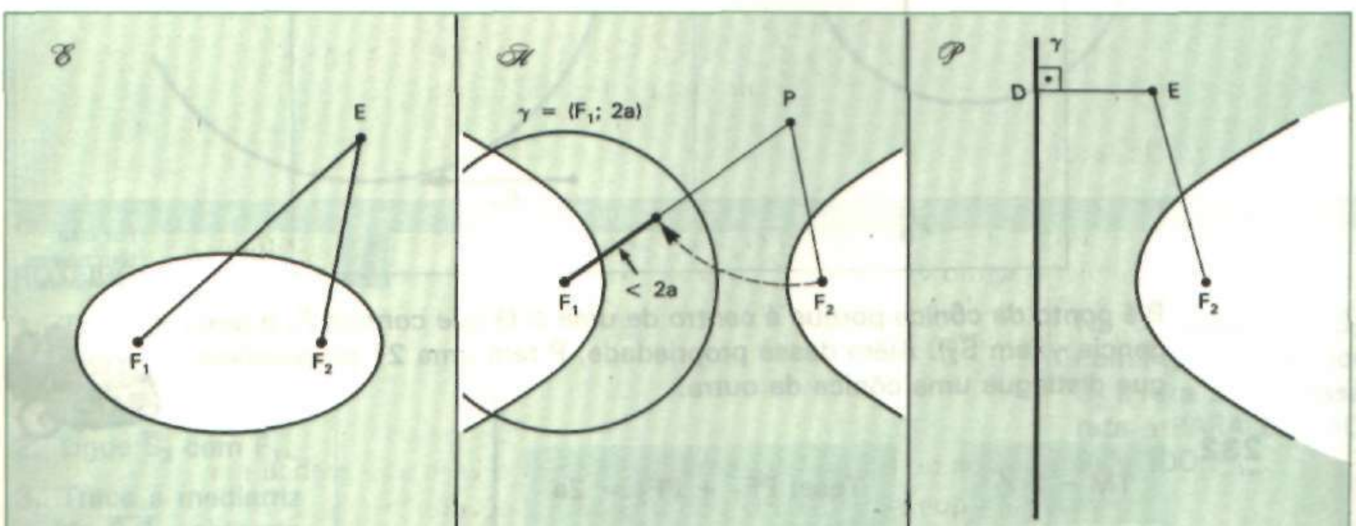
HIPÉRBOLE é o LG dos pontos cujas distâncias ao $\overline{F}_1$ e ao $\overline{F}_2$ têm MÓDULO DA DIFERENÇA CONSTANTE e igual a **2a**.

234 TM −2 $\mathscr{P}$ Tese: $PF_2 = PS_2$

De fato, $PF_2 = PS_2$ por serem raios de Θ, e como $\overline{PS}_2 \perp \gamma$, PS_2 é a distância entre $\overline{P}$ e γ.

PARÁBOLA é o LG dos pontos EQÜIDISTANTES de um ponto $\overline{F}_2$ e de uma reta γ.

235 Pontos externos:



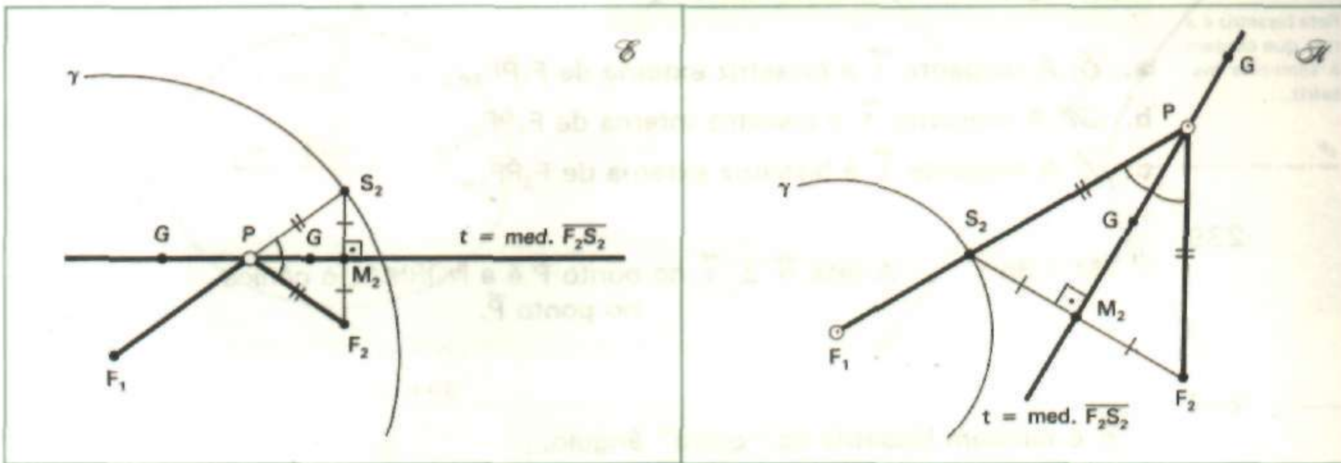
Região exterior da $\mathscr{E}$ — exterior da $\mathscr{H}$ — exterior da $\mathscr{P}$

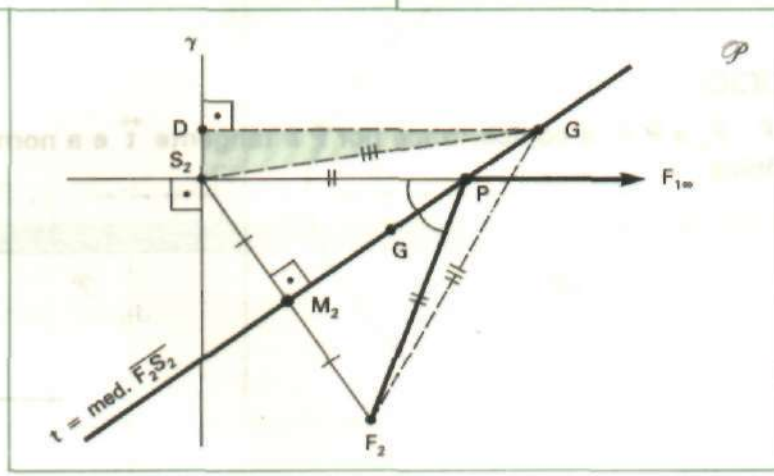
a. $\mathscr{E}$: $EF_1 + EF_2 > 2a$.

b. $\mathscr{H}$: $|PF_1 - PF_2| < 2a$ (Pense bem...).

c. $\mathscr{P}$: $ED < EF_2$ (distância à γ < distância ao $\overline{F}_2$).

236 TANGENTES:





Na $\mathscr{E}$ e na $\mathscr{H}$, os segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ chamam-se raios vetores do ponto $\overline{P}$.

Na $\mathscr{P}$, o segmento $\overline{F_2P}$ e a semi-reta $\overleftarrow{F_{1\infty}P}$ chamam-se raios vetores do ponto $\overline{P}$.

237

TM − 3t	A reta $\overleftrightarrow{t}$ = med. $\overline{F_2S_2}$ é TANGENTE à cônica no ponto de tangência $\overline{P}$.

De fato:

a. $\mathscr{E}$:

A reta $\overleftrightarrow{t}$ e a $\mathscr{E}$ têm $\overline{P}$ comum (e óbvio) e $\overline{P}$ é o único ponto comum, pois — como vimos no nº 139 — o percurso $F_1PF_2 = 2a$ é mínimo. Então, qualquer outro ponto $\overline{G}$ (das duas semi-retas) é externo por ter o percurso $F_1GF_2 > 2a$.

nº 139: SOMA MÍNIMA.

Mínimo é o menor de todos...

b. $\mathscr{H}$:

Como vimos no nº 141, como $|PF_1 - PF_2| = 2a$ é a diferença máxima, para qualquer OUTRO ponto $\overline{G}$ de $\overleftrightarrow{t}$, deveremos ter $|GF_1 - GF_2| < 2a \Rightarrow \overline{G}$ é externo.

nº 141: DIFERENÇA MÁXIMA.

Máxima é a maior de todas...

c. $\mathscr{P}$:

Para qualquer $\overline{G} \neq \overline{P}$, da reta $\overleftrightarrow{t}$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{GD} \text{ (cateto)} < \overline{GS_2} \text{ (hipot.)} \\ \overleftrightarrow{t} = \text{med. } \overline{F_2S_2} \Rightarrow \overline{GS_2} = \overline{GF_2} \end{array}\right\} \Rightarrow GD < GF_2 \Rightarrow \overline{G} \text{ é externo.}$$

É por isso que esse assunto vem antes de Cônicas...

238 A tangente $\overleftrightarrow{t}$ é bissetriz de $F_1\hat{P}F_2$.

Reta bissetriz é a reta que contém a semi-reta bissetriz...

a. $\mathscr{E}$: A tangente $\overleftrightarrow{t}$ é bissetriz externa de $F_1\hat{P}F_2$.

b. $\mathscr{H}$: A tangente $\overleftrightarrow{t}$ é bissetriz interna de $F_1\hat{P}F_2$.

c. $\mathscr{P}$: A tangente $\overleftrightarrow{t}$ é bissetriz externa de $F_2\hat{P}F_{1\infty}$.

$F_{1\infty}$ está à direita.

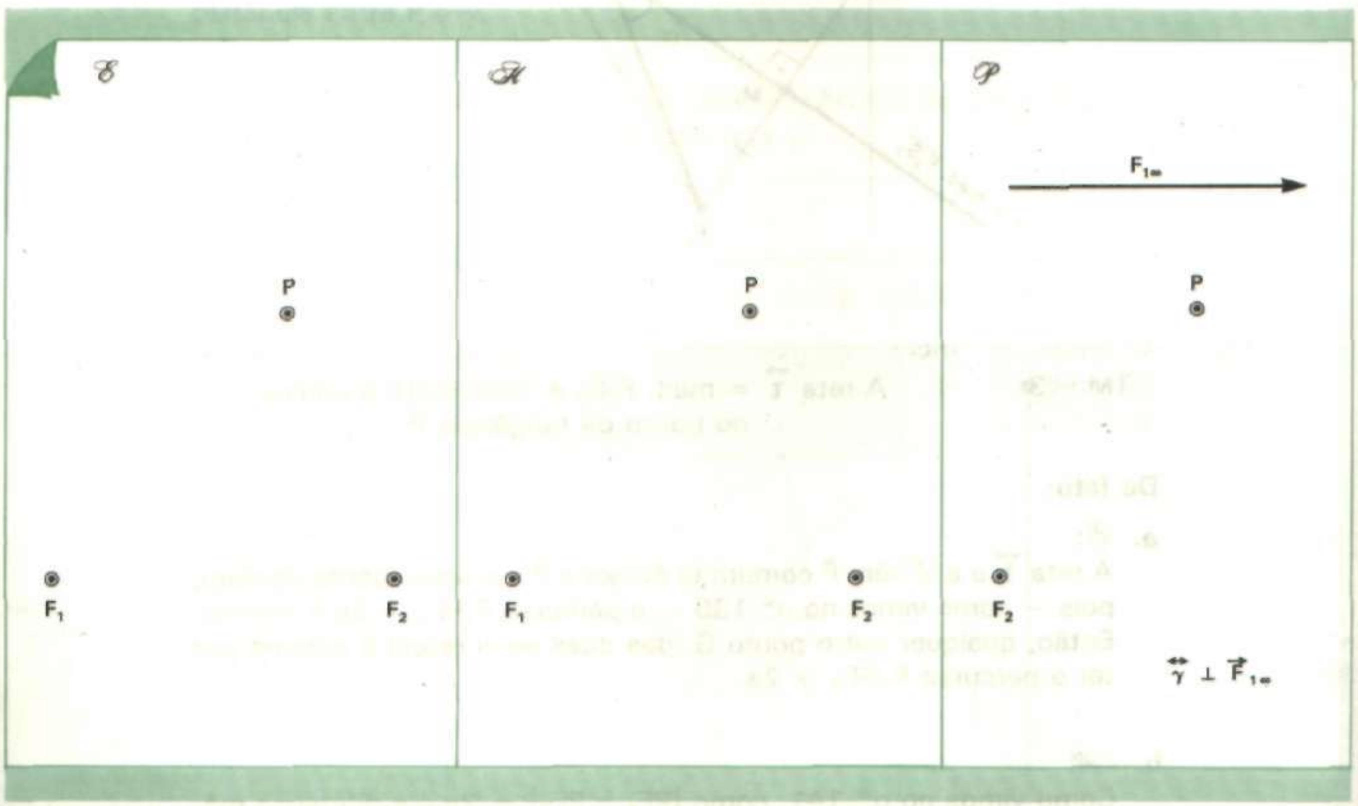
239 TM – 3n

A reta $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{t}$ no ponto $\overline{P}$ é a NORMAL à cônica no ponto $\overline{P}$.

240 $\overleftrightarrow{n}$ é também bissetriz do "outro" ângulo.

241 EXERCÍCIO:

Dados $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ e $\overline{P} \in$ a cônica, trace por $\overline{P}$ a tangente $\overleftrightarrow{t}$ e a normal $\overleftrightarrow{n}$ a essa cônica.

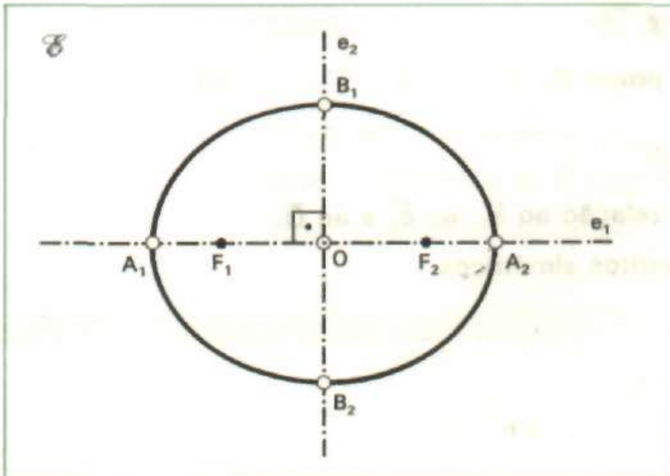


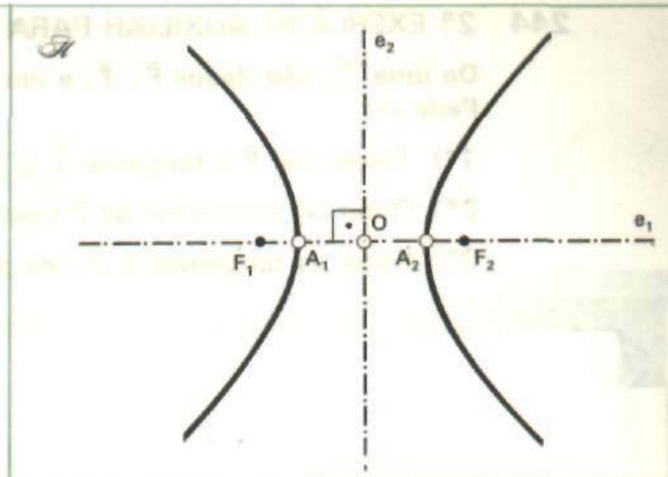
242 TM – 3s

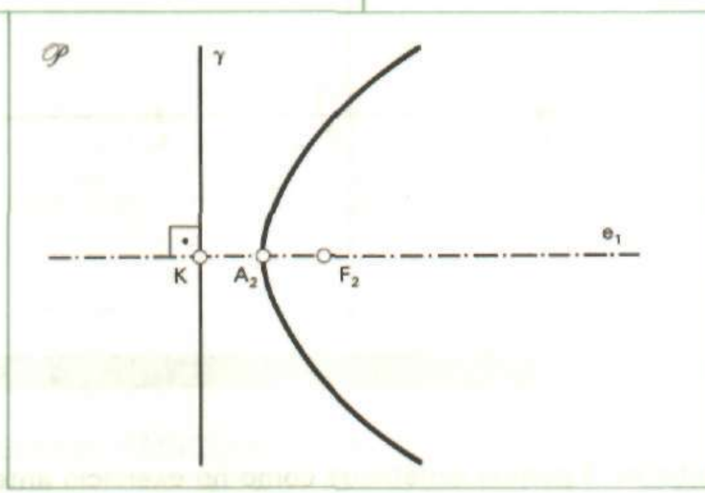
SIMETRIA DAS CÔNICAS

Ah!... "centro" é o centro de simetria!...

A $\mathscr{E}$ e a $\mathscr{H}$ são SIMÉTRICAS com relação a dois eixos de simetria (retas) $\overleftrightarrow{e}_1 \perp \overleftrightarrow{e}_2$ e, portanto, com relação a um centro de simetria (ponto $\overline{O}$). A $\mathscr{P}$ só é simétrica com relação a um eixo de simetria $\overleftrightarrow{e}_1$ e, portanto, não tem centro de simetria.



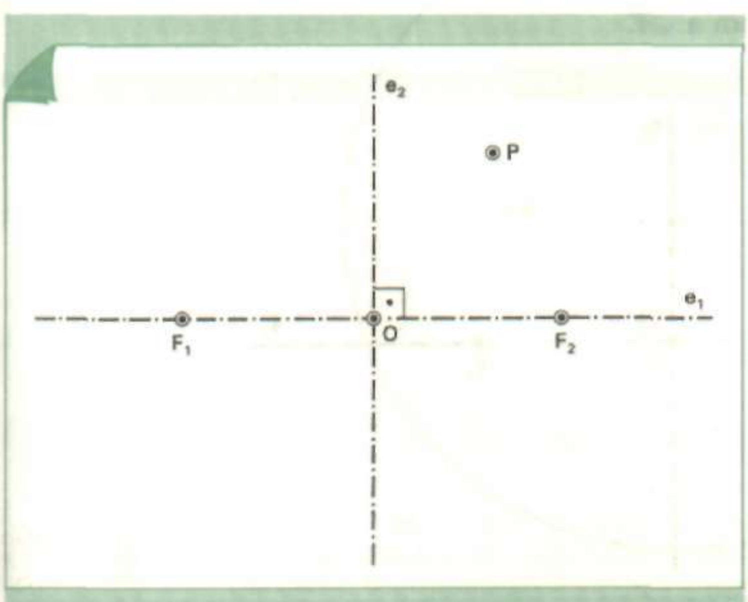




Não demonstraremos (por congruência de $\triangle$s) a simetria, porque é óbvia.

243 1º EXERCÍCIO AUXILIAR:

Obter os simétricos de $\overline{P}$ com relação aos eixos $\overleftrightarrow{e_1}$ e $\overleftrightarrow{e_2}$ e com relação ao centro $\overline{O}$.



ROTEIRO:

Trace quatro arcos de ⊙ com centros $\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$ e raios PF_1 e PF_2.
Se $\overline{P}$ está numa $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{H}$, então os 3 simétricos obtidos também estão.

Demonstra-se aplicando a TM − 2$\mathscr{E}$ ou TM − 2$\mathscr{H}$ (e congruência de $\triangle$s).

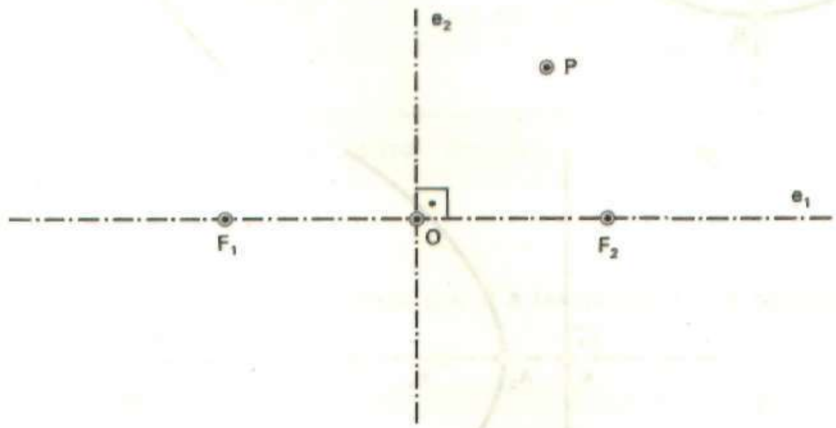
244 2º EXERCÍCIO AUXILIAR PARA A $\mathscr{E}$:

De uma $\mathscr{E}$, são dados $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ e um ponto $\overline{P}$.
Pede-se:

1º) Traçar por $\overline{P}$ a tangente $\overleftrightarrow{t}$ à $\mathscr{E}$.

2º) Obter os simétricos de $\overline{P}$ com relação ao $\overleftrightarrow{e_1}$, ao $\overleftrightarrow{e_2}$ e ao $\overline{O}$.

3º) Obter as tangentes à $\mathscr{E}$ nos pontos simétricos.



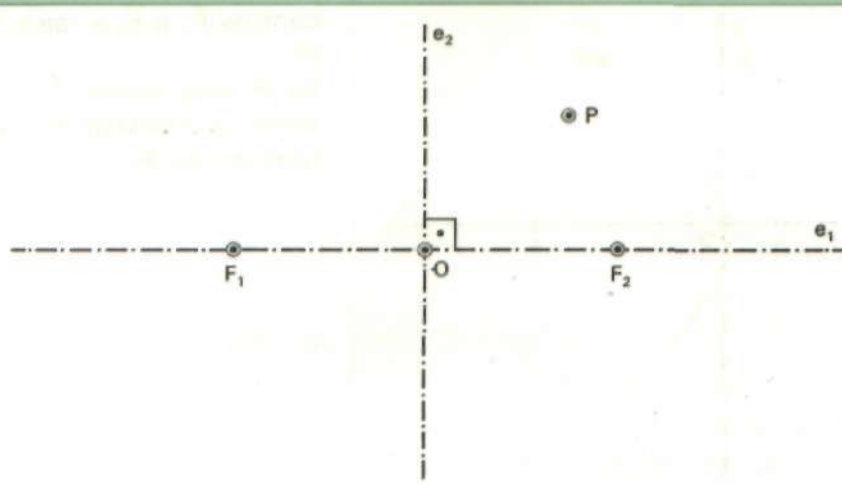
ROTEIRO:

1º) Obtenha os 3 pontos simétricos como no exercício anterior.

2º) As tangentes simétricas se interceptam sobre os eixos; use um desses pontos para obtê-las. Se um deles cair fora do quadro, então use o outro. Se os dois caírem dentro do quadro, então use o 2º ponto para conferir.

245 2º EXERCÍCIO AUXILIAR PARA A $\mathscr{H}$:

Repetir o mesmo problema para a $\mathscr{H}$.



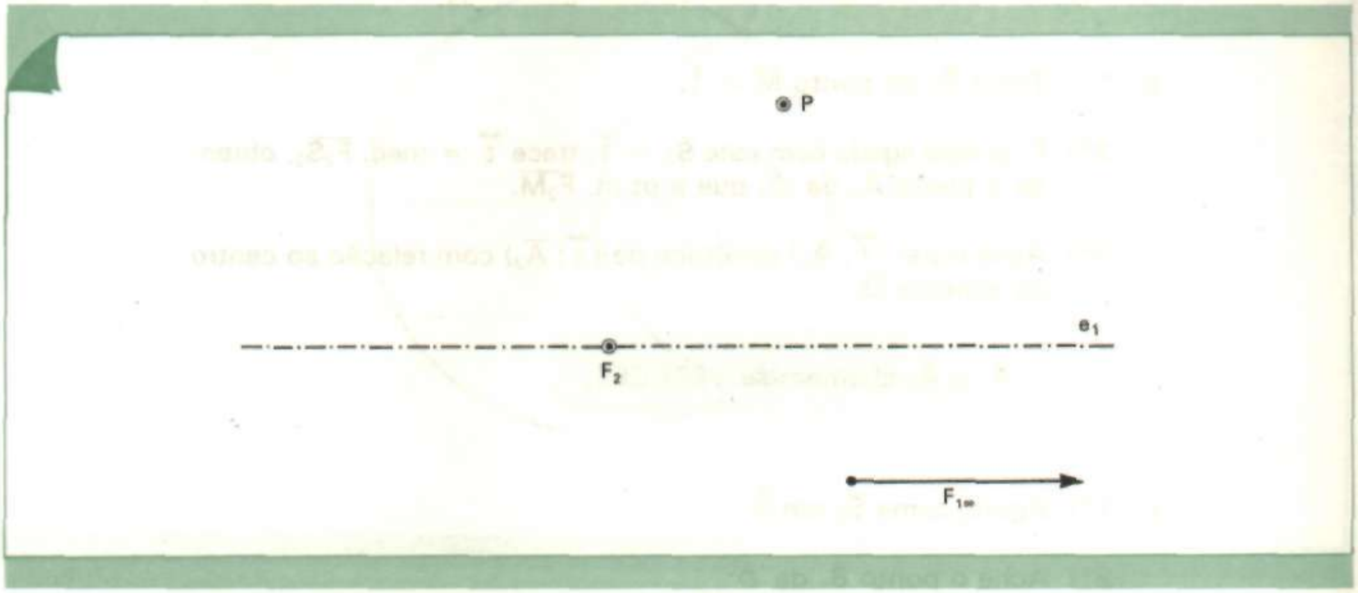
246 2º EXERCÍCIO AUXILIAR PARA A $\mathscr{P}$:

Dados $\overline{F}_2$, $\overline{F}_{1\infty}$ e $\overline{P}$, pede-se:

1º) Traçar por $\overline{P}$ a tangente $\overleftrightarrow{t}$ à $\mathscr{P}$.

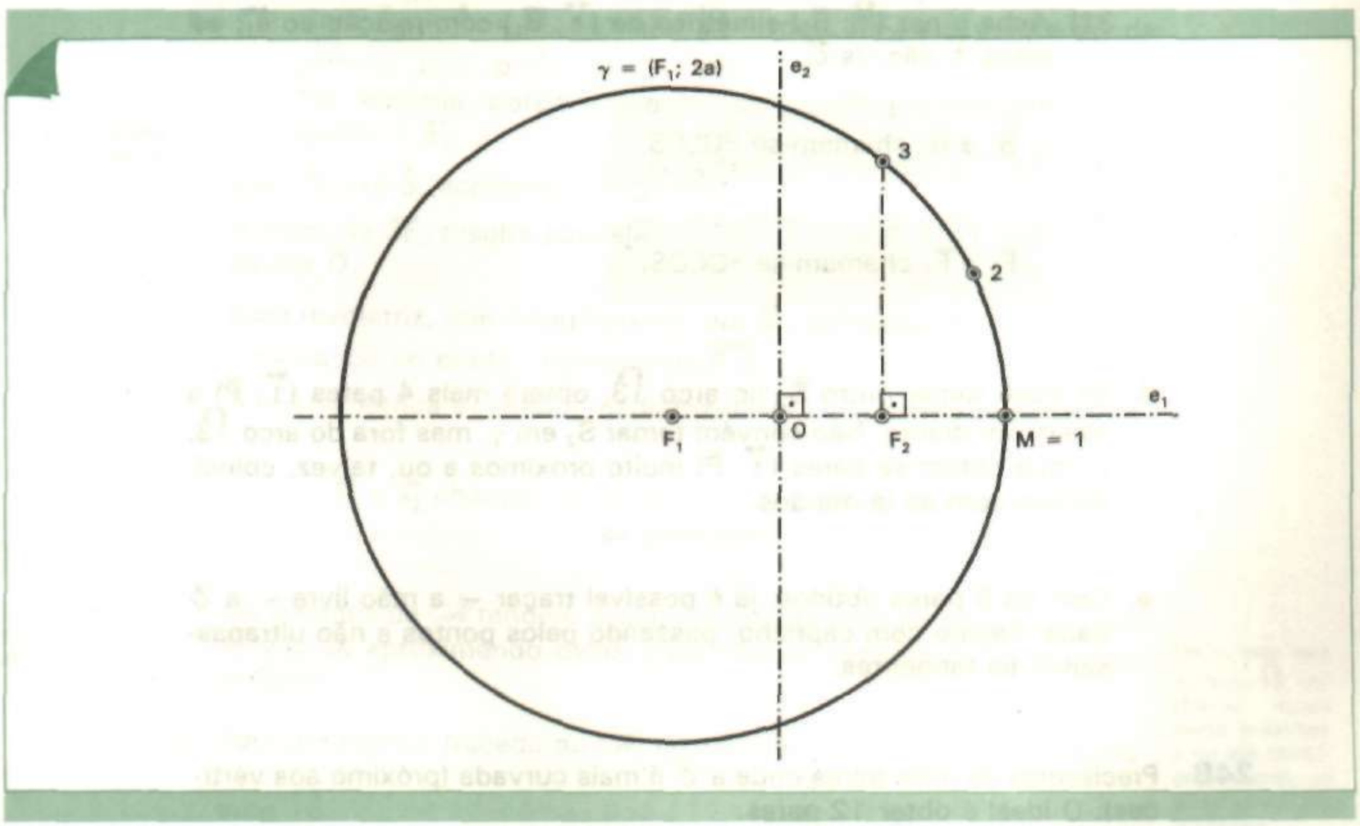
2º) *Obter o simétrico de $\overline{P}$ com relação ao $\overleftrightarrow{e_1}$.*

3º) Obter a simétrica da tangente $\overleftrightarrow{t}$.



247 1º PROBLEMA BÁSICO PARA A $\mathscr{E}$:

Dada uma $\mathscr{E}$ por $\gamma = (\overline{F}_1; 2a)$ e $\overline{F}_2$, pede-se para construí-la.



ROTEIRO:

a. 1º) *Tome $\overline{S}_2$ no ponto $\dot{2}$.*

2º) Ligue $\overline{F}_1$ com $\overline{S}_2$ e trace $\overleftrightarrow{t}$ = med. $\overline{F_2S_2}$, obtendo uma tangente $\overleftrightarrow{t}$ e seu ponto $\overline{P}$ de tangência, *que formam um par* ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{P}$).

Se existe par de números, por que não par de figuras?

3º) Obtenha os 3 pares simétricos.

b. 1º) Tome $\overline{S}_2$ no ponto $\overline{M} = \dot{1}$.

2º) $\overline{F}_1$ já está ligado com este $\overline{S}_2 = \dot{1}$; trace $\overleftrightarrow{t}$ = med. $\overline{F_2S_2}$, obtendo o ponto $\overline{A}_2$ da $\mathscr{E}$, que é pt.m. $\overline{F_2M}$.

3º) *Ache o par* ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{A}_1$) *simétrico de* ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{A}_2$) *com relação ao centro* de simetria $\overline{O}$.

$\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ chamam-se VÉRTICES.

c. 1º) Agora, tome $\overline{S}_2$ em $\dot{3}$.

2º) Ache o ponto $\overline{B}_1$ da $\mathscr{E}$:

$\overline{B}_1$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está na reta } \overleftrightarrow{F_13}. \\ \text{b. Está em } \overleftrightarrow{t} = \text{med. } \overline{F_23}. \end{cases}$

Este ponto $\overline{B}_1$ deve estar em $\overleftrightarrow{e_2}$.

3º) Ache o par ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{B}_2$) simétrico de ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{B}_1$) com relação ao $\overleftrightarrow{e_1}$; as retas $\overleftrightarrow{t}$ são //s $\overleftrightarrow{e_1}$.

$\overline{B}_1$ e $\overline{B}_2$ chamam-se PÓLOS.

Lembrar dos pólos da Terra.

$\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$ chamam-se FOCOS.

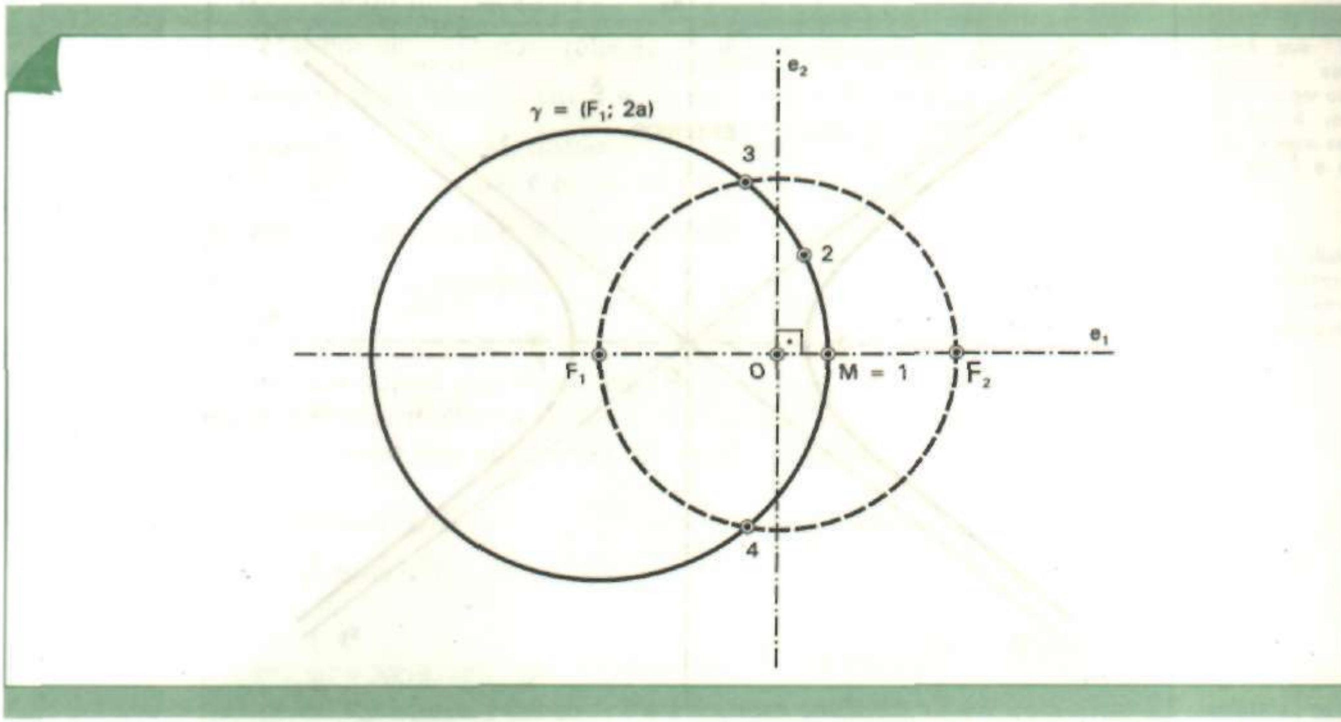
d. Se você tomar outro $\overline{S}_2$ no arco $\overset{\frown}{13}$, obterá mais 4 pares ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{P}$) e assim por diante. Não convém tomar $\overline{S}_2$ em γ, mas fora do arco $\overset{\frown}{13}$, porque obtém-se pares ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{P}$) muito próximos a ou, talvez, coincidentes com os já obtidos.

e. Com os 8 pares obtidos, já é possível traçar — a mão livre — a $\mathscr{E}$ dada. Faça-o com capricho, passando pelos pontos e não ultrapassando as tangentes.

248 Precisamos de mais pares onde a $\mathscr{E}$ é mais curvada (próximo aos vértices). O ideal é obter 12 pares.

249 1º PROBLEMA BÁSICO PARA A $\mathscr{H}$:

Dada uma $\mathscr{H}$ por $\gamma = (\overline{F}_1;\ 2a)$ e $\overline{F}_2$, pede-se para construí-la.



ROTEIRO:

a. 1º) Tome $\overline{S}_2 = \dot{2}$ e ache um par $(\overleftrightarrow{t};\ \overline{P})$.

2º) Ache os 3 pares $(\overleftrightarrow{t};\ \overline{P})$ simétricos.

b. 1º) Com $\overline{S}_2 = \dot{1} = \overline{M}$, obtenha $\overleftrightarrow{t}$ = med. $\overline{MF_2}$ e o vértice $\overline{A}_2$ da $\mathscr{H}$.

2º) Por simetria, obtenha o outro vértice $\overline{A}_1$ e a respectiva tangente $\perp \overleftrightarrow{e_1}$.

c. Com $\overline{S}_2$ em $\dot{3}$, acontece o seguinte:

A med. de $\overline{3F_2}$ resulta paralela à reta $\overleftrightarrow{F_13}$ (pois $F_1\widehat{3}F_2$ é reto) e passa por $\overline{O}$.

Aqui ponto impróprio significa direção.

Essa mediatriz, que designaremos por $\overleftrightarrow{s_1}$, vai tangenciar os dois ramos da $\mathscr{H}$ no ponto impróprio de $\overleftrightarrow{F_13}$.

A sua simétrica $\overleftrightarrow{s_2}$ seria a mediatriz de $\overline{4F_2}$ e também passa por $\overline{O}$.

Uma coisa é "candidamente" definir assíntota. Outra coisa é mostrar como ela "surge"...

> $\overleftrightarrow{s_1}$ e $\overleftrightarrow{s_2}$ chamam-se ASSÍNTOTAS e só as hipérboles as possuem.

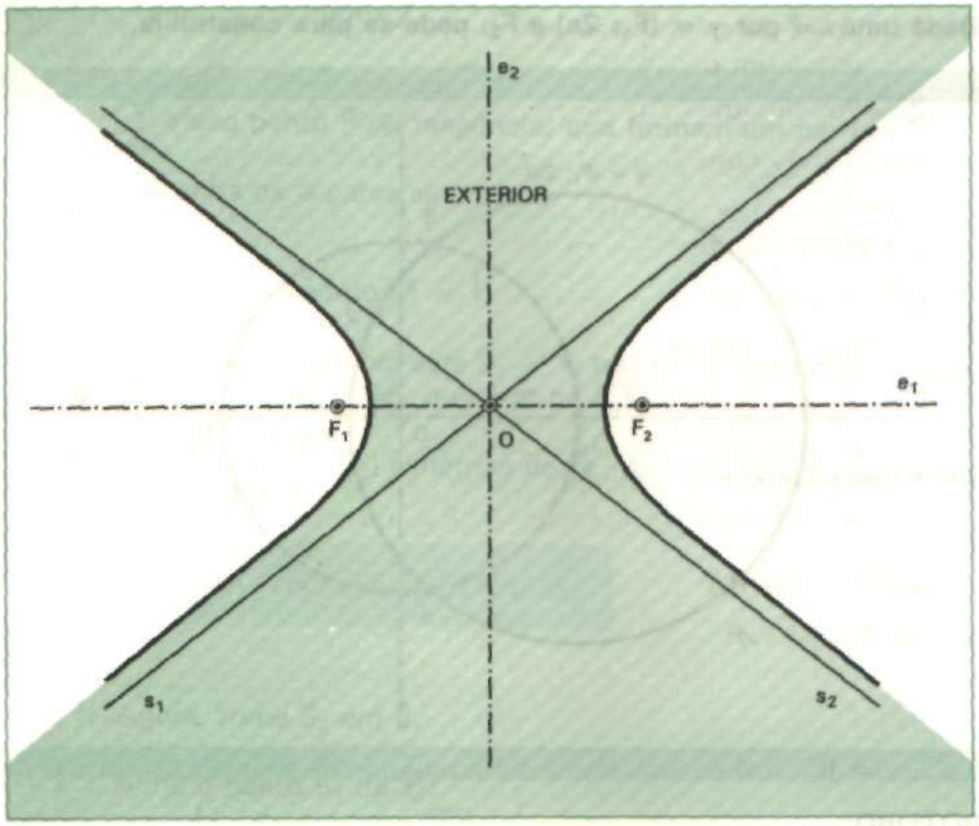
Só as encontram num ponto impróprio.

Os 2 ramos da $\mathscr{H}$ tendem assintoticamente para as assíntotas, isto é, vão se aproximando delas, mas não as encontram (num ponto próprio).

Em γ, mas fora do arco $\overset{\frown}{13}$, obtêm-se pares muito próximos a ou até coincidentes com os pares simétricos já obtidos.

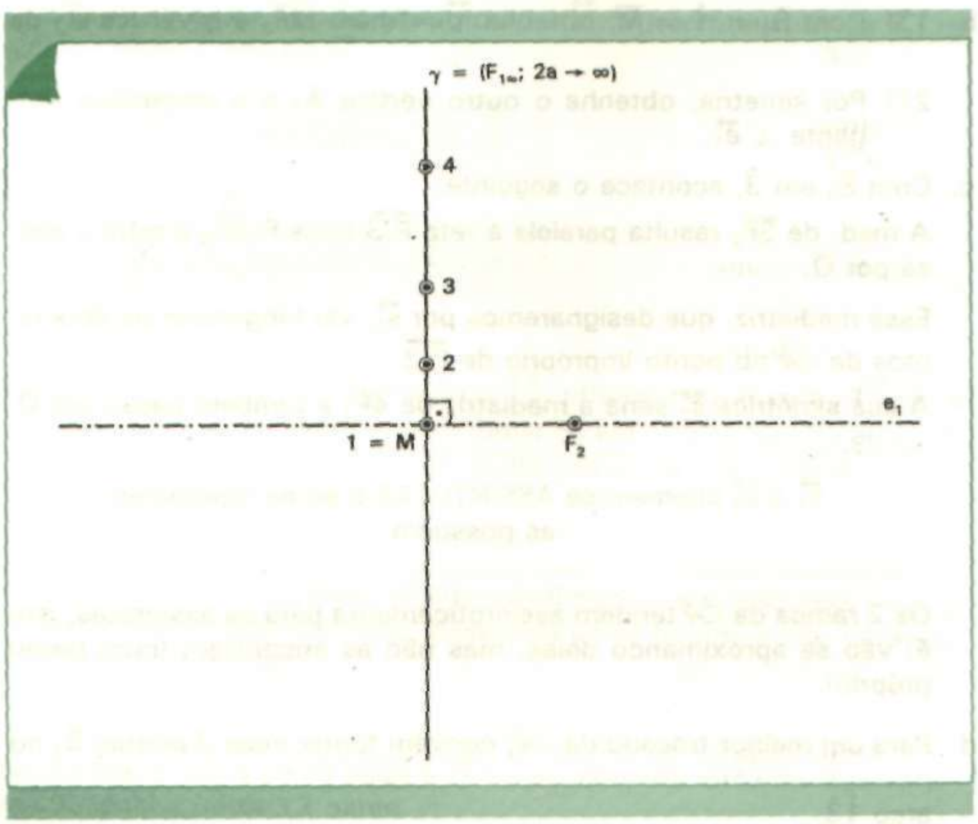
d. Para um melhor traçado da $\mathscr{H}$, convém tomar mais 2 pontos $\overline{S}_2$ no arco $\overset{\frown}{13}$.

250 Mostramos abaixo a $\mathscr{H}$ já desenhada:



Foi desenhada com um gabarito...

251 1º PROBLEMA BÁSICO PARA A $\mathscr{P}$.
Dada uma $\mathscr{P}$ por γ e $\overline{F}_2$, pede-se para construí-la.



ROTEIRO:

a. 1º) Tome $\overline{S}_2$ em $\dot{4}$, trace a $\perp$ à γ por $\overline{S}_2$ e a mediatriz de $\overline{S_2F_2}$, obtendo um par $(\overleftrightarrow{t}; \overline{P})$.

2º) Por simetria com relação ao $\overleftrightarrow{e_1}$, obtenha o par simétrico.

b. Repita tudo com $\overline{S}_2$ em $\dot{3}$ e, depois, com $\overline{S}_2$ em $\dot{2}$.

c. Com $\overline{S}_2$ em $\dot{1} = \overline{M}$, obtém-se a tangente $//\gamma$ e o ponto de tangência é o vértice $\overline{A}_2$, que é pt.m. de $\overline{MF_2}$.

d. Não convém tomar $\overline{S}_2$ abaixo de $\overline{M}$.

e. Trace a $\mathscr{P}$ a mão livre.

Será que "alguém" sabe achar o par com $\overline{S}_2$ em $\dot{4}$, mas não o sabe com $\overline{S}_2$ em $\dot{3}$ e em $\dot{2}$?...

Com $\overline{S}_2$ abaixo de $\overline{M}$, obtêm-se pares próximos dos simétricos já obtidos.

252 Há muitos outros processos para a construção das cônicas e, quando você assimilar melhor a matéria, poderá até inventar alguns. No entanto, o processo que acabamos de ver é o melhor.

NOMENCLATURA:

a. Na $\mathscr{E}$ e na $\mathscr{H}$:

253

> $\gamma = (\overline{F}_1; 2a)$ e $\gamma' = (\overline{F}_2; 2a)$ chamam-se CIRCUNFERÊNCIAS DIRETORAS.

γ' não foi desenhada.

254

> Por simetria, tudo o que vale para γ e $\overline{F}_2$ vale também para γ' e $\overline{F}_1$.

Se olharmos um desenho de γ e $\overline{F}_2$ por transparência, γ "vira" γ' e $\overline{F}_2$ "vira" $\overline{F}_1$...

É uma "demonstração"...

255

> F_1F_2 chama-se DISTÂNCIA FOCAL e designa-se por **2c**.

Na $\mathscr{E}$: $\overline{F}_2$ é interno à $\gamma \Leftrightarrow 2c < 2a$.

Na $\mathscr{H}$: $\overline{F}_2$ é externo à $\gamma \Leftrightarrow 2c < 2a$.

b. Na $\mathscr{P}$:

256

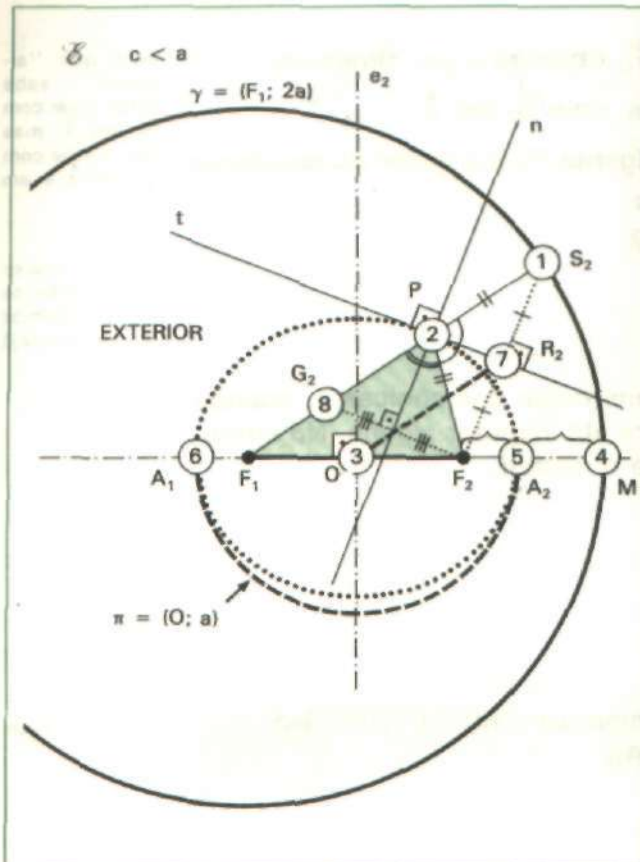
> γ chama-se RETA DIRETRIZ.

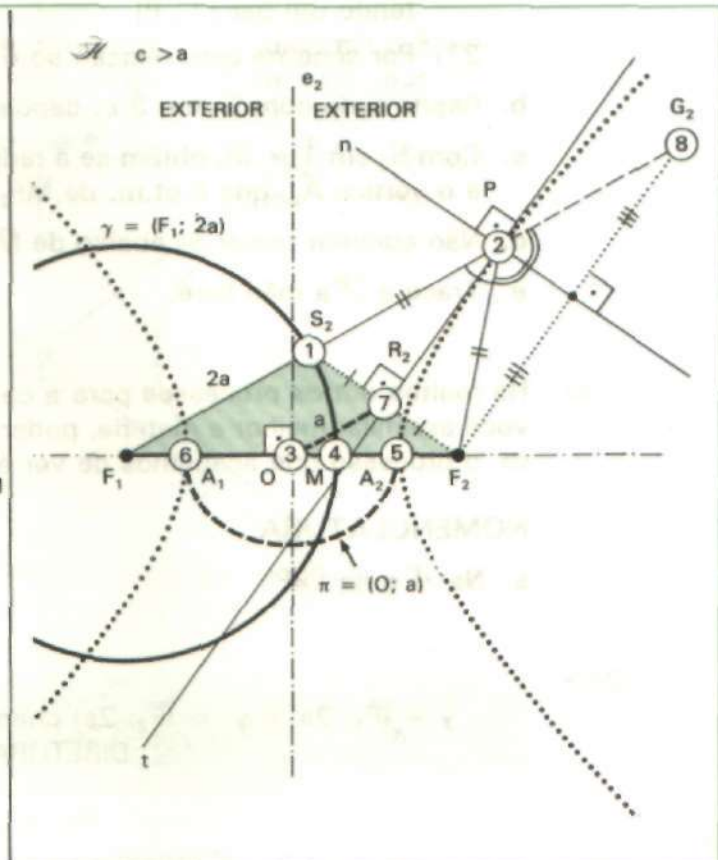
São notações já consagradas.

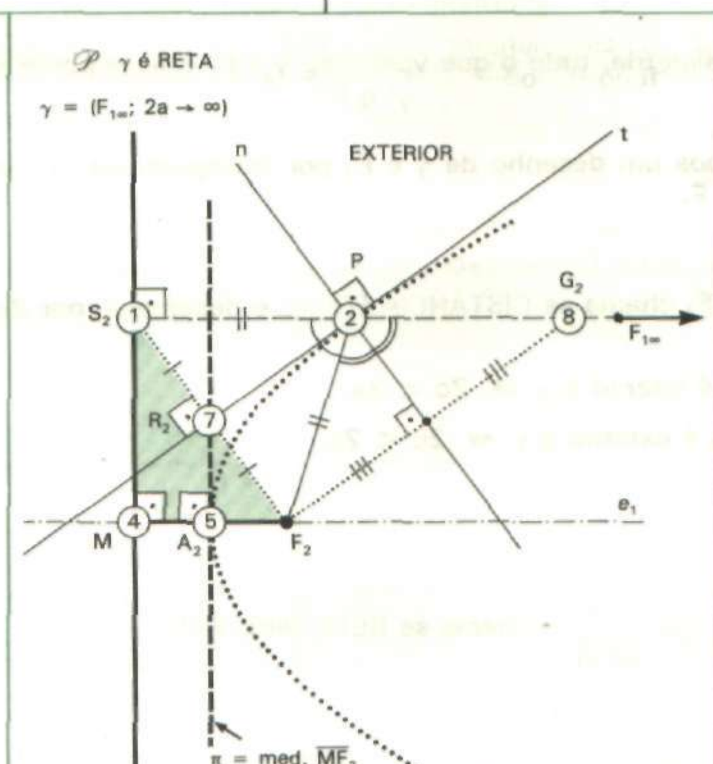
257

> A distância do foco $\overline{F}_2$ à diretriz γ chama-se PARÂMETRO e designa-se por **2p**.

258 Nos desenhos abaixo, estão reunidos os conhecimentos estudados até aqui:







"Leia" com atenção as mensagens transmitidas por esses desenhos.

Não é uma "interpretação de texto"; é uma interpretação de desenhos! É a linguagem gráfica!

259

TM − 4st — **Simétricos dos focos com relação às tangentes.**

Quem é o simétrico de $\overline{F}_2$ com relação à $\overleftrightarrow{t}$? É $\overline{S}_2$. Onde está $\overline{S}_2$? Em γ... O que vale para $\overline{F}_2$ e γ vale também para $\overline{F}_1$ e γ'. Então:

> Na $\mathscr{E}$ e na $\mathscr{H}$, o simétrico de um foco com relação a qualquer tangente está na ⊙ diretora do outro foco; na $\mathscr{P}$, está na *reta diretriz*.

A diretora de um foco é o LG dos simétricos do outro foco com relação às tangentes.

260

Proj. ortog. de um ponto numa reta é o pé da ⊥ à reta, conduzida pelo ponto.

TM − 4pt — **Projeções ortogonais dos focos nas tangentes.**

Quem é a projeção ortogonal de $\overline{F}_2$ em $\overleftrightarrow{t}$? É $\overline{R}_2$. Onde está $\overline{R}_2$? Na $\mathscr{E}$ e na $\mathscr{H}$, $\overline{R}_2$ está na ⊙ π = (O; a) e na $\mathscr{P}$, $\overline{R}_2$ está na reta $\pi /\!/ \gamma$ por A_2.

> As projs. ortogonais dos focos nas tangentes estão na ⊙ ($\mathscr{E}$ e $\mathscr{H}$) ou na reta π, denominadas ⊙ ou reta principal.

Na $\mathscr{E}$ e na $\mathscr{H}$: No $\triangle$ $F_1F_2S_2$, pelo Tales, $R_2 = \frac{1}{2}F_1S_2 = a$.

Na $\mathscr{P}$: No $\triangle F_2MS_2$, pelo Tales, $\overline{R}_2$ = pt.m. $\overline{F_2S_2}$ e $\overline{A}_2$ = pt.m. $\overline{MF_2}$, logo: $\overleftrightarrow{A_2R_2} /\!/ \gamma$.

π é o LG das projs. ortogs. dos focos nas tangentes.

261

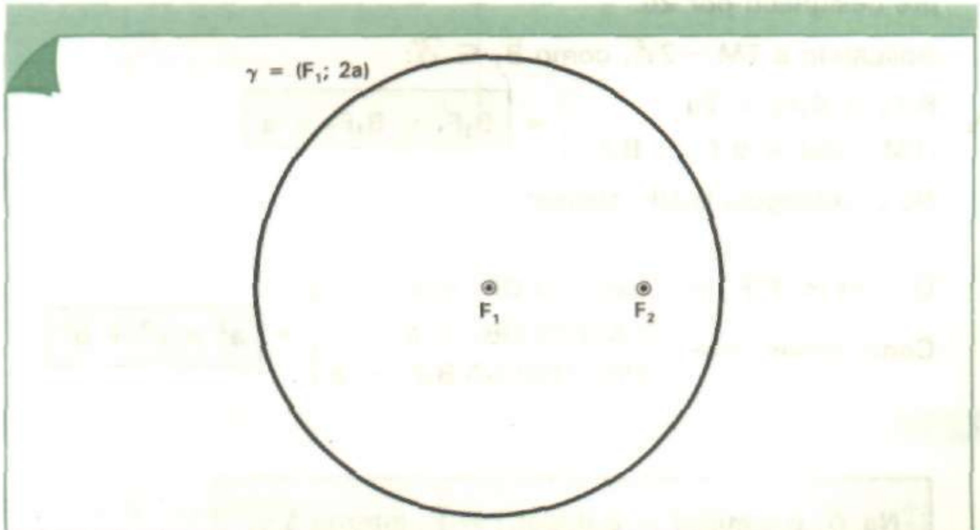
TM − 4sr — **Simétricos dos focos com relação às normais.**

> O simétrico ($\overline{G}_2$) de um foco ($\overline{F}_2$) com relação a qualquer NORMAL ($\overleftrightarrow{n}$) está sempre na reta ($\overleftrightarrow{F_1P}$ ou $\overleftrightarrow{F_{1\infty}P}$) que une o outro *foco* ($\overline{F}_1$ *ou* $\overline{F}_{1\infty}$) *ao ponto de tangência* ($\overline{P}$).

262 2º PROBLEMA BÁSICO PARA A $\mathscr{E}$:

Uma $\mathscr{E}$ é dada por γ = ($\overline{F}_1$; 2a) e $\overline{F}_2$.
Obter seu centro $\overline{O}$, seus vértices $\overline{A}_2$ e $\overline{A}_1$ e seus pólos $\overline{B}_1$ e $\overline{B}_2$.

γ e $\overline{F}_2$ são os "genitores" da cônica.



ROTEIRO:

a. Obtenção do centro $\overline{O}$:

É o pt.m. de $\overline{F_1F_2}$. Trace antes $\overleftrightarrow{e_1}$.

b. Obtenção dos vértices $\overline{A_2}$ e $\overline{A_1}$:

1º) Sendo $\overline{M} = \overleftrightarrow{e_1} \cap \gamma$, o pt.m. de $\overline{F_2M}$ é o vértice $\overline{A_2}$.

2º) Marcando $OA_1 = OA_2$, obtém-se o vértice $\overline{A_1}$ em $\overleftrightarrow{e_1}$.

$\overline{A_2}$ é o centro da menor ⊙ tangente à γ.

$\overline{A_1}$ é o centro da maior ⊙ tangente à γ.

c. Obtenção dos pólos $\overline{B_1}$ e $\overline{B_2}$:

1º) Ache $\overline{S_2} = \overset{\bullet}{3}$, onde a $\perp$ ao $\overleftrightarrow{e_1}$ por $\overline{F_2}$ encontra γ e trace $\overleftrightarrow{e_2} \perp \overleftrightarrow{e_1}$ em $\overline{O}$.

2º) A mediatriz de $\overline{F_2S_2}$ encontra $\overline{F_1S_2}$ e $\overleftrightarrow{e_2}$ no pólo $\overline{B_1}$.

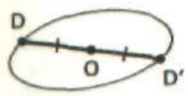
3º) O pólo $\overline{B_2}$ é o simétrico do $\overline{B_1}$ e também está em $\overleftrightarrow{e_2}$.

263 NOMENCLATURA:

a. CORDA:

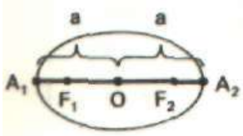
É um segmento (como $\overline{CC'}$) com as extremidades na cônica.

Compare com ⊙s.



b. DIÂMETRO:

É uma corda (como $\overline{DD'}$) que contém o centro $\overline{O}$.



c. DIÂMETRO MAIOR:

É o diâmetro $\overline{A_1A_2}$ que contém os focos $\overline{F_1}$ e $\overline{F_2}$.

Aplicando a TM − 2$\mathscr{E}$ (nº 232), como $\overline{A_2} \in \mathscr{E}$:

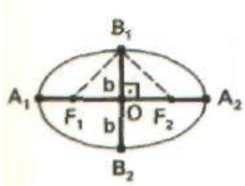
$$\left.\begin{array}{c} A_2F_1 + A_2F_2 = 2a \\ \Downarrow \\ [TM - 3s]\ (\text{nº } 242) \\ \Downarrow \\ A_1F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A_2F_1 + A_1F_1 = 2a \Rightarrow \boxed{A_1A_2 = 2a}$$

d. DIÂMETRO MENOR:

É o diâmetro $\overline{B_1B_2}$ perpendicular ao $\overline{A_1A_2}$. Seu comprimento é sempre designado por 2b.

Usam-se 2a, 2b e 2c para simplificar as equações estudadas em Geometria Analítica.

Aplicando a TM − 2$\mathscr{E}$, como $\overline{B_1} \in \mathscr{E}$:



$$\left.\begin{array}{l} B_1F_1 + B_1F_2 = 2a \\ [TM - 3s] \Rightarrow B_1F_1 = B_1F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B_1F_1 = B_1F_2 = a}$$

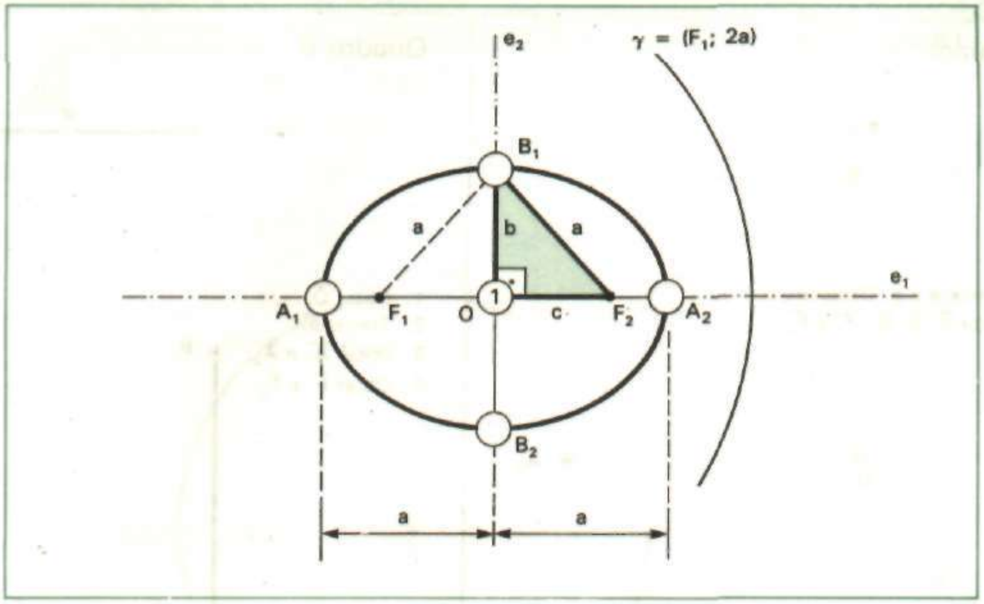
No $\triangle$ retângulo B_1OF_2 temos:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{O} = \text{pt.m. } \overline{F_1F_2} \Rightarrow & \text{CATETO } OF_2 = c \\ \text{Como vimos} \Longrightarrow & \begin{cases} \text{CATETO } OB_1 = b \\ \text{HIPOTENUSA } B_1F_1 = a \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a^2 = c^2 + b^2}$$

> Na $\mathscr{E}$, c (cateto) < a (hipot.) $\Leftrightarrow$ $\overline{F_2}$ interno à γ.

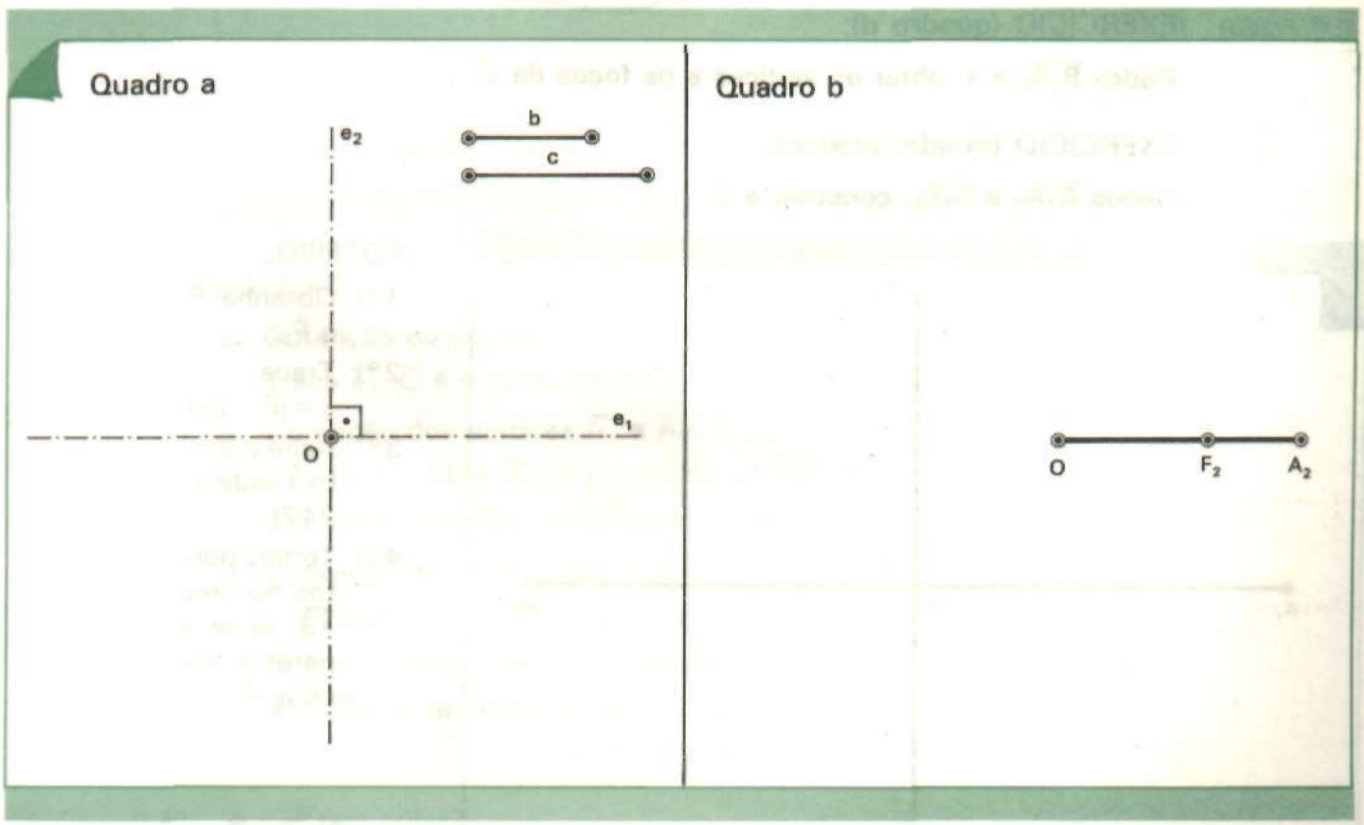
264 TM − 5$\mathscr{E}$ $a^2 = c^2 + b^2;\ c < a$

Este é o EGT dos problemas sobre o assunto.



265 EXERCÍCIO (quadro a):

Dados $\overleftrightarrow{e_1}$, $\overleftrightarrow{e_2}$, b e c, obter os diâmetros principais (maior e menor) da $\mathscr{E}$.

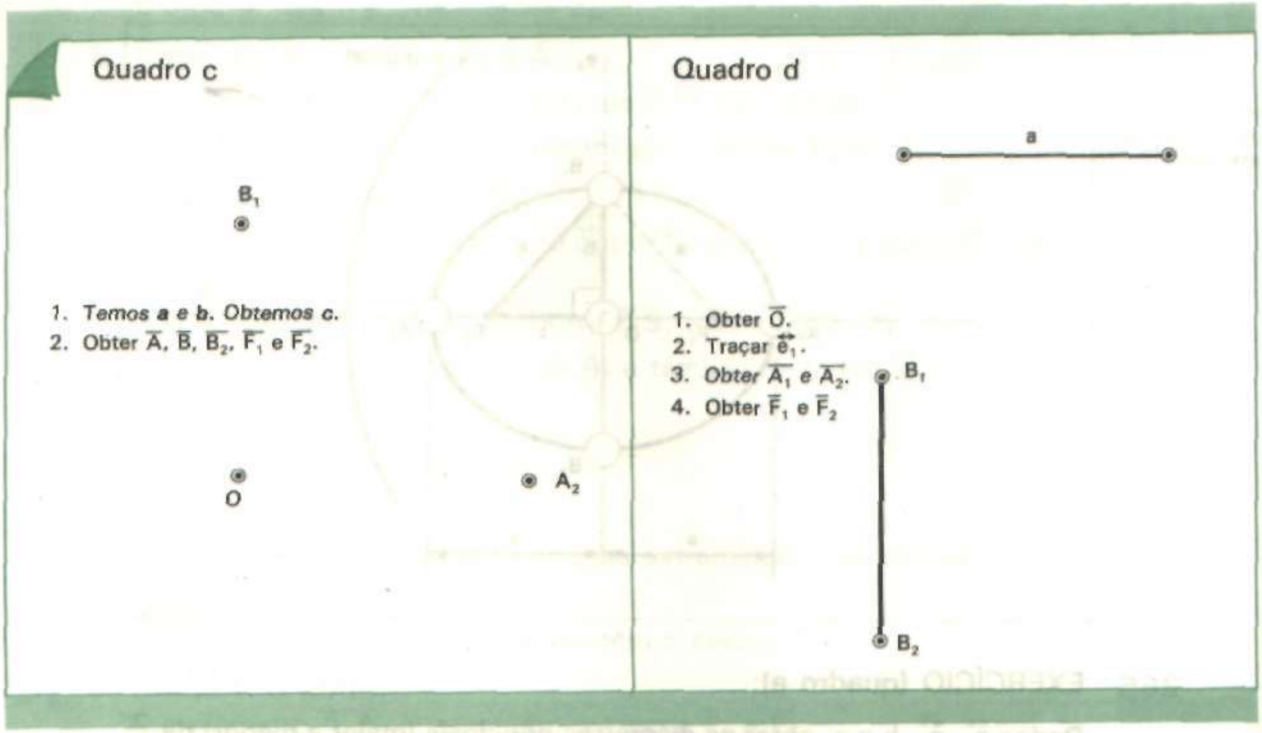


266 EXERCÍCIO (quadro b):

Dados $\overline{O}$, $\overline{F}_2$ e $\overline{A}_2$, obter os diâmetros principais da $\mathscr{E}$.

267 EXERCÍCIO (quadro c):

Dados $\overline{O}$, $\overline{B}_1$, e $\overline{A}_2$, obter os diâmetros principais e os focos da $\mathscr{E}$ ($B_1\hat{O}A_2$ é reto).

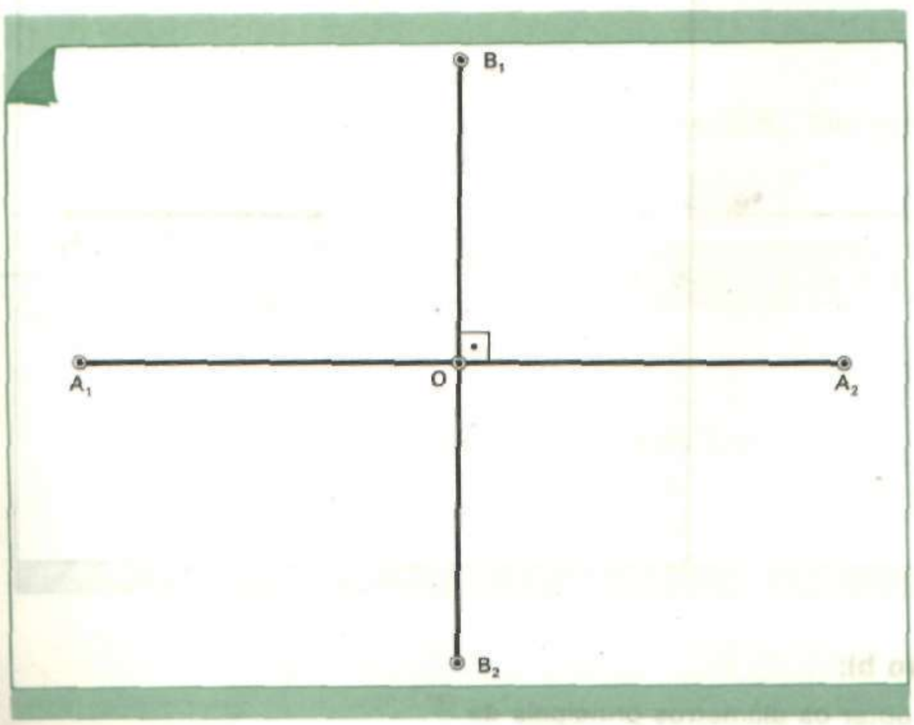


268 EXERCÍCIO (quadro d):

Dados $\overline{B_1B_2}$ e a, obter os vértices e os focos da $\mathscr{E}$.

269 EXERCÍCIO (quadro abaixo):

Dados $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, construir a $\mathscr{E}$.



ROTEIRO:

1º) Obtenha $\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$.

2º) Trace $\gamma = (\overline{F}_1;\ 2a)$.

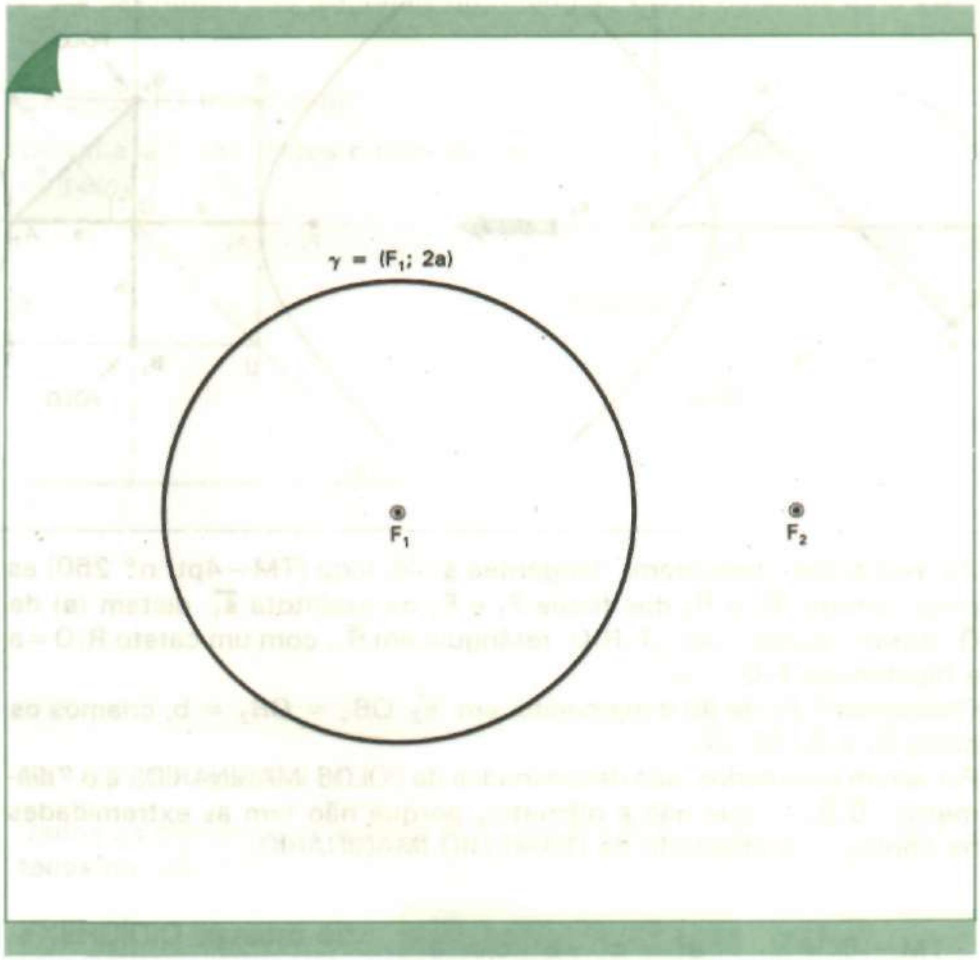
3º) Ache o ponto $\overset{\bullet}{3}$ (vide nº 247).

4º) Tome 2 pontos no arco $\overset{\frown}{13}$, ache 4 pares e trace a $\mathscr{E}$.

270 2º PROBLEMA BÁSICO PARA A $\mathscr{H}$.

Uma $\mathscr{H}$ é dada por $\gamma = (\overline{F}_1;\ 2a)$ e $\overline{F}_2$.
Obter seu centro $\overline{O}$, seus vértices $\overline{A}_2$ e $\overline{A}_1$ e suas assíntotas $\overleftrightarrow{s_1}$ e $\overleftrightarrow{s_2}$.

γ e $\overline{F}_2$ são os "genitores" da cônica.



ROTEIRO:

a. Obtenção do centro $\overline{O}$:

Trace $\overleftrightarrow{e_1}$. $\overline{O}$ é o pt.m. de $\overline{F_1F_2}$.

b. Obtenção dos vértices $\overline{A}_2$ e $\overline{A}_1$:

1º) Sendo $\overline{M} = \overleftrightarrow{e_1} \cap \gamma$, o pt.m. de $\overline{MF_2}$ é $\overline{A}_2$.

2º) Marcando $OA_1 = OA_2$ em $\overleftrightarrow{e_1}$, acha-se $\overline{A}_1$.

c. Obtenção das assíntotas $\overleftrightarrow{s_1}$ e $\overleftrightarrow{s_2}$:

1º) Trace a $\odot$ de $\varnothing F_1F_2$, obtendo $\overline{S}_2 = \overset{\circ}{3}$ em γ. Como no nº 249.

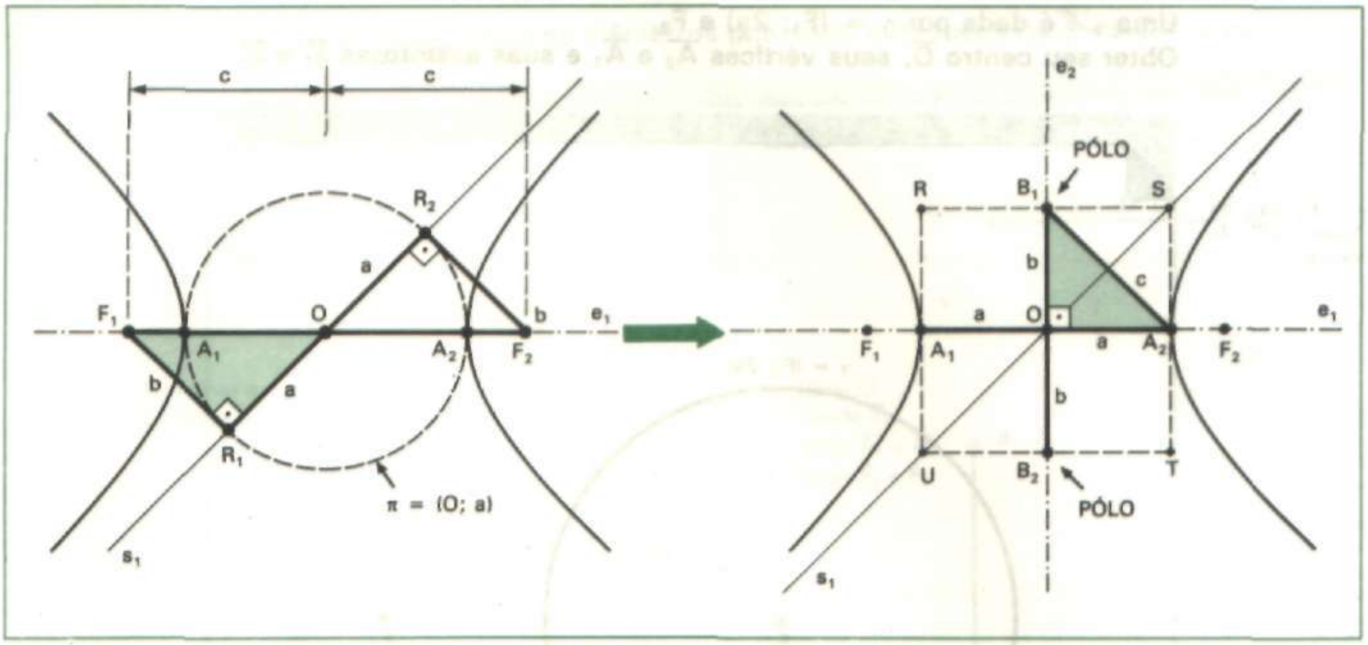
2º) A mediatriz de $\overline{F_2S_2}$, que deve conter $\overline{O}$, é a assíntota $\overleftrightarrow{s_1}$.

3º) $\overleftrightarrow{s_2}$ é a simétrica de $\overleftrightarrow{s_1}$.

271 A $\mathscr{H}$ tem pólos?

A $\mathscr{H}$ não tem pontos no eixo $\overleftrightarrow{e_2}$, como a $\mathscr{E}$, mas como são muito parecidas, foram inventados (definidos) pólos na $\mathscr{H}$.

272 Como?



Tudo o que vale para uma tangente genérica vale também para as assíntotas, que são tangentes particulares.

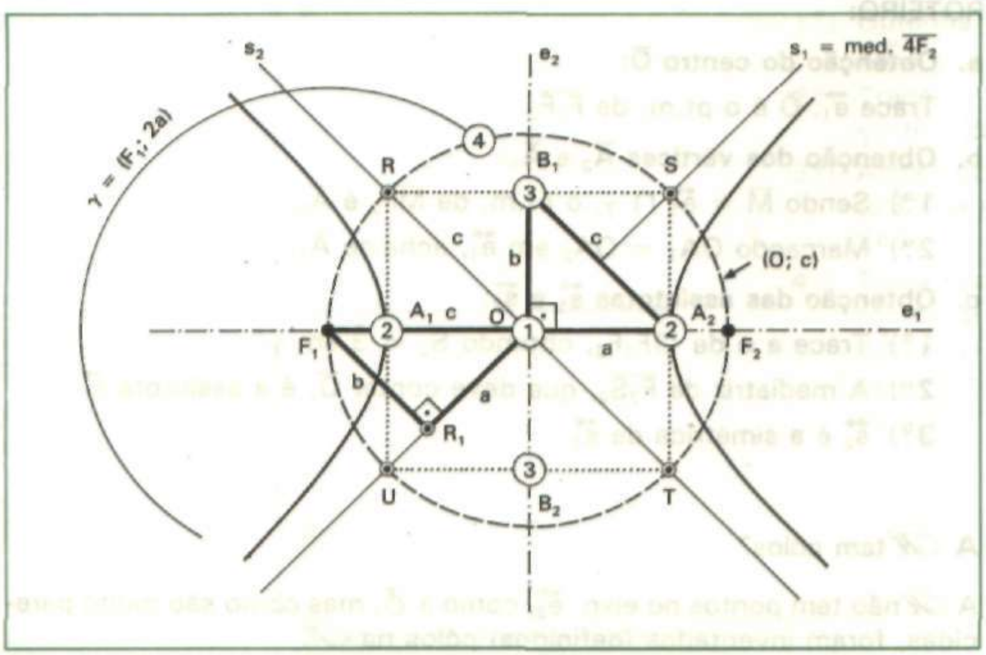
As assíntotas "nasceram" tangentes à $\mathscr{H}$, logo [TM—4pt; nº 260] as projs. ortogs. $\overline{R}_1$ e $\overline{R}_2$ dos focos $\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$ na assíntota $\overleftrightarrow{s_1}$, distam (a) de $\overline{O}$. Assim "surge" um $\triangle F_1R_1O$, retângulo em $\overline{R}_1$, com um cateto $R_1O = a$ e hipotenusa $F_1O = c$.
Chamando F_1R_1 de (b) e marcando, em $\overleftrightarrow{e_2}$, $OB_1 = OB_2 = b$, criamos os pólos $\overline{B}_1$ e $\overline{B}_2$ da $\mathscr{H}$.
Por serem inventados, são denominados de PÓLOS IMAGINÁRIOS e o "diâmetro" $\overline{B_1B_2}$ — que não é diâmetro, porque não tem as extremidades na cônica — é chamado de DIÂMETRO IMAGINÁRIO.

Essa explicação não é fácil, mas a alternativa é decorar a definição de diâmetro imaginário.

273

TM − 5$\mathscr{H}$

$a^2 = c^2 - b^2;\ c > a$

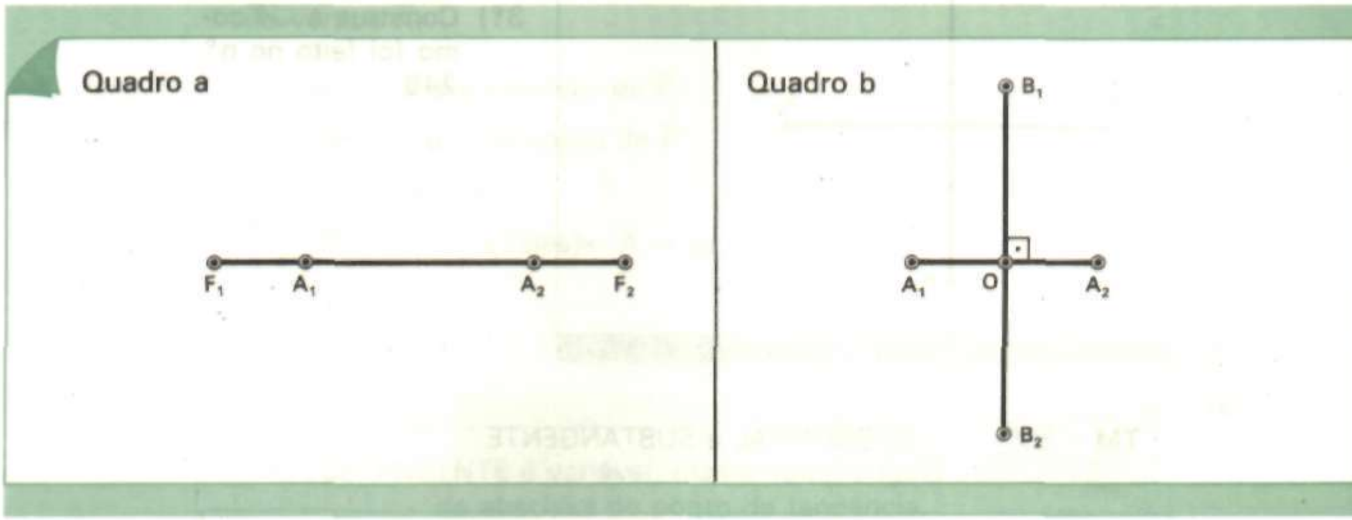


274 No retângulo OB_1SA_2, $OS = A_2B_1 = c$ e, como $OA_2 = a$, segue-se que $\overline{OS}$ está em $\overleftrightarrow{s}_1$:

As assíntotas são diagonais do retângulo RSTU de lados **2a** e **2b**.

275 EXERCÍCIO **(quadro a):**

De uma $\mathscr{H}$, são dados o diâmetro real $\overline{A_1A_2}$ e os focos $\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$. Obter os pólos $\overline{B}_1$ e $\overline{B}_2$.

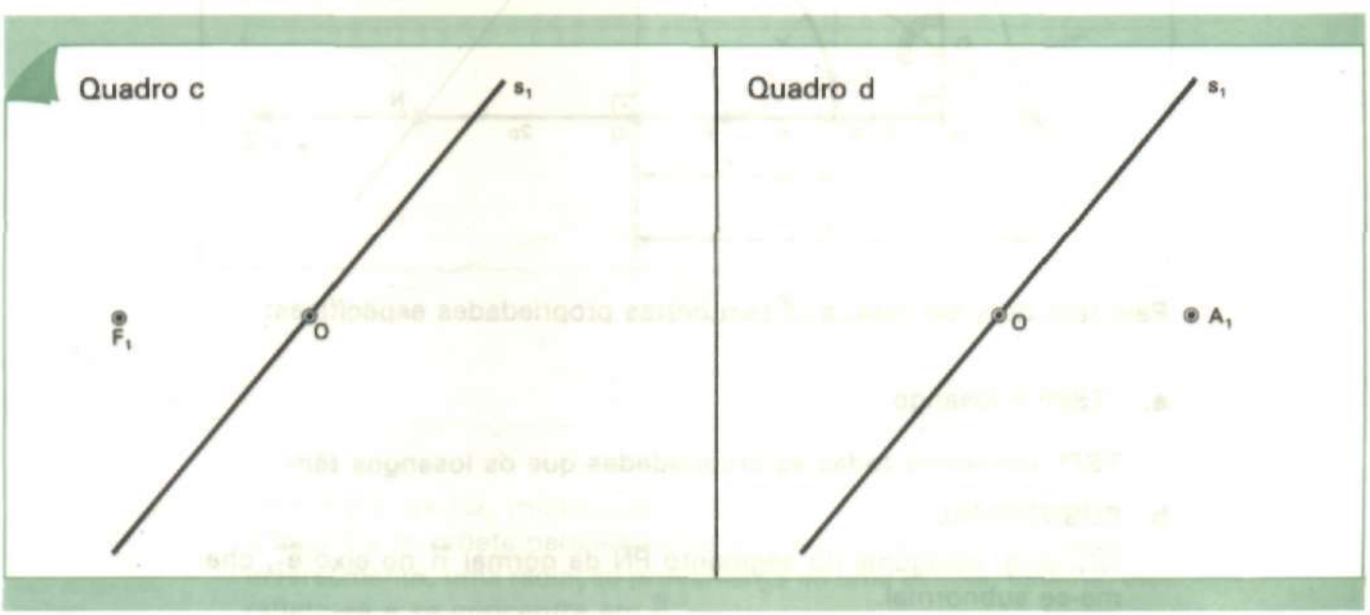


276 EXERCÍCIO **(quadro b):**

Dados os diâmetros principais $\overline{A_1A_2}$ (real) e $\overline{B_1B_2}$ (imaginário), obter os focos da $\mathscr{H}$.

277 EXERCÍCIO **(quadro c):**

Dados uma assíntota $\overleftrightarrow{s}_1$, o centro $\overline{O}$ e um foco $\overline{F}_1$, obter os diâmetros principais de uma $\mathscr{H}$.

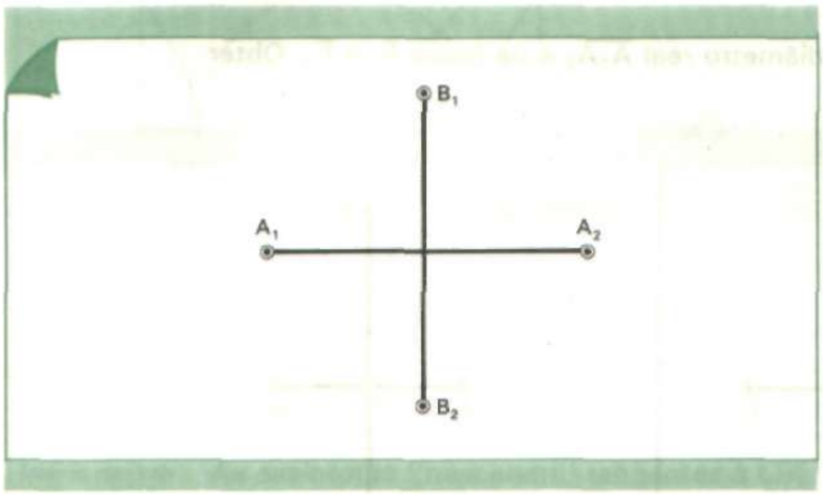


278 EXERCÍCIO (quadro d):

Dados uma assíntota $\overleftrightarrow{s_1}$, o centro $\overline{O}$ e um vértice $\overline{A_2}$, obter os pólos de uma $\mathscr{H}$.

279 EXERCÍCIO **(quadro abaixo):**

Dados $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, construir a $\mathscr{H}$.



ROTEIRO:

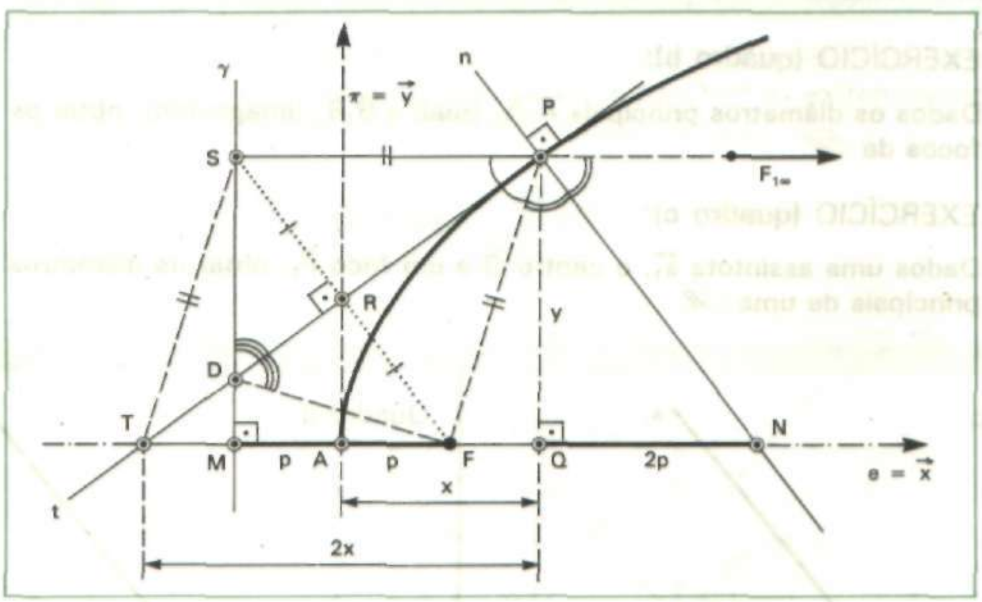
1º) Ache F_1 e F_2.

2º) Trace $\gamma = (F_1; 2a)$.

3º) Construa a $\mathscr{H}$ como foi feito no nº 249.

280

TM – 5$\mathscr{P}$ SUBNORMAL e SUBTANGENTE



Pelo fato de γ ser reta, a $\mathscr{P}$ tem certas propriedades específicas:

a. TSPF é losango.

TSPF apresenta todas as propriedades que os losangos têm.

b. SUBNORMAL:

$\overline{QN}$, proj. ortogonal do segmento $\overline{PN}$ da normal $\overleftrightarrow{n}$ no eixo $\overleftrightarrow{e_1}$, chama-se subnormal.

$\triangle MSF \cong \triangle QPN \Rightarrow$ $QN = MF = 2p$ $(*)$

A SUBNORMAL **é constante e igual ao parâmetro 2p.**

c. SUBTANGENTE:

$\overline{TQ}$, proj. ortogonal do segmento $\overline{TP}$ da tangente $\overleftrightarrow{t}$ no eixo $\overleftrightarrow{e_1}$, chama-se subtangente.

Sejam $\vec{X}$ e $\vec{Y}$ dois eixos cartesianos perpendiculares e com origem no vértice $\overline{A}$:

$AQ = x$ é a abscissa de $\overline{P}$.

$QP = y$ é a ordenada de $\overline{P}$.

No $\triangle TQP$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{R} = \text{pt.m. } \overline{TP} \\ \pi \,/\!/\, \gamma \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Tales}} \overline{A} = \text{pt.m. } \overline{TQ}, \text{ isto é:}$$

$$TQ = 2x \quad (**)$$

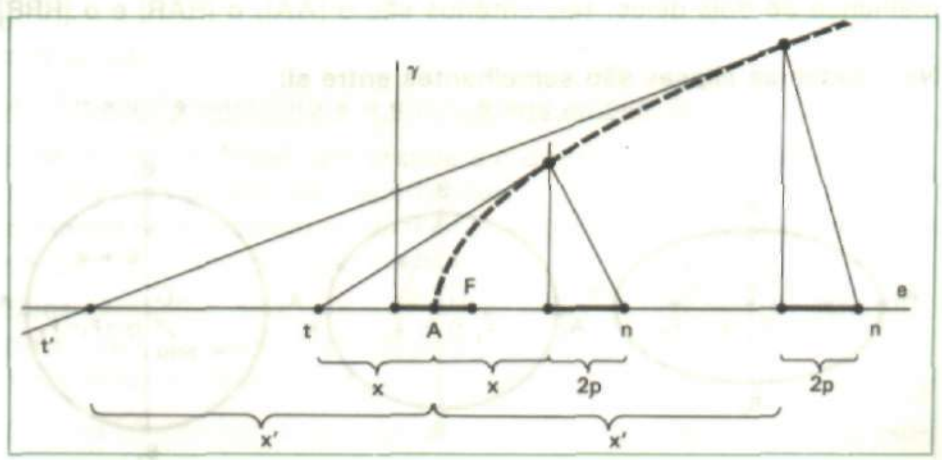
A SUBTANGENTE **é variável, mas é sempre igual ao** DOBRO **da abscissa do ponto de tangência.**

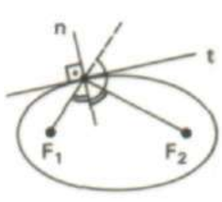
d. EQUAÇÃO DA $\mathscr{P}$:

No $\triangle$ retângulo TPN, temos:

$$(PQ)^2 = TQ \cdot QN \xrightarrow{* \text{ e } **} y^2 = 4p \cdot x$$

Em DG, importa que:
y é média geométrica entre 4p e x ou entre 2p e 2x.





Numa $\mathscr{E}$, um raio de radiação que parte de um foco atinge o outro foco.

e. **Uma fonte de luz, microondas, etc. em $\overline{F}$ emite uma radiação que atinge $\overline{P}$ e se reflete paralelamente ao eixo $\overleftrightarrow{e}$ do refletor parabólico. Inversamente, uma radiação proveniente de uma estrela, satélite, etc. reflete-se e se concentra em $\overline{F}$.**

281 RESUMO DA TM DE CÔNICAS:

TM – 1: Cônica é o LG dos centros...

TM – 2ℰ: Soma constante.

– 2ℋ: |Diferença| constante.

– 2𝒫: Pontos eqüidistantes.

TM – 3t: Uma tangente é mediatriz e bissetriz.

– 3n: Uma normal é ⊥ à tangente.

– 3s: As cônicas são simétricas.

TM – 4st: Simétrico de um foco com relação a uma tangente.

– 4pt: Proj. ortog. de um foco numa tangente.

– 4sn: Simétrico de um foco com relação a uma normal.

RELAÇÕES MÉTRICAS:

TM – 5ℰ: $a^2 = c^2 + b^2$; $c < a$

– 5ℋ: $a^2 = c^2 - b^2$; $c > a$

– 𝒫: $\left.\begin{array}{l}\text{Subnormal} = 2p \\ \text{Subtangente} = 2x\end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = 4px$

282

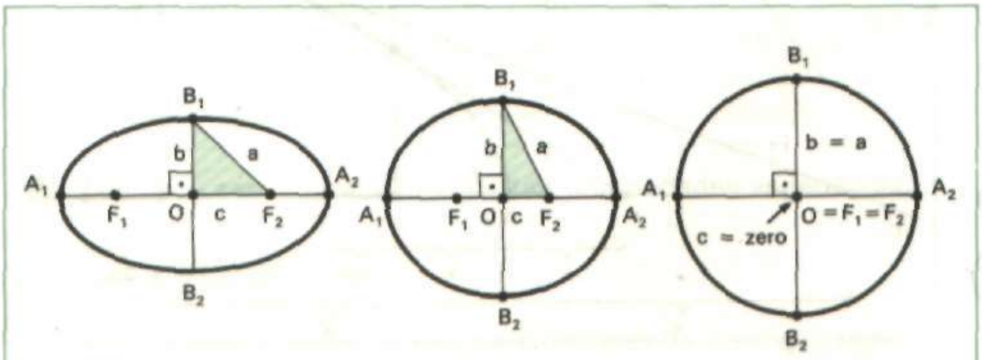
> **Toda essa TM foi concluída a partir da TM – 1.**

Quem sabe o que é uma cônica (TM – 1) pode — havendo tempo e disposição — concluir sozinho o restante.

283 FORMA DAS CÔNICAS:

Para verificar se uma figura tem ou não forma determinada, deveremos triangulá-la, como vimos neste curso.
Por que recorrer a triângulos?
Porque para △s temos 3 critérios, bem demonstrados, para provar a semelhança de dois deles; tais critérios são o [AA], o [RAR] e o [RRR].

284 *Nem todas as elipses são semelhantes entre si:*

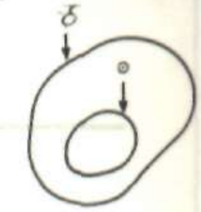


Se os △s correspondentes, OB_1F_2 (ou A_1OB_1 ou $A_1B_1A_2$, etc.), forem semelhantes, então as elipses terão a mesma forma; caso contrário, não terão.

285 EXCENTRICIDADE

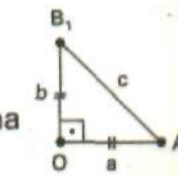
Em linguagem comum, excentricidade significa: afastamento do centro.

É a razão c/a, que nas elipses é sempre menor do que 1, pois $c < a$.
A circunferência é uma elipse particular com $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \overline{O}$ e cuja excentricidade é zero, pois c = zero.
A ⊙ tem TODAS as propriedades das elipses e outras propriedades específicas.



286 O conceito de excentricidade foi estendido às hipérboles:

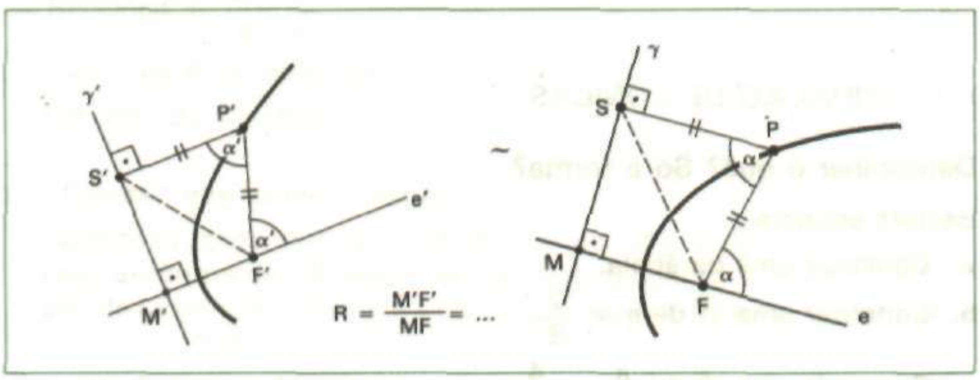
$$e = \frac{c}{a} \qquad \mathscr{E}: 0 \leqslant e < 1 \quad (c < a) \qquad \mathscr{H}: \quad e > 1 \quad (c > a)$$



287 HIPÉRBOLE EQUILÁTERA é aquela que tem $b = a \Rightarrow e = \sqrt{2}$.

288 **As parábolas são** todas **semelhantes entre si, isto é, têm a** mesma **forma.**

Os △s F'S'P' e FSP são isósceles; tendo $\alpha' = \alpha$, são semelhantes.



Para provar isso, basta revelar (estavam latentes) dois △s correspondentes e genéricos, como o △F'S'P' e △FSP.

Se $\alpha' = \alpha$ ={RAR}⇒ △F'S'P' ~ △FSP.
Se △F'S'P' ~ △FSP ⇒ as $\mathscr{P}$s são semelhantes.

Esse é um bom exemplo para mostrar o valor da Geometria. Quem tem apenas senso comum, não "calibrado" pela Geometria, não acredita nesse fato.
Vamos ajudar:

a. A $\mathscr{P}$ menor é uma foto e a maior é sua ampliação...

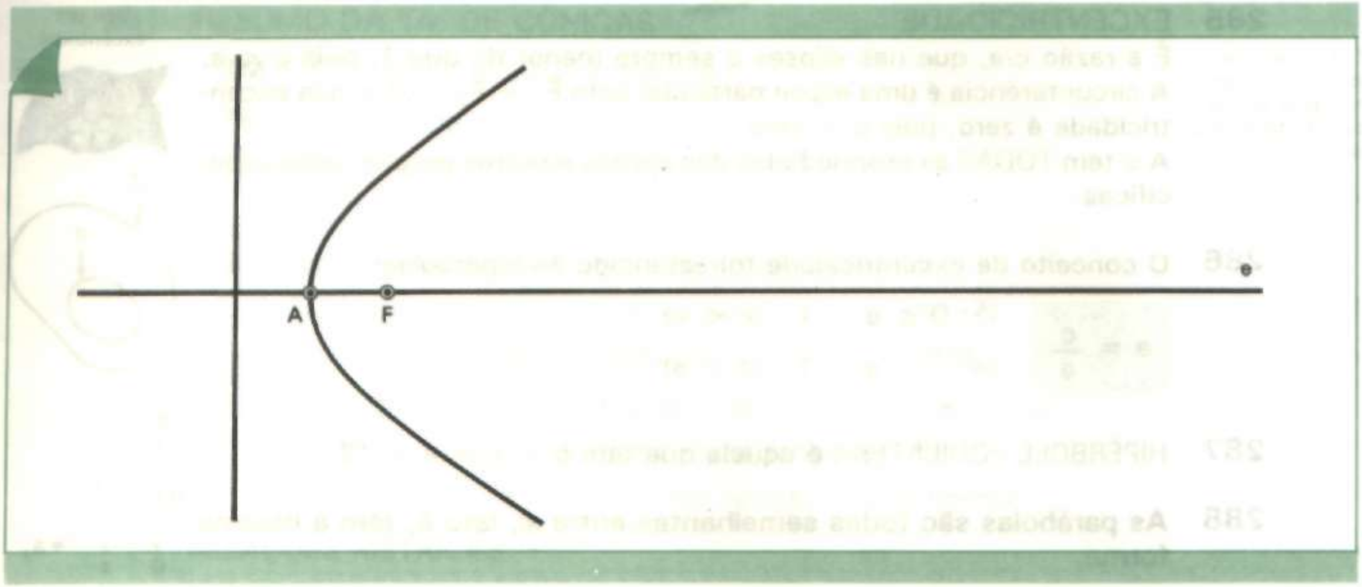
b. Dois mapas do Brasil, um grande e o outro pequeno, têm a mesma *forma e não podem ser superpostos...*
Somente figuras congruentes (semelhantes e com razão de semelhança igual a 1) são superponíveis.

c. Duas parábolas, com qualquer par de retas homólogas paralelas entre si, são, portanto, homotéticas.
Você pode (e deve) fazer uma experiência (gráfica):

1º) Na $\mathscr{P}$ a seguir, tome alguns pontos e trace as respectivas tangentes.

2º) Com centro de homotetia, por exemplo, no foco $\overline{F}$, amplie esses pontos e as tangentes, por exemplo, na razão + 2.

3º) Trace a nova $\mathscr{P}$.



IV DETERMINAÇÃO DE CÔNICAS

289 **Determinar o quê? Só a forma?**

Bastará enunciar:

a. Construir uma parábola.

b. Construir uma $\mathscr{E}$ de $e = \frac{2}{3}$.

c. Construir uma $\mathscr{E}$ de $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.

d. Construir uma $\mathscr{H}$ eqüilátera.

Etc.

$\frac{a}{b}$ não tem nome.

290 **Só o tamanho ⇒ forma?**

Já estudamos que:

FORMA + "ALGO" ⇒ TAMANHO

Esse "algo" pode ser:

ou um comprimento

ou uma área, etc.

EXEMPLOS DE PROBLEMAS:

a. Construir uma $\mathscr{P}$ de parâmetro $2p = 5$ cm.

b. $\mathscr{E}$ de $e = \frac{2}{3}$, dada a soma $a + b = 8$ cm (resolve-se por semelhança ou homotetia).

c. $\mathscr{H}$ eqüilátera, dada a diferença $c - b = 30$ mm.

d. $\mathscr{E}$ com $a : b = 5 : 3$ e equivalente a um quadrado dado.

291

> *Para determinar a posição (no plano) de uma cônica, deveremos dar 5 "coisas" (nem mais nem menos).*

292 **Que "coisas"?**

a. "Coisas" que valem 1 (faltam 4):

Cada $\overline{P}$ vale 1, cada $\overleftrightarrow{t}$ vale 1, cada medida vale 1, etc.

Pontos da cônica: $\overline{P}$, $\overline{P'}$, $\overline{P''}$...

Retas tangentes à cônica: $\overleftrightarrow{t}$, $\overleftrightarrow{t}'$, $\overleftrightarrow{t}''$...

Retas normais à cônica: $\overleftrightarrow{n}$, $\overleftrightarrow{n}'$, $\overleftrightarrow{n}''$...

Pontos de tangência (só saem acompanhados por $\overleftrightarrow{t}$ ou $\overleftrightarrow{n}$).

Comprimentos: 2a, 2b, 2c ($\mathscr{E}$ e $\mathscr{H}$), 2p ($\mathscr{P}$).

Compare com os problemas de tangência de ⊙s.

Dizer que é $\mathscr{P}$ equivale a dar 2a → ∞.

Relações: e, $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{c}$ ...

Dizer que é $\mathscr{H}$ eqüilátera (e = $\sqrt{2}$).

Um eixo de simetria, etc.

b. "Coisas" que valem 2 (faltam 3):

Cada foco, cada vértice, cada pólo ($\mathscr{E}$ ou $\mathscr{H}$), o centro ($\mathscr{E}$ ou $\mathscr{H}$), *cada assíntota da $\mathscr{H}$ (equivale a dar uma tangente + o ponto impróprio de tangência)*, dizer que a cônica é ⊙ (equivale a dar c = zero), etc.

c. γ vale 3 (faltam 2); de fato:

Se γ *for reta, estamos dando* $\overrightarrow{F_{1\infty}}$ *(vale 2) + 2a → ∞ (vale 1).*

Se γ for ⊙, estamos dando um foco (vale 2) + 2a (vale 1).

293 Tendo γ e $\overline{F}_2$, a cônica está obtida.

a. Dando γ, faltam 2 para obter $\overline{F}_2$, que é um ponto (duas linhas).

b. Dando $\overline{F}_2$, faltam 3 para obter γ (se for ⊙) ou 2 se γ for reta.

294 **Daqui até o fim do livro 3, só problemas.**

295 ENUNCIADO GENÉRICO:

> DADAS 5 "coisas",
>
> PEDE-SE construir a cônica e/ou obter outras "coisas".

296 O número de problemas é muito grande. Convém aprender a concluir sozinho as resoluções:

a. MF:

Desenhe o EGT baseando-se em um dos desenhos que acompanham a TM. Comece pela resposta e depois "encaixe" os dados.

b. Como se raciocina:

O QUE SE SABE?		O QUE SE QUER?
S [?] { a TM; os DADOS		Q [?] { ou PONTO; ou RETA; ou ⊙

297 SE **você quer um ponto,**

ENTÃO **procure duas linhas que o contêm.**

298 SE **você quer uma reta,**

ENTÃO **procure ou 2 pontos**
ou 1 ponto e a direção.

Outra forma de dizer: 2 pontos, sendo pelo menos um próprio.

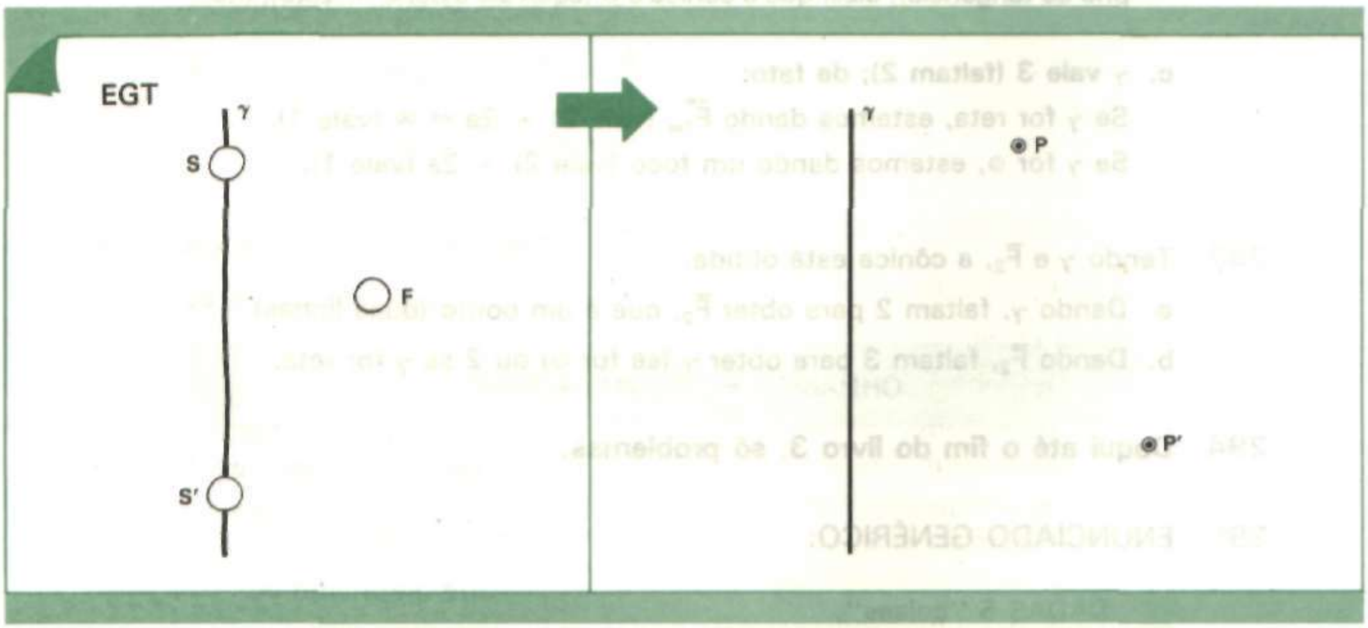
299 SE **você quer uma circunferência e não acha seu centro,**

ENTÃO **procure pontos dela, retas tangentes a ela, ⊙s tangentes a ela, etc.**

300 EXERCÍCIO:

Dados γ, $\overline{P}$, $\overline{P'}$; obter $\overline{F}$.

(De uma cônica, são dados γ, $\overline{P}$ e $\overline{P'}$; obter $\overline{F}$.)



VAMOS CONCLUIR JUNTOS:

a. Como desenhar o EGT (é $\mathscr{P}$, pois γ é reta):

1º) **Desenhe $\overline{F}$ (resposta) e γ (já é um dado).**

2º) **Agora deveremos desenhar $\overline{P}$ e $\overline{P'}$, mas não em qualquer lugar... Tome $\overline{S}$ e $\overline{S'}$ e obtenha $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ no EGT.**
Já fizemos isso várias vezes: trace as $\perp$s à γ e as mediatrizes de $\overline{FS}$ e de $\overline{FS'}$.

b. **Como se raciocina (desemaranhar o "fio da meada", que tem duas pontas):**

Nem é necessário desenhar o EGT; basta "vê-lo" com a mente.

O QUE SE QUER?

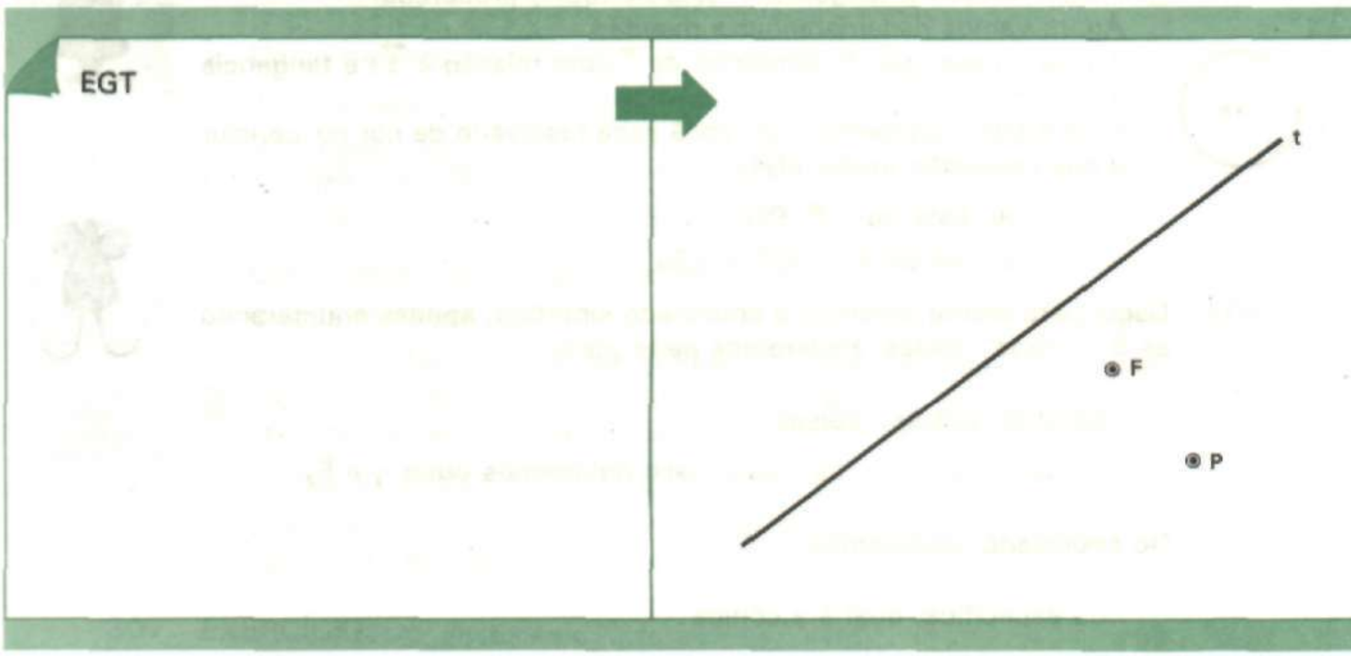
— Um ponto $\overline{F}$, logo, queremos duas linhas que passam por $\overline{F}$.

O QUE SE SABE?

— A TM... Quem é $\overline{P}$? É ponto da $\mathscr{P}$ =(TM − 1)⇒ $\overline{P}$ é centro de uma ⊙ que tangencia γ e **passa por $\overline{F}$**! Idem para $\overline{P'}$. Você quer o roteiro?

301 EXERCÍCIO:

Dados $\mathscr{P}$, $\overline{F}$, $\overline{P}$, $\overleftrightarrow{t}$; obter γ.
(De uma $\mathscr{P}$, são dados $\overline{F}$, $\overline{P}$, $\overleftrightarrow{t}$; obter γ.)



VAMOS CONCLUIR JUNTOS:

a. **Como desenhar o EGT:**

1º) Desenhe γ (resposta) e $\overline{F}$ (um dos dados).

2º) Agora vamos desenhar $\overleftrightarrow{t}$ no EGT, **mas não em qualquer lugar**; tome $\overline{S}$ em γ e obtenha $\overleftrightarrow{t}$ (com o respectivo $\overline{P'}$).

3º) Falta "encaixar" $\overline{P}$ no EGT. Tome outro ponto $\overline{S'}$ em γ e ache $\overline{P}$ (com a respectiva tangente $\overleftrightarrow{t'}$).

Agora o EGT está completo: tem todos os dados ($\overline{F}$, $\overleftrightarrow{t}$, $\overline{P}$), uma das respostas (γ) e as linhas que vão permitir a sua cópia.

> Essa é a essência do MF:
>
> 1º) Desenha-se o EGT
> "De trás (resposta) para diante (dados)."
>
> 2º) Copia-se esse EGT
> "De diante (dados) para trás (resposta)."

b. Como se raciocina:

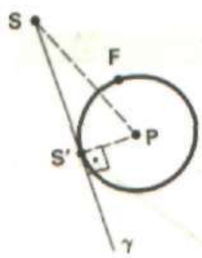
O QUE SE QUER?

Queremos uma reta, logo, queremos 2 pontos ou 1 ponto + a direção dela, mas poderemos recair num problema conhecido e depois obter o que se quer.

O QUE SE SABE? DADOS + TM.

Os dados são $\overline{F}$, $\overline{P}$ e $\overleftrightarrow{t}$; o que fazer com eles?
Quem é $\overline{P}$? É ponto da $\mathscr{P}$...
logo [TM − 1] a $\odot(\overline{P};\ PF)$ **tangencia a reta γ procurada!** Já é uma ''pista''.
Quem é $\overline{F}$? É o foco da $\mathscr{P}$. O que a TM diz de ''focos''? Procure na TM, que ela resolve todos os problemas... Ah!... O simétrico $\overline{S}$ de $\overline{F}$ com relação à tangente $\overleftrightarrow{t}$ está na reta γ procurada!
Agora vamos desemaranhar a meada:
A reta γ passa por $\overline{S}$ (simétrico de $\overline{F}$ com relação à $\overleftrightarrow{t}$) e tangencia a $\odot(P;\ PF)$.
Esse é outro problema... ou você sabe resolvê-lo de cor ou conclui a sua resolução (outro EGT):

EGT auxiliar:



$\overline{S'}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Está na } \odot(\overline{P};\ PF). \\ \text{b. Vê } \overline{SP} \text{ sob } 90^\circ \Rightarrow \text{L5a.} \end{cases}$

Uma $\mathscr{P}$ com duas diretrizes?

Não!... são duas parábolas...

302 Daqui para diante daremos o enunciado sintético, apenas enumerando as 5 ''coisas'' dadas. Poderemos pedir para:

Em matérias técnicas, a concisão é fundamental.

ou obter outras ''coisas''

ou construir a cônica; neste caso deveremos obter γ e $\overline{F}_2$.

No enunciado, poderemos:

ou especificar qual é a cônica

ou dizer apenas que se trata de uma cônica.

303 Há casos em que os próprios dados ''dizem'' qual é a cônica; por exemplo:

a. Foram dados 2a e 2c.
Então, $\mathscr{P}$ não é; é $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{H}$.
Se $c < a \Rightarrow \mathscr{E}$ e se $c > a \Rightarrow \mathscr{H}$.

b. Foi dada a excentricidade $e = \dfrac{c}{a}$.
$e < 1 \Rightarrow \mathscr{E}$ e $e > 1 \Rightarrow \mathscr{H}$

304 Há casos em que se diz que é uma $\mathscr{E}$ e, na construção, surge uma resposta ''clandestina''. Então:
Se a ''clandestina'' for $\mathscr{E}$, será também uma resposta.
Se a ''clandestina'' for $\mathscr{H}$, então deverá ser rejeitada.

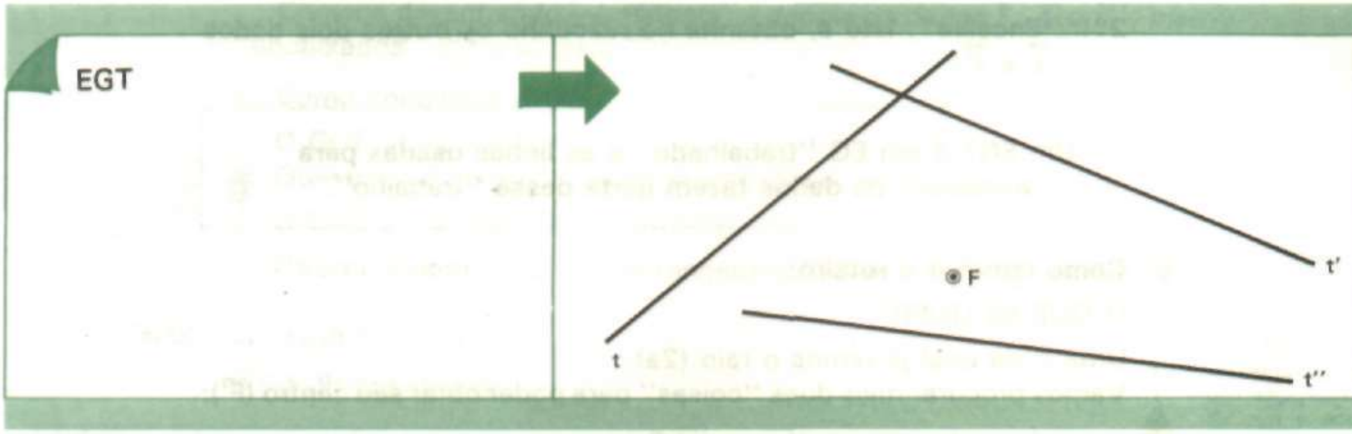
305 Como descobrir qual cônica obtivemos?

Ou verificando se $\overline{F}_2$ é interno ($\mathscr{E}$)
ou externo ($\mathscr{H}$) à $\odot\ \gamma$

ou comparando (a) e (c).

306 EXERCÍCIO:

Ftt't''; obter os pontos de tangência.



a. Como desenhar o EGT:

1º) Comece por γ (resposta) e $\overline{F}$ (dado).

2º) Agora você precisa "encaixar" $\overleftrightarrow{t}$, $\overleftrightarrow{t'}$ e $\overleftrightarrow{t''}$. Para fazer isso, tome em γ os pontos $\overline{S}$, $\overline{S'}$ e $\overline{S''}$ e "encaixe" $\overleftrightarrow{t}$, $\overleftrightarrow{t'}$ e $\overleftrightarrow{t''}$, que são as mediatrizes de $\overline{FS}$, $\overline{FS'}$ e $\overline{FS''}$, respectivamente.

Faça um quadro e "pendure na cuca".

b. Como raciocinar ("pegar o fio da meada"):

O QUE SE QUER?

Uma circunferência γ e não achamos duas linhas que passam pelo centro $\overline{F}$. Então, vamos procurar outras "coisas" dessa ⊙: pontos, raio, tangentes, etc. para recair em pesquisa de ⊙s.

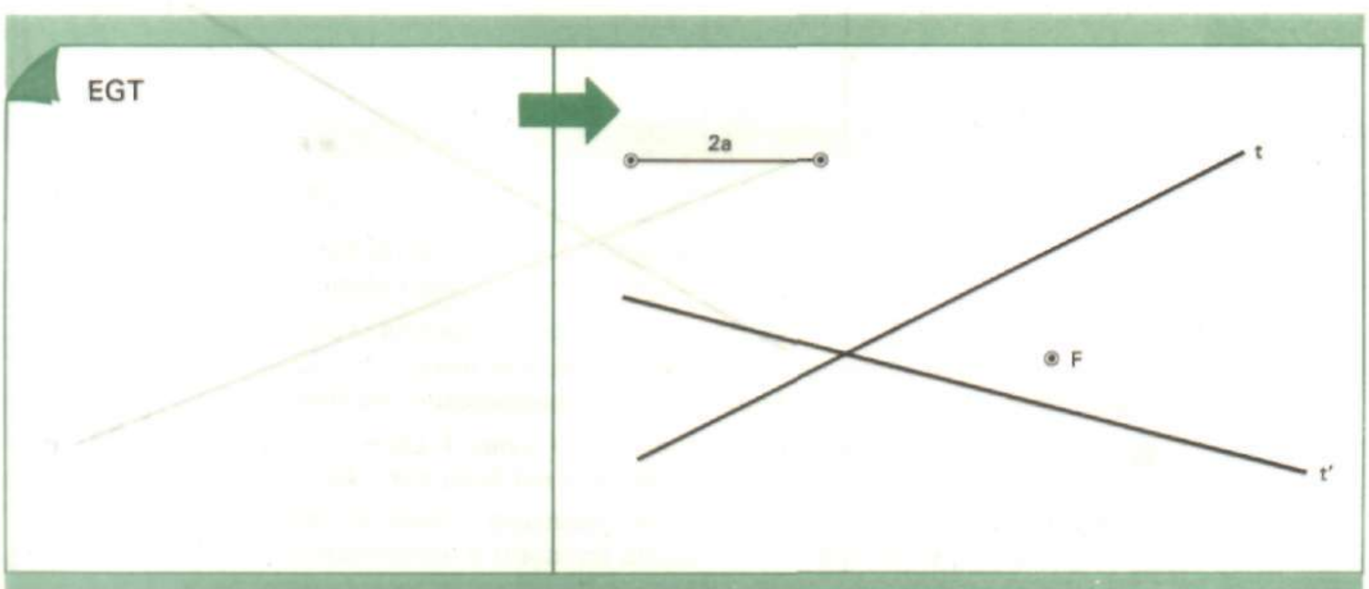
O QUE SE SABE? TM + DADOS.

"Páscoa" lembra "coelhinho"; o que lembra "foco + tangente"? Lembra a TM − st...

Há outro processo: procurar a ⊙ $(\overline{O};\ a) = \pi$ aplicando a TM − pt.

307 EXERCÍCIO:

Ftt'2a; obter o outro foco $\overline{F'}$.



a. Como fazer o EGT:

1º) Comece pela ⊙ $\gamma = (\overline{F}_1;\ 2a)$ e por $\overline{F}$.

2º) "Encaixe", isto é, obtenha no rascunho os outros dois dados ($\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$).

Um EGT é um EG "trabalhado" e as linhas usadas para "encaixar" os dados fazem parte desse "trabalho".

b. Como concluir o roteiro:

O QUE SE QUER?

O que dizer de um "cara" que está "craneando"... mas não *sabe o que [?]* está procurando?

Uma ⊙ da qual já temos o raio (2a).
Vamos procurar mais duas "coisas" para poder obter seu centro ($\overline{F'}$):

$\overline{F'}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Uma "coisa"} \Rightarrow \text{um LG.} \\ \text{b. Outra "coisa"} \Rightarrow \text{outro LG.} \end{cases}$

O QUE SE SABE? TM + DADOS.

"Páscoa" lembra "coelhinho", lembra "ovos", lembra "festas", etc.
O que lembra o par (foco; tangente)? Lembra TM – st ou TM – pt.

ROTEIRO (às vezes, convém...):

Há 2 respostas. Para descobrir que cônicas são, veja o nº 305.

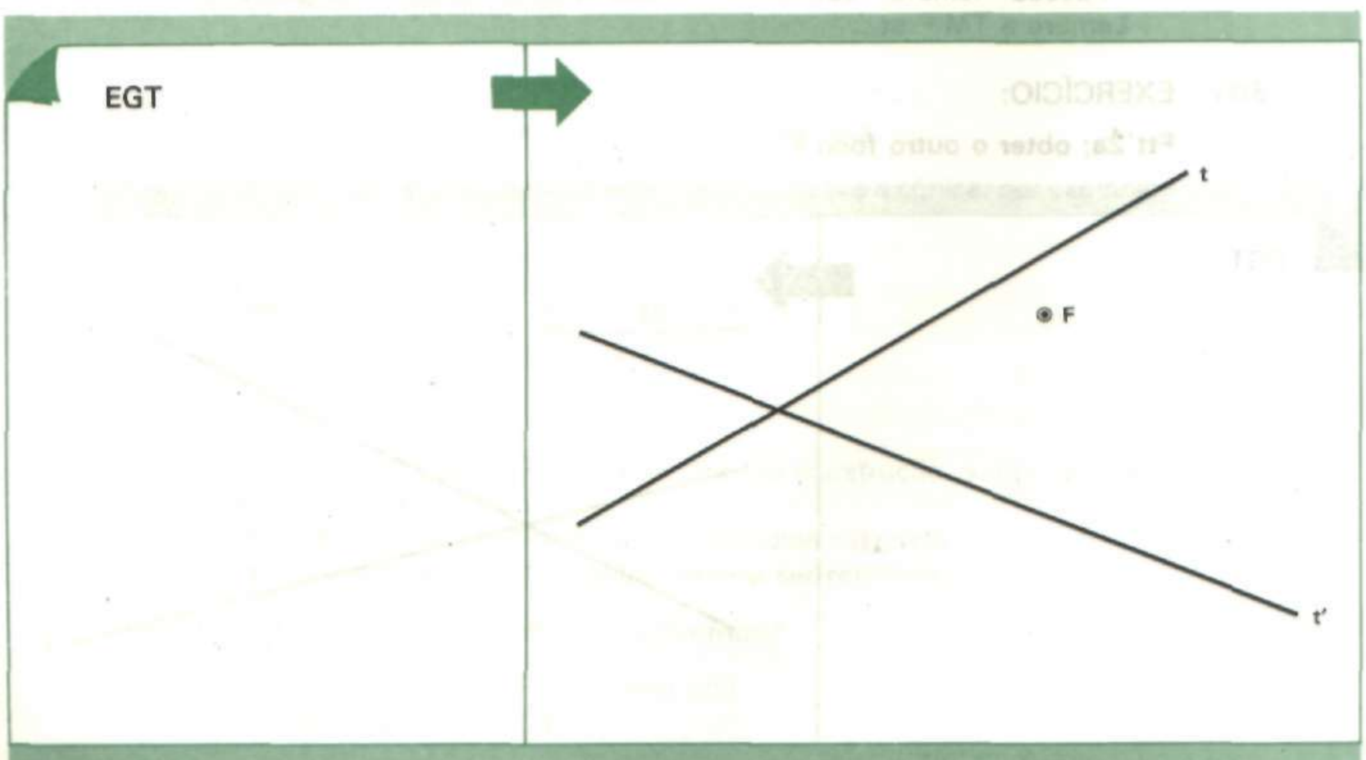
1º) Obtenha $\overline{S}$ e $\overline{S'}$, simétricos de $\overline{F}$ com relação à $\overleftrightarrow{t}$ e à $\overleftrightarrow{t'}$.

2º) $\overline{F'}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Dista 2a de } \overline{S} \Rightarrow \text{L1.} \\ \text{b. Dista 2a de } \overline{S'} \Rightarrow \text{L1.} \end{cases}$

Que "coisas"...

308 EXERCÍCIO:

$\mathscr{P}$**Ftt'; obter os pontos de tangência $\overline{P}$ e $\overline{P'}$, respectivamente.**



a. Como fazer o EGT:

Foi dito que é uma $\mathscr{P}$, logo γ é reta.

Comece desenhando γ (resposta) e depois os dados $\overline{F}$, $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t}'$, mas "encaixados" entre si (pela TM).

b. Como concluir o roteiro:

Você sabia que: para obter a resposta, é obrigatório usar todos os dados?

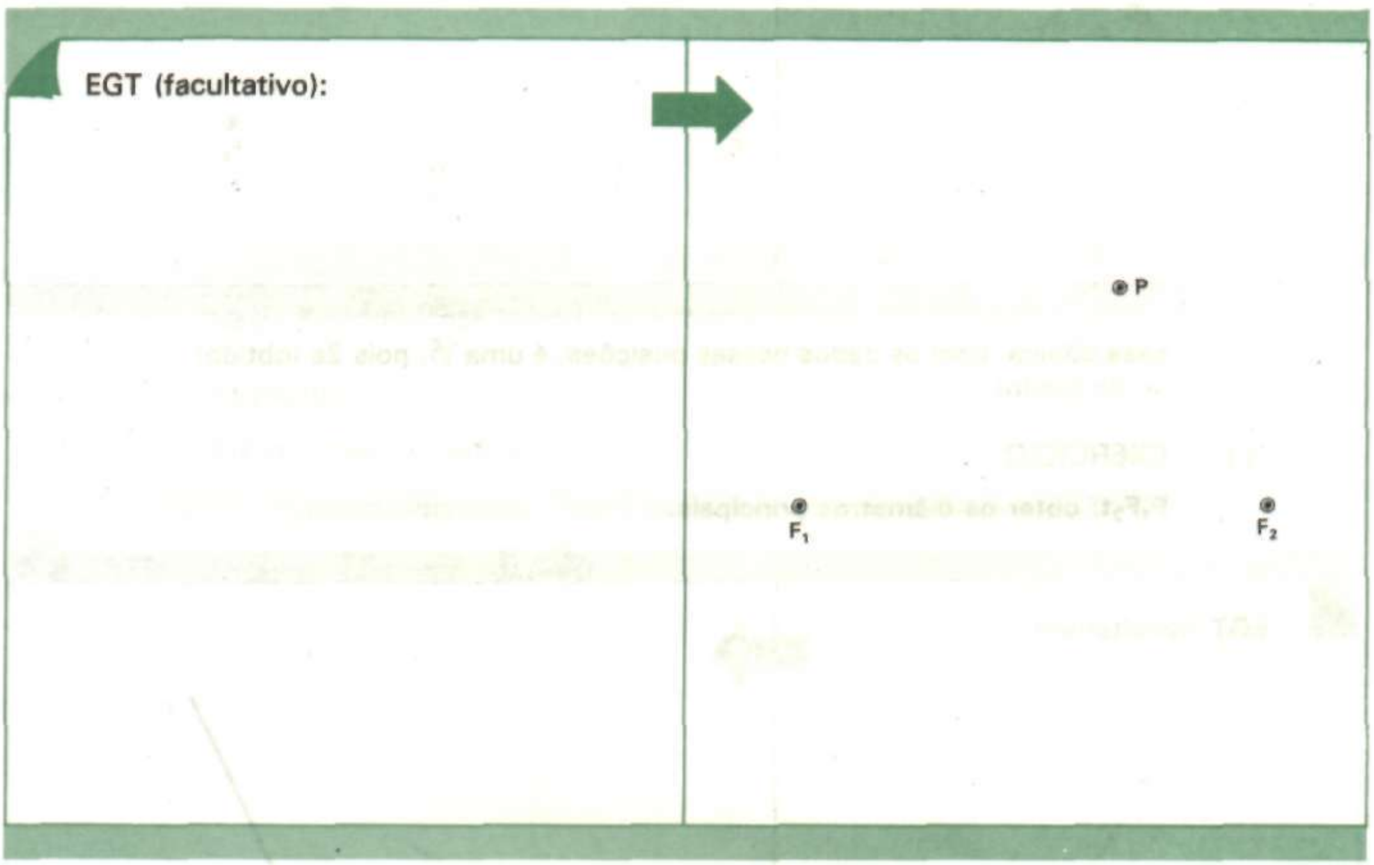
O QUE SE QUER?
Queremos 2 pontos, mas antes convém obter a reta γ, procurando...
O QUE SE SABE? TM + DADOS.

Os dados são o foco e duas tangentes. Quem sabe a TM sabe que...

Falou cônica, falou γ e $\overline{F}$...

309 EXERCÍCIO:

$\mathscr{E}$ **F_1F_2P; construí-la.**

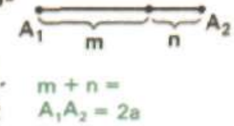


ROTEIRO:

1º) Você já pode obter a tangente por P (é bissetriz externa do $F_1\hat{P}F_2$) e ainda mais 3 pares (tang.; pto.), por simetria.

2º) Você também pode obter os vértices $\overline{A_1}$ e $\overline{A_2}$ e os pólos $\overline{B_1}$ e $\overline{B_2}$. Convém obter também as tangentes por esses pontos, que não podem ser ultrapassadas quando você for traçar $\mathscr{E}$ a mão livre.

O que você prefere? Decorar as siglas da TM ou decorar os roteiros dos problemas.

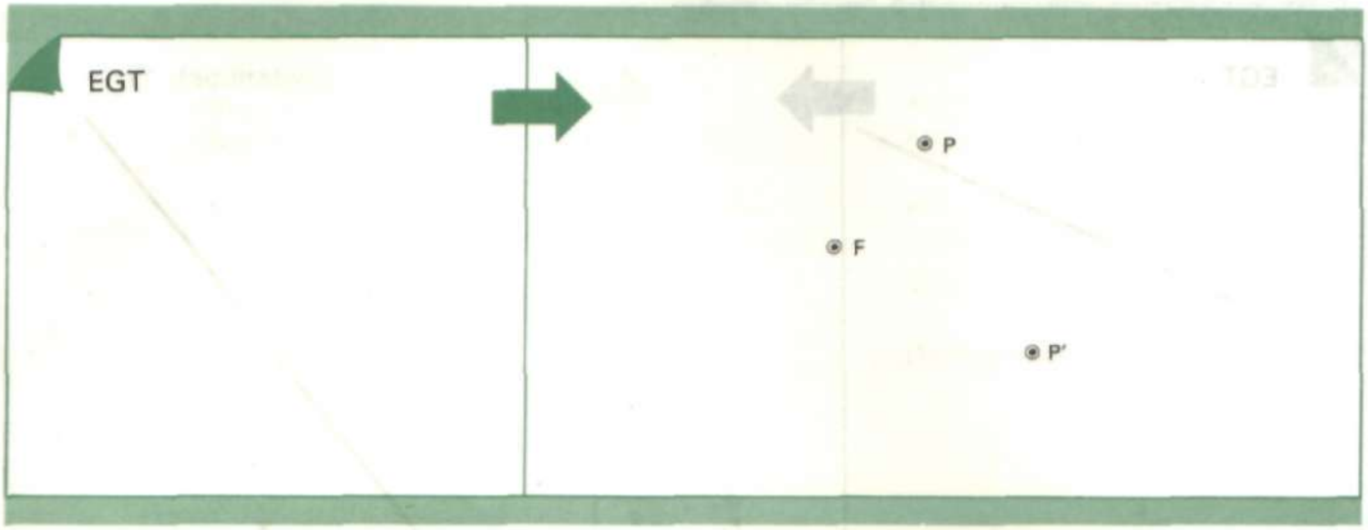


$m + n = A_1A_2 = 2a$

3º) Com mais 4 pares ($\overleftrightarrow{t}$; $\overline{P}$) já dá "coragem" para traçar a curva... Você pode obtê-los utilizando γ e $\overline{F_2}$ [TM – 1 e TM – 3t], mas pode, convém e portanto deve [TM – 2$\mathscr{E}$] tomar $\overline{I}$ (arbitrário, mas conveniente) e traçar os arcos (F_1; m), (F_2; m), (F_1; n) e (F_2; n) e obter 4 pontos e depois 4 tangentes.

314 EXERCÍCIO:

$\mathscr{P}$FPP'; obter a diretriz γ.



A reta γ é tangente comum (externa) às $\odot$ ($\overline{P}$; PF) e ($\overline{P'}$; P'F). Para obtê-la, há dois jeitos:

É por isso que se deve aprender a concluir.

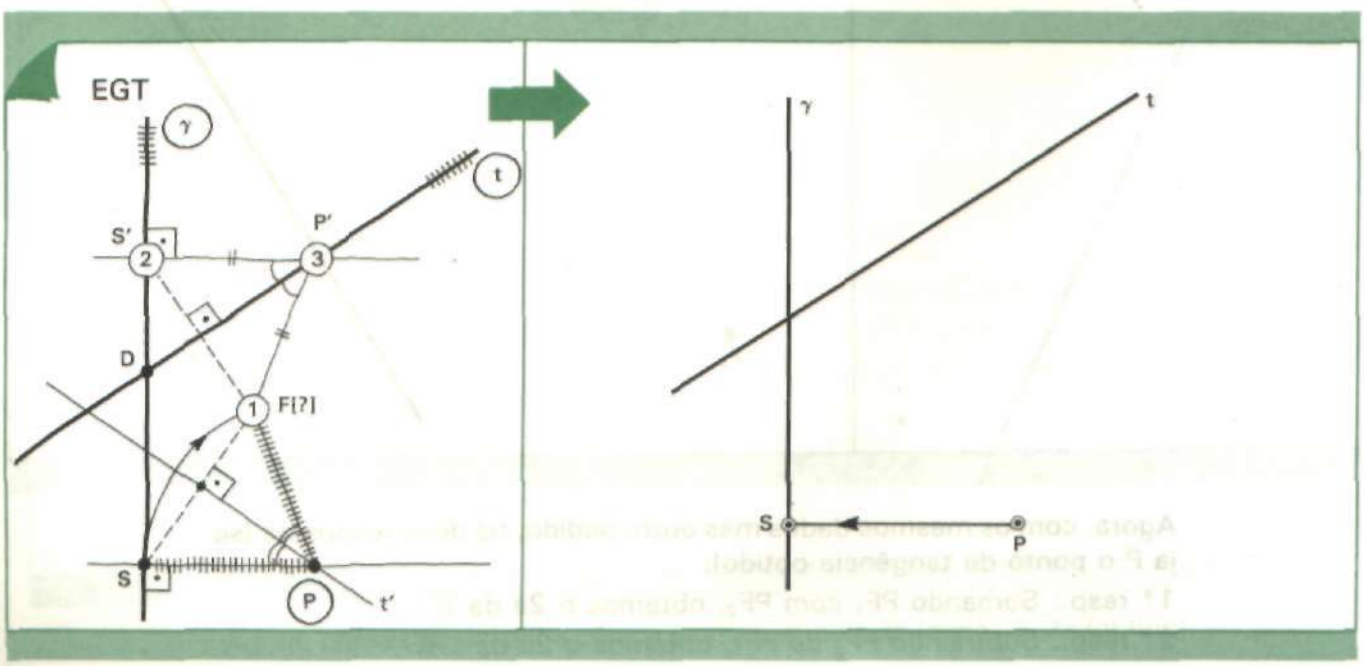
É impossível decorar roteiros por muito tempo; além disso, não estudamos só para fazer o próximo exame.

1º) Conclua a resolução, fazendo outro EGT (é outro problema) e lembre-se do "ovo" TRANSLAÇÃO: desloque a resposta (paralelamente a si própria) até que passe por um dos centros e verifique que essa nova reta poderá ser obtida, pois tangencia uma $\odot$ auxiliar. Depois de achada a reta auxiliar, obtém-se a procurada. Esse problema foi resolvido no livro 2, nº 530.

2º) Como se trata de um problema clássico (porque muitos problemas subseqüentes recaem nele), convém decorar a sua resolução.

315 EXERCÍCIO:

$\mathscr{P}\gamma$Pt; obter $\overline{F}$.



a. Como desenhar o EGT:

O EGT é feito de trás para diante.

As bolinhas estão na ordem em que o EGT foi desenhado (não é a ordem da construção gráfica para obter $\overline{F}$).

b. Como concluir a construção gráfica:

O QUE SE SABE? TM + DADOS.

No EGT, todos os dados (γ, $\overline{P}$ e $\overleftrightarrow{t}$) estão bem assinalados, como manda o código gráfico. Como $\overline{D}$ também veio dado, convém indicá-lo.

$\overline{S}$ não foi dado, mas é facilmente obtível; então "merece bolinha cheia".

O QUE SE QUER?

Queremos $\overline{F}$ [?] $\begin{cases} \text{a. Dista PS de } \overline{P} \Rightarrow \text{L1.} \\ \text{b. Falta uma 2ª linha...} \end{cases}$

SE FALTA,
ENTÃO P-R-O-C-U-R-E!

Se você já viu a 2ª linha, então passe para o nº 317.

316 Você sabe o que procurar?

Não é fácil dialogar com um estudante que não conhecemos. Sempre nos dirigimos a um "aluno médio", que não existe.

Eu sei o quê (é uma 2ª linha que passa por $\overline{F}$), mas não sei como procurá-la...

Você precisa "revelar" uma linha que passa por $\overline{P}$, para poder copiá-la.

Você quer o roteiro?...

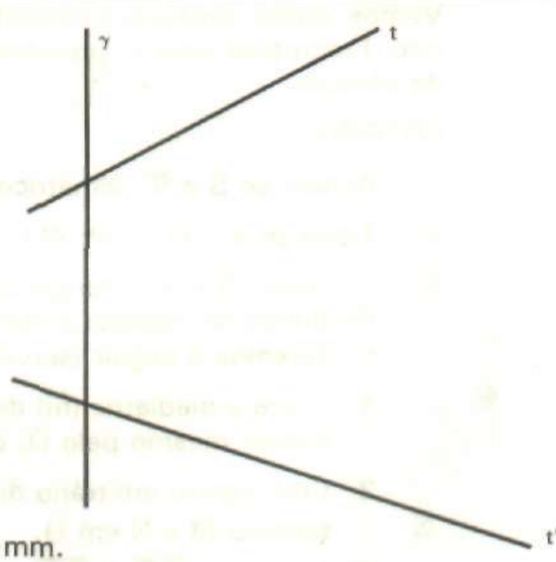
A única linha que "leva jeito" é a reta $\overleftrightarrow{DF}$... Será possível copiá-la? $\overline{D}$ está na mediatriz de $\overline{FS'}$... EURECA!... o ângulo P'DF é igual ao ângulo P'DS' que, afinal, é um ângulo que veio dado (em estado "latente"...).

317 EXERCÍCIO:

γtt'; obter $\overline{F}$.

(Como γ é reta, não é obrigatório dizer que é $\mathscr{P}$.)

EGT (facultativo):

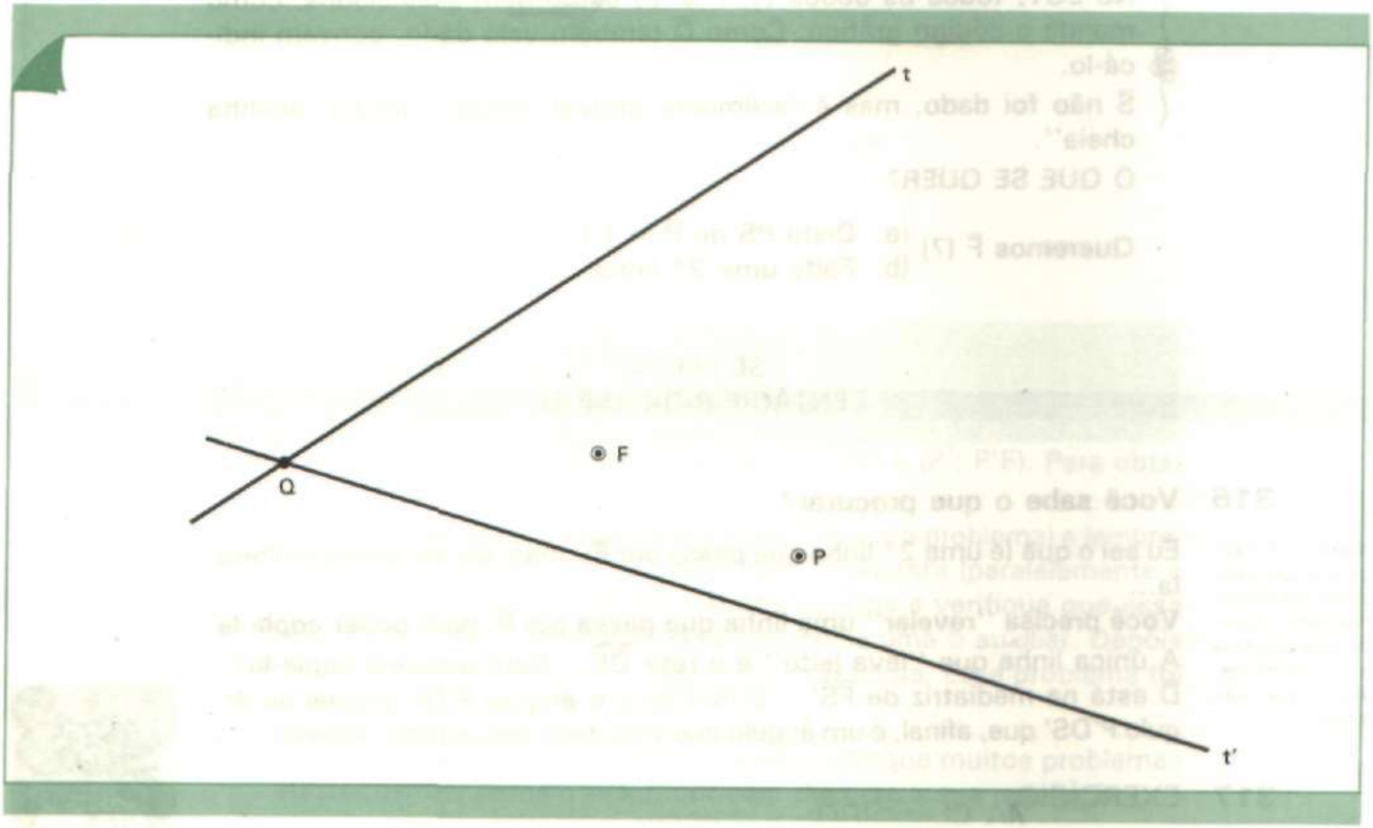


R: 2p ≃ 15 mm.

318 EXERCÍCIO:

Ftt'P; obter o outro foco $\overline{F'}$.

Como você está com a matéria "na ponta da língua [ou lápis]", o EGT é dispensável. Se você precisar resolver este problema daqui a alguns anos, então o EGT será necessário...



Como se conclui o roteiro:

Queremos o ponto F', mas não achamos *a priori* duas linhas que passam por ele.

Vamos, então, procurar a circunferência γ, cujo centro é o ponto incógnito. Procura-se uma ⊙, procurando "coisas" dela e com apoio na TM de cônicas.

ROTEIRO:

1º) Acham-se $\overline{S}$ e $\overline{S'}$, simétricos de $\overline{F}$ com relação à $\overleftrightarrow{t}$ e à $\overleftrightarrow{t'}$.

2º) Traça-se a ⊙ Θ = (P; PF).

3º) γ contém $\overline{S}$ e $\overline{S'}$ e tangencia Θ.
Recaímos no clássico problema PP'C (livro 2; nº 184), cujo roteiro repetiremos a seguir (serve de revisão):

1. Trace a mediatriz ($\overleftrightarrow{m}$) de $\overline{SS'}$ (não é coincidência... $\overleftrightarrow{m}$ tem que passar mesmo pelo $\overline{Q}$; descubra por quê...).
2. Com centro arbitrário de $\overleftrightarrow{m}$, trace uma ⊙ por $\overline{S}$ e $\overline{S'}$ e que determina $\overline{M}$ e $\overline{N}$ em Θ.
3. Ache R = $\overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{SS'}$; é o centro radical das ⊙s dadas, auxiliares e procuradas.

4. Trace a ⊙ de $\varnothing \overline{RP}$, obtendo $\overline{E}$ e $\overline{E'}$ (pontos de tangência) em Θ.

5. Ligue $\overline{E}$ e $\overline{E'}$ com $\overline{P}$, obtendo $\overline{F'}$ e $\overline{F'_c}$ em $\overleftrightarrow{m}$. Com o compasso, confira se $\overline{F'}$ e $\overline{F'_c}$ são, com precisão gráfica, os centros de ⊙s que passam por $\overline{S}$ e $\overline{S'}$ e tangenciam Θ, uma externa e a outra internamente.

319 **Respostas do problema anterior:**

Há duas, e somente duas, cônicas com um foco $\overline{F}$, passando por $\overline{P}$ e tangenciando $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$: uma tem o outro foco em $\overline{F'}$ e a outra tem o 2º foco em $\overline{F'_c}$. FF' e FF'_c são os (2a) de cada uma.
Aquela que tem 2a ≃ 64 mm é uma $\mathscr{E}$, porque o seu 2a é maior que o seu 2c ≃ 42 mm.
Aquela que tem 2a ≃ 49 mm é uma $\mathscr{H}$, porque tem 2c ≃ 52 mm.

320 PROCESSOS EXATOS OU APROXIMADOS:

Muitos problemas sobre cônicas poderiam ser resolvidos traçando (a mão livre) a cônica, mas seriam processos aproximados, geometricamente falando. Apesar de ser possível obter respostas até com maior precisão gráfica do que pelos processos teoricamente exatos, os processos aproximados não são aceitos num exame de DG, que é uma Geometria Gráfica.

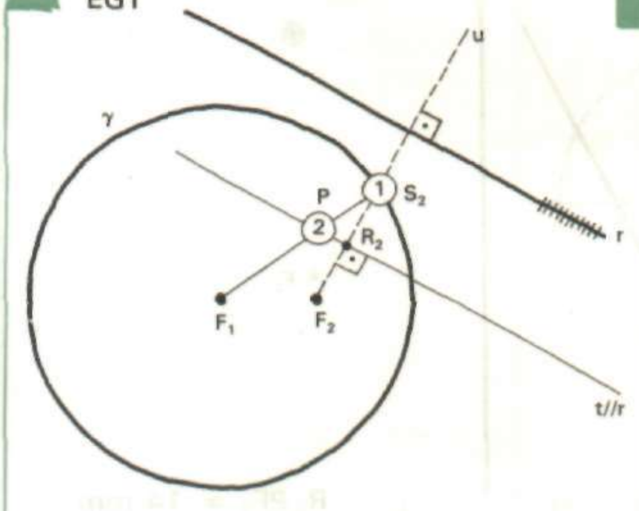
321 Nos próximos problemas, a cônica será dada por γ e $\overline{F_2}$. Caso não venha dada dessa forma, bastará obter esse par.

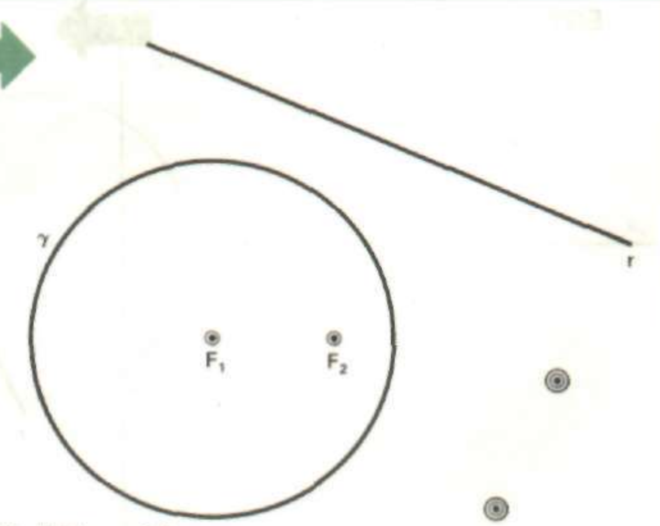
V PROBLEMAS CLÁSSICOS

322 1º PROBLEMA CLÁSSICO:

Obter as tangentes $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$ a uma cônica, sabendo que são paralelas a uma reta $\overleftrightarrow{r}$ dada; obter também os pontos $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ de tangência.

EGT





R: PP' ≃ 19 mm.

a. Como desenhar o EGT:

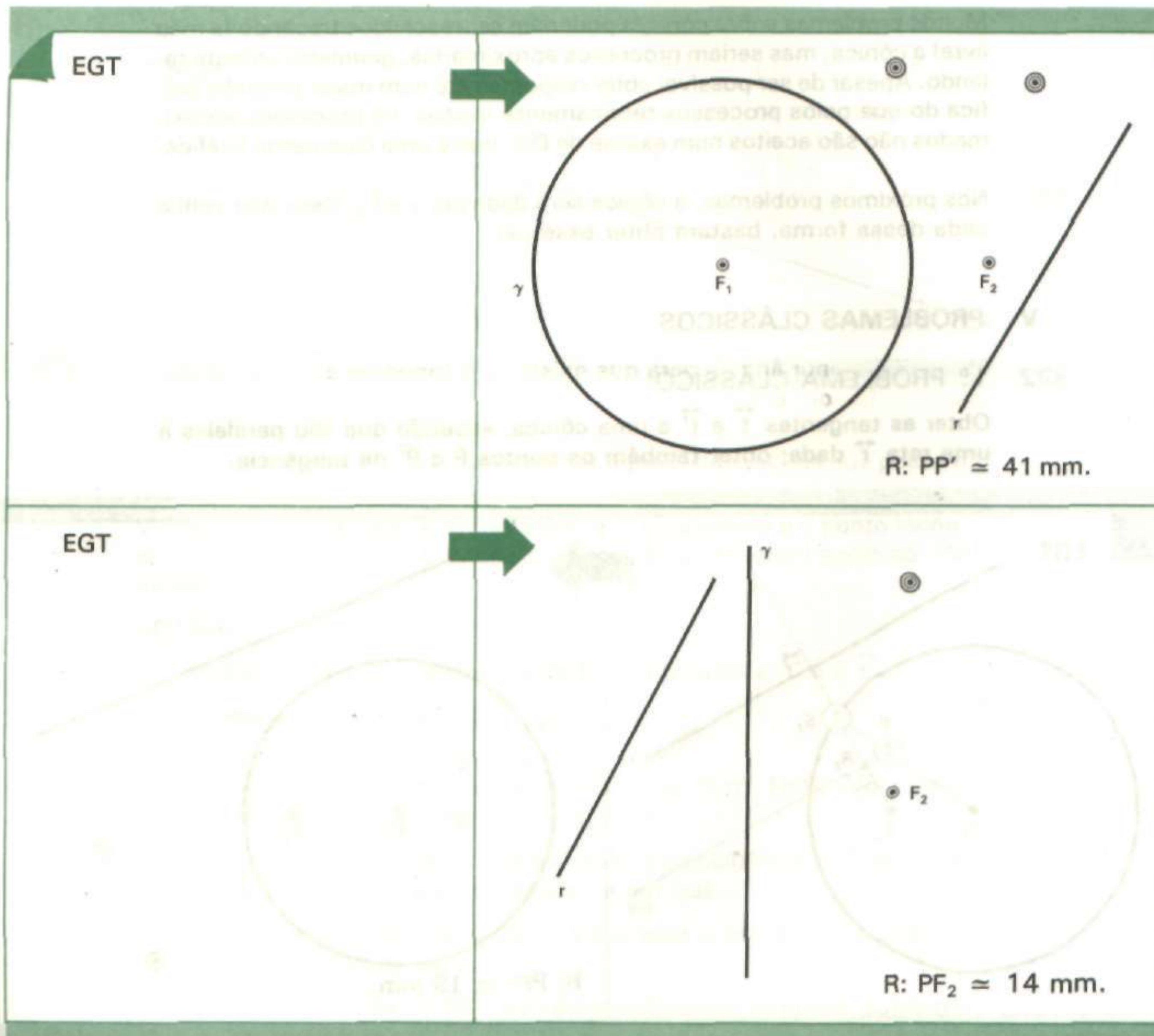
1º) Desenha-se "aquela" figura, nossa "velha" conhecida.

2º) Depois desenha-se $\overleftrightarrow{r}$ (dada) $/\!/$ $\overleftrightarrow{t}$.

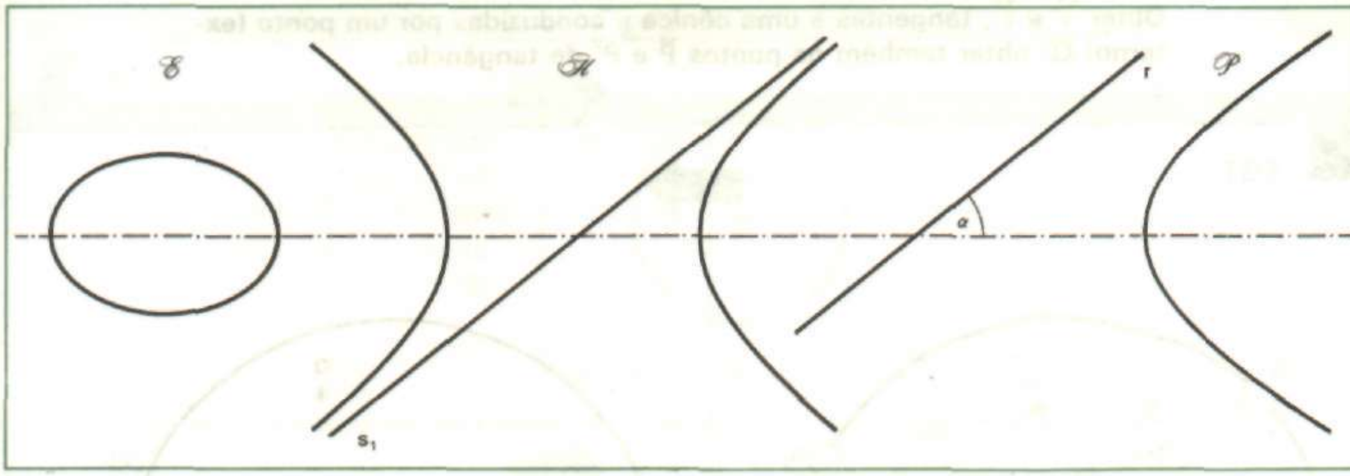
b. Como concluir o roteiro:

Queremos uma reta $\overleftrightarrow{t}$, da qual já temos a direção ($/\!/ \overleftrightarrow{r}$); só falta um único "pontinho"... Poderemos obter $\overline{R}_2$, mas é mais fácil obter $\overline{S}_2$ e depois traçar $\overleftrightarrow{t}$ = med. $\overline{F_2S_2}$. Obter também $\overline{P} = \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{F_1S_2}$.
No EGT, desenhamos uma só resposta e, ao obtê-la, surge a 2ª resposta $\overleftrightarrow{t'}$ = med. $\overline{F_2S_2'}$ com seu ponto de tangência $\overline{P'}$.

323 Na resolução do 1º problema clássico para a $\mathscr{E}$, demos uma "mãozinha"...
Agora você sozinho vai resolver esse 1º problema clássico para a $\mathscr{H}$ e para a $\mathscr{P}$.
Aconselhamos a fazer também o EGT.



324 DISCUSSÃO DO 1º PROBLEMA CLÁSSICO:



$\mathscr{E}$: Para qualquer α, sempre há duas (apenas) retas //s à $\overleftrightarrow{r}$ e tangentes à $\mathscr{E}$.

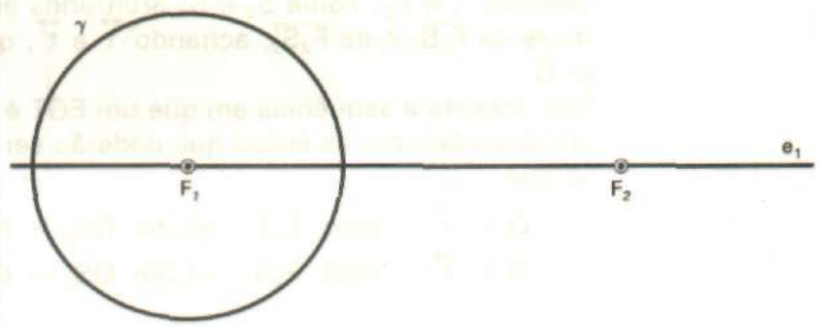
$\mathscr{P}$: Para qualquer α, sempre há uma só reta // à $\overleftrightarrow{r}$ e tangente à $\mathscr{P}$.

$\mathscr{H}$: Há um valor mínimo para α (quando $\overleftrightarrow{r} /\!/ \overleftrightarrow{s_1}$), abaixo do qual não há tangente à $\mathscr{H}$ que seja // à $\overleftrightarrow{r}$. De fato (desenho do nº 323), a reta $\perp$ à $\overleftrightarrow{r}$ por $\overline{F}_2$ poderá encontrar γ em dois, um ou nenhum ponto $\overline{S}_2$. No caso de $\overline{S}_2$ ser único, essa reta é tangente à γ e a mediatriz de $\overline{F_2S_2}$ é $\overleftrightarrow{s_1}$ (assíntota).

325 EXERCÍCIO:

Obtenha o menor ângulo para que exista uma tangente à $\mathscr{H}$ formando esse ângulo com o eixo $\overleftrightarrow{e_1}$.

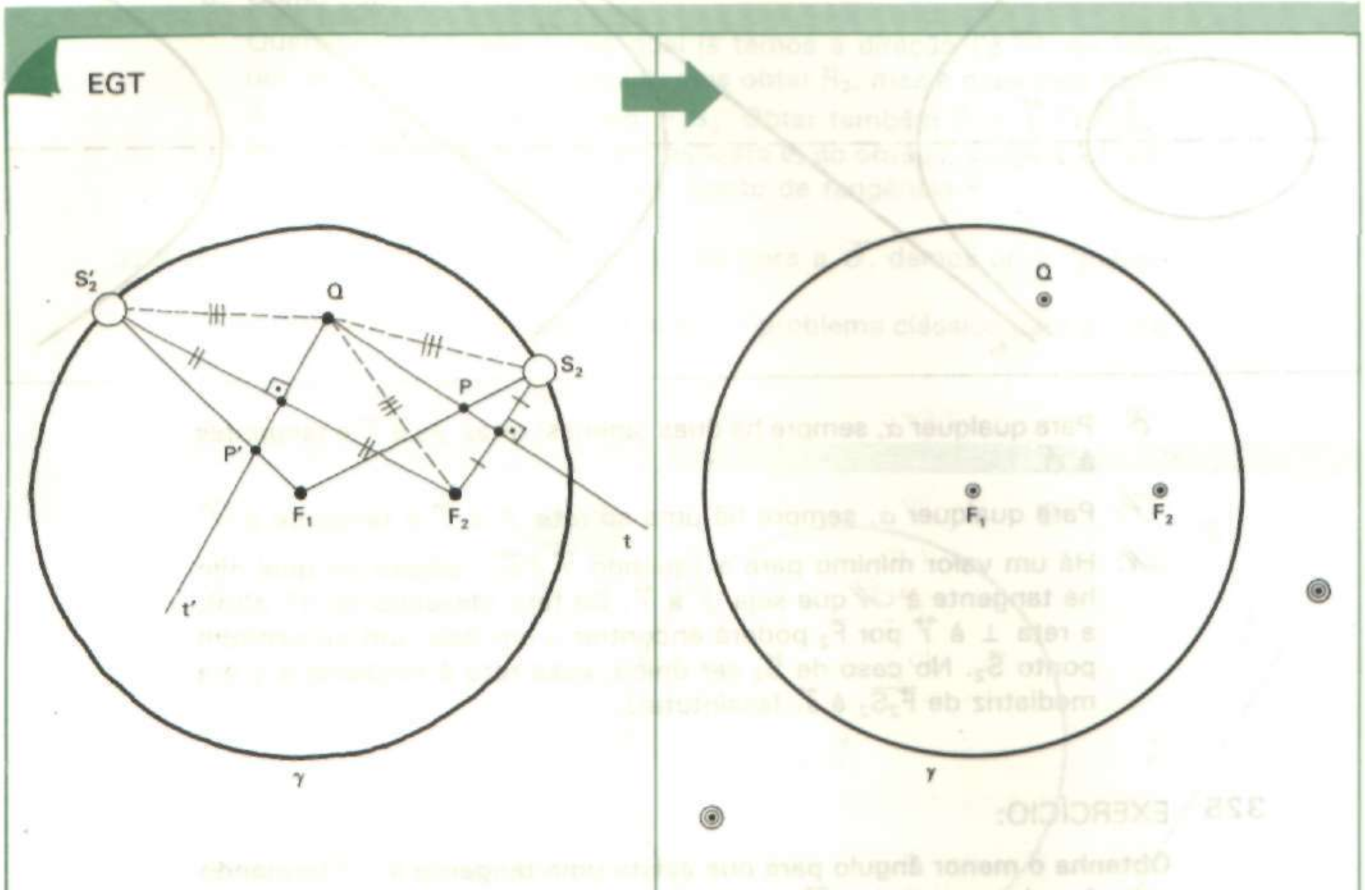
EGT



R: $\alpha \cong 69°$.

326 2º PROBLEMA CLÁSSICO:

Obter $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$, tangentes a uma cônica e conduzidas por um ponto (externo) $\overline{Q}$; obter também os pontos $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ de tangência.



R: $PP' \simeq 30$ mm.

a. **Como desenhar o EGT (desnecessário, pois basta "ver" $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$ no desenho dado):**

Desenhe γ e $\overline{F}_2$. Tome $\overline{S}_2$ e $\overline{S'_2}$ arbitrários em γ. Desenhe as mediatrizes de $\overline{F_2S_2}$ e de $\overline{F_2S'_2}$, achando $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$, que concorrem num ponto $\overline{Q}$.

Não importa a seqüência em que um EGT é feito. Queremos apenas um desenho com as linhas que poderão ser úteis. No caso, verifica-se que:

$$\overline{Q} \in \overleftrightarrow{t} = \text{med. } \overline{F_2S_2} \ \overset{[L3]}{\Rightarrow} \ QS_2 = QF_2 \quad \text{e}$$
$$\overline{Q} \in \overleftrightarrow{t'} = \text{med. } \overline{F_2S'_2} \ \overset{[L3]}{\Rightarrow} \ QS'_2 = QF_2.$$

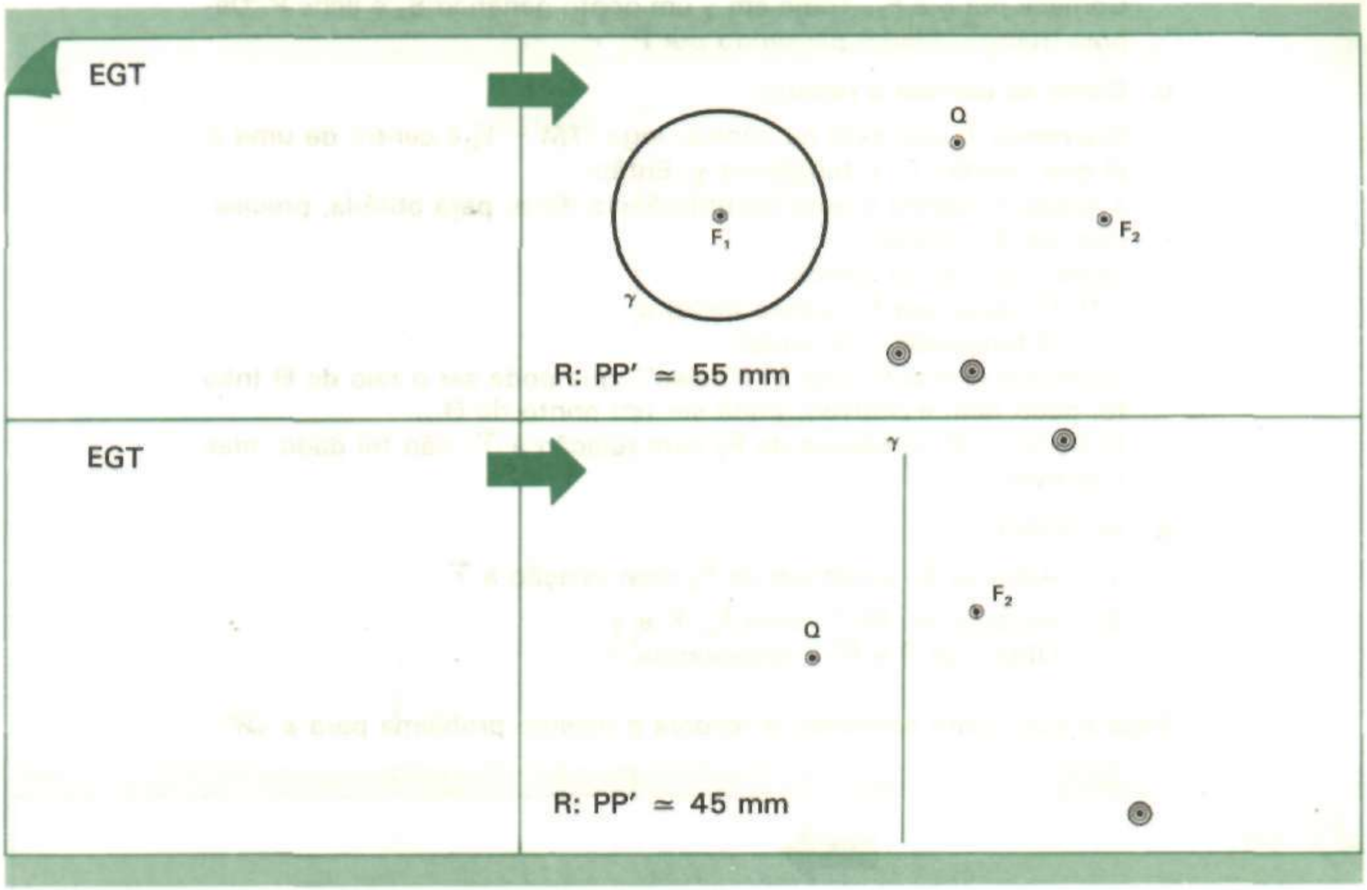
b. ROTEIRO:

1º) Trace o arco $(\overline{Q}; QF_2)$ obtendo $\overline{S}_2$ e $\overline{S'_2}$ em γ.

2º) Obtenha $\overleftrightarrow{t} = \text{med. } \overline{F_2S_2}$ e $\overleftrightarrow{t'} = \text{med. } \overline{F_2S'_2}$.

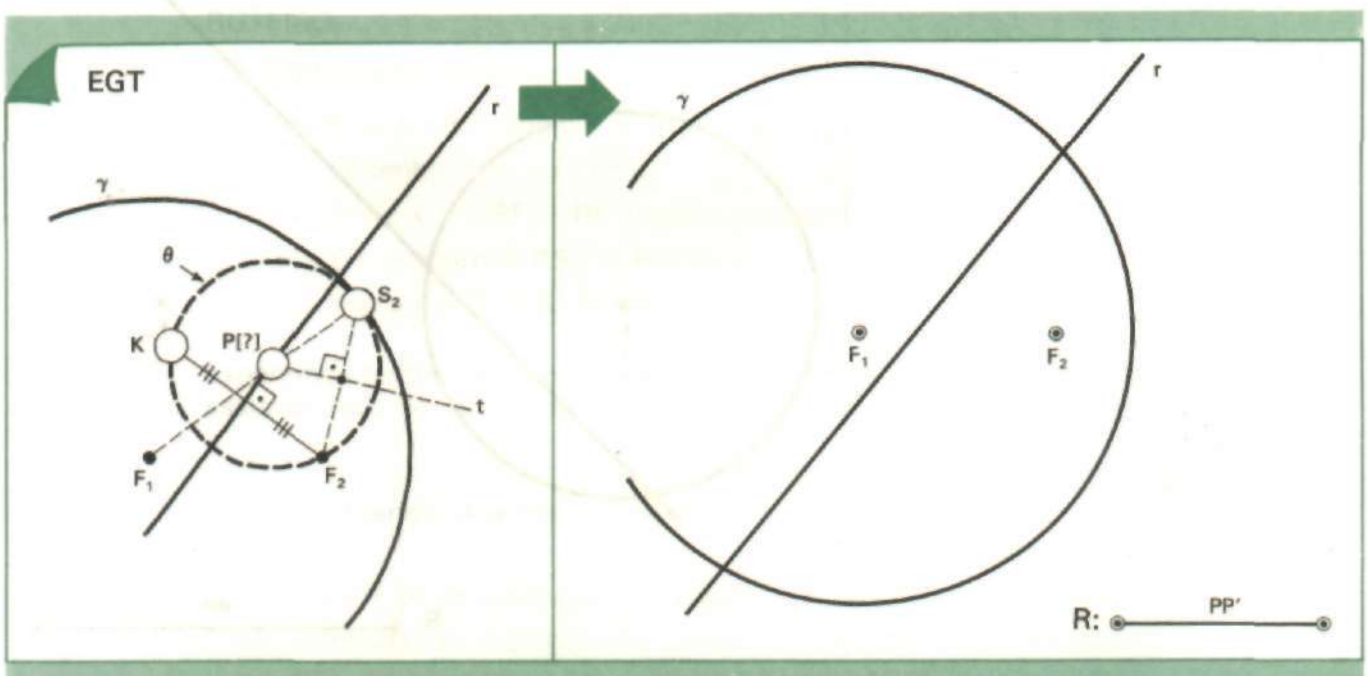
3º) Ligue $\overline{F}_1$ com $\overline{S}_2$ e com $\overline{S'_2}$ para obter os respectivos pontos de tangência $\overline{P} \in \overleftrightarrow{t}$ e $\overline{P'} \in \overleftrightarrow{t'}$.

327 **Resolva sozinho para a $\mathcal{H}$ e para a $\mathcal{P}$:**



328 3º PROBLEMA CLÁSSICO:

Obter os pontos $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ onde uma reta $\overleftrightarrow{r}$ dada encontra uma cônica dada, sem traçar a curva.



a. Como desenhar o EGT:

Comece por γ e $\overline{F}_2$. Tome em γ um ponto genérico $\overline{S}_2$ e ache $\overline{P}$. Depois trace $\overleftrightarrow{r}$ (dada) passando por $\overline{P}$.

b. Como se conclui o roteiro:

Queremos $\overline{P}$ que está na cônica, logo [TM − 1] é centro de uma ⊙ Θ que contém $\overline{F}_2$ e tangencia γ. Então:
a nossa incógnita é uma circunferência (Θ) e, para obtê-la, precisamos de 3 "coisas".

Saber o que procurar ajuda muito!

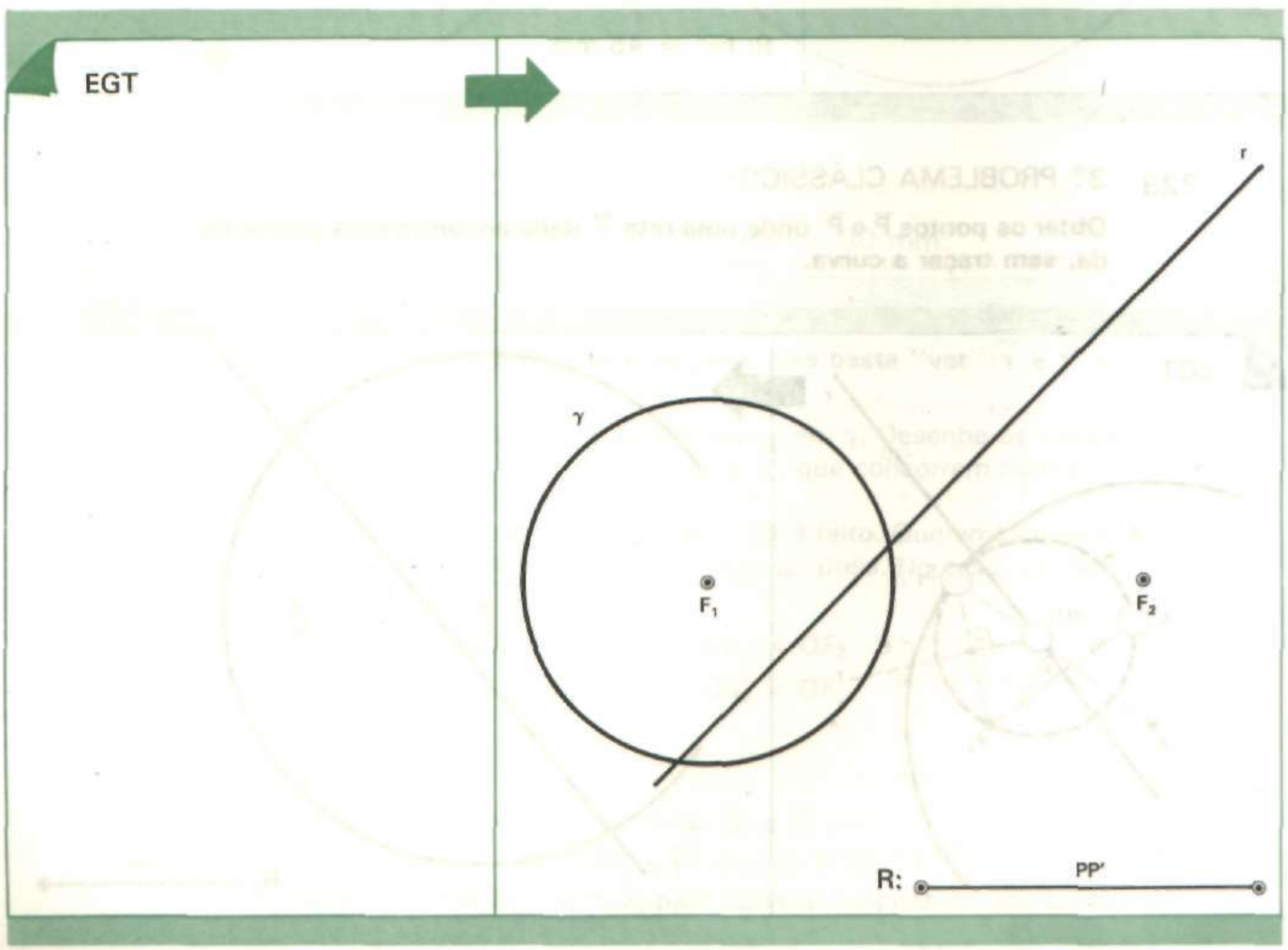
Duas "coisas" já temos:
1ª) *Θ passa por $\overline{F}_2$ (ponto dado) e*
2ª) Θ tangencia γ (⊙ dada).
Devemos procurar uma 3ª "coisa", que pode ser o raio de Θ (não foi dado nem é obtível), pode ser um ponto de Θ...
EURECA!... $\overline{K}$, simétrico de $\overline{F}_2$ com relação à $\overleftrightarrow{r}$, não foi dado, mas é obtível!

c. ROTEIRO:

1º) Acha-se $\overline{K}$, simétrico de $\overline{F}_2$ com relação à $\overleftrightarrow{r}$.

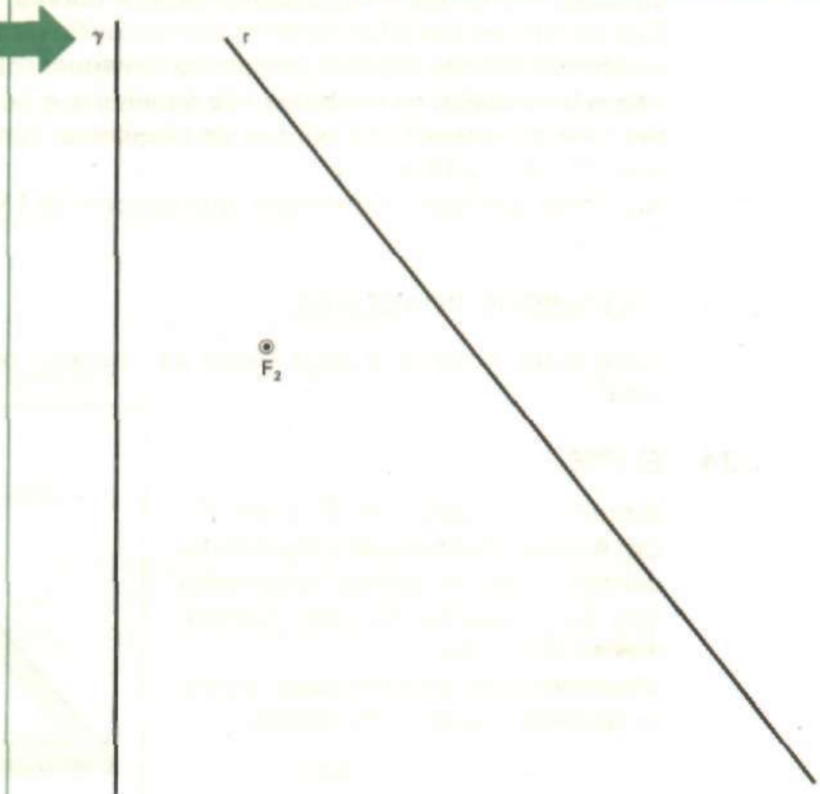
2º) Recai-se no PP'C, com $\overline{F}_2$, $\overline{K}$ e γ.
Obtêm-se $\overline{P}$ e $\overline{P'}$ ("clandestina").

329 Faça o EGT (para aprender) e resolva o mesmo problema para a $\mathscr{H}$:



330 Faça o EGT (para aprender) e ache os pontos $\overline{P}$ e $\overline{P'}$, intersecções da reta $\overleftrightarrow{r}$ com a parábola $(\gamma;\ \overline{F}_2)$.

EGT



R: PP' ≃ 106 mm

Como se trata de um problema clássico, daremos o

ROTEIRO:

1º) Obtenha $\overline{K}$, simétrico de $\overline{F}_2$ com relação à $\overleftrightarrow{r}$.

2º) Recai-se no PP't (pois γ é reta):

I. Obtenha $\overline{R} = \gamma \cap \overleftrightarrow{KF_2}$.

II. Ache $x = \sqrt{RF_2 \cdot RK}$ (média geométrica).

III. Em γ, marque $RS_2 = RS_2' = x$.

IV. Trace por $\overline{S}_2$ e $\overline{S_2'}$ as $\perp$s à γ, obtendo em $\overleftrightarrow{r}$ os pontos $\overline{P}$ e $\overline{P'}$.

331 Esperamos ter demonstrado, neste capítulo sobre as cônicas, como um assunto deve ser estudado:

Aprende-se a TM e aprende-se a concluir o restante.

A própria TM pode e deve ser concluída.

É DESSA FORMA QUE TODOS OS ASSUNTOS PODEM E DEVEM SER ESTUDADOS.

332 TRAÇADO DAS CÔNICAS:

Para o traçado (contínuo) das cônicas, há aparelhos sofisticados — e caros — chamados elipsógrafos, hiperbológrafos e parabológrafos, cada um baseado numa das propriedades dessas curvas.

Elas podem ser traçadas também com o auxílio de computadores gráficos. Utilizando apenas régua e compasso (e esquadros, para as $/\!\!/$s e $\perp$s), há vários processos; os melhores são aqueles que nos dão pares de tangentes com os respectivos pontos de tangência, um dos quais você já fez nos n.os 247, 249 e 251.

Achamos que basta saber esse, que decorre da TM — I e dá pontos e tangentes.

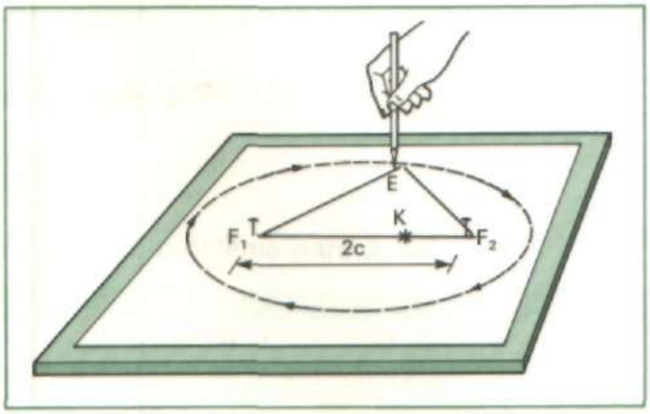
333 PROCESSOS "CASEIROS":

Você pode, convém e deve seguir as "bulas", pelo menos uma vez na vida:

334 ELIPSE:

Alfinetes cravados em $\overline{F}_1$ e em $\overline{F}_2$. Um fio fino, inextensível e flexível (fio dental), com as pontas amarradas (em $\overline{K}$) e resultando com comprimento $2c + 2a$.

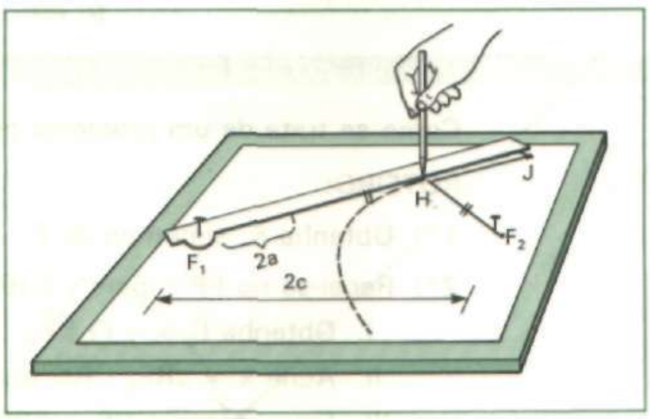
Mantendo o fio bem esticado, a ponta do lápis traçará uma elipse.



335 HIPÉRBOLE:

Uma régua com uma "orelha" furada ($\overline{F}_1$, $\overline{H}$ e $\overline{J}$ colineares) gira em torno de um alfinete cravado em $\overline{F}_1$. Um fio, de comprimento $(JF_1 - 2a)$, está preso num alfinete em $\overline{F}_2$ e numa tacha $\overline{J}$ cravada na régua.

Movimentando essa geringonça, a ponta do lápis traçará um ramo de uma hipérbole num papel fixo na prancheta. Para o outro ramo... mude a posição...

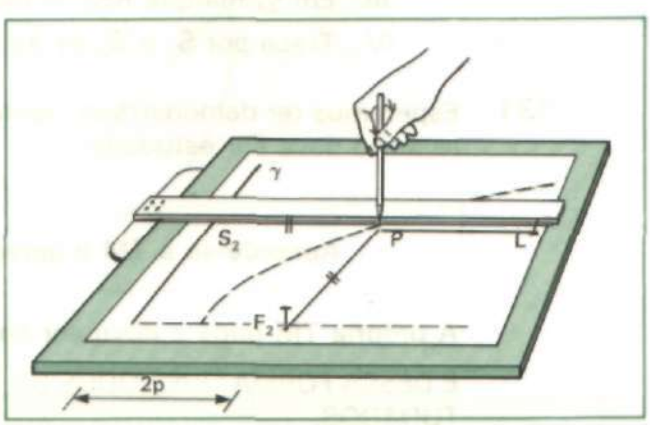


336 PARÁBOLA:

$\overleftrightarrow{\gamma}$ é $/\!\!/$ à borda da prancheta. O fio, de comprimento LS_2, está preso:

- na prancheta em $\overline{F}_2$ e na régua T em $\overline{L}$.

A ponta do lápis traçará "meia $\mathscr{P}$".



337 PROCESSOS ANALÍTICOS

ROTEIRO:

1º) Tome a equação da cônica que você quer desenhar (estudada em Geometria Analítica).

Em desenhos escolares, perto de 10 mm.

2º) Faça uma tabela dos pares ordenados de coordenadas (cartesianas, polares...) de vários pontos (não é o número de pontos que importa, mas sim a distância máxima entre eles, que deve ser tanto menor quanto maior for a curvatura da linha).

Você não terá as tangentes para guiar a mão.

3º) Num papel milimetrado, localize esses pontos e trace a curva, a mão livre, passando pelos mesmos.

338 GABARITOS DE PLÁSTICO (TRANSPARENTES)

Cada cônica tem o seu "andamento" específico.

Cuidado com os de má qualidade, cujas curvas não são cônicas, mas sim curvas que *parecem ser* cônicas.

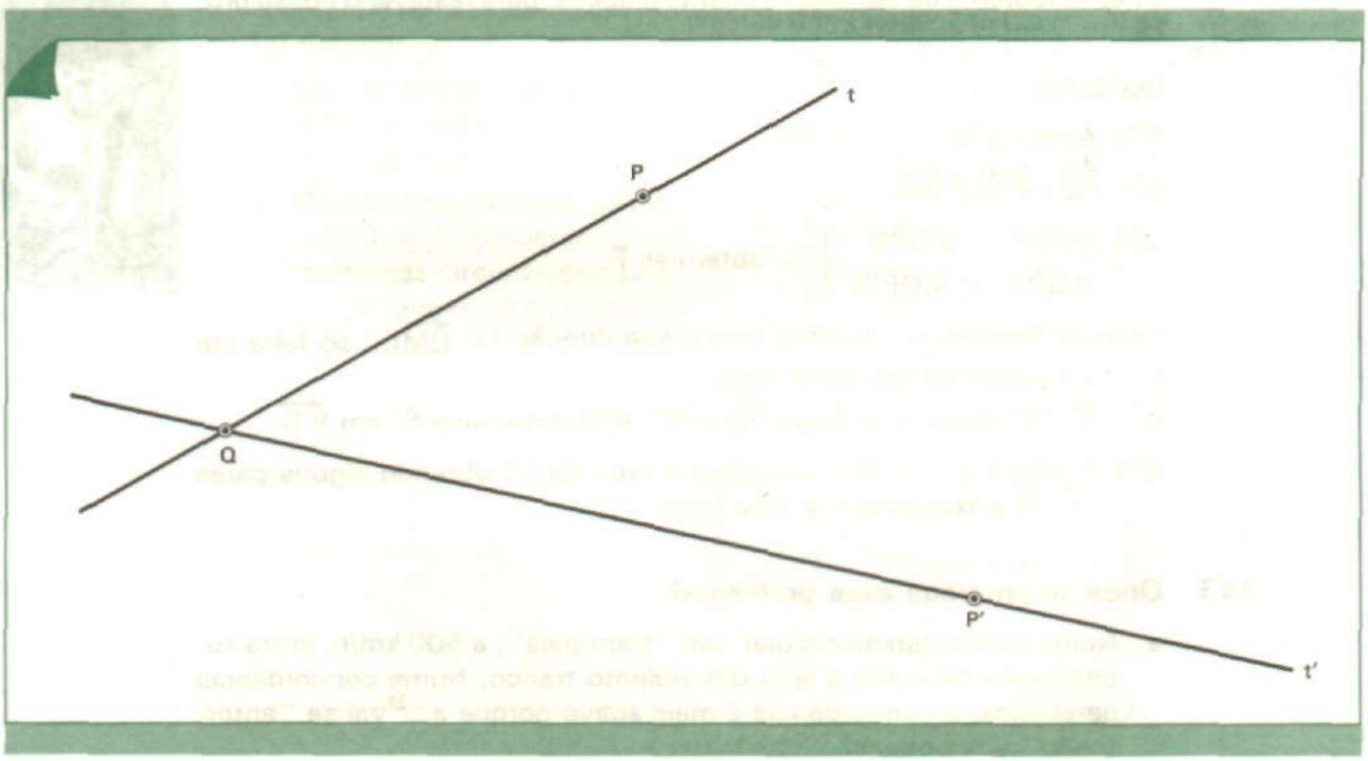
VI PROBLEMAS ESPECIAIS

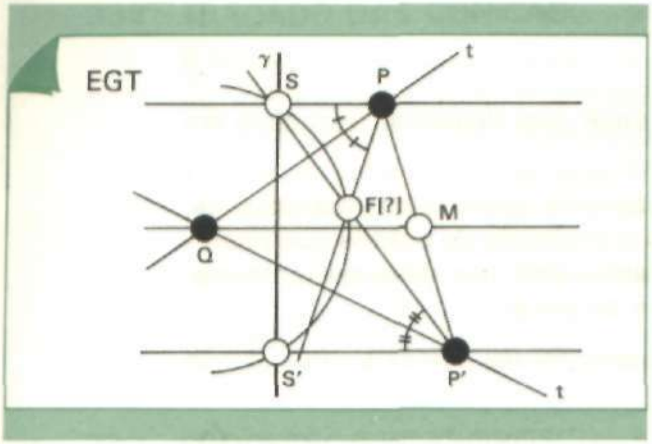
339 Há cerca de 25 séculos os geômetras vêm estudando as cônicas e pode-se imaginar quantas propriedades foram descobertas...
Com a TM que estudamos pode-se concluir qualquer uma dessas propriedades, mas não no curto prazo de um exame!

340 Estudaremos a seguir certos problemas que são muito empregados no estudo de matérias técnicas e no exercício da Engenharia e da Arquitetura.

341 PROBLEMA:

Concordar, nos pontos $\overline{P}$ e $\overline{P'}$, as retas $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$ por um arco de $\mathscr{P}$.





a. Como fazer o EGT:

1º) Comece pela resposta, que é a $\mathscr{P} = (\gamma; \overline{F})$.
Agora vamos "encaixar" os dados $\overleftrightarrow{t}$, $\overline{P}$, $\overleftrightarrow{t'}$, $\overline{P'}$ e $\overline{Q}$; "encaixar" significa obtê-los no EGT!

2º) Tome $\overline{S}$ e $\overline{S'}$ em γ e obtenha os pares $(\overleftrightarrow{t}; \overline{P})$ e $(\overleftrightarrow{t'}; \overline{P'})$.

3º) Assinale $\overline{Q}$, pois foi dado e não pode ser esquecido.

b. Como concluir o roteiro:

Queremos duas linhas que contêm $\overline{F}$. Desenhe no EGT as linhas que contêm $\overline{F}$; dará para copiar duas delas? Vejamos... O que mais sabemos? Estude o EGT... Qual figura é SPP'S'?... O que você sabe de trapézios? Base média... Ah..., o pt.m. $\overline{M}$ de $\overline{PP'}$ está "latente" e é obtível! E daí?... QS = QF = QS' [L3], logo existe um arco de ⊙ $(\overline{Q}$; QF), da qual $\overline{SS'}$ é corda... corda... pt.m. da corda... [PO] Ah!... $\overleftrightarrow{QM} \perp \gamma \Rightarrow \overleftrightarrow{QM} \parallel \overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{P'S'}$... E daí? $\overleftrightarrow{QM}$ é obtível... Traçando $\overleftrightarrow{PS}$ e $\overleftrightarrow{P'S'}$ paralelas à $\overleftrightarrow{QM}$, "surgem" os ∢s $S\hat{P}Q$ e $S'\hat{P'}Q$... EURECA!... poderemos copiar $\overleftrightarrow{PF}$ e $\overleftrightarrow{P'F}$, pois formam com $\overleftrightarrow{t}$ e $\overleftrightarrow{t'}$ os ângulos obtidos anteriormente.

342 É assim que se raciocina? Mas é muito difícil...

Jean-Victor Poncelet estudou com Monge (criador da Geometria Descritiva), era engenheiro do exército de Napoleão.

É assim que o grande geômetra J.-V. Poncelet (1867–1788 = 79a.) deve ter raciocinado quando "bolou" o TEOREMA DE PONCELET... Quem sabe esse teorema de cor simplesmente o aplica, para resolver o nosso problema, com o seguinte

Quanto tempo Poncelet gastou?...

ROTEIRO:

1º) Acha-se $\overline{M}$ = pt.m. $\overline{PP'}$.

2º) $\overleftrightarrow{PS} \parallel \overleftrightarrow{P'S'} \parallel \overleftrightarrow{QM}$.

3º) $\left.\begin{array}{l} ∢Q\hat{P}F = ∢Q\hat{P}S \\ ∢Q\hat{P'}F = ∢Q\hat{P'}S' \end{array}\right\} \Rightarrow$ obtêm-se $\overline{F}$.

Falta γ? Procure-a... você já tem a sua direção ($\perp \overleftrightarrow{QM}$)... só falta um ponto e podemos até obter dois:

4º) $(\overline{P}$; PF) determina $\overline{S}$ em $\overleftrightarrow{PS}$ e $(\overline{P'}$; P'F) determina $\overline{S'}$ em $\overleftrightarrow{P'S'}$.

5º) Tendo $\overline{F}$ e $\gamma = \overline{SS'}$, construa o arco de $\mathscr{P}$, obtendo alguns pares $(\overleftrightarrow{t}; \overline{P})$ e traçando-o a mão livre.

343 Onde se emprega esse problema?

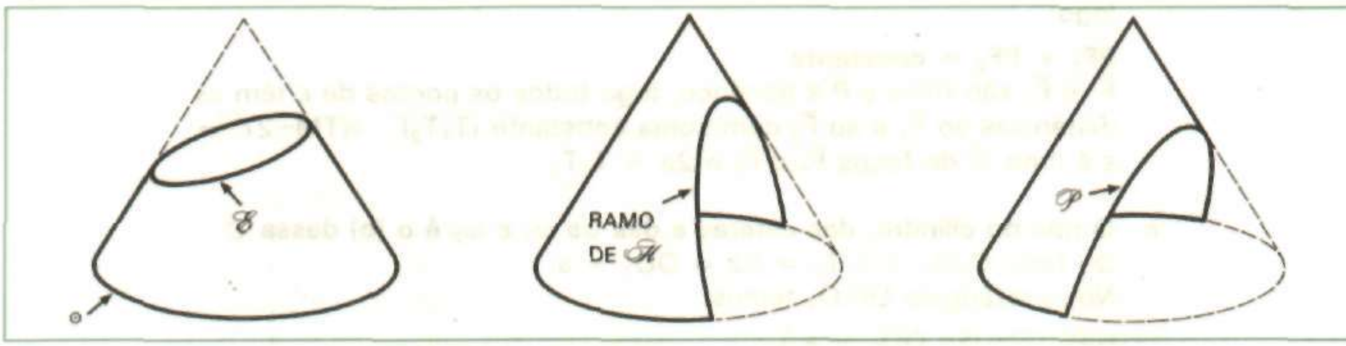
a. Numa concordância circular, um "trem-bala", a 500 km/h, entra subitamente na curva e leva um violento tranco. Numa concordância parabólica, a concordância é mais suave porque a $\mathscr{P}$ vai se "entortando" aos poucos.

b. No lançamento de um projétil, tendo-se a direção $\overleftrightarrow{t}$ e o ponto $\overline{P}$ de lançamento, a direção $\overleftrightarrow{t}$ e o ponto $\overline{P'}$ de chegada, pode-se traçar a trajetória, que é um arco de $\mathscr{P}$ concordante com $\overleftrightarrow{t}$ em $\overline{P}$ e com $\overleftrightarrow{t'}$ em $\overline{P'}$.

c. O diagrama dos momentos fletores de uma viga sujeita a uma carga uniforme é um arco de $\mathscr{P}$. Etc.

344 Por que as cônicas têm esse nome?

Porque são SECÇÕES de uma superfície CÔNICA (de revolução) por um plano:



Isso pode ser provado em Geometria.

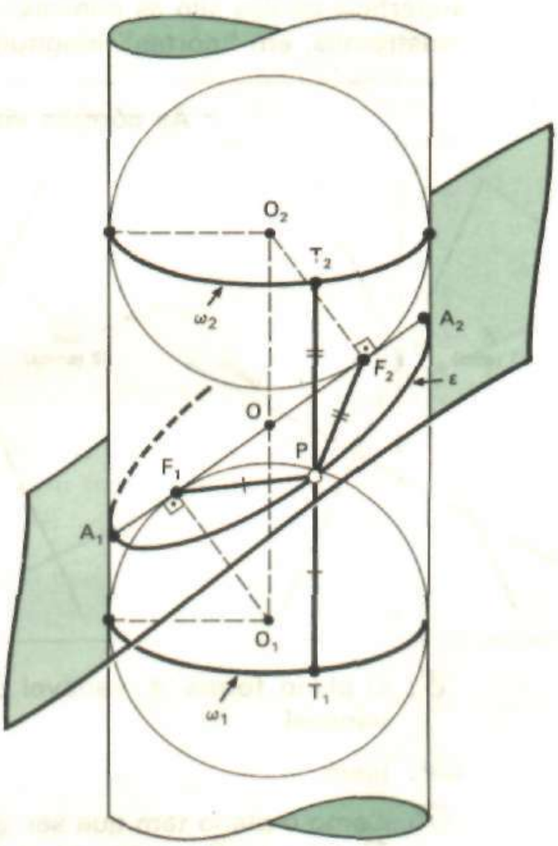
Foi assim que Menaecmus e depois o grande Apolônio estudaram as secções cônicas e assim se explica o fato de terem tantas propriedades comuns.

345 Há um problema muito conhecido, cuja demonstração geométrica pode ser feita como segue:

1ª PARTE:

a. O desenho ao lado (como uma foto) mostra:

1. Um cilindro circular reto de vidro e um plano seccionando-o numa curva ε (épsilon).
2. Duas esferas de vidro, de centros O_1 e O_2, tangentes ao cilindro nas circunferências ω_1 e ω_2 e tangentes ao plano em $\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$.



b. Vamos provar que ε é uma elipse $\mathscr{E}$: "Leia" a foto.

$\overline{PF_1}$ e $\overline{PT_1}$ são tangentes à esfera O_1 nos pontos $\overline{F}_1$ e $\overline{T}_1$, respectivamente.

$\overline{PF_2}$ e $\overline{PT_2}$ são tangentes à esfera O_2 nos pontos $\overline{F}_2$ e $\overline{T}_2$, respectivamente.

As tangentes à mesma esfera, conduzidas pelo mesmo ponto $\overline{P}$, têm o mesmo comprimento, logo:

$$\left.\begin{array}{l} PF_1 = PT_1 \\ \text{e } PF_2 = PT_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{somando}} PF_1 + PF_2 = PT_1 + PT_2 = T_1T_2$$

T_1T_2 é constante, por ser a altura de um cilindro de bases ω_1 e ω_2, logo:

$PF_1 + PF_2$ = constante.

$\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$ são fixos e $\overline{P}$ é genérico, logo todos os pontos de ε têm as distâncias ao $\overline{F}_1$ e ao $\overline{F}_2$ com soma constante (T_1T_2) $\xrightarrow{TM-2\mathscr{E}}$ *ε é uma $\mathscr{E}$ de focos $\overline{F}_1$ e $\overline{F}_2$ e $2a = T_1T_2$.*

c. O raio do cilindro, das esferas e das $\odot$s ω_1 e ω_2 é o (b) dessa $\mathscr{E}$.

De fato, $O_1O_2 = T_1T_2 = 2a \Rightarrow OO_1 = a$.

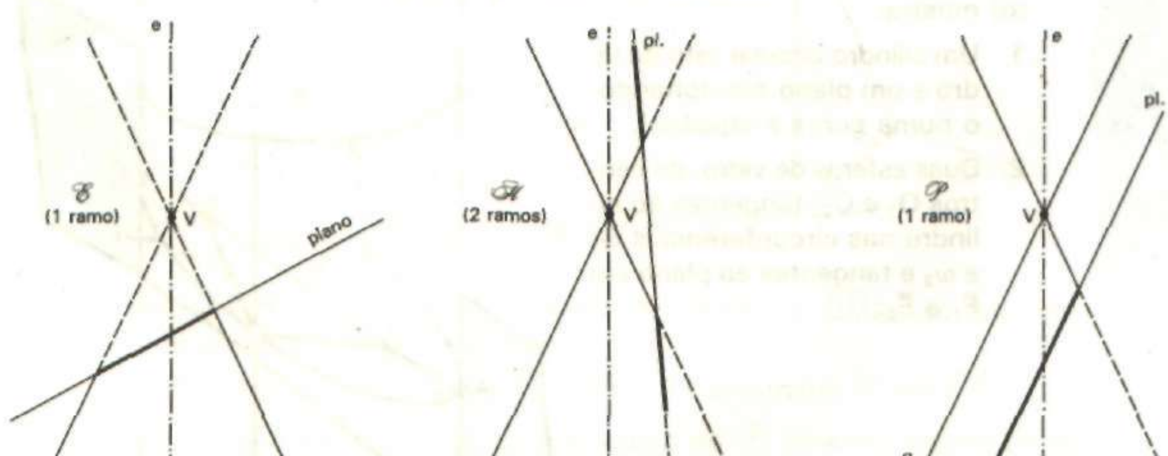
No $\triangle$ retângulo OF_1O_1 temos:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{HIPOTENUSA} & OO_1 = a \\ \text{CATETO} & OF_1 = c \end{array}\right\} \xrightarrow{TM-5\mathscr{E}} \text{CATETO } O_1F_1 = b.$$

O_1F_1 é o raio referido acima, c.q.d.

346 Com demonstrações análogas, prova-se que as secções planas de uma superfície cônica são as cônicas, como afirmamos no nº 344. Abaixo mostramos, em "cortes" longitudinais, os três casos:

As cônicas vistas "de perfil"



$\mathscr{E}$: O plano forma $\measuredangle$ variável com o eixo $\overleftrightarrow{e}$, logo a $\mathscr{E}$ tem forma variável.

$\mathscr{H}$: Idem.

$\mathscr{P}$: Como o plano tem que ser $/\!/ \overleftrightarrow{g}$, o plano forma $\measuredangle$ constante com $\overleftrightarrow{e}$, logo a $\mathscr{P}$ tem forma constante, como vimos no nº 288.

347 2ª PARTE:

O desenho I mostra uma superfície circular, de eixo $\overleftrightarrow{e}$, seccionada por dois planos, que formam entre si um ângulo α:

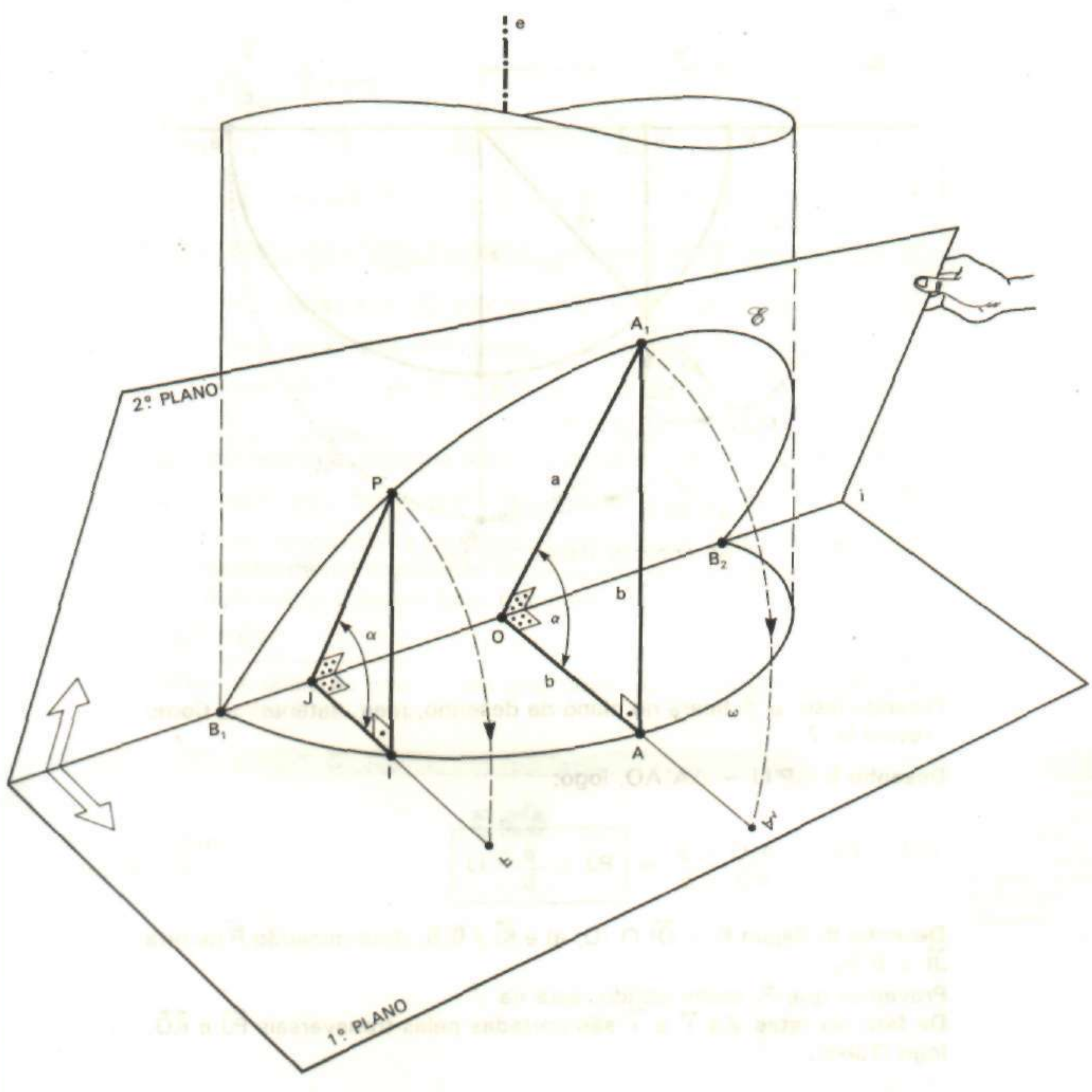
Lembrar que (b) é o raio do cilindro.

1º PLANO: $\perp \overleftrightarrow{e}$ e cuja secção é a circunferência $\omega = (\overline{O}; b)$.

2º PLANO: a secção é uma $\mathscr{E}$ de semidiâmetros $OB_1 = b$ e $OA_1 = a$.

Já provado na 1ª parte.

DESENHO I

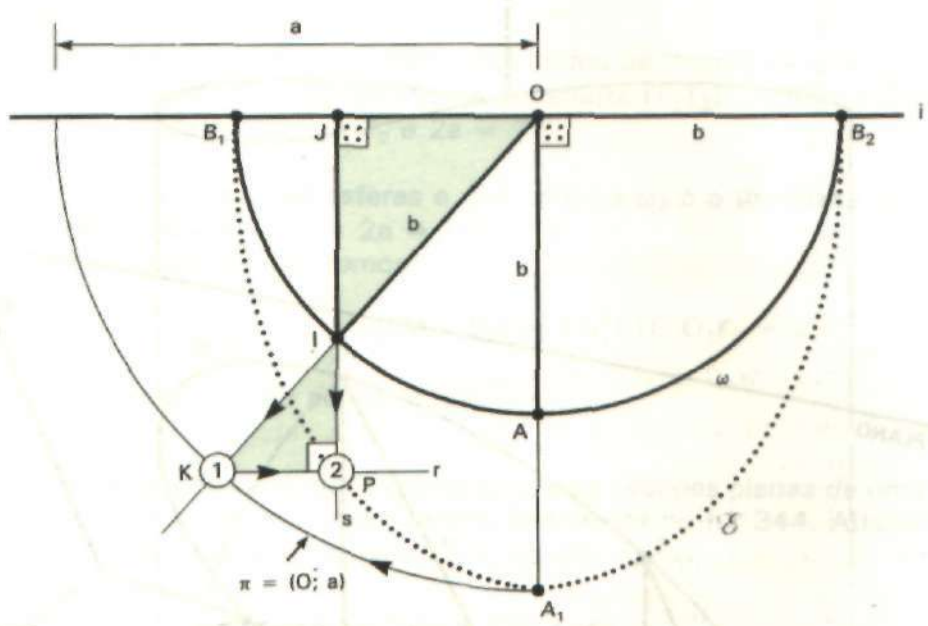


Façamos duas coisas:

1º) Giremos o 2º PLANO, em torno de $\overleftrightarrow{i}$ até coincidir com o 1º PLANO, que fica fixo.

2º) Coloquemos esses dois planos, agora coincidentes entre si, coincidindo também com o plano de desenho; com isso, consegue-se o desenho II abaixo:

DESENHO II



348 Fazendo isso, a $\mathscr{E}$ ficará no plano de desenho, mas "latente"... Como "revelá-la"?

O ponto $\overline{P}$ obtido girando o 2º plano e o ponto obtido traçando $\overleftrightarrow{r} /\!/ \overline{B_1B_2}$ coincidem. Então, como o 1º está na $\mathscr{E}$, o 2º também está, c.q.d.

Desenho I: $\triangle P'IJ \sim \triangle A_1'AO$, logo:

$$\frac{P'J = PJ}{IJ} = \frac{A_1'O = a}{AO = b} \Rightarrow \boxed{PJ = \frac{a}{b} \cdot IJ}$$

Desenho II: Sejam $\overline{K} = \overleftrightarrow{OI} \cap (O;\, a)$ e $\overrightarrow{Kr} /\!/ \overline{B_1B_2}$ determinando $\overline{P}$ na reta $\overleftrightarrow{JI} \perp \overline{B_1B_2}$.

Provemos que $\overline{P}$, assim obtido, está na $\mathscr{E}$:

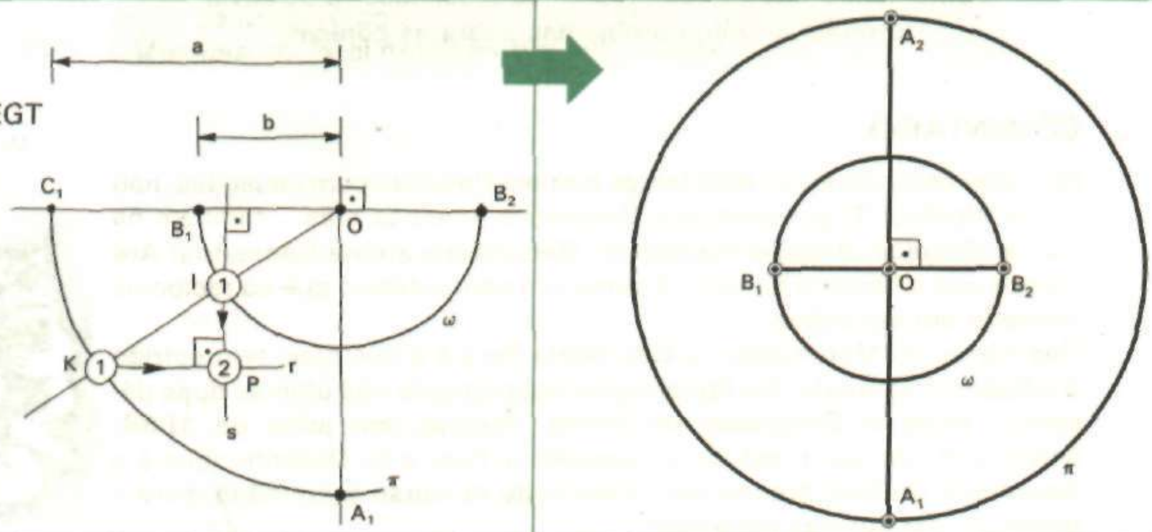
De fato, as retas $/\!/$ s $\overleftrightarrow{r}$ e $\overleftrightarrow{i}$ são cortadas pelas transversais $\overleftrightarrow{PJ}$ e $\overleftrightarrow{KO}$, logo [Tales]:

$$\frac{PJ}{IJ} = \frac{KO = a}{IO = b} \Rightarrow PJ = \frac{a}{b} \cdot IJ$$

349 PROBLEMA:

Construir uma $\mathscr{E}$, dados os diâmetros principais $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.

$\frac{1}{4}$ EGT



ROTEIRO (As ⊙s π = ($\overline{O}$; a) e ω = ($\overline{O}$; b) já estão desenhadas):

π chama-se ⊙ principal.
ω chama-se ⊙ secundária.

1º) Trace por $\overline{O}$ uma reta genérica, obtendo $\overline{I}$ e $\overline{K}$.

2º) Trace por $\overline{I}$ a reta $\overleftrightarrow{s} \perp \overline{B_1B_2}$ e por $\overline{K}$ a reta $\overleftrightarrow{r} \parallel \overline{B_1B_2}$, obtendo $\overline{P}$ em $\overleftrightarrow{s}$.

3º) Por simetria, obtenha mais 3 pontos da $\mathscr{P}$.

4º) Repita essa construção mais uma ou duas vezes.

Já temos os vértices e os pólos. Traçando por $\overline{O}$ 3 retas genéricas e convenientemente espaçadas entre si, obteremos um total de 16 pontos, suficientes para um bom traçado da curva.

350 EXERCÍCIO (ITA, MACK, POLI, etc.):

Obter os pólos de uma $\mathscr{E}$, da qual foram dados os vértices $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ e um ponto $\overline{P}$ da curva.

EGT
Convém repetir para decorar.

351 *Para facilitar o traçado da $\mathscr{E}$, pode-se também obter as tangentes, mas achamos desnecessário fazê-lo.*

352

Combinando entre si os problemas resolvidos, é possível formular infinitos problemas sobre as cônicas.

353 COMENTÁRIO:

Manual do examinador...

No curso secundário, os estudantes treinam trabalhar com equações, não só na *Álgebra, Trigonometria e Geometria Analítica mas... também na* Física, Química, Biologia (Genética), Geografia e até na Geometria! Até parece que o cérebro humano é como um computador, que só raciocina baseado em equações...

Das partes da Matemática, a Geometria Pura é a que mais tem sofrido a influência da moda. Foi literalmente abandonada nas últimas duas décadas. Após o Congresso de Viena, Áustria, em julho de 1988, estabeleceu-se que o estudo da Geometria Pura e do Desenho (que é a Geometria Gráfica) precisa ser incentivado no curso secundário, para o benefício das futuras gerações!

Nada temos contra as equações; isso seria burrice...

Apenas afirmamos que "nem só de equações vive o homem".

No estudo das cônicas, procuramos concluir a TM e as resoluções dos problemas, geométrica e não analiticamente.

MISCELÂNEA

354 Apresentaremos agora alguns exercícios que entrosam o assunto Cônicas com outros assuntos já estudados neste curso de DG.

355 CÔNICAS + HOMOTETIA (ou SEMELHANÇA):

Dada a FORMA + 1 COMPRIM. ⇒ **o** TAMANHO.
(obter)

Um problema se resolve por SEMELHANÇA, quando empregamos

- TRANSPORTE DE ÂNGULOS e/ou
- 4ª PROPORCIONAL.

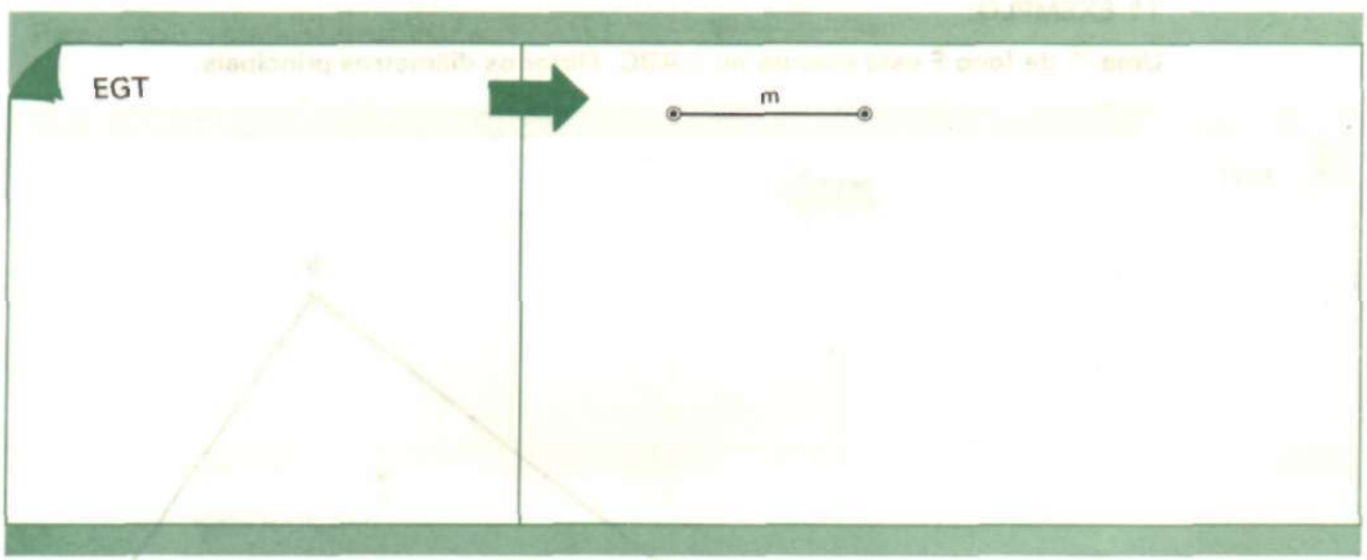
Um problema se resolve por HOMOTETIA, quando empregamos

- TRAÇADO DE PARALELAS.

Na verdade são a mesma coisa.

356 1º EXEMPLO:

Construir uma $\mathscr{E}$ de excentricidade e = $\frac{2}{3}$, dada a média geométrica $\overline{m}$ entre os semidiâmetros principais.



RESOLUÇÃO:

1º) Como temos a forma, podemos construir uma figura de tamanho arbitrário e semelhante à procurada. Basta construir a parte útil dessa figura.

2º) Acha-se o segmento homólogo de $\overline{m}$.

3º) Por semelhança ou por homotetia, acham-se os elemenos que se quer. No caso, γ e $\overline{F}_2$, para construir a $\mathscr{E}$ (não é obrigatório fazê-lo, neste exemplo).

357 2º EXEMPLO:

Os diâmetros principais de uma $\mathscr{E}$, de distância focal 60 mm, estão na razão áurea. Construir essa cônica.

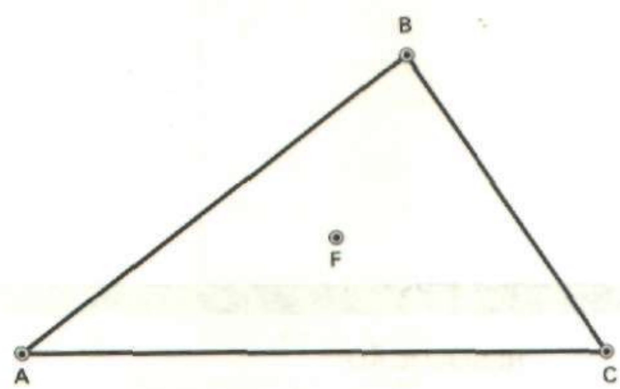
EGT

358 INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE FIGURAS:

1º EXEMPLO:

Uma $\mathscr{E}$ de foco $\overline{F}$ está inscrita no $\triangle ABC$. Obter os diâmetros principais.

EGT



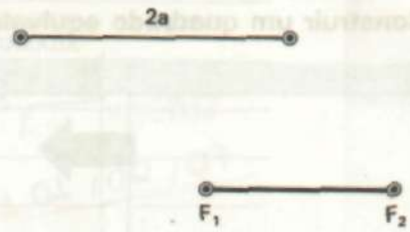
RESOLUÇÃO:

Uma cônica fica com a posição determinada por 5 "coisas" e foram dadas 5 : $\overline{F}$ (2) + 3 tangentes (3 × 1 = 3).

359 2º EXEMPLO:
Construir o $\triangle$ eqüilátero ABC circunscrito à $\mathscr{E} = (\overline{F_1F_2}; 2a)$, com o lado inferior $\overline{BC} \,/\!/\, \overline{F_1F_2}$.

EGT

Para concluir, pode-se desenhar a $\mathscr{E}$, inscrita num $\triangle$ eqüilátero.



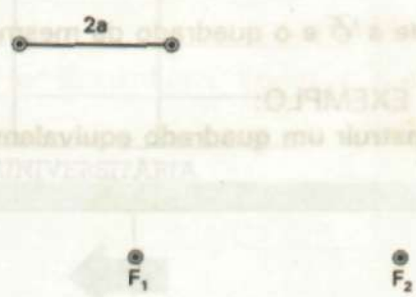
RESOLUÇÃO:

Sem traçar a $\mathscr{E}$, obter as tangentes que formam 60° com $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ e a tangente por $\overline{B}_2$.

360 3º EXEMPLO:
Construir o quadrado ABCD inscrito na $\mathscr{H} = (\overline{F_1F_2}; 2a)$.

EGT

Para concluir, pode-se desenhar a $\mathscr{H}$.



RESOLUÇÃO:

1º) Trace pelo centro $\overline{O}$ uma das retas que formam 45° com $\overleftrightarrow{F_1F_2}$.

2º) Obtenha os pontos $\overline{A}$ e $\overline{C}$ onde essa reta encontra a $\mathscr{H}$, sem traçá-la (é o 3º problema clássico; nº 329).

3º) Construa o quadrado de diagonal $\overline{AC}$.

Se déssemos o roteiro, operação por operação, estaríamos apenas mostrando como resolver um só entre milhares de problemas...

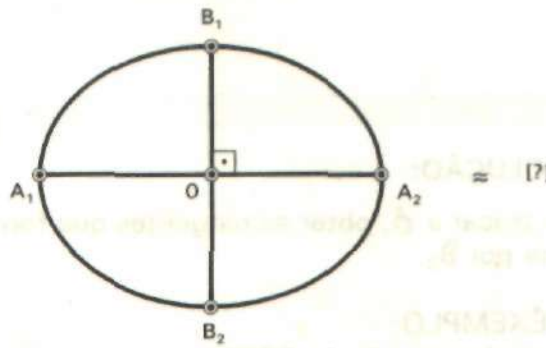
361 CÔNICAS + EQUIVALÊNCIA

A área de uma $\mathscr{E}$ é πab, sendo (a) e (b) os semidiâmetros principais. Não há demonstração elementar.

362 1º EXEMPLO:

Construir um quadrado equivalente à $\mathscr{E}$ dada.

EGT

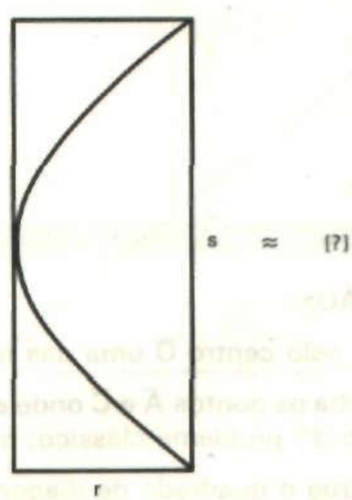


Pinte a $\mathscr{E}$ e o quadrado da mesma cor.

363 2º EXEMPLO:

Construir um quadrado equivalente ao segmento de $\mathscr{P}$ dado.

EGT



A área é $\frac{2}{3}$ rs (sem demonstração elementar).

Pinte as duas figuras da mesma cor.