

CURSO DE MÉTODOS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA
TEORÍA DE GRUPOS

H. FALOMIR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS - UNLP

NOTAS SOBRE REPRESENTACIONES MATRICIALES EN
MECÁNICA CUÁNTICA

1. EL CASO DE UNA PARTÍCULA EN UN POTENCIAL PAR

Consideremos una partícula cuántica que se desplaza en una línea recta bajo la influencia de un potencial par, $V(-x) = V(x)$.

El operador Hamiltoniano de ese sistema es

$$(1.1) \quad H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

definido sobre el subespacio denso $\mathcal{D}(H)$ de las funciones $\psi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$ que tienen una derivada segunda localmente sumable y tales que $H\psi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R})$.

Consideremos un **vector de estado** $\psi(x) \in \mathcal{D}(H)$, entonces

$$(1.2) \quad H\psi(x) = \chi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}).$$

Supongamos ahora que preparamos al sistema con la orientación contraria, de modo que su estado esté descrito por el vector $\psi(-x)$. Dado que el potencial es par, podemos referir el operador H al sistema de coordenadas invertido: sea $y = -x$, entonces

$$(1.3) \quad H_x = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d(-x)^2} + V(-x) = H_y,$$

de donde resulta que

$$(1.4) \quad H_x\psi(-x) = H_y\psi(y) = \chi(y) = \chi(-x).$$

Actualizado el 1 de octubre de 2005.

Podemos introducir un operador lineal \mathcal{P} definido sobre todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, que transforma los vectores según

$$(1.5) \quad \mathcal{P}\psi(x) = \psi(-x).$$

Nótese que $\mathcal{P} : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{D}(H)$.

La ecuación (1.5) puede ser interpretada como

$$(1.6) \quad H\mathcal{P}\psi(x) = \mathcal{P}\chi(x) = \mathcal{P}H\psi(x).$$

Es decir, $\forall \psi(x) \in \mathcal{D}(H)$, denso en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$, es

$$(1.7) \quad (\mathcal{P}H - H\mathcal{P})\psi(x) = \mathbf{0} \Rightarrow [\mathcal{P}, H] = \mathbf{0}.$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{P}^2\psi(x) = \mathcal{P}\psi(-x) = \psi(x)$, vemos que $\mathcal{P}^2 = I$, es decir, $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$. También se ve fácilmente que $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$.

En consecuencia, tenemos un grupo de operadores definidos sobre todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$,

$$(1.8) \quad \mathbf{G} = \{I, \mathcal{P}\} \approx \mathbb{Z}_2,$$

los que conmutan con H en el dominio denso $\mathcal{D}(H)$. Esto corresponde a un **grupo de simetrías** del sistema, puesto que las probabilidades de transición no cambian por la aplicación de esas transformaciones:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} (\mathcal{P}\psi_1, \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\mathcal{P}\psi_2) &= (\psi_1, \mathcal{P} \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\mathcal{P}\psi_2) = \\ &= (\psi_1, \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\psi_2). \end{aligned}$$

Consideremos ahora un autovector de H (que supondremos no degenerado),

$$(1.10) \quad H\psi_E(x) = E\psi_E(x).$$

Como el correspondiente subespacio característico es unidimensional, todo otro autovector correspondiente al mismo autovalor debe ser proporcional a ψ_E . Además, como \mathcal{P} conmuta con H , \mathcal{P} deja invariante ese subespacio característico de H , de modo que

$$(1.11) \quad H\mathcal{P}\psi_E = \mathcal{P}H\psi_E = E\mathcal{P}\psi_E.$$

En consecuencia, $\mathcal{P}\psi_E(x) = \psi(-x) = c\psi(x)$, donde c es una constante cuyo cuadrado es $c^2 = 1$. Depende del autovector considerado que $c = +1$ o $c = -1$, lo que corresponde al hecho bien conocido de que las autofunciones de Hamiltonianos pares son de paridad definida.

Pero desde el punto de vista de la teoría de grupos, se puede decir que la acción del operador \mathcal{P} en el subespacio característico considerado está **representada** por

la multiplicación por $+1$ o por -1 . Más precisamente, para aquellos subespacios para los cuales $c = 1$ queda establecido un homomorfismo entre \mathbf{G} y el grupo trivial \mathbb{Z}_1 , mientras que para aquellos en los cuales $c = -1$ se está en presencia de una representación *fiel* del grupo $\mathbf{G} \approx \mathbb{Z}_2$.

2. EL CASO DE UNA PARTÍCULA EN UN POTENCIAL CENTRAL

Consideremos ahora una partícula cuántica en \mathbb{R}^3 sometida a la influencia de un potencial central, $V = V(|\mathbf{x}|)$.

El operador Hamiltoniano para este problema es

$$(2.1) \quad H = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}} + V(|\mathbf{x}|),$$

donde $\Delta_{\mathbf{x}}$ es el Laplaciano en \mathbb{R}^3 . Su dominio de definición $\mathcal{D}(H)$ es el subespacio de las funciones $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ tales que $\Delta_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x})$ es localmente sumable y $H\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$.

Consideremos vector de estado $\psi(x) \in \mathcal{D}(H)$, entonces

$$(2.2) \quad H\psi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3).$$

Supongamos ahora que preparamos el sistema con una orientación distinta en el espacio, de modo que su estado esté representado por el mismo vector $\psi(y)$ pero respecto de un sistema de coordenadas rotado respecto del inicial. La relación entre las coordenadas de un mismo punto del espacio en el sistema de coordenadas inicial, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, y en el sistema rotado, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, es lineal: $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$, donde R es una matriz real de 3×3 . En componentes,

$$(2.3) \quad x_k = R_{kl} y_l.$$

Una rotación del sistema de coordenadas preserva las distancia entre el punto considerado y el origen, de modo que R es una matriz ortogonal:

$$(2.4) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (R\mathbf{y}, R\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, R^t R \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

lo que implica que $R^t R = \mathbf{1}_3$. Como R es una función continua de los ángulos de Euler, $\det R = +1$. En consecuencia, $R \in \mathbf{SO}(3)$, con $R^t = R^{-1}$.

La función de onda que describe al sistema físico rotado, referida al sistema de coordenadas inicial, es (suponiendo que se transforma como un **escalar**)

$$(2.5) \quad \tilde{\psi}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{y}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}).$$

Podemos ahora referir el Hamiltoniano al sistema de referencia rotado, teniendo en cuenta que el potencial es central. En efecto, para $\mathbf{y} = R^{-1}\mathbf{x}$ tenemos por un

lado $V(|\mathbf{x}|) = V(|\mathbf{y}|)$, mientras que

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_l} = (R^t)_{lk} \frac{\partial}{\partial y_l} = R_{kl} \frac{\partial}{\partial y_l}$$

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_l} R_{kl} R_{km} \frac{\partial}{\partial y_m} = \frac{\partial}{\partial y_l} \delta_{km} \frac{\partial}{\partial y_m} = \Delta_{\mathbf{y}}.$$

Entonces,

$$(2.7) \quad H_{\mathbf{x}} \psi(R^{-1}\mathbf{x}) = H_{\mathbf{y}} \psi(\mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y}) = \chi(R^{-1}\mathbf{x}).$$

En este caso también podemos introducir operadores definidos sobre $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ que, para cada $R \in \mathbf{SO}(3)$, transformen los vectores de estado según

$$(2.8) \quad \mathcal{R}(R)\psi(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}).$$

Nótese que $\mathcal{R}(R) : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{D}(H)$.

En esas condiciones, $\forall \psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}(H)$ denso en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, podemos reescribir la eq.(2.7) como

$$(2.9) \quad H\mathcal{R}(R)\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)\chi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)H\psi(\mathbf{x}).$$

En consecuencia,

$$(2.10) \quad \mathcal{R}(R)H - H\mathcal{R}(R) = [\mathcal{R}(R), H] = \mathbf{O}, \quad \forall R \in \mathbf{SO}(3).$$

Los operadores $\mathcal{R}(R)$ tienen las siguientes propiedades:

- $\mathcal{R}(R)$ es lineal:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(R)(\alpha\psi + \beta\chi)(\mathbf{x}) &= \alpha\psi(R^{-1}\mathbf{x}) + \beta\chi(R^{-1}\mathbf{x}) = \\ &= \alpha\mathcal{R}(R)\psi(\mathbf{x}) + \beta\mathcal{R}(R)\chi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

- $\mathcal{R}(R)$ es unitario¹:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}(R)\psi, \mathcal{R}(R)\chi) &= \int \psi(R^{-1}\mathbf{x})^* \chi(R^{-1}\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \\
 (2.12) \qquad \qquad \qquad &= \int \psi(\mathbf{y})^* \chi(\mathbf{y}) (\det R^{-1}) d^3\mathbf{y} = \\
 &= (\psi, \chi), \quad \forall \psi, \chi \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3), \text{ y } \forall R \in \mathbf{SO}(3).
 \end{aligned}$$

- El conjunto de los operadores $\mathcal{R}(R)$ con $R \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, respecto de la composición de operadores, se estructura como un grupo isomorfo a $\mathbf{SO}(3)$: sea $R_1 R_2 = R_3$, entonces, $\forall \psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2)\psi(\mathbf{x}) &= \mathcal{R}(R_1)(\mathcal{R}(R_2)\psi(\mathbf{x})) = \\
 &= \mathcal{R}(R_1)\psi(R_2^{-1}\mathbf{x}) = \psi(R_2^{-1}R_1^{-1}\mathbf{x}) = \\
 (2.13) \qquad \qquad \qquad &= \psi((R_1R_2)^{-1}\mathbf{x}) = \psi(R_3^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R_3)\psi(\mathbf{x}), \\
 &\Rightarrow \mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2) = \mathcal{R}(R_1R_2), \quad \forall R_1, R_2 \in \mathbf{SO}(3).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el grupo de operadores es homomorfo a $\mathbf{SO}(3)$ (constituyen una **representación lineal** de $\mathbf{SO}(3)$). Pero la relación entre ambos grupos es uno a uno. En efecto, si $\mathcal{R}(R_1) = \mathcal{R}(R_2)$ entonces, **para todo** $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ se tiene que

$$(2.14) \qquad \mathcal{R}(R_1)\psi(\mathbf{x}) = \psi(R_1^{-1}\mathbf{x}) = \psi(R_2^{-1}\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R_2)\psi(\mathbf{x}),$$

¹En particular, $\mathcal{R}(R)$ preserva las normas,

$$\|\mathcal{R}(R)\psi\|^2 = (\mathcal{R}(R)\psi, \mathcal{R}(R)\psi) = (\psi, \psi) = \|\psi\|^2.$$

Su rango es todo el espacio de Hilbert, pues $\forall \psi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(R R^{-1} \mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)\chi(\mathbf{x}), \text{ con } \chi(\mathbf{x}) = \psi(R \mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3).$$

También es inyectivo, ya que

$$\mathcal{R}(R)\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R)\chi(\mathbf{x}) \Rightarrow \mathcal{R}(R)(\psi(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \Rightarrow (\psi(\mathbf{x}) - \chi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$

Entonces, siendo $\mathcal{R}(R)$ una biyección de $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, tiene inversa. Además, por ser acotado, su adjunto está definido en todo $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, y coincide con su inversa:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}(R)\psi, \mathcal{R}(R)\chi) &= (\psi, \mathcal{R}^\dagger(R)\mathcal{R}(R)\chi) = (\psi, \chi), \quad \forall \psi(\mathbf{x}), \chi(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3) \\
 &\Rightarrow \mathcal{R}^{-1}(R) = \mathcal{R}^\dagger(R).
 \end{aligned}$$

y eso es posible sólo si $R_1 = R_2$. En consecuencia, el grupo de operadores así obtenido, que actúa sobre un espacio de funciones escalares a valores en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$, es *isomorfo* al grupo de rotaciones en el espacio, $\mathbf{SO}(3)$.

Dado que los operadores $\mathcal{R}(R)$ son unitarios y conmutan con el Hamiltoniano H , se trata de un **grupo de simetrías** del sistema cuántico. En efecto, las transformaciones que producen preservan las probabilidades de transición entre estados,

$$(2.15) \quad \begin{aligned} (\mathcal{R}(R)\psi, \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\mathcal{R}(R)\chi) &= (\psi, \mathcal{R}^\dagger(R) \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\mathcal{R}(R)\chi) = \\ &= (\psi, \mathcal{R}(R^{-1}) \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\mathcal{R}(R)\chi) = (\psi, \exp(-\frac{i}{\hbar}Ht)\chi). \end{aligned}$$

Consideremos ahora el subespacio característico correspondiente al autovalor E de H . En general, será degenerado con degeneración finita n . Entonces podemos seleccionar un conjunto de n autovectores linealmente independientes correspondientes al autovalor E , que generan ese subespacio:

$$(2.16) \quad H\psi_E^k(\mathbf{x}) = E\psi_E^k(\mathbf{x}), \text{ con } k = 1, 2, \dots, n.$$

Todo autovector de ese subespacio característico de H se puede expresar como una combinación lineal de los $\psi_E^k(\mathbf{x})$. Por otra parte, los operadores $\mathcal{R}(R)$ dejan invariante a ese subespacio, puesto que conmutan con el Hamiltoniano. En consecuencia, para cada $R \in \mathbf{SO}(3)$ y para cada $k = 1, \dots, n$,

$$(2.17) \quad \mathcal{R}(R)\psi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \psi_E^l(\mathbf{x})D_{lk}(R),$$

con ciertos coeficientes $D_{lk}(R)$ que dependen de la rotación considerada R .

Por aplicación sucesiva de las transformaciones en $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^3)$ asociadas a dos rotaciones, $R_1, R_2 \in \mathbf{SO}(3)$, obtenemos

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2)\psi_E^k(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^n \mathcal{R}(R_1)\psi_E^l(\mathbf{x})D_{lk}(R_2) = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \psi_E^m(\mathbf{x})D_{ml}(R_1)D_{lk}(R_2). \end{aligned}$$

Pero también es

$$(2.19) \quad \mathcal{R}(R_1)\mathcal{R}(R_2)\psi_E^k(\mathbf{x}) = \mathcal{R}(R_1R_2)\psi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^n \psi_E^m(\mathbf{x})D_{mk}(R_1R_2).$$

Y como los $\psi_E^m(\mathbf{x})$ son linealmente independientes, resulta

$$(2.20) \quad \sum_{l=1}^n D_{ml}(R_1)D_{lk}(R_2) = D_{mk}(R_1R_2),$$

o bien, definiendo matrices $D(R)$ de dimensión $n \times n$ cuyos elementos son los coeficientes $D_{lk}(R)$,

$$(2.21) \quad D(R_1)D(R_2) = D(R_1R_2).$$

En consecuencia, el conjunto de matrices $D(R)$ conforman un grupo homomorfo a $\mathbf{SO}(3)$. Es decir, constituyen una **representación matricial** de $\mathbf{SO}(3)$, cuyas matrices describen la acción de los operadores $\mathcal{R}(R)$ en el subespacio característico correspondiente al autovalor E .

Las anteriores consideraciones imponen (en el caso general) restricciones sobre los subespacios de degeneración de los autovalores del Hamiltoniano, pues establecen que deben ser **espacios de representación** de los grupos de simetría del sistema físico considerado (es decir, espacios en los que sea posible construir una representación matricial de esos grupos).

En efecto, no es *a-priori* evidente que dado un grupo pueda construirse una representación matricial de una dimensión arbitraria (más adelante veremos que la dimensión de las representaciones matriciales **irreducibles** del grupo $\mathbf{SO}(3)$ es impar, $n = 2j + 1$, con $j \in \mathbb{N}$).

En ese sentido, el conocimiento de las representaciones matriciales del grupo de simetrías de un Hamiltoniano permite prever, en alguna medida, el grado de degeneración de sus autovalores (es esperable que en el espectro de H se den diversas representaciones matriciales de esos grupos).

Volviendo al ejemplo anterior, señalemos que la elección de una base en el subespacio característico correspondiente al autovalor E de H es arbitraria. Supongamos que adoptamos un nuevo sistema completo de n autofunciones de H ,

$$(2.22) \quad H\chi_E^k(\mathbf{x}) = E\chi_E^k(\mathbf{x}), \text{ con } k = 1, 2, \dots, n.$$

relacionadas con las anteriores por

$$(2.23) \quad \psi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \chi_E^l(\mathbf{x})A_{lk},$$

donde la matriz $A = (A_{lk})$ es regular. Entonces, la relación inversa es

$$(2.24) \quad \chi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \psi_E^l(\mathbf{x})A_{lk}^{-1}.$$

La acción de los operadores $\mathcal{R}(R)$ sobre los vectores de la nueva base es

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(R)\chi_E^k(\mathbf{x}) &= \sum_{l=1}^n \mathcal{R}(R)\psi_E^l(\mathbf{x})A_{lk}^{-1} = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \psi_E^m(\mathbf{x})D_{ml}(R)A_{lk}^{-1} = \\ &= \sum_{p=1}^n \chi_E^p(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n A_{pm}D_{ml}(R)A_{lk}^{-1}. \end{aligned}$$

Pero definiendo matrices D' como se hizo antes, también tenemos

$$(2.26) \quad \mathcal{R}(R)\chi_E^k(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^n \chi_E^p(\mathbf{x})D'_{pk}(R),$$

de modo que las matrices de la nueva representación matricial se obtienen de las anteriores por una transformación de similitud:

$$(2.27) \quad D'(R) = AD(R)A^{-1}, \quad \forall R \in \mathbf{SO}(3),$$

donde A no depende de R . Nótese que ambas representaciones describen **la misma transformación de vectores** en el subespacio característico del autovalor E , pero referidas a dos bases distintas.

Dos representaciones matriciales que pueden obtenerse una de la otra por una transformación de similitud se dicen **equivalentes**.

También es posible elegir un sistema ortonormal como base del subespacio considerado. En ese caso,

$$(2.28) \quad (\psi_E^k(\mathbf{x}), \psi_E^l(\mathbf{x})) = \delta_{kl}.$$

Y como los operadores de la representación lineal de $\mathbf{SO}(3)$ antes construida son unitarios,

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \delta_{kl} &= (\mathcal{R}(R)\psi_E^k(\mathbf{x}), \mathcal{R}(R)\psi_E^l(\mathbf{x})) = \\ &= \left(\sum_{p=1}^n \psi_E^p(\mathbf{x})D_{pk}(R), \sum_{q=1}^n \psi_E^q(\mathbf{x})D_{ql}(R) \right) = \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n D_{pk}(R)^* (\psi_E^p(\mathbf{x}), \psi_E^q(\mathbf{x})) D_{ql}(R) = \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n D_{pk}(R)^* \delta_{pq} D_{ql}(R) = \sum_{p=1}^n D_{pk}(R)^* D_{pl}(R), \end{aligned}$$

es decir, las matrices $D(R)$ son unitarias,

$$(2.30) \quad D^\dagger(R)D(R) = \mathbf{1}_n, \quad \forall R \in \mathbf{SO}(3).$$

En consecuencia, referida a una base ortonormal, la representación obtenida es **unitaria**.

Señalemos finalmente que, como $[\mathcal{R}(R), H] = \mathbf{O}$, aquellos observables que se expresen como función de los operadores $\mathcal{R}(R)$ únicamente son **constantes de movimiento**, de modo que cada grupo de simetrías tiene asociado un cierto número de magnitudes conservadas.

En el subespacio característico correspondiente al autovalor E , que es invariante frente al grupo de transformaciones, esos observables se expresan en términos de las matrices $D(R)$ únicamente. De ese modo, de ellas depende un cierto conjunto de números cuánticos adicionales que permiten distinguir entre los diversos autovectores de H correspondientes al autovalor E .

3. GRUPOS DE SIMETRÍAS

Desde un punto de vista más general, diremos que una operación que se realiza sobre un sistema físico (que no necesariamente involucra un cambio de coordenadas) es una **operación de simetría** si ella no afecta el resultado de las mediciones que se efectúen sobre el sistema. Cuando estas operaciones se estructuren como un grupo hablaremos de **grupo de simetrías**.

En Mecánica Cuántica, a cada estado de un sistema físico le corresponde un vector de norma 1 en un espacio de Hilbert, $\psi \in \mathcal{H}$, definido a menos de una fase arbitraria. Frente a una operación de simetría sobre el sistema físico el vector de estado cambia según $\psi \rightarrow \psi' \in \mathcal{H}$. Podemos pensar que esa transformación es efectuada por la aplicación de un operador \mathcal{U} definido sobre \mathcal{H} , que establece la correspondencia $\psi' = \mathcal{U}\psi$.

Ahora bien, si se trata de una simetría, esa transformación no afecta las probabilidades de transición entre estados, de modo que \mathcal{U} debe preservar los módulos de los productos escalares,

$$(3.1) \quad |(\chi', \psi')| = |(\mathcal{U}\chi, \mathcal{U}\psi)| = |(\chi, \psi)|, \quad \forall \psi, \chi \in \mathcal{H}.$$

Esa igualdad se satisface trivialmente si \mathcal{U} es un operador **lineal y unitario**, en cuyo caso

$$(3.2) \quad (\mathcal{U}\chi, \mathcal{U}\psi) = (\chi, \psi).$$

Pero no es esa la única posibilidad. Existe un teorema debido a Wigner que establece que siempre es posible elegir las fases (arbitrarias) de los vectores de estado normalizados de modo tal que se dé uno de los siguientes casos,

- \mathcal{U} es lineal y unitario:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}(a\psi + b\chi) &= a\mathcal{U}\psi + b\mathcal{U}\chi, \\ (\mathcal{U}\psi, \mathcal{U}\chi) &= (\psi, \chi). \end{aligned}$$

- \mathcal{U} es antilineal y unitario (**antiunitario**)²:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{U}(a\psi + b\chi) &= a^*\mathcal{U}\psi + b^*\mathcal{U}\chi, \\ (\mathcal{U}\psi, \mathcal{U}\chi) &= (\psi, \chi)^*. \end{aligned}$$

No obstante, sólo el caso de transformaciones que involucran la inversión temporal están realizadas en términos de operadores antiunitarios. Dejando de lado ese caso muy particular, sólo tendremos que considerar **representaciones lineales** de grupos, es decir, transformaciones del sistema físico realizadas en el espacio de Hilbert en términos de operadores lineales y unitarios.

Consideremos dos elementos de un grupo G , $g_1 \cdot g_2 = g_3 \in G$. Cada uno de esos elementos tendrá asociado un operador lineal $\mathcal{U}(g)$ sobre \mathcal{H} , de modo que por la aplicación sucesiva de dos transformaciones al vector de estado $\psi \in \mathcal{H}$ obtenemos

$$(3.5) \quad \mathcal{U}(g_1)\mathcal{U}(g_2)\psi = \mathcal{U}(g_1)(\mathcal{U}(g_2)\psi) = \chi,$$

mientras que aplicando el operador asociado a g_3 (que corresponde a la misma operación física sobre el sistema)

$$(3.6) \quad \mathcal{U}(g_1 \cdot g_2)\psi = \chi'.$$

Los vectores χ y χ' representan el mismo estado del sistema físico, por lo que sólo pueden diferir en una fase. Como ψ es un vector arbitrario de \mathcal{H} , se concluye que esa fase es independiente de ψ , y sólo puede depender de los elementos g_1 y g_2 ,

$$(3.7) \quad \mathcal{U}(g_1 \cdot g_2) = \exp(i\alpha(g_1, g_2)) \mathcal{U}(g_1) \mathcal{U}(g_2).$$

En consecuencia, a cada operación física sobre el sistema puede corresponder un conjunto de operadores que difieren entre sí en una fase. Si esos factores de fase adicionales no pueden ajustarse todos ellos a 1 eligiendo convenientemente las fases

²El adjunto de un operador antilineal debe ser definido como

$$(\mathcal{U}^\dagger \psi, \chi) = (\psi, \mathcal{U}\chi)^*,$$

de manera consistente con la antilinealidad de \mathcal{U} ,

$$(\mathcal{U}^\dagger \psi, a\chi) = a(\mathcal{U}^\dagger \psi, \chi) = a(\psi, \mathcal{U}\chi)^* = (\psi, a^*\mathcal{U}\chi)^* = (\psi, \mathcal{U}a\chi)^*.$$

de los operadores $\mathcal{U}(g)$, se dice que se está en presencia de una **representación proyectiva** del grupo de transformaciones.

En las representaciones proyectivas existe un homomorfismo de un grupo de operadores \bar{G} sobre el grupo G de transformaciones consideradas, $\phi : \bar{G} \rightarrow G$. En particular, hay un conjunto de operadores $\mathcal{I} = \{I, \exp(i\alpha(g, g^{-1}))I, \dots\}$ que sólo difieren de la identidad en una fase, y que son aplicados por efecto del homomorfismo en el elemento identidad e de G . Este conjunto constituye el **núcleo** del homomorfismo, $\phi^{-1}(e)$, que, como tal, es un subgrupo invariante. De la definición de grupo cociente, ya sabemos que G es **isomorfo** a \bar{G}/\mathcal{I} .

En esas condiciones, el estudio de las representaciones proyectivas de un grupo G se reduce al estudio de las representaciones ordinarias de un grupo más amplio, \bar{G} , llamado **grupo de cubrimiento** de G , al cual G es homomorfo.

Del conjunto de las representaciones del grupo de cubrimiento \bar{G} , son representaciones ordinarias del grupo G aquellas que aplican el núcleo \mathcal{I} en la matriz identidad de la representación.

Bibliografía:

- E. Wigner, *Group Theory*.
- H. Bacry, *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symétries des Particules Élémentaires*.