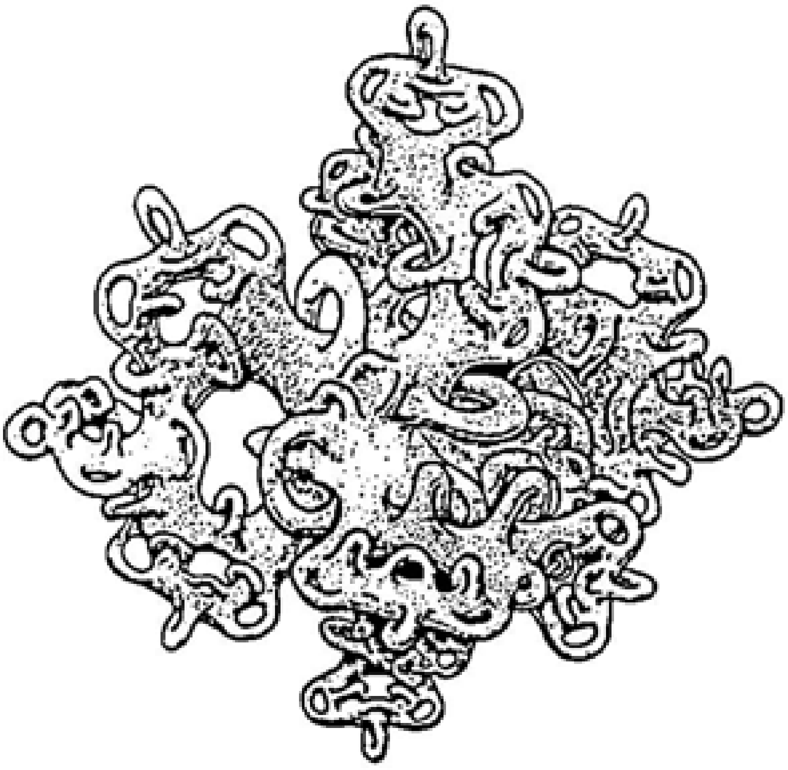
TOPOLOGÍA GENERAL



Managua, febrero 2002

Profesora Marta Macho Stadler

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: *mtpmastm@lg.ehu.es*
http://www.ehu.es/~mtwmastm
Tlf: 946015352 Fax: 946012516

Indice

Introducción

0.1 ¿Qué es la topología?

... Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue G. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo... Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición...
L. Euler.

La topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, la topología aparece en el siglo diecisiete, con el nombre de *analysis situs*, esto es, *análisis de la posición*.

De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanencen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraidas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. La transformación permitida presupone, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, y que la deformación hace corresponder *puntos próximos* a *puntos próximos*. Esta última propiedad se llama *continuidad*, y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: trabajamos con *homeomorfismos*.

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos *topológicamente equivalentes*, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible.

0.2 Un poco de historia

En 1679, G. Leibniz (1646-1716) publica su famoso libro *Characteristica Geometrica*, en el cual (en términos modernos) intenta estudiar más las propiedades topológicas que las puramente métricas de las figuras. Insiste en que, aparte de la representación coordenada de figuras, "*se necesita de otro análisis, puramente goemétrico o lineal, que también defina la posición* (situs), *como el álgebra define la magnitud*".

Los matemáticos en el siglo XVIII muestran poco interés en topología, con la excepción de L. Euler (1707-1783) cuyo genio comprende todas las matemáticas. En 1736, Euler publica un artículo con la solución al famoso *Problema de los puentes de Königsberg*, titulado "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*". El título ya indica que Euler es consciente de que está trabajando con una clase diferente de matemática, en la que la geometría ya no es importante.

El siguiente paso en esta *liberación* de la matemática también se debe a Euler. En 1750 escribe una carta a C. Goldbach (1690-1764) en la que da la famosa *fórmula de Euler* para un poliedro: $v - l + c = 2$, donde v es en número de vértices del poliedro, l es el número de lados y c el número de caras. Esta fórmula, de asombrosa simplicidad, parece que fue olvidada por Arquímedes (287 AC-212 AC) y R. Descartes (1596-1650), aunque los dos escribieron extensamente sobre poliedros. La razón debe ser que, para todo el mundo antes de Euler, parecía imposible pensar en propiedades geométricas sin que la medida estuviera involucrada. Euler publica los detalles de esta fórmula en 1752 en dos artículos, donde da una demostración basada en la disección de sólidos en *rodajas tetraédricas*. Euler pasa por alto algunos problemas en su prueba; por ejemplo, supone que los sólidos son convexos.

A.J. Lhuilier (1750-1840) continúa el camino iniciado por Euler con su fórmula poliédrica. En 1813, Lhuilier publica un importante trabajo, donde indica que la fórmula de Euler es falsa para sólidos con asas sobre ellos: si un sólido tiene g asas (un *asa* es un toro adjuntado al espacio), Lhuilier prueba que la fórmula se escribe $v - l + c = 2 - 2g$. Este es el primer resultado conocido sobre *invariantes topológicos*.

A.F. Möbius (1790-1868) publica una descripción de la banda que lleva su nombre en 1865. Intenta escribir la propiedad de *una única cara* de la banda en términos de no orientabilidad.

J.B. Listing (1802-1882) es el primero en usar la palabra *topología*. Sus ideas topológicas se deben principalmente a su maestro C.F. Gauss (1777-1855). Listing escribe un artículo en 1847 llamado "*Vorstudien zur Topologie*" y en 1861, publica otro artículo, en el cual describe la banda de Möbius (cuatro años antes que Möbius) y estudia la noción de *conexión* de las superficies. Listing no es el primero en examinar las componentes conexas de las superficies; B. Riemann (1822-1866) estudia este concepto en 1851 y de nuevo en 1857 cuando introduce las *superficies de Riemann*.

C. Jordan (1838-1922) publica en 1882 su "*Cours d'Analyse*", que contiene pruebas rigurosas de resultados topológicos intuitivamente obvios sobre curvas en el plano, introduciendo además otro método para estudiar la conexión de las superficies.

Listing examina la conexión en el espacio euclídeo de dimensión tres, pero E. Betti (1823-1892) extiende estas ideas a dimensiones arbitarias.

La idea de conexión es descrita con rigor por H. Poincaré (1854-1925) en una serie de artículos bajo el título de *"Analysis situs"* en 1895. Poincaré introduce el concepto de *homología* y da una definición precisa de los *números de Betti* asociados a un espacio. E. de Jonquières (1820-1901) generaliza en 1890 la fórmula para poliedros convexos de Euler a poliedros no necesariamente convexos. Asímismo, en relación con la conexión, Poincaré introduce el concepto de *grupo fundamental* de una variedad y la noción de *homotopía*.

Un segundo camino en el cual se desarrolla la topología es a través de la generalización de ideas de *convergencia*. Este proceso se inicia en realidad en 1817 cuando B. Bolzano (1781-1848) asocia la convergencia con un subconjunto acotado infinito de números reales, en vez de pensar exclusivamente en convergencia de sucesiones de números.

G. Cantor (1845-1918) introduce en 1872 el concepto de conjunto *derivado* (o familia de puntos límite) de un conjunto. Define los subconjuntos *cerrados* de la recta real como aquellos conteniendo a su conjunto derivado e introduce la idea de conjunto *abierto*, un concepto clave en la topología de conjuntos. Y se define el concepto de *entorno de un punto*.

En 1906, M. Fréchet (1878-1973) llama a un espacio *compacto* si cada subconjunto infinito acotado contiene un punto de acumulación. Fréchet es capaz de extender la noción de convergencia de un espacio euclídeo, definiendo los *espacios métricos*. Prueba que los conceptos de abierto y cerrado de Cantor se extienden naturalmente a espacios métricos.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Roma de 1909, F. Riesz (1880-1956) propone un nuevo acercamiento axiomático a la topología, basado en una definición conjuntista de puntos límite, sin un concepto de distancia subyacente. Unos cuantos años más tarde, en 1914, F. Hausdorff (1868-1942) define los entornos a través de cuatro axiomas, de nuevo sin consideraciones métricas. Este trabajo de Riesz y Hausdorff realmente da lugar a la definición de espacio topológico abstracto.

Hay una tercera vía en la que los conceptos topológicos entran en las matemáticas, a saber, a través del análisis funcional. Esta es un área que surge de la física matemática y la astronomía, debido a que los métodos del análisis clásico eran inadecuados al abordar algunos tipos de problemas.

J. Hadamard (1865-1963) introduce la palabra *funcional* en 1903 cuando estudia los funcionales lineales F de la forma $F(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(x)g_n(x)dx$. Fréchet continúa el desarrollo de esta teoría, definiendo la derivada de un funcional en 1904.

E. Schmidt (1876-1959) examina en 1907 la noción de convergencia en espacios de funciones; la distancia se define a través un producto interior. S. Banach (1892-1945) realiza un paso posterior en la abstracción en 1932, cuando pasa de los espacios con producto interior a los espacios normados.

Poincaré desarrolla muchos de sus métodos topológicos cuando estudia ecuaciones diferenciales ordinarias que provienen del estudio de ciertos problemas astronómicos. Esta colección de métodos se transforma en una completa teoría topológica en 1912, con los estudios de L.E.J. Brouwer (1881-1966).

0.3 Organización de la memoria

Esta memoria está organizada en 18 capítulos, en donde se explican los conceptos más importantes de *Topología General*, excepto el Tema XVII que trata una teoría que puede pensarse como un primer capítulo de un curso de *Topología Algebraica*.

Cada uno de los temas consta de definiciones, resultados (sin prueba), y una extensa colección de ejemplos. Al final de cada capítulo aparece una relación de problemas, algunos de ellos elementales, otros ya más elaborados, otros son una mera excusa para introducir algún ejemplo de espacio importante,... en donde se deben aplicar las propiedades estudiadas en la parte teórica.

El Tema I no es un capítulo de Topología, en él aparece un breve repaso de algunas nociones básicas a las que se hace referencia a lo largo de la memoria, y que he preferido incluir por comodidad.

El último capítulo, el Tema XVIII, es un compendio de algunos ejemplos de espacios topológicos de especial relevancia en todas las áreas de la Matemática.

Managua, Febrero 2002

Tema I

Preliminares

1.1 Un poco de álgebra de conjuntos

Sea X un conjunto. Si x es un elemento de X, se denota por $x \in X$. Análogamente, $x \notin X$ denota la *no pertenencia* de x al conjunto X. El *conjunto vacío* $\emptyset$ es el conjunto sin elementos.

Definición 1.1 Dados $A, B \subset X$, se dice que A *está contenido* en B, $A \subset B$, si para cada $x \in A$, es $x \in B$. Y A es *igual* a B, $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Definición 1.2 Si $A, B \subset X$, se definen

1) la *intersección* de A y B, por $A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \in B\}$. Claramente, $A \cap B \subset A, B$. A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \emptyset$;

2) la *unión* de A y B, por $A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ ó } x \in B\}$. Claramente, $A, B \subset A \cup B$;

3) el *complementario* de A en X, por $X - A = \{x \in X : x \notin A\}$. Si no hay duda de respecto a que conjunto se está tomando el complementario, se suele denotar por A^c;

4) la *diferencia* de A y B, por $A - B = A \cap B^c = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

Lema 1.3 *Las propiedades fundamentales de estas operaciones son*

(i) leyes idempotentes: $A \cap A = A = A \cup A$;

(ii) leyes asociativas: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *y* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(iii) leyes conmutativas: $A \cup B = B \cup A$ *y* $A \cap B = B \cap A$;

(iv) leyes distributivas: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *y* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(v) identidades: $A \cap X = A = A \cup \emptyset$, $A \cup X = X$ *y* $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(vi) propiedades del complementario: $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$ *y* $X^c = \emptyset$*;*

(vii) leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ *y* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Definición 1.4 Se llama *partes de* X o *conjunto potencia* de X al conjunto de todos los subconjuntos de X, y se denota por $\mathcal{P}(X)$ ó 2^X. Es decir, $A \subset X$ si y sólo si $A \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.5 El *producto cartesiano* de A por B es $A \times B = \{(a,b) : a \in A$ y $b \in B\}$. Sus elementos son *pares ordenados*. Claramente, $A \times B \neq B \times A$. Y $A \times B = \emptyset$, si y sólo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Dos pares ordenados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, son iguales $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

En general, dada una familia finita de conjuntos $\{A_1, \cdots, A_n\}$, se define su producto cartesiano por $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_i \in A_i, i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Si $A_i = A$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, el producto cartesiano se denota por A^n.

Definición 1.6 Sea $I \neq \emptyset$ un *conjunto de índices* y una familia *indicada* de subconjuntos de X, $\{A_i : i \in I\}$. Se define

(1) la *intersección generalizada*: $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I, x \in A_i\}$, y

(2) la *unión generalizada*: $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I$ tal que $x \in A_i\}$.

Si el conjunto de índices I es finito, estas definiciones coinciden con las ya conocidas. Se cumplen también en este caso las propiedades distributivas, las leyes de De Morgan $(\bigcap\limits_{i \in I} A_i)^c = \bigcup\limits_{i \in I} A_i^c$ y $(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)^c = \bigcap\limits_{i \in I} A_i^c$, etc.

1.2 Funciones

Una *aplicación* o *función* $f \colon X \longrightarrow Y$, es una correspondencia que asocia a cada $x \in X$, un elemento y sólo uno de Y, que se denota por $f(x)$.

Ejemplos 1.7 Algunos ejemplos de funciones son

1) la *aplicación identidad*: $1_X \colon X \longrightarrow X$, definida por $1_X(x) = x$,

2) la *aplicación inclusión*: si $A \subset X$, $i_A \colon A \longrightarrow X$, definida por $i_A(x) = x$;

3) la *aplicación constante*: $c_{y_0} \colon X \longrightarrow Y$, definida por $c_{y_0}(x) = y_0$, donde y_0 es un punto fijo de Y;

4) la i-*ésima proyección coordenada*: $p_i\colon \prod_{j=1}^{n} A_j \longrightarrow A_i$, dada por $p_i((a_1, \cdots, a_n)) = a_i$;

5) la *inyección diagonal*: $d\colon X \longrightarrow X^n$, definida por $d(x) = (x, \cdots, x)$;

6) la *función característica de un conjunto*: si $A \subset X$, $\chi_A\colon X \longrightarrow \{0, 1\}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases};$$

7) dada $f\colon X \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, la *restricción* de f al subconjunto A es: $f|_A\colon A \longrightarrow Y$, definida por $f|_A(a) = f(a)$;

8) si $g\colon A \longrightarrow Y$ y $A \subset X$, entonces $f\colon X \longrightarrow Y$ es una *extensión* de g a X, si $f|_A = g$. Las extensiones no son únicas;

9) si $f\colon A \longrightarrow Y$ y $g\colon B \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones, donde $A \cup B = X$ y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in A \cap B$, se puede definir la *combinada* de f y g, como la aplicación $h\colon X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases};$$

10) el *producto cartesiano generalizado*: dada una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i \in I}$, su *producto cartesiano* es

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f\colon I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}.$$

La i-*ésima proyección coordenada* es la aplicación sobreyectiva $p_i\colon \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ dada por $p_i(f) = f(i)$. Se precisa el axioma de elección para probar que el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos es no vacía. De hecho, esta afirmación equivale al axioma de elección. Si $X = X_i$ para cada $i \in I$, $\prod_{i \in I} X_i$ se denota por X^I y es el conjunto de las funciones de I en X.

Definición 1.8 Dada una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, X se llama el *dominio* de f e Y es su *codominio*. El *grafo* de f es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$, que en muchas ocasiones se identifica con f. Dos aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Z \longrightarrow W$ son *iguales*, cuando coinciden sus dominios ($X = Z$), sus codominios ($Y = W$) y $f(x) = g(x)$, para cada $x \in X$.

Definición 1.9 Dada $f\colon X \longrightarrow Y$, el conjunto $f(A) = \{y \in Y : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = y\}$ se llama *imagen directa* de A. $f(X)$ se llama *rango* de la aplicación. Si $B \subset Y$, su *imagen inversa* es el conjunto $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$. Si $A \subset X$ es de la forma $A = f^{-1}(B)$, se suele decir que es un conjunto *saturado* para f.

Lema 1.10 *Dada* $f\colon X \longrightarrow Y$*, se verifica*

(i) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X) \subset Y$ *y si* $A \neq \emptyset$*, entonces* $f(A) \neq \emptyset$*;*

(ii) si $A_1, A_2 \subset X$*, y* $A_1 \subset A_2$*, entonces* $f(A_1) \subset f(A_2)$*;*

(iii) si $A_i \subset X$ *para* $i \in I$, $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ *y* $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$*;*

(iv) si $A_1, A_2 \subset X$, $f(A_1) - f(A_2) \subset f(A_1 - A_2)$ *y en particular* $f(X) - f(A_2) \subset f(X - A_2)$ *(entre* $Y - f(A_2)$ *y* $f(X - A_2)$ *no hay en general ninguna relación);*

(v) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$*, y puede existir* $\emptyset \neq B \subset Y$ *tal que* $f^{-1}(B) = \emptyset$*;*

(vi) $f^{-1}(Y) = X$*;*

(vii) si $B_1, B_2 \subset Y$ *y* $B_1 \subset B_2$*, entonces* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$*;*

(viii) si $B_i \subset Y$ *para* $i \in I$, $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ *y* $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$*;*

(ix) si $B_1, B_2 \subset Y$, $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$*, y en particular,* $f^{-1}(Y - B_2) = X - f^{-1}(B_2)$*;*

(x) si $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$*;*

(xi) si $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B \subset B$*;*

(xii) si $A \subset X$ *y* $B \subset Y$, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Definición 1.11 Dadas dos funciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$, se define la *composición* de g y f, por $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, donde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada $x \in X$. La composición de funciones es *asociativa*, $f \circ 1_X = f$ y $1_Y \circ g = g$. Además, si $C \subset Z$, es $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Definición 1.12 Se dice que $f\colon X \longrightarrow Y$ es *sobreyectiva*, si $f(X) = Y$, es decir, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Y es *inyectiva* , si dados $x_1 \neq x_2$ en X, es $f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equivalentemente, si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$).

Lema 1.13 *Sea* $f\colon X \longrightarrow Y$*. Se verifica*

(i) $B = f(f^{-1}(B))$ *para cada* $B \subset Y$*, si y sólo si* f *es sobreyectiva;*

(ii) $Y - f(A) \subset f(X - A)$ *para cada* $A \subset X$ *si y sólo si* f *es sobreyectiva;*

(iii) Si $g, h\colon Y \longrightarrow Z$ *y* f *es sobreyectiva, entonces* $g \circ f = h \circ f$ *implica que* $h = g$*;*

(iv) Si $g\colon Y \longrightarrow X$ *y* $f \circ g = 1_Y$*, entonces* f *es sobreyectiva;*

(v) $A = f^{-1}(f(A))$ *para cada* $A \subset X$*, si y sólo si* f *es inyectiva;*

(vi) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ *para cada familia indicada de conjuntos* $\{A_i \subset X\}_{i\in I}$ *si y sólo si* f *es inyectiva;*

(vii) Si f es sobreyectiva, entonces para cada $A \subset X$ es $Y - f(A) = f(X - A)$ si y sólo si f es inyectiva;

(viii) si $g, h\colon Z \longrightarrow X$ y f es inyectiva, entonces $f \circ g = f \circ h$ implica que $h = g$;

(ix) si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $g \circ f = 1_X$, entonces f es inyectiva.

Definición 1.14 $f\colon X \longrightarrow Y$ es *biyectiva* si es sobreyectiva e inyectiva a la vez. En tal caso, la correspondencia definida por $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$, donde $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$, es una función.

Lema 1.15 *Sea $f\colon X \longrightarrow Y$. Se verifica*

(i) si f es biyectiva, entonces f^{-1} también lo es;

(ii) si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = 1_X$, $f \circ f^{-1} = 1_Y$ y $(f^{-1})^{-1} = f$;

(iii) Si $g\colon Y \longrightarrow X$ y $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, entonces f es biyectiva y $g = f^{-1}$;

(iv) Si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ son biyectivas, $g \circ f$ también lo es y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3 Relaciones binarias

Definición 1.16 Una relación de *equivalencia* sobre X es una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva. Dada R una relación de equivalencia sobre X, se llama *clase de* x al conjunto $[x] = \{y \in X : xRy\}$. El *conjunto cociente* X/R, es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Lema 1.17 *Se verifica*

(i) $x \in [x]$ (x se llama representante de su clase), luego $[x] \neq \emptyset$,

(ii) xRy si y sólo si $[x] = [y]$,

(iii) $[x] \neq [y]$ si y sólo si $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Definición 1.18 Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de subconjuntos no vacíos de X, tales que

(i) $X = \bigcup\limits_{i \in I} P_i$,

(ii) si $P_i \neq P_j$, entonces $P_i \cap P_j = \emptyset$.

Es lo mismo dar una partición de X que una relación de equivalencia sobre él.

Definición 1.19 Existe una aplicación canónica, $p\colon X \longrightarrow X/R$, que asigna a cada elemento x su clase de equivalencia $p(x) = [x]$. Se llama *aplicación cociente* y es sobreyectiva. Una vez dada la aplicación cociente, cada clase de equivalencia en X es precisamente $p^{-1}(p(x))$.

Definición 1.20 Una relación $\leq$ sobre X es un *orden parcial* si es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Se dice también que X está *parcialmente ordenado*. El orden se llama *total*, si dos elementos cualesquiera de X son comparables por esta relación.

Definición 1.21 Si $A \subset X$ y $u \in X$ es tal que $a \leq u$ para cada $a \in A$, se dice que u es una *cota superior* de A. La menor de las cotas superiores es el *supremo* de A. Si $A \subset X$ y $l \in X$ es tal que $a \geq l$ para cada $a \in A$, se dice que l es una *cota inferior* de A. La mayor de las cotas superiores es el *ínfimo* de A. Un elemento x se dice *maximal*, si no existe $y \in X$ tal que $x \leq y$ y $x \neq y$.

Definición 1.22 Se dice que X es *inductivo* si toda cadena (es decir, toda parte totalmente ordenada) posee una cota superior.

Lema 1.23 *Los siguientes enunciados son equivalentes y se admiten como válidos*

(i) si $\{A_i : I \in I\}$ es una familia de conjuntos no vacíos dos a dos disjuntos, existe $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $B \cap A_i$ tiene exactamente un elemento para cada $i \in I$;

(ii) si $\{A_i : I \in I\}$ es una familia de conjuntos no vacíos dos a dos disjuntos, existe una función $f \colon I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$, para cada $i \in I$ (f se llama función de elección*);*

(iii) **lema de Zorn:** *todo conjunto ordenado inductivo posee un elemento maximal;*

(iv) **teorema de Zermelo:** *todo conjunto puede ser bien ordenado;*

(v) **axioma de elección:** *dados dos conjuntos X e Y y $f \colon X \longrightarrow Y$ sobreyectiva, existe $g \colon Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = 1_Y$.*

1.4 Cardinalidad de conjuntos

Definición 1.24 Dos conjuntos se llaman *equipotentes*, si existe una correspondencia biyectiva entre ellos.

Definición 1.25 X se dice *finito* si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que X es equipotente a $\{1, \cdots, n\}$. Obviamente, dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si poseen el mismo número de elementos.

Un conjunto X es *infinito*, si no es finito, lo cual equivale a decir que es equipotente a un subconjunto propio de sí mismo. X es *numerable* si es equipotente a $\mathbb{N}$. X es *contable* si es finito o numerable.

La relación de equipotencia es una relación de equivalencia. A cada clase de equipotencia se le puede asignar un *número cardinal*: un objeto matemático ω es un número cardinal, si existe un conjunto X tal que $Card(X) = \omega$.

Definición 1.26 Un conjunto A es *de potencia menor o igual* que B, si existe una aplicación $f\colon A \longrightarrow B$ inyectiva, con lo cual $Card(A) \leq Card(B)$ (equivalentemente, si existe una aplicación $f\colon B \longrightarrow A$ sobreyectiva).

Teorema 1.27 (de Cantor-Bernstein) *Sean X e Y dos conjuntos. Si $Card(X) \leq Card(Y)$ y $Card(Y) \leq Card(X)$, entonces $Card(X) = Card(Y)$.*

Definición 1.28 Dados dos números cardinales ω_1 y ω_2, se dice que $\omega_1 \leq \omega_2$, si existen conjuntos X e Y con $Card(X) = \omega_1$ y $Card(Y) = \omega_2$ y tales que la potencia de X es menor o igual a la potencia de Y. Se trata de una relación de orden. Si $\omega_1 \leq \omega_2$ y $\omega_1 \neq \omega_2$, se dice que ω_1 es estrictamente menor que ω_2.

Lema 1.29 *Se verifica*

(i) si X es contable y $A \subset X$, entonces A es contable;

(ii) si X no es contable y $X \subset Y$, entonces Y no es contable;

(iii) Si X es infinito, existe $A \subset X$, numerable y propio;

(iv) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable y como consecuencia, el producto cartesiano de una familia finita de conjuntos contables, es contable;

(v) la unión de una familia contable de conjuntos contables es contable;

(vi) $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son contables, pero $\mathbb{R}$ no lo es.

El $Card(\emptyset) = 0$, es el cardinal mínimo. Sin embargo no existe un cardinal máximo, ya que

Teorema 1.30 (de Cantor) *Para cada conjunto X, $Card(X) < Card(\mathcal{P}(X))$.*

En particular, $Card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < Card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$; esta notación proviene de la siguiente propiedad: si A es finito, de cardinal n, entonces $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^n$. Puede probarse que $2^{\aleph_0} = Card(\mathbb{R}) = c$, que se llama el *cardinal del continuo*. De aquí se concluye que $\aleph_0 < c$.

Desde principios de siglo, se ha intentado en vano establecer si existe un número cardinal $\aleph_1$, entre $\aleph_0$ y c. Cantor hace la siguiente conjetura

Proposición 1.31 (Hipótesis del continuo) $c = \aleph_1$, *es decir, no existe ningún conjunto A, tal que $\aleph_0 < Card(A) < c$.*

En 1963, Cohen establece que la hipótesis del continuo es indecidible: añadiendo como axioma su veracidad o su falsedad, los fundamentos de la Matemática siguen siendo coherentes.

1.5 Propiedades de los números reales

Lema 1.32 $(\mathbb{R}, \leq)$ *es un conjunto totalmente ordenado.*

Proposición 1.33 (Axioma de la cota superior) *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que $M \geq a$, para cada $a \in A$), existe el supremo de A. Y en tal caso, $s = \sup(A)$ si y sólo si*

(i) para cada $a \in A$, es $a \leq s$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

Corolario 1.34 *Si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente (es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que $m \leq a$, para cada $a \in A$), existe el ínfimo de A. Y entonces, $i = \inf(A)$ si y sólo si*

(i) para cada $a \in A$, es $a \geq i$, y

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon < i + \varepsilon$.

Lema 1.35 $\mathbb{R}$ *es arquimediano, es decir, el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

Corolario 1.36 (Propiedad arquimediana) *Para todo $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $0 < \frac{1}{n} < x$.*

Corolario 1.37 (Densidad de los racionales) *Dados dos números reales $x < y$, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x < r < y$.*

Corolario 1.38 (Propiedad de los intervalos de encaje) *Dada una familia $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos cerrados y encajados (es decir, si $n \leq m$, es $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$), entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.*

1.6 Algunas nociones sobre grupos

1.6.1 Grupo (no abeliano) libre con dos generadores

Sea E el conjunto de las palabras finitas (comprendida la palabra vacía) que se pueden formar al yuxtaponer los símbolos a^p y b^q, con $p, q \in \mathbb{Z}$. Dada una palabra, está permitido efectuar las siguientes reducciones

(i) reemplazar un grupo de dos símbolos consecutivos a^p, a^q por el símbolo a^{p+q} y lo mismo con b;

(ii) suprimir a^0 y b^0.

Una palabra para la que toda reducción es imposible, es una *palabra reducida*. Está formada por una sucesión de símbolos alternativamente de la forma a^p y b^q, con exponentes no nulos. Se verifica fácilmente que toda palabra admite una única reducción.

Se denota por $L(a,b)$ al conjunto de las palabras reducidas dotado de la ley de composición siguiente: *el producto $m.m'$ de dos palabras, es la palabra reducida asociada a la palabra (no necesariamente reducida) obtenida al escribir m y m' juntas.*

Para esta ley, $L(a,b)$ es un grupo, para el que la palabra vacía es el elemento neutro y $(a^{-p_n}b^{-q_n}\dots a^{-p_1}b^{-q_1})$ es la inversa de la palabra $(b^{q_1}a^{p_1}\dots b^{q_n}a^{p_n})$.

Las aplicaciones $\widetilde{a},\widetilde{b}\colon \mathbb{Z}\longrightarrow L(a,b)$ definidas por $\widetilde{a}(p)=(a^p)$ y $\widetilde{b}(q)=(b^q)$ son dos homomorfismos inyectivos. Además, si G es un grupo y $\varphi,\psi\colon \mathbb{Z}\longrightarrow G$ son dos homomorfismos, entonces existe un único homomorfismo $\theta\colon L(a,b)\longrightarrow G$ tal que $\theta\circ\widetilde{a}=\varphi$ y $\theta\circ\widetilde{b}=\psi$, y se define por $\theta(a^p)=\varphi(p)$ y $\theta(b^q)=\psi(q)$.

1.6.2 Grupo libre sobre un conjunto

Es una generalización de la noción anterior. En vez de formar palabras con la ayuda de letras a y b, se utilizan todos los elementos del conjunto S. En particular, si S es un conjunto finito de n elementos, se obtiene el grupo libre de n generadores, que se denota $L(S)$.

1.6.3 Producto libre de dos grupos

Es otra generalización de la primera noción. Sean G_1 y G_2 dos grupos; se considera el conjunto de las palabras finitas constituidas por elementos de G_1 y elementos de G_2. Se autoriza a reemplazar dos letras consecutivas g_1 y g_1' si están en el mismo grupo G_1 por la única letra $g_1.g_1'$, y lo mismo con G_2. Además, se suprimen los elementos neutros. Como antes, una palabra reducida es una sucesión finita de elementos provenientes alternativamente de G_1 y G_2. El conjunto de las palabras reducidas, dotado de la ley de composición evidente constituye el grupo G_1*G_2, *producto libre* de ambos grupos.

Las aplicaciones $\theta_1\colon G_1\longrightarrow G_1*G_2$ y $\theta_2\colon G_2\longrightarrow G_1*G_2$ dadas por $\theta_i(g_i)=(g_i)$, son homomorfismos inyectivos. Además, si G es un grupo y $\mu_i\colon G_i\longrightarrow G$ son homomorfismos, entonces existe un único homomorfismo $\mu\colon G_1*G_2\longrightarrow G$ tal que $\mu\circ\theta_i=\mu_i$.

Observaciones 1.39 Para el producto libre de grupos, se verifica que

(i) una tal propiedad *universal* basta para caracterizar el producto libre G_1*G_2, salvo isomorfismos;

(ii) si G_2 se reduce al elemento neutro, entonces θ_1 es un isomorfismo.

1.6.4 Producto amalgamado de dos grupos

Recordar que si H es un grupo, se dice que N es un subgrupo *normal* en H, si para cada $h \in H$ y $x \in N$, es $h^{-1}xh \in N$. Si K es un subgrupo de H, se denota por $\overline{K}$ a la intersección de todos los subgrupos normales en H que contienen a K. Este grupo está constituido por la familia de los elementos $h^{-1}kh$ con $h \in H$ y $k \in K$ y por todos sus productos, y es el menor subgrupo normal que contiene a K.

Sean G_0, G_1 y G_2 grupos y $\varphi_i\colon G_0 \longrightarrow G_i$ homomorfismos. Sea N el menor subgrupo normal en $G_1 * G_2$ que contiene todos los elementos de la forma

$$\{(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}), (\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}) : g \in G_0\},$$

y sea $\mu\colon G_1 * G_2 \longrightarrow G_1 * G_2/N$ la sobreyección canónica. Se denota $G_1 * G_2/N = G_1 *_{G_0} G_2$, y se dice que es el *producto de G_1 y G_2 amalgamado por G_0*.

Los homomorfismos $\mu_1 = \mu \circ \theta_1$ y $\mu_2 = \mu \circ \theta_2$ satisfacen la relación $\mu_1 \circ \varphi_1 = \mu_2 \circ \varphi_2$, ya que los elementos $\theta_1(\varphi_1(g))$ y $\theta_2(\varphi_2(g))$ difieren en un elemento que está en el núcleo N de μ.

Además, si H es un grupo y $\psi_1\colon G_1 \longrightarrow H$ y $\psi_2\colon G_2 \longrightarrow H$ son homorfismos tales que $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, entonces existe un único homomorfismo $\psi\colon G_1 *_{G_0} G_2 \longrightarrow H$ tal que $\psi_1 = \psi \circ \mu_1$ y $\psi_2 = \psi \circ \mu_2$. En efecto, existe un único homomorfismo $\psi'\colon G_1 * G_2 \longrightarrow H$ tal que $\psi_1 = \psi' \circ \theta_1$ y $\psi_2 = \psi' \circ \theta_2$; pero la propiedad $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ prueba que el núcleo de ψ' contiene los elementos de la forma $(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1})$ y $(\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1})$ para $g \in G_0$, y por lo tanto, contiene a N; luego ψ' pasa al cociente por N.

¿Cómo se caracterizan los elementos de N? Para que una palabra (no necesariamente reducida) represente un elemento de $G_1 * G_2$ que está en N, es necesario y suficiente que se pueda reducir al neutro (palabra vacía) por una sucesión de manipulaciones de los tipos siguientes

(i) reemplazar una letra $\varphi_1(g)$ por $\varphi_2(g)$, $g \in G_0$ y recíprocamente;

(ii) reemplazar dos letras consecutivas g_i y g_i' (donde $g_i, g_i' \in G_i$, $i = 1, 2$), por la letra $g_i'' = g_i.g_i' \in G_i$, y recíprocamente, descomponer una letra g_i'' en una sucesión g_i, g_i', si $g_i'' = g_i.g_i'$ (esta manipulación no cambia el elemento correspondiente de $G_1 * G_2$ y permite alcanzar la palabra reducida);

en efecto: todo elemento de N se escribe como un producto $(a^{-1}\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}a)$, donde $a \in G_1 * G_2$, $g \in G_0$ (o productos de los inversos de estos elementos). Por una manipulación de tipo (i) y una de tipo (ii), se puede reducir a $(a^{-1}a)$, que se reduce a $()$ en $G_1 * G_2$. Inversamente, veamos que si $(m_1\varphi_1(g)m_2) \in N$, entonces $(m_1\varphi_2(g)m_2) \in N$: en primer lugar, $(\varphi_1(g)m_2m_1)(m_1^{-1})(m_1\varphi_1(g)m_2)(m_1)$ está aún en el subgrupo normal N. Multiplicando por $(\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}) \in N$, se obtiene, tras una reducción de tipo (ii) (que no cambia la palabra reducida) $(\varphi_2(g)m_2m_1)$, después, de nuevo por conjugación, se obtiene $(m_1\varphi_2(g)m_2)$, que está por lo tanto en N.

Observaciones 1.40 Como casos particulares, tenemos

(i) si $G_0 = \{1\}$, N se reduce al neutro y la suma amalgamada es isomorfa a $G_1 * G_2$;

(ii) si $G_2 = \{1\}$, entonces N es el subgrupo normal engendrado por el conjunto de los elementos $\{\varphi_1(g) : g \in G_0\}$. Además, $G_1 * G_2$ es isomorfo a G_1 (observación 1.39, (i)). La suma amalgamada es entonces el cociente de G_1 por el menor subgrupo normal $\overline{\varphi_1(G_0)}$, que contiene a $\varphi_1(G_0)$.

1.7 Problemas

1.- Sea R una relación de equivalencia sobre X y $p\colon X \longrightarrow X/R$ la proyección canónica. Se dice que $S \subset X$ es un conjunto R-*saturado*, si dado $x \in S$, todo $y \in X$ relacionado con x pertenece también a S. Dado $A \subset X$, se llama R-saturación de A al menor conjunto R-saturado de X que contiene a A, y se denota por $Sat(A)$. Se pide

(i) probar que $Sat(A) = p^{-1}(p(A)) = \bigcup\limits_{x \in A} p^{-1}p(x)$;

(ii) si $A \subset B$, probar que $Sat(A) \subset Sat(B)$;

(iii) probar que S es R-saturado si y sólo si existe $V \subset X/R$ tal que $S = p^{-1}(V)$;

(iv) probar que $Sat(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} Sat(A_i)$, $Sat(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \subset \bigcap\limits_{i \in I} Sat(A_i)$ y $X - Sat(A) \subset Sat(X - A)$;

(v) probar que la intersección y la reunión arbitrarias de conjuntos R-saturados, así como la diferencia de conjuntos R-saturados es de nuevo un conjunto R-saturado;

(vi) si S es R-saturado y $A \cap S = \emptyset$, probar que $S \cap Sat(A) = \emptyset$;

(vii) si S y S_i $(i \in I)$ son conjuntos R-saturados, probar que $p(\bigcup\limits_{i \in I} S_i) = \bigcup\limits_{i \in I} p(S_i)$, $p(\bigcap\limits_{i \in I} S_i) = \bigcap\limits_{i \in I} p(S_i)$ y $p(X - S) = X/R - p(S)$;

(viii) dados S_1 y S_2 conjuntos R-saturados y disjuntos, probar que $p(S_1) \cap p(S_2) = \emptyset$;

(ix) sobre $\mathbb{R}$, se define la siguiente relación de equivalencia

$$xRy \text{ si y sólo si existe } k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } x = k + y.$$

Calcular $Sat(\mathbb{N})$ y $Sat(\{\sqrt{2}\})$.

2.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Se pide

(i) probar que la relación binaria $xR_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$, es una relación de equivalencia sobre X;

(ii) si p es la proyección canónica, probar que existe una única aplicación $\overline{f}\colon X/R_f \longrightarrow Y$, tal que $\overline{f} \circ p = f$, y que es inyectiva;

(iii) concluir que toda función f factoriza del modo $f = g \circ h$, donde g es inyectiva y h es sobreyectiva.

3.- Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos y para cada $i \in I$, $A_i \subset X_i$. Se pide probar

(i) sea $J \subset I$, entonces $\prod\limits_{j \in J} A_j \times \prod\limits_{i \notin J} X_i = \bigcap\limits_{j \in J} p_j^{-1}(A_j)$, en particular, $\prod\limits_{i \in I} A_i = \bigcap\limits_{i \in I} p_i^{-1}(A_i)$;

(ii) si $A \subset \prod\limits_{i \in I} X_i$, entonces $A \subset \prod\limits_{i \in I} p_i(A)$;

(iii) $p_i(\prod\limits_{i \in I} A_i) = A_i$ y $p_i^{-1}(A_i) = A_i \times \prod\limits_{j \neq i} X_j$.

Tema II

Espacios Topológicos

A lo largo de casi toda la Historia de las Matemáticas, han ido apareciendo sus estructuras y especialidades obligadas por la necesidad de resolver problemas cuantitativos. Por ello, dichas estructuras u objetos matemáticos tenían cierta rigidez, forzados por el problema de la medida que intentaban resolver. Hasta hace unos doscientos años, ningún matemático se interesó por las propiedades cualitativas de los objetos a los que dedicaba su atención. Estas propiedades fueron apareciendo, por un lado, como simples observaciones a la existencia de cualidades que no dependían de las magnitudes y que permitían distinguir diversos objetos entre sí. Por otra parte, se hicieron necesarios al surgir el Cálculo Infinitesimal, como técnica que obligaba a considerar correctamente y formalizar las nociones vagas de *proximidad* y *continuidad*. Estos dos caminos, unas veces independientemente y otras conjuntamente, desembocaron a principios de este siglo en la definición correcta de proximidad, continuidad y propiedad cualitativa, es decir, se encontró un objeto matemático, *un espacio topológico*, en el que los anteriores conceptos tenían su verdadero significado y donde todas las intuiciones de las que se había partido encontraban un tratamiento riguroso.

En este curso se trata de exponer alguna de esas propiedades cualitativas que, haciendo abstracción de toda medida y magnitud, son el fundamento de la Topología.

2.1 Definición de Topología

La Topología es una generalización de algunas de las propiedades de intervalo abierto en la recta real, propiedades independientes de otras presentes en $\mathbb{R}$ como la suma, el orden o la distancia.

Definición 2.1 Una *topología* sobre un conjunto X, es una familia $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, verificando

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,

(iii) si $\{A_i\}_{i \in I} \subset \tau$, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman *abiertos* y el par (X, τ) se llama *espacio topológico*.

Ejemplos 2.2 Se introducen algunos ejemplos fundamentales en topología

1) sobre X, $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$ es la topología *indiscreta*;

2) sobre X, $\tau_{dis} = \mathcal{P}(X)$ es la topología *discreta*;

3) si X es infinito, $\tau_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ es finito}\}$ es la topología *cofinita*;

4) si X es infinito no contable, $\tau_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : X - A \text{ es contable}\}$ es la topología *cocontable*;

5) si $X = \{a, b\}$, $\tau_{sier} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ es la topología *de Sierpinski*;

6) si X y $A \subset X$, $\tau_A = \{\emptyset\} \cup \{B \subset X : A \subset B\}$ es la topología A-*inclusión* (observar que $\tau_\emptyset = \tau_{dis}$ y $\tau_X = \tau_{ind}$);

7) si X y $A \subset X$, $\tau^A = \{X\} \cup \{B \subset X : A \cap B = \emptyset\}$ es la topología A-*exclusión* (observar que $\tau_\emptyset = \tau_{dis}$ y $\tau_X = \tau_{ind}$);

8) $\tau_{Kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es la topología de *Kolmogorov* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es la *recta de Kolmogorov*;

9) $\tau_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : U = A \cup B : A \in \tau_{us}, B \subset \mathbb{I}\}$ es la topología *"scattered"* sobre $\mathbb{R}$, y el par $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es la *recta "scattered"*;

10) los *espacios métricos* son espacios topológicos (ver 2.5, problema 6), por ejemplo la recta real $(\mathbb{R}, \tau_{us})$.

Observar que sobre un mismo conjunto se pueden definir distintas topologías.

Definición 2.3 Dadas τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X, se dice que τ_1 es *menos fina* que τ_2 (o que τ_2 es *más fina* que τ_1), si $\tau_1 \subset \tau_2$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ ó $\tau_2 \subset \tau_1$, se dice que las topologías son *comparables*.

Ejemplo 2.4 Por ejemplo, sobre

1) X, y para toda topología τ, es $\tau_{ind} \subset \tau \subset \tau_{dis}$;

2) $\mathbb{R}$, es $\tau_{cof} \subset \tau_{us}$ y $\tau_{cof} \subset \tau_{coc}$, pero τ_{coc} y τ_{us} no son comparables;

3) $\mathbb{R}$, $\tau_{us} \subset \tau_{sca}$, $\tau_{Kol} \subset \tau_{us}$, etc.

2.2 Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 2.5 En (X, τ), un conjunto $A \subset X$ se dice *cerrado*, si su complementario $X - A$ es abierto. Denotamos por $\mathcal{C}$ a la familia de cerrados en (X, τ).

El concepto de conjunto cerrado es así *dual* de la noción de conjunto abierto, y una topología puede especificarse del mismo modo a través de la familia de sus conjuntos cerrados $\mathcal{C}$, sencillamente a través del proceso de complementación.

Lema 2.6 *En (X, τ), la familia de cerrados $\mathcal{C}$ verifica*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,

(ii) si $F, G \in \mathcal{C}$, entonces $F \cup G \in \mathcal{C}$,

(iii) si $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$.

Ejemplos 2.7 En los ejemplos anteriores, tenemos

1) en (X, τ_{ind}), es $\mathcal{C}_{ind} = \{\emptyset, X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), es $\mathcal{C}_{dis} = \mathcal{P}(X)$;

3) si X es infinito, $\mathcal{C}_{cof} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A \text{ es finito}\}$;

4) si X es infinito no contable, $\mathcal{C}_{coc} = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A \text{ es contable}\}$;

5) si $X = \{a, b\}$, $\mathcal{C}_{sier} = \{\emptyset, X, \{b\}\}$;

6) si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}_A = \tau^A$;

7) si X y $A \subset X$, $\mathcal{C}^A = \tau_A$;

8) $\mathcal{C}_{Kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$;

9) $\mathcal{C}_{sca} = \{U \subset \mathbb{R} : B = F \cap H : F \in \mathcal{C}_{us}, \mathbb{Q} \subset H\}$.

Observación 2.8 La propiedad de ser abierto o cerrado es independiente la una de la otra. Un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, abierto y no cerrado, cerrado y no abierto o ninguna de las dos propiedades.

2.3 Base y subbase de una Topología

Hay topologías que poseen demasiados abiertos y a veces es difícil especificarlos todos. Por ello, se introduce el siguiente concepto

Definición 2.9 En (X, τ), una familia $\beta \subset \tau$ es una *base* de τ, si para todo $U \in \tau$ y para cada $x \in U$, existe $B \in \beta$, tal que $x \in B \subset U$. Los elementos de β se llaman *abiertos básicos*.

Lema 2.10 *Si β es base de τ, todo abierto puede escribirse como unión de abiertos básicos.*

Teorema 2.11 *Si $\beta \subset \mathcal{P}(X)$, β es base de alguna topología τ_β sobre X, si y sólo si*

(i) $X = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$,

(ii) para cada $B_1, B_2 \in \beta$ y cada $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Y, en tal caso, $\tau_\beta = \{U \subset X : \text{ existe } \{B_i\}_{i \in I} \subset \beta : U = \bigcup\limits_{i \in I} B_i\}$.

Ejemplos 2.12 Algunos ejemplos de bases de topología son

1) una topología es obviamente base de sí misma;

2) sobre X, $\beta_{ind} = \{X\}$;

3) sobre X, $\beta_{dis} = \{\{x\} : x \in X\}$. Además, $\beta = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología discreta sobre $\mathbb{R}$;

4) si $A \subset X$, $\beta_A = \{A \cup \{x\} : x \in X\}$ es base de τ_A;

5) si $A \subset X$, $\beta^A = \{\{x\} : x \in X - A\} \cup \{X\}$ es base de τ^A;

6) $\beta_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ y $\beta_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ son bases de la topología usual sobre $\mathbb{R}$;

7) $\beta_{Sor} = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{R}$, llamada *topología de Sorgenfrey*; el par $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$ se llama *recta de Sorgenfrey*.

Como se ha visto en los anteriores ejemplos, una topología puede generarse a través de diferentes bases. Esto sugiere la siguiente definición

Definición 2.13 Dos bases de topología sobre X β_1 y β_2 son *equivalentes*, si generan la misma topología.

Se pueden comparar topologías sobre X conociendo sólo sus bases. Intuitivamente, cuanto más pequeños sean los elementos de la base, mayores serán las topologías generadas

Teorema 2.14 *Sean β_1 y β_2 bases para las topologías τ_1 y τ_2 sobre X, respectivamente. Entonces, $\tau_2 \subset \tau_1$ si y sólo si para cada $B_2 \in \beta_2$ y cada $x \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$, tal que $x \in B_1 \subset B_2$.*

Ejemplo 2.15 Aplicando este criterio, se comprueba que $\tau_{us} \subset \tau_{Sor} \not\subset \tau_{us}$.

A veces, también es útil disponer de la noción de subbase

Definición 2.16 Una famila $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una *subbase* para alguna topología sobre X, si la familia de las intersecciones finitas de elementos de σ es una base para una topología sobre X.

Lema 2.17 *Todo $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup\limits_{S \in \sigma} S = X$ es subbase para alguna topología sobre X.*

Ejemplos 2.18 Algunos ejemplos de subbases son

1) $\sigma = \{(-\infty, a), (b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para τ_{us} sobre $\mathbb{R}$;

2) $\sigma = \{(-\infty, a], [b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para τ_{dis} sobre $\mathbb{R}$;

3) toda topología es subbase de sí misma.

2.4 Espacios de Fréchet y de Hausdorff

El axioma T_2 fue introducido en 1914 por Hausdorff. El axioma T_1 se atribuye a Fréchet. El propósito principal de los *axiomas de separación* (como T_1 y T_2), es el de hacer los puntos y los conjuntos de un espacio *topológicamente distinguibles*.

Definición 2.19 Un espacio (X, τ) es *de Fréchet* o T_1, si para cada par de puntos distintos $x \neq y$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Definición 2.20 Un espacio (X, τ) es *de Hausdorff* o T_2, si existen dos abiertos disjuntos U y V, tales que $x \in U$ e $y \in V$. Se suele decir que U y V *separan* x e y.

Lema 2.21 *Si (X, τ) es T_2, entonces es T_1 .*

Observación 2.22 En las definiciones anteriores, pueden reemplazarse los abiertos por abiertos básicos.

Ejemplos 2.23 En los espacios introducidos anteriormente

1) τ_{dis}, τ_{sca}, τ_{Sor} y las topologías metrizables (problema 6 en 2.5) son T_2 (luego T_1);

2) τ_{cof} y τ_{coc} son T_1, pero no T_2;

3) τ_{ind}, τ_{sier}, τ_{Kol}, τ_A y τ^A (para $A \neq X, \emptyset$) no son T_1 (luego no son T_2).

Proposición 2.24 *Cualquier topología más fina que una T_1 (respectivamente, T_2), es T_1 (respectivamente, T_2).*

2.5 Problemas

1.- Sea $\{\tau_i\}_{i\in I}$ una familia de topologías sobre X. Probar

(i) $\bigcup\limits_{i\in I}\tau_i$ es subbase para una topología, $\sup(\tau_i)$, la menor topología que es más fina que cada τ_i;

(ii) $\bigcap\limits_{i\in I}\tau_i$ es una topología en X, $\inf(\tau_i)$, la mayor topología que es menos fina que cada τ_i;

(iii) si $X=\{a,b,c\}$, $\tau_1=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\}\}$ y $\tau_2=\{\emptyset,X,\{a\},\{b,c\}\}$, encontrar $\sup\{\tau_1,\tau_2\}$ e $\inf\{\tau_1,\tau_2\}$.

2.- Una *base de cerrados* $\mathcal{F}$ en (X,τ) es una familia de cerrados, tal que todo cerrado en (X,τ) se puede escribir como la intersección de una subfamilia de elementos de $\mathcal{F}$. Probar

(i) $\mathcal{F}$ es base de cerrados en (X,τ) si y sólo si $\beta=\{X-C : C\in\mathcal{F}\}$ es base de τ;

(ii) $\mathcal{F}$ es base de cerrados para algún espacio topológico si y sólo si

(a) dados $C_1,C_2\in\mathcal{F}$, entonces $C_1\cup C_2$ se puede escribir como intersección de elementos de $\mathcal{F}$, y

(b) $\bigcap\limits_{C\in\mathcal{F}} C=\emptyset$.

3.- Sea (X,τ) un espacio topológico, donde X es un conjunto infinito. Para cada $A\subset X$, A infinito se sabe que $A\in\tau$. Probar que τ es la topología discreta.

4.- Dar un ejemplo de espacio topológico no discreto, en el que coincidan las familias de abiertos y cerrados.

5.- Describir todas las posibles topologías sobre un conjunto con dos o tres puntos. Estudiar cuales de entre ellas son T_1 o T_2.

6.- Un *espacio métrico* es un par ordenado (X,d), donde X es un conjunto y $d\colon X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función que satisface las siguientes propiedades

(1) la función es *positiva*: $d(x,y)\geq 0$, $\forall x,y\in X$,

(2) propiedad *idéntica*: $d(x,y)=0$ si y sólo si $x=y$,

(3) propiedad *simétrica*: $d(x,y)=d(y,x)$, $\forall x,y\in X$,

(4) desigualdad *triangular*: $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$, $\forall x,y,z\in X$.

La función d se llama *métrica* sobre X. Si en vez de la propiedad idéntica, se verifica la propiedad (2*) $d(x,x)=0$, $\forall x\in X$, (X,d) se llama *espacio pseudométrico* y d es una *pseudométrica*.

Probar que los siguientes son espacios métricos

(a) $(\mathbb{R}^n, d_{us})$, donde $d_{us}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$, llamada la métrica *euclídea* de $\mathbb{R}^n$, siendo $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$;

(b) $(\mathbb{R}^n, d_1)$, donde $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$;

(c) $(\mathbb{R}^n, d_2)$, donde $d_2(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}$;

(d) (X, d), donde $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ y $d(x,x) = 0$, llamada la *métrica discreta* sobre X.

Dado un espacio métrico (respectivamente, pseudométrico), $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, se define la *bola abierta* de centro x y radio ε por $\overset{\circ}{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$. Y se dice que $A \subset X$ es *abierto* si para cada $x \in X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overset{\circ}{B}(x, \varepsilon) \subset A$. Probar que la familia de los conjuntos abiertos, τ_d, es una topología sobre X, llamada *topología métrica* (respectivamente, *topología pseudométrica*).

Se dice que un espacio topológico (X, τ) es *metrizable* (respectivamente, *pseudometrizable*), si existe una métrica (respectivamente, una pseudométrica) d sobre X, tal que $\tau = \tau_d$. Se pide

(i) ¿pueden distintas métricas en X generar la misma topología? Se dice entonces que las métricas son *topológicamente equivalentes*;

(ii) probar que (X, τ_{ind}) no es metrizable, pero si pseudometrizable;

(iii) probar que todo espacio metrizable es T_1 y T_2 ¿es cierta esta propiedad para espacios pseudometrizables?

(iv) si $(X, \|.\|)$ es un espacio vectorial normado, queda definida una métrica $d_{\|.\|}$ sobre X por dados $x, y \in X$, $d_{\|.\|}(x,y) = \|x - y\|$.

7.- Sea $\mathcal{P}$ una partición de X. Probar que es base de alguna topología τ sobre X e identificarla.

8.- Sea X un conjunto infinito y $\tau_\infty = \{U \subset X : X - U \text{ es infinito}\} \cup \{X\}$. ¿Es τ_∞ una topología sobre X?

9.- Probar que en (X, τ) son equivalentes las siguientes condiciones

(i) (X, τ) es T_1,

(ii) para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\{C \text{ cerrado} : x \in C\}$,

(iii) para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto cerrado,

(iv) para cada $A \subset X$, $A = \bigcap\{U \in \tau : A \subset U\}$.

10.- Sea X un conjunto finito. Si (X, τ) es T_1, probar que es necesariamente discreto.

11.- Sea (X, τ) un espacio topológico T_2 y σ una subbase de τ. Si $x \neq y$, ¿se puede asegurar que existen $U, V \in \sigma$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$?

12.- Sea X un conjunto infinito y $\{\tau_i : i \in I\}$ la familia de todas las topologías T_2 sobre X. Probar que $\tau_{cof} = \inf_{i \in I} \tau_i$.

13.- Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Para $\alpha, \gamma \in X$, se consideran los conjuntos

$$V_\gamma = \{x \in X : x < \gamma\}, B_\alpha = \{x \in X : x > \alpha\} \text{ y } M_{\alpha,\gamma} = \{x \in X : \alpha < x < \gamma\} = B_\alpha \cap V_\gamma.$$

Se pide

(i) probar que la familia $\beta = \{V_\gamma, B_\alpha, M_{\alpha,\gamma} : \alpha, \gamma \in X\}$ es una base para una topología τ_{ord} en X, llamada *topología del orden*. ¿Es (X, τ_{ord}) T_1? ¿Y T_2?

(ii) probar que el conjunto $\{x \in X : \alpha \leq x \leq \gamma\}$ es cerrado, para cada $\alpha, \gamma \in X$;

(iii)si se toma $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$) con el orden usual, ¿cuál es la topología del orden asociada sobre $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{N}$)?

(iv) en $[0, 1] \times [0, 1]$ se considera el *orden lexicográfico*

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \text{ si y sólo si } a_1 < b_1 \text{ ó } a_1 = b_1 \text{ y } a_2 < b_2.$$

Probar que la topología del orden asociado no es comparable con la topología euclídea de $[0, 1] \times [0, 1]$;

(v)si $X = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico, ¿cuál es la topología del orden asociada?

14.- Probar que la familia $\beta^* = \{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$, es una base para la topología usual sobre $\mathbb{R}$. Sin embargo, la familia $\beta' = \{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ genera una topología τ' sobre $\mathbb{R}$ estrictamente más fina que τ_{us} y estrictamente menos fina que τ_{Sor}.

15.- En $\mathbb{R}$, se considera la colección $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(r, \infty) : r \in \mathbb{Q}\}$. Probar

(i) $\displaystyle\bigcup_{s \in S} (s, \infty) = \begin{cases} (\inf(S), \infty) & \text{si } S \subset \mathbb{R} \text{ está acotado inferiormente} \\ \mathbb{R} & \text{en caso contrario} \end{cases}$;

(ii) $(r_1, \infty) \cap \cdots \cap (r_n, \infty) = (r, \infty)$, donde $r = \max\{r_1, \cdots, r_n\}$;

(iii) concluir que τ no es una topología sobre $\mathbb{R}$.

16.- Sea $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$, donde $p \notin \mathbb{R}$. Se consideran las colecciones

(i) $\tau_1 = \{\tau_{us}\} \cup \{U \subset X : X - U$ es finito$\}$ y

(ii) $\tau_2 = \{\tau_{us}\} \cup \{U \subset X : X - U$ es cerrado usual y acotado$\}$.

Probar que se trata de dos topologías sobre X y compararlas.

17.- Sobre $\mathbb{R}^2$, se considera

(i) un conjunto U se llama *radialmente abierto*, si para cada $x \in U$, U contiene un segmento de línea abierta en cada dirección alrededor del punto. La familia de los conjuntos radialmente abiertos, τ_{rad}, es una topología, llamada *topología radial*. Compararla con la topología euclídea y estudiar si es T_1 o T_2;

(ii) describir la topología cuya subbase esta formada por la familia de todas las líneas rectas. Lo mismo, si se considera como subbase la familia de las líneas rectas paralelas al eje de abscisas;

(iii) si $\tau = \{\emptyset\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$, donde $G_k = \{(x, y) : x > y + k\}$. ¿Es τ una topología sobre $\mathbb{R}^2$? ¿Lo es si $k \in \mathbb{Z}$? ¿Y si $k \in \mathbb{Q}$?

(iv) probar que la familia $\beta = \{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ es base para una topología sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Es T_1? ¿Y T_2?

18.- En $\mathbb{R}^2$, se define una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, como sigue

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{F \subset \mathbb{R}^2 : F \text{ consta de un número finito de puntos y de rectas}\}.$$

Probar

(i) $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados para alguna topología $\tau_{\mathcal{F}}$;

(ii) esta topología es la menor en la que puntos y rectas son subconjuntos cerrados;

(iii) comparar $\tau_{\mathcal{F}}$ con la topología usual y la cofinita;

(iv) ¿existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que las rectas sean cerradas y los puntos no?

(v) ¿existe alguna topología sobre $\mathbb{R}^2$ en la que los puntos sean cerrados y las rectas no?

19.- Sean $a, b \in X = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se define $U(a, b) = \{an + b : n \in X\}$. Probar

(i) $U(a, b) \cap U(c, d) \neq \emptyset$ si y sólo si $U(a, b) \cap U(c, d) = U(r, s)$, donde $r = mcm\{a, c\}$ y $s = \min\{U(a, b) \cap U(c, d)\}$;

(ii) $U(a, b) \cap U(c, d) = \emptyset$ si y sólo si $k = MCD\{a, c\}$ no divide a $b - d$;

(iii) $\beta = \{U(a, b) : a$ y b son relativamente primos$\}$ es base para una topología τ en X;

(iv) para cada número primo p, el conjunto $C_p = \{kp : k \in X\}$ es cerrado en (X, τ);

(v) el conjunto de los números primos no contiene ningún abierto no vacío en (X, τ).

20.- Decimos que $U \subset \mathbb{N}$ es abierto si dado $n \in U$, todo divisor de n pertenece también a U. Probar que esta relación define una topología τ sobre $\mathbb{N}$, que no es la discreta. ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

21.- Sea $\mathbb{N}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $O_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Probar que $\tau = \{\emptyset, O_1, O_2, \ldots\}$ es una topología sobre $\mathbb{N}$. ¿Qué abiertos contienen al 1? ¿Es $(\mathbb{N}, \tau)$ T_2?

22.- Sea $X = \{f \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]\}$. Si $S \subset [0,1]$, sea $A_S = \{f \in X : f(x) = 0, \forall x \in S\}$. Probar que la familia $\beta = \{A_S : S \subset [0,1]\}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

23.- Sea X la familia de todos los polinomios de coeficientes reales y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $B_n = \{p \in X : p \text{ es de grado } n\}$. Probar que la familia $\beta = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base para una topología τ sobre X. ¿Es (X, τ) T_2?

24.- Para cada subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$, definimos $N(n, A) = Card\,(A \cap \{1, 2, \ldots, n\})$. Sea

$$\tau_{Ap} = \left\{ U \subset \mathbb{N} : 1 \notin U \text{ ó } \left(1 \in U \text{ y } \lim_{n \to \infty} \frac{N(n, U)}{n} = 1 \right) \right\}.$$

Probar que τ_{Ap} es una topología sobre $\mathbb{N}$, la *topología de Appert*, y estudiar los axiomas de separación.

25.- Sea $\mathcal{P}$ la colección de los polinomios en n variables reales. Para cada $P \in \mathcal{P}$, sea

$$Z(P) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : P(x_1, \cdots, x_n) = 0\}.$$

Se pide

(i) probar que $\{Z(P) : P \in \mathcal{P}\}$ es una base de cerrados para una topología sobre $\mathbb{R}^n$, τ_{Zar}, llamada *topología de Zariski*;

(ii) probar que τ_{Zar} es de T_1, pero no T_2;

(iii) si $n = 1$, $\tau_{Zar} = \tau_{cof}$. Pero, si $n > 1$, estas dos topologías son distintas.

Tema III

Entornos

Los espacios métricos y sus variantes, introducidos en 1906 por Fréchet, se basan en el concepto de distancia. El concepto intuitivo de *cercanía* se traslada al concepto matemático más manejable de *entorno*.

Hausdorff en su "*Grundzüge der Mengenlehre*", en 1914, utilizó el concepto de *entorno* (usado ya por Hilbert en 1902, en una formulación axiomática especial de la Geometría Euclídea Plana) y edificó una teoría definitiva de los espacios abstractos basada en este concepto.

3.1 Entornos y sistemas de entornos

Los entornos constituyen la manera más natural de describir topologías. Esta herramienta indica como funcionan las cosas *cerca* de cada punto, es decir, se trata de dar una descripción *local*.

Definición 3.1 Un *entorno* de un punto x en (X, τ), es un subconjunto $N \subset X$ tal que existe un abierto $U \in \tau$, verificando $x \in U \subset N$. En esta definición, puede cambiarse el abierto por un abierto básico. La familia $\mathcal{N}_x$ de todos los entornos de x se llama *sistema de entornos* de x.

Teorema 3.2 *El sistema de entornos de x en (X, τ) verifica las siguientes propiedades*

(N1) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, es $x \in N$,

(N2) si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$,

(N3) si $N \in \mathcal{N}_x$ y $N \subset M$, entonces $M \in \mathcal{N}_x$,

(N4) para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $M \in \mathcal{N}_x$, tal que $N \in \mathcal{N}_y$ para cada $y \in M$, y además

(N5) $U \in \tau$ si y sólo si U es entorno de cada uno de sus puntos.

Y recíprocamente, si a cada x se le asigna una familia no vacía de subconjuntos $\mathcal{M}_x$, verificando (N1) a (N4), y se usa (N5) para definir el concepto de conjunto abierto, *se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\mathcal{M}_x = \mathcal{N}_x$ en cada punto.*

Ejemplos 3.3 En los ejemplos ya vistos, tenemos

1) en (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{ind} = \{X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{dis} = \{N \subset X : x \in N\}$;

3) en (X, τ_{cof}), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{cof} = \{U \in \tau_{cof} : x \in U\}$;

4) en (X, τ_{coc}), para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{coc} = \{U \in \tau_{coc} : x \in U\}$;

5) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\mathcal{N}_a^{sier} = \{X, \{a\}\}$ y $\mathcal{N}_b^{sier} = \{X\}$;

6) en (X, τ_A), para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{\tau_A} = \{N \subset X : \{x\} \cup A \subset N\}$;

7) en (X, τ^A), si $x \in A$ es $\mathcal{N}_x^{\tau^A} = \{X\}$ y si $x \notin A$ es $\mathcal{N}_x = \{N \subset X : x \in N\}$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, es $\mathcal{N}_x^{sca} = \begin{cases} \mathcal{N}_x^{us} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \{N \subset \mathbb{R} : x \in N\} & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

3.2 Bases de entornos

Es claro que no son necesarios todos los superconjuntos de los entornos de un punto para obtener una buena descripción del sistema de entornos. Bastará con una familia más pequeña

Definición 3.4 Una *base de entornos o base local* de x en (X, τ) es una familia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{N}_x$ tal que, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset N$. En cuanto se ha elegido una base de entornos de un punto (hay varias formas de hacerlo), sus elementos se llaman *entornos básicos*. La familia $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ se llama *sistema fundamental de entornos*.

Ejemplos 3.5 En los ejemplos ya estudiados, tenemos

1) en (X, τ_{ind}), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{ind} = \{X\}$;

2) en (X, τ_{dis}), para cada $x \in X$, se escoge $\mathcal{B}_x^{dis} = \{\{x\}\}$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, se toma $\mathcal{B}_a^{sier} = \{\{a\}\}$ y $\mathcal{B}_b^{sier} = \{X\}$;

4) en (X, τ_A), para todo $x \in X$, se elige $\mathcal{B}_x^{\tau_A} = \{\{x\} \cup A\}$;

5) en (X, τ^A), $\mathcal{B}_x^{\tau^A} = \begin{cases} \{X\} & \text{si } x \in A \\ \{\{x\}\} & \text{si } x \notin A \end{cases}$;

6) en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, se elige $\mathcal{B}_x^{us} = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$;

7) en $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$, se toma $\mathcal{B}_x^{Sor} = \{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$, se coge $\mathcal{B}_x^{Kol} = \{(x-\varepsilon, \infty) : \varepsilon > 0\}$;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$,se toma $\mathcal{B}_x^{sca} = \begin{cases} \mathcal{B}_x^{us} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \{\{x\}\} & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$;

10) $\mathcal{N}_x$ es una base local en x en (X, τ).

Teorema 3.6 *Sea (X, τ) y $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos. Se verifica*

(B1) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, es $x \in B$;

(B2) si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$;

(B3) para cada $B \in \mathcal{B}_x$, existe $B_0 \in \mathcal{B}_x$, tal que para cada $y \in B_0$, existe $B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subset B$; y además

(B4) $U \in \tau$ si y sólo si para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$, tal que $B \subset U$.

Y recíprocamente, si a cada $x \in X$ se le asigna una familia no vacía $\mathcal{D}_x$ de subconjuntos de X, verificando (B1) a (B3), y se usa (B4) para definir el concepto de conjunto abierto*, se obtiene una topología τ sobre X, para la que $\{\mathcal{D}_x\}_{x \in X}$ es un sistema fundamental de entornos en x.*

Una forma natural de construir bases locales es

Lema 3.7 *En (X, τ), $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \tau$ es una base local en x.*

3.3 Topologías y sistemas de entornos

Intuitivamente, cuanto menores son los entornos, mayores son las topologías asociadas

Teorema 3.8 (Criterio de Hausdorff) *Sean τ_1 y τ_2 topologías sobre X y $\{\mathcal{B}_x^1\}_{x \in X}$, $\{\mathcal{B}_x^2\}_{x \in X}$ sistemas fundamentales de entornos asociados. Entonces, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$, existe $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subset B_1$.*

Proposición 3.9 *En las mismas condiciones del teorema anterior, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para cada $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^1 \subset \mathcal{N}_x^2$.*

La única diferencia entre las nociones de base local y base de topología es que las bases de entornos no constan necesariamente de conjuntos abiertos

Teorema 3.10 *Sea (X, τ) y $\beta \subset \tau$. Entonces, β es base de τ si y sólo si, para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x = \{B \in \beta : x \in B\}$ es una base local en x.*

Observación 3.11 En las definiciones de T_1 y T_2, se pueden reemplazar los abiertos por entornos o entornos básicos.

3.4 Problemas

1.- En (X,τ), se dice que $N\subset X$ es un *entorno* de $A\subset N$, si existe $U\in\tau$, tal que $A\subset U\subset N$. Probar que N es un entorno de A si y sólo si para cada $x\in A$, es $N\in\mathcal{N}_x$.

2.- Probar que (X,τ) es T_1 si y sólo si para cada $x\in X$, $\{x\}=\bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}_x} N$.

3.- Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que $\mathcal{B}_x=\{\overset{\circ}{B}(x,\frac{1}{n}):n\in\mathbb{N}\}$ es una base de entornos en x para la topología inducida por la métrica.

4.- Sobre $\mathbb{R}$, se considera

(1) si $x\neq 0$, $\mathcal{B}_x=\{(x-\varepsilon,x+\varepsilon):\varepsilon>0\}$,

(2) $\mathcal{B}_0=\{B_{\varepsilon,n}:\varepsilon>0,n\in\mathbb{N}\}$, donde $B_{\varepsilon,n}=(-\infty,-n)\cup(-\varepsilon,\varepsilon)\cup(n,\infty)$.

Probar que $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_{lac} sobre $\mathbb{R}$. El par $(\mathbb{R},\tau_{lac})$ se llama *recta enlazada*. Comparar τ_{lac} con la topología usual de $\mathbb{R}$ y estudiar los axiomas de separación.

5.- Determinar si en $(\mathbb{R},\tau_{us})$ los siguientes intervalos son entornos de 0: $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $(-1,0]$, $[0,\frac{1}{2})$ y $(0,1]$. Probar que los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$ no pueden ser entornos de ningún punto.

6.- Sea $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ el semiplano superior cerrado. Se considera

(1) $\mathcal{B}_{(x,y)}=\{\overset{\circ}{B}_{us}((x,y),\varepsilon):\varepsilon>0$ "suficientemente pequeño" para $\overset{\circ}{B}_{us}((x,y),\varepsilon)\subset\Gamma\}$, para $(x,y)\in\Gamma$, $y\neq 0$,

(2) $\mathcal{B}_{(x,0)}=\{\{(x,0)\}\cup B : B$ bola abierta tangente al eje de abscisas en $(x,0)\}$.

Probar que $\{\mathcal{B}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in\Gamma}$ es un sistema fundamental de entornos, que define una topología τ_M sobre Γ. El par (Γ,τ_M) se llama *plano de Moore*. Comparar τ_M con la topología euclídea sobre Γ y estudiar los axiomas de separación.

7.- Se considera $\mathbb{R}^{[0,1]}=\{f\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}\}$, y

(i) se define $U(f,F,\delta)=\{g\in\mathbb{R}^{[0,1]}:\forall x\in F,|f(x)-g(x)|<\delta\}$, para $f\in\mathbb{R}^{[0,1]}$, $F\subset[0,1]$ finito y $\delta>0$. Probar que $\{U(f,F,\delta):F\subset[0,1]$ finito$,\delta>0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{Tyc}, sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, que se denomina *topología de Tychonof*;

(ii) para $f\in\mathbb{R}^{[0,1]}$ y $\varepsilon>0$, sea $V(f,\varepsilon)=\{g\in\mathbb{R}^{[0,1]}:\forall x\in[0,1],|g(x)-f(x)|<\varepsilon\}$. Verificar que $\{V(f,\varepsilon):\varepsilon>0\}$ forma una base de entornos en f para una topología, τ_{ca}

sobre $\mathbb{R}^{[0,1]}$, llamada *topología caja*;

(iii) comparar τ_{Tyc} y τ_{ca} y estudiar los axiomas de separación para ambas topologías.

8.- Sean $L_n = \{(x, \frac{1}{n}) : x \in [0,1)\}$ si $n > 0$, $L_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ y $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Se considera

(1) si $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$, $\mathcal{B}_{(x,\frac{1}{n})} = \{(x, \frac{1}{n})\}$,

(2) $\mathcal{B}_{(0,\frac{1}{n})} = \{U \subset L_n : (0, \frac{1}{n}) \in U, L_n - U$ es finito$\}$,

(3) $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{\{(x,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : n > 0\}\}$.

Comprobar que se trata de un sistema fundamental de entornos sobre X y estudiar los axiomas de separación.

9.- Sea $([0,1]\times[0,1], \tau_{ord})$, donde la topología del orden está generada por el orden lexicográfico sobre $[0,1] \times [0,1]$. Describir los entornos de los puntos

(i) $(x,0)$ (con especial atención al $(0,0)$) y $(x,1)$ (con especial atención al $(1,1)$), si $x \in [0,1]$,

(ii) (x,y), para $x, y \in (0,1)$.

10.- Sea $X = \{a,b,c,d\}$, $\tau = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}\}$. Describir los sistemas de entornos de los puntos b, c y d.

11.- Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, sea la familia

$$\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup D : D \text{ es disco centrado en } x\text{, al que le faltan un número finito de diámetros}\}.$$

Se pide

(i) comprobar que $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos en x para una topología, τ_{slo}, en el plano. El par $(\mathbb{R}^2, \tau_{slo})$ se llama *plano Slotted*;

(ii) comparar τ_{slo} con la topología usual;

(iii) ¿Es τ_{slo} T_2?

(iv) ¿se puede reemplazar, en la definición, finito por numerable?

12.- Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices n por n de números reales. Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(\mathbb{R})$ y $r > 0$, se define

$$U_r(A) = \{(b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} : |a_{ij} - b_{ij}| < r, \forall i,j = 1,\ldots,n\}.$$

Probar que la familia $\mathcal{B}_A = \{U_r(A) : r > 0\}$ es una base de entornos en A, que genera una topología τ en $M_n(\mathbb{R})$. Estudiar los axiomas de separación.

13.- Sea $X = (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}) \cup \{0^+, 0^-\}$, donde 0^+ y 0^- son dos puntos añadidos a $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Para los puntos de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ se considera la familia de bolas usuales y para los otros dos puntos se consideran las familias

$$\mathcal{B}_{0^+} = \{B_\varepsilon^+ \cup \{0^+\} : \varepsilon > 0\}, \qquad \mathcal{B}_{0^-} = \{B_\varepsilon^- \cup \{0^-\} : \varepsilon > 0\},$$

donde $B_\varepsilon^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \varepsilon,\ y > 0\}$, $B_\varepsilon^- = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \varepsilon,\ y < 0\}$. Demostrar que las familias anteriores forman bases locales, para los puntos indicados, de una topología τ sobre X.

14.- Sea $X = [0,1] \cup \{1^*\}$, donde 1^* es un punto añadido a $[0,1]$, tal que $x < 1^*$ para cada $x \in [0,1)$. Para cada $x \in [0,1]$, los entornos básicos son los entornos usuales de x; los entornos básicos de 1^* son los conjuntos de la forma $(a,1) \cup \{1^*\}$, donde $a \in [0,1)$. Demostrar que definen una topología τ sobre X.

Tema IV

Conjuntos en espacios topológicos

El operador clausura, como concepto primordial para definir estructuras espaciales (junto con un sistema de axiomas que debe satisfacer), fue introducido por Kuratowski en su Tesis en 1920.

Los conjuntos cerrados son los elementos fijos del operador clausura. A primera vista, parece sorprendente que una función pueda determinarse únicamente a través de sus puntos fijos. Pero, observando con un poco de calma las propiedades, se ve que el conjunto de los valores tomados por el operador clausura es exactamente el conjunto de sus puntos fijos. Además, la clausura de A, $\overline{A}$, es uno de esos conjuntos fijos que contiene a A, y más aún, es el menor.

El concepto de interior es el dual del concepto de clausura, a través de la complementación.

4.1 Interior de un conjunto

En (X, τ), si $A \subset X$, A no tiene porque ser un conjunto abierto, pero siempre contiene conjuntos abiertos: por lo menos el conjunto vacío $\emptyset$. Por ello, tiene sentido definir

Definición 4.1 Dado (X, τ) y $A \subset X$, el *interior* de A es el conjunto

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \subset X : U \in \tau \text{ y } U \subset A\}.$$

Si $x \in \overset{\circ}{A}$, se dice que x es un *punto interior* de A.

Lema 4.2 *En (X, τ), si $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \in \tau$ y además $\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A.*

Ejemplos 4.3 En los ejemplos ya estudiados, tenemos

1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \neq X$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ y $\overset{\circ}{X} = X$;

2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} = A$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $\overset{\circ}{\{b\}} = \emptyset$;

4) en (X, τ_A), si $B \notin \tau_A$, es $\overset{\circ}{B} = \emptyset$;

5) en (X, τ^A), si $B \notin \tau^A$, es $\overset{\circ}{B} = B - A$;

6) en (X, τ_{cof}), si $A \notin \tau_{cof}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

7) en (X, τ_{coc}), si $A \notin \tau_{coc}$, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$, si A está acotado superiormente, es $\overset{\circ}{A} = \emptyset$;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, para $\overset{\circ}{A} = (A \cap \mathbb{I}) \cup (\overset{\circ}{A}{}^{us} \cap \mathbb{Q})$.

Lema 4.4 *En (X, τ), si $A \subset B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*

Teorema 4.5 *En (X, τ), se verifican las siguientes propiedades*

(I1) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{A} \subset A$,

(I2) para todo $A \subset X$, es $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,

(I3) para todo $A, B \subset X$, es $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$,

(I4) $\overset{\circ}{X} = X$, y además

(I5) $U \in \tau$ si y sólo si $\overset{\circ}{U} = U$.

Y recíprocamente, dada una aplicación $Int \colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, que verifica (I1) a (I4), y si se define el concepto de conjunto abierto *usando (I5), queda definida una topología τ sobre X, para la cual Int es el operador interior.*

Se puede caracterizar el interior de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos

Proposición 4.6 *Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos en (X, τ), entonces es $x \in \overset{\circ}{A}$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subset A$.*

El interior de cualquier entorno es no vacío

Lema 4.7 *En (X, τ), $N \in \mathcal{N}_x$ si y sólo si $\overset{\circ}{N} \in \mathcal{N}_x$.*

4.2 Clausura de un conjunto

Un conjunto A en un espacio (X,τ) no tiene porque ser cerrado. Pero siempre existen cerrados que lo contienen: por lo menos, el total X. Por esta razón tiene sentido definir

Definición 4.8 Sea (X,τ) y $A\subset X$. La *clausura* de A es

$$\overline{A}=\bigcap\{F\subset X : F \text{ cerrado y } A\subset F\}.$$

Si $x\in\overline{A}$, x se llama punto *clausura* o *adherente* de A.

Lema 4.9 *Sea (X,τ) y $A\subset X$. $\overline{A}$ es un conjunto cerrado, y además es el menor cerrado que contiene a A.*

Ejemplos 4.10 En los ejemplos ya estudiados, tenemos

1) en (X,τ_{ind}), para todo $A\neq\emptyset$, es $\overline{A}=X$;

2) en (X,τ_{dis}), para todo $A\subset X$, es $\overline{A}=A$;

3) en $(X=\{a,b\},\tau_{sier})$, $\overline{\{b\}}=\{b\}$ y $\overline{\{a\}}=X$;

4) en (X,τ_A), si $B\not\in\mathcal{C}_A$, es $\overline{B}=X$;

5) en (X,τ^A), si $B\not\in\mathcal{C}^A$, es $\overline{B}=B\cup A$;

6) en (X,τ_{cof}), si A es infinito, es $\overline{A}=X$;

7) en (X,τ_{coc}), si A no es contable, es $\overline{A}=X$;

8) en $(\mathbb{R},\tau_{Kol})$, si A no está acotado superiormente, es $\overline{A}=X$;

9) en $(\mathbb{R},\tau_{sca})$, para $\overline{A}=(A-\mathbb{Q})\cup(\overline{A}^{us}\cap\mathbb{Q})$.

Lema 4.11 *En (X,τ), si $A\subset B$, entonces $\overline{A}\subset\overline{B}$.*

Teorema 4.12 *En (X,τ), se verifican las siguientes propiedades*

(C1) para todo $A\subset X$, es $A\subset\overline{A}$,

(C2) para todo $A\subset X$, es $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$,

(C3) para todo $A,B\subset X$, es $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

(C4) $\overline{\emptyset}=\emptyset$, y además

(C5) $F\in\mathcal{C}$ si y sólo si $\overline{F}=F$.

Y recíprocamente, dada una aplicación $Cl\colon\mathcal{P}(X)\longrightarrow\mathcal{P}(X)$, que verifica (C1) a (C4) (es decir, lo que habitualmente se denomina un operador clausura de Kuratowski*), si se define el concepto de* conjunto cerrado *usando (C5), queda definida una topología τ sobre X, para la cual Cl es el operador clausura.*

Se puede caracterizar la clausura de un conjunto a través de un sistema fundamental de entornos

Proposición 4.13 *Sea $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ un sistema fundamental de entornos en (X,τ), entonces es $x\in\overline{A}$ si y sólo si para cada $B\in\mathcal{B}_x$ es $B\cap A\neq\emptyset$.*

Los conceptos de interior y clausura son duales (no contrarios), como los conceptos de abierto y cerrado

Proposición 4.14 *Sea (X,τ) y $A\subset X$, entonces es $X-\overset{\circ}{A}=\overline{X-A}$ y $X-\overline{A}=\overset{\circ}{\overbrace{X-A}}$.*

Definición 4.15 Un conjunto D es *denso* en (X,τ), si $\overline{D}=X$.

4.3 Puntos de acumulación y puntos aislados

Definición 4.16 En (X,τ), se fija un sistema fundamental de entornos $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$. Se dice que $x\in X$ es un *punto de acumulación* de $A\subset X$, si para cada $B\in\mathcal{B}_x$, es $(B-\{x\})\cap A\neq\emptyset$. Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le llama *conjunto derivado* de A y se denota por A^d. Si $x\in A-A^d$, se dice que x es un *punto aislado* de A.

Teorema 4.17 *En (X,τ), se verifican las siguientes propiedades*

(i) si $A\subset B$, es $A^d\subset B^d$;

(ii) para todo $A,B\subset X$, es $(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$;

(iii) $\emptyset^d=\emptyset$;

(iv) $\overline{A}=A\cup A^d$.

(v) $F\in\mathcal{C}$ si y sólo si $F^d\subset F$. En particular, un conjunto con derivado vacío es cerrado.

Ejemplos 4.18 En los ejemplos anteriores, tenemos

1) en (X,τ_{ind}), para todo $A\neq\emptyset$ con más de un punto, es $A^d=X$ y para $x\in X$, es $\{x\}^d=X-\{x\}$;

2) en (X,τ_{dis}), para todo $A\subset X$, es $A^d=\emptyset$;

3) en $(X=\{a,b\},\tau_{sier})$, $\{b\}^d=\emptyset$ y $\{a\}^d=\{b\}$;

4) en (X,τ_A), si $B\notin\mathcal{C}_A$, es $B^d=X-\{x\}$ cuando $A\cap B=\{x\}$ y $B^d=X$ en otro caso. Y si $B\in\mathcal{C}_A$, entonces $B^d=\emptyset$;

5) en (X,τ^A), si B tiene más de un punto, es $B^d=A$ y si $B=\{x\}$, es $B^d=A-\{x\}$;

6) en (X,τ_{cof}), si A es infinito, $A^d=X$ y si A es finito, $A^d=\emptyset$;

7) en (X, τ_{coc}), si A es no contable, $A^d = X$ y si A es contable, $A^d = \emptyset$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$ y con las notaciones obvias, si $x \in \mathbb{Q}$, es $x \in A^d$ si y sólo si $x \in A^{d_{us}}$ y si $x \in \mathbb{I}$, es $x \notin A^d$.

4.4 Frontera de un conjunto

Definición 4.19 En (X, τ), la *frontera* de $A \subset X$ es el conjunto $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$. Si $x \in fr(A)$ se dice que x es un *punto frontera* de A.

Lema 4.20 *En (X, τ), si $A \subset X$, $fr(A)$ es un conjunto cerrado.*

Teorema 4.21 *En (X, τ), si $A \subset X$, se verifican las siguientes propiedades*

(i) $fr(A) = fr(X - A)$*;*

(ii) $fr(\emptyset) = fr(X) = \emptyset$*;*

(iii) $\overline{A} = A \cup fr(A) = \overset{\circ}{A} \cup fr(A)$*;*

(iv) $fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ *y* $\overset{\circ}{A} = A - fr(A)$*;*

(v) $X = \overset{\circ}{A} \cup fr(A) \cup (X - \overline{A})$ *y esta unión es disjunta;*

(vi) A *es abierto si y sólo si* $fr(A) \cap A = \emptyset$*;*

(vii) A *es cerrado si y sólo* $fr(A) \subset A$*.*

Ejemplos 4.22 En los ejemplos conocidos, se verifica

1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \subset X$ propio, es $fr(A) = X$;

2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, es $fr(A) = \emptyset$;

3) en $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$, $fr(\{b\}) = \{b\}$ y $fr(\{a\}) = \{b\}$;

4) en (X, τ_A), si $B \subset X$ es propio,
$$fr(B) = \begin{cases} B & \text{si } B \in \mathcal{C}_A \\ X - B & \text{si } B \in \tau_A \\ X & \text{en caso contrario} \end{cases} ;$$

5) en (X, τ^A), si $B \subset X$ es propio, es $fr(B) = A$;

6) en (X, τ_{cof}), para X infinito,
$$fr(A) = \begin{cases} X - A & \text{si } A \in \tau_{cof} \\ A & \text{si } A \in \mathcal{C}_{cof} \\ X & \text{en caso contrario} \end{cases} ;$$

7) en (X, τ_{coc}), para X no contable,

$$fr(A) = \begin{cases} X - A & \text{si } A \in \tau_{coc} \\ A & \text{si } A \in \mathcal{C}_{coc} \\ X & \text{en caso contrario} \end{cases} ;$$

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, para $A \subset \mathbb{R}$, es $fr(A) = (\overline{B}^{us} \cap \mathbb{Q}) - (\overset{\circ}{B}^{us} \cap \mathbb{Q})$.

4.5 Problemas

1.- Sea (X, τ) un espacio topológico, $A, B \subset X$ y $\{A_i \subset X\}_{i \in I}$. Probar

(i) $x \in A^d$ si y sólo si $x \in \overline{A - \{x\}}$;

(ii) si $A \cup B = X$, entonces $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$;

(iii) si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$;

(iv) A es abierto si y sólo si $\Big(\forall B \subset X,$ es $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $A \cap \overline{B} = \emptyset\Big)$;

(v) A es abierto si y sólo si $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$, para cada $B \subset X$. Y entonces, $\overline{\overline{B} \cap A} = \overline{B \cap A}$;

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, $\quad (A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d$, $\quad \overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$ y $\overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{B} \supset \overset{\circ}{\overbrace{A - B}}$;

(vii) $\bigcup\limits_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}}$, $\quad \bigcap\limits_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i \supset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap\limits_{i \in I} A_i}}$, $\quad \bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$, $\quad \bigcap\limits_{i \in I} \overline{A_i} \supset \overline{\bigcap\limits_{i \in I} A_i}$, $\quad \bigcup\limits_{i \in I} A_i^d \subset (\bigcup\limits_{i \in I} A_i)^d$ y $\bigcap\limits_{i \in I} {A_i}^d \supset (\bigcap\limits_{i \in I} A_i)^d$;

(viii) ¿pueden dos conjuntos diferentes poseer el mismo conjunto derivado?

2.- Sea X un conjunto y τ_1, τ_2 dos topologías sobre X, tales que $\tau_2 \subset \tau_1$. Con las notaciones obvias, probar que para cada $A \subset X$, se tiene $\overset{\circ}{A}^2 \subset \overset{\circ}{A}^1$ y $\overline{A}^1 \subset \overline{A}^2$. ¿Se pueden comparar sus operadores derivados?

3.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar

(i) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X : A \in \mathcal{N}_x\}$;

(ii) si X no posee puntos aislados y $A \subset X$ es abierto, entonces A no posee puntos aislados;

(iii) si $x \in A$ es aislado en $\overline{A}$, entonces x es aislado en A. ¿Es cierto el recíproco?

(iv) si (X, τ) es T_1 y $x \in A^d$, entonces A corta a cada entorno de x en un número infinito de puntos y el conjunto A^d es cerrado;

(v) $x \in \overline{\{y\}}$ si y sólo si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{N}_y$. Luego, $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y$, si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$;

(vi) (X, τ) es T_2 si y sólo si para cada $x \in X$, $\{x\} = \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}_x} \overline{N}$.

4.- En (X, τ), un abierto A se llama *regular*, si $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ y un cerrado A se llama *regular* si $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$. Probar

(i) si A es cerrado (respectivamente, abierto), entonces $\overset{\circ}{A}$ (respectivamente, $\overline{A}$) es un abierto regular (respectivamente, un cerrado regular);

(ii) A es abierto regular si y sólo si $X - A$ es cerrado regular;

(iii) si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), es $A \subset B$ si y sólo si $\overline{A} \subset \overline{B}$ (respectivamente, $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$);

(iv) si A y B son abiertos regulares (respectivamente, cerrados regulares), entonces $A \cap B$ (respectivamente, $A \cup B$) es abierto regular (respectivamente, cerrado regular). En general $A \cup B$ (respectivamente, $A \cap B$) no es abierto regular (respectivamente, cerrado regular);

(v) en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, hay abiertos que no son regulares.

5.- Sea (X, τ) un espacio topológico y $A, B \subset X$. Probar

(i) $fr(A) = \emptyset$ si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez;

(ii) $fr(\overset{\circ}{A}) \subset fr(A)$ y $fr(\overline{A}) \subset fr(A)$;

(iii) si $A \subset B$, ¿es $fr(A) \subset fr(B)$?;

(iv) si $fr(A) \cap fr(B) = \emptyset$, se verifica que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $fr(A \cap B) = (\overline{A} \cap fr(B)) \cup (fr(A) \cap \overline{B})$;

(v) en general, $fr(A \cup B) \subset fr(A) \cup fr(B)$. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces se da la igualdad.

6.- Construir una tabla (con seis entradas) en que se relacionen los conceptos de conjunto abierto, cerrado, interior, clausura, frontera y entorno.

7.- Sea D denso en (X,τ). Probar

(i) si $U \in \tau$, entonces $U \subset \overline{D \cap U}$;

(ii) si $E \supset D$, entonces E es también denso;

(iii) si U es denso y abierto, entonces $D \cap U$ es denso;

(iv) la intersección finita de abiertos densos es abierto denso;

(v) si $\tau' \subset \tau$, entonces D también es denso en (X,τ').

8.- Se considera sobre $\mathbb{R}^2$ la topología $\tau = \{\emptyset\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$, donde $G_k = \{(x,y) : x > y+k\}$. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{(0,0)\}$ y $\{(-x,x) : x \in \mathbb{R}\}$.

9.- En $([0,1] \times [0,1], \tau_{ord})$, donde la topología está inducida por el orden lexicográfico, calcular el interior, la clausura y la frontera de los conjuntos $\{(\frac{1}{n},0) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(1-\frac{1}{n},\frac{1}{2}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(x,0) : 0 < x < 1\}$, $\{(x,\frac{1}{2}) : 0 < x < 1\}$ y $\{(\frac{1}{2},y) : 0 < y < 1\}$.

10.- Sea $(\mathbb{N},\tau_{Ap})$ la topología de Appert, definida en el problema 24 de 2.5. Caracterizar sus operadores interior y clausura y estudiar los axiomas de separación.

11.- En (X,τ), se dice que A es

(a) un F_σ*-conjunto*, si es la unión de una familia contable de conjuntos cerrados y

(b) un G_δ*-conjunto* si es la intersección de una familia contable de conjuntos abiertos.

Se pide probar

(i) todo cerrado es un F_σ-conjunto y todo abierto es un G_δ-conjunto;

(ii) en $(\mathbb{R},\tau_{us})$, $[0,1]$ es un F_σ-conjunto y un G_δ-conjunto;

(iii) en $(\mathbb{R},\tau_{us})$, $\mathbb{Q}$ es un F_σ-conjunto, pero no es un G_δ-conjunto;

(iv) si A es un F_σ-conjunto, existe una familia contable de cerrados $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $F_k \subset F_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$;

(v) si A es un G_δ-conjunto, existe una familia contable de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $U_k \supset U_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y de forma que $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$;

(vi) la unión contable y la intersección finita de F_σ-conjuntos, es un F_σ-conjunto;

(vii) la unión finita y la intersección contable de G_δ-conjuntos, es un G_δ-conjunto;

(viii) el complementario de un F_σ-conjunto es un G_δ-conjunto y viceversa;

(ix) ¿quiénes son los G_δ-conjuntos en $(\mathbb{R},\tau_{cof})$?;

(x) en $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$, todo F_σ-conjunto es cerrado y todo G_δ-conjunto es abierto;

(xi) en el espacio métrico (X, d), todo cerrado es un G_δ-conjunto y todo abierto es un F_σ-conjunto.

12.- Sea X un conjunto y una función $\Phi: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Se pide

(i) si X es infinito y $\Phi(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ es infinito} \\ X & \text{en otro caso} \end{cases}$, comprobar que se trata de un operador clausura de Kuratowski, y ver que topología es la que genera;

(ii) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\Phi(A) = (-\infty, \sup(A)]$;

(iii) lo mismo si para $B \subset X$, $\Phi(A) = A \cup B$, si A es no vacío. Describir los casos particulares en que $B = \emptyset$ y $B = X$;

(iv) sean Φ_1 y Φ_2 dos operadores clausura de Kuratowski sobre X y sean τ_1 y τ_2 las topologías generadas por ellos. Con las notaciones obvias, se supone que para cada $A \subset X$, es $\Phi_2(\Phi_1(A)) \in \mathcal{C}_1$. Se pide probar

(a) $\Phi_2 \circ \Phi_1$ es un operador clausura de Kuratowski;

(b) $\Phi_2 \circ \Phi_1(A) = \bigcap\{F \subset X : A \subset F, F \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2\}$;

(c) $\Phi_1 \circ \Phi_2(A) \subset \Phi_2 \circ \Phi_1(A)$, para cada $A \subset X$.

13.- Sea X un conjunto y una función $\varphi: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Se pide

(i) si X es infinito y se define $\varphi(A) = \begin{cases} A & \text{si } X - A \text{ es finito} \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases}$, comprobar que se trata de un operador interior, y ver que topología es la que genera;

(ii) lo mismo si $X = \mathbb{R}$ y $\varphi(A) = (\inf(A), \infty)$;

(iii) lo mismo si para $B \subset X$, $\varphi(A) = A \cap (X - B)$, si $A \neq X$. Describir los casos particulares en que $B = \emptyset$ y $B = X$.

14.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ se llama *localmente finita*, si cada $x \in X$ posee un entorno que corta sólo a una cantidad finita de los elementos de la familia. Se pide probar

(i) si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, también es localmente finita la familia $\{\overline{A_i} : i \in I\}$;

(ii) si $\{A_i : i \in I\}$ es localmente finita, $\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}$;

(iii) la unión de una familia localmente finita de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado;

(iv) si la familia de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ verifica que $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \in \mathcal{C}$, probar que entonces es $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.

15.- Sea $(\mathbb{N}, \tau)$ el espacio topológico del problema 21 en 2.5. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{n, n+1, \dots, n+p\}$ y $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Caracterizar los operadores clausura e interior.

16.- Sea (X, τ) el espacio topológico del problema 22 de 2.5. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los conjuntos $\{f \in X : f(0) = 0\}$ y $\{f \in X : f(0) = 1\}$. Caracterizar el operador clausura en este espacio.

17.- Sea (X, τ) el espacio topológico del problema 19 de 2.5. Calcular el interior, la clausura y el derivado de: el conjunto de los números primos, $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números pares.

18.- Sea (X, τ) el espacio topológico del problema 8 en 3.4. Calcular el interior, el derivado y la clausura de los siguientes conjuntos $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(x, 1) : 0 \leq x < \frac{1}{2}\} \cup \{(\frac{1}{2}, 0)\}$ y $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n > 1\}$.

Tema V

Numerabilidad

En este capítulo, se definen propiedades asociadas a espacios topológicos que envuelven en algún sentido la contabilidad.

De los axiomas de numerabilidad aquí estudiados, el más antiguo es el de separabilidad, debido a Fréchet en 1906. En 1914, Hausdorff introdujo el primer y segundo axiomas de contabilidad. De esos dos, el primero fue ya sugerido en 1906 por Riesz, como una exigencia razonable impuesta a espacios generales. La propiedad de Lindelöf (aunque no bajo este nombre) se usó durante algún tiempo en estudios relacionados con la compacidad y parece que fue introducida por Kuratowski y Sierpinski en 1921.

Una de las más importantes consecuencias del primer axioma de numerabilidad es que, en espacios que satisfacen dicha propiedad, *las sucesiones son adecuadas*, para utilizar la frase de Kelley [Ke]: esto significa que en este tipo de espacios no es preciso introducir otro tipo de *redes* más generales para obtener resultados básicos.

5.1 Espacios primero y segundo numerables

Definición 5.1 Un espacio (X,τ) se dice *primero numerable* o C_I, si todo punto posee una base local contable.

Proposición 5.2 *En* (X,τ) *son equivalentes*

(i) (X,τ) *es* C_I*;*

(ii) para cada $x \in X$*, existe una base local contable y decreciente;*

(iii) para cada $x \in X$, existe una base local contable y decreciente formada por conjuntos abiertos.

Ejemplos 5.3 En los ejemplos estudiados, tenemos

1) (X, τ_{ind}) es C_I, al elegir para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{X\}$;

2) (X, τ_{dis}) es C_I, al tomar para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ no son C_I;

4) $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$ es C_I, al escoger $\mathcal{B}_a = \{\{a\}\}$ y $\mathcal{B}_b = \{X\}$;

5) (X, τ_A) es C_I, al elegir para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup A\}$;

6) (X, τ^A) es C_I, al tomar para $x \in A$, $\mathcal{B}_x = \{X\}$ y para $x \notin A$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$;

7) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es C_I, al escoger para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es C_I, al elegir para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

9) $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es C_I, al tomar para cada $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_x = \{(x - \frac{1}{n}, \infty) : n \in \mathbb{N}\}$;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es C_I, al escoger para $x \in \mathbb{Q}$, $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_x^{us}$ y para $x \in \mathbb{I}$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$;

11) los espacios métricos son siempre C_I, pues para cada $x \in X$, se elige la base local $\mathcal{B}_x = \{\overset{\circ}{B}(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

Este axioma está íntimamente ligado a la noción de sucesión

Definición 5.4 Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge* a x en (X, τ), y se denota $\{x_n\} \to x$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $n_N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_N$, es $x_n \in N$.

Teorema 5.5 *En (X, τ) se verifica*

(i) si existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, entonces $x \in \overline{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{C}$, entonces para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ que converge a x, es $x \in A$;

(iii) si $A \in \tau$, para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_0$, es $x_n \in A$;

(iv) si (X, τ) es T_2, los límites de sucesiones son únicos.

Además si (X, τ) es C_I, todas las implicaciones anteriores son equivalencias.

Definición 5.6 (X, τ) es *segundo numerable* o C_{II}, si existe una base contable β de τ.

Proposición 5.7 *Si (X, τ) es C_{II}, entonces es C_I. Ambas nociones coinciden en el caso de que X sea un conjunto contable.*

Ejemplos 5.8 En los ejemplos estudiados, se cumple

1) (X, τ_{ind}) es C_{II}, al elegir $\beta = \{X\}$;

2) (X, τ_{dis}) es C_{II} si y sólo si X es contable;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ no son C_I, luego tampoco C_{II};

4) $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$ es C_{II};

5) (X, τ_A) es C_{II} si y sólo si $X - A$ es contable;

6) (X, τ^A) es C_{II} si y sólo si $X - A$ es contable;

7) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es C_{II}, al elegir $\beta_{us} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ no es C_{II};

9) $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es C_{II}, al tomar $\beta_{Kol} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ no es C_{II}.

5.2 Espacios de Lindelöf

Definición 5.9 Un *cubrimiento* de un conjunto X es una familia de conjuntos $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, tales que $X \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Un *subrecubrimiento* de $\mathcal{U}$ es una subfamila $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ que sigue cubriendo X.

Definición 5.10 Un espacio (X, τ) es *de Lindelöf*, si todo cubrimiento por abiertos de X posee un subrecubrimiento contable (la definición sigue siendo válida si se reemplazan los abiertos por abiertos básicos).

Proposición 5.11 *Si (X, τ) es C_{II}, entonces es de Lindelöf.*

Ejemplos 5.12 En los espacios topológicos conocidos, tenemos

1) (X, τ_{ind}) es de Lindelöf;

2) (X, τ_{dis}) es de Lindelöf si y sólo si X es contable;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ son de Lindelöf;

4) $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$ es C_{II}, luego de Lindelöf;

5) (X, τ_A) es de Lindelöf si y sólo si $X - A$ es contable;

6) (X, τ^A) es de Lindelöf;

7) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es C_{II}, luego de Lindelöf;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es de Lindelöf;

9) $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es C_{II}, luego de Lindelöf;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ es de Lindelöf.

5.3 Conjuntos densos y espacios separables

Lema 5.13 *En (X, τ) son equivalentes*

(i) D es denso, es decir, $\overline{D} = X$,

(ii) para cada $U \in \tau$ no vacío, es $U \cap D \neq \emptyset$,

(iii) para cada $F \in \mathcal{C}$ tal que $D \subset F$, es $F = X$,

(iv) para cada $x \in X$ y $N \in \mathcal{N}_x$, es $N \cap D \neq \emptyset$.

Esta definición generaliza la situación de $\mathbb{Q}$ en la recta real, que es un conjunto *pequeño* en cardinal, pero *topológicamente grande*, al ser denso

Definición 5.14 Un espacio (X, τ) es *separable* si existe $D \subset X$, denso y contable.

Proposición 5.15 *Un espacio (X, τ) C_{II} es separable.*

Ejemplos 5.16 En los ejemplos conocidos

1) (X, τ_{ind}) es separable, pues todo conjunto no vacío es denso;

2) (X, τ_{dis}) es separable si y sólo si X es contable;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ es separable, pues $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$;

4) $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ no es separable, pues los conjuntos contables son cerrados;

5) $(X = \{a, b\}, \tau_{sier})$ es C_{II}, luego separable;

6) (X, τ_A) es separable, pues si $a \in A$, es $\overline{\{a\}} = X$;

7) (X, τ^A) es separable si y sólo si $X - A$ es contable;

8) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es C_{II}, luego separable;

9) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$ es separable, pues $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$;

10) $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ es C_{II}, luego separable;

11) $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$ no es separable.

Proposición 5.17 *Si (X, τ_2) es separable y $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces (X, τ_1) es separable.*

No existen relaciones entre los axiomas de separación, aparte de las que ya se han señalado. Pero, el siguiente resultado permite averiguar cuando algunos espacios no son metrizables

Proposición 5.18 *En un espacio metrizable (X, τ), son equivalentes*

(i) (X, τ) *es de Lindelöf,*

(ii) (X, τ) *es separable,*

(iii) (X, τ) *es* C_{II}.

Ejemplos 5.19 Así, concluimos las propiedades siguientes

1) $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$: C_I, no C_{II}, no Lindelöf, no separable, metrizable.

2) $(\mathbb{R}, \tau_{ind})$: C_I, C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es T_2).

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$: no C_I, no C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es C_I).

4) $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$: no C_I, no C_{II}, Lindelöf, no separable, no metrizable (pues no es C_I).

5) (X, τ_{Sier}): C_I, C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es T_2).

6) (X, τ_A) (A propio): C_I, C_{II} si y sólo si $X - A$ contable, Lindelöf si y sólo si $X - A$ contable, separable, no metrizable.

7) (X, τ^A) (A propio): C_I, C_{II} si y sólo si $X - A$ contable, Lindelöf, separable si y sólo si $X - A$ contable, no metrizable.

8) $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$: C_I, C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable (pues no es T_2).

9) $(\mathbb{R}, \tau_{scat})$: C_I, no C_{II}, Lindelöf, no separable, no metrizable.

10) $(\mathbb{R}, \tau_{sor})$: C_I, no C_{II}, Lindelöf, separable, no metrizable.

5.4 Problemas

1.- Sea (X, τ) un espacio topológico, tal que existe una familia no contable de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos. Probar que (X, τ) es no separable.

2.- Sea (X, τ) un espacio separable y T_2. Probar

(i) si (X, τ) es C_I, entonces $Card(X) \leq c$;

(ii) si (X, τ) es C_{II}, entonces $Card(\tau) \leq c$.

3.- Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre (X,τ), se dice que tiene a x como *punto de aglomeración*, $\{x_n\} \succ x$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $n_N \geq n$, tal que $x_{n_N} \in N$. Si llamamos

$$\lim(\{x_n\}) = \{x \in X : \{x_n\} \to x\} \quad \text{y} \quad \text{adh}(\{x_n\}) = \{x \in X : \{x_n\} \succ x\},$$

se piden probar las siguientes propiedades

(i) $\lim(\{x_n\})$ y adh$(\{x_n\})$ son conjuntos cerrados y $\lim(\{x_n\}) \subset$ adh$(\{x_n\})$;

(ii) adh$(\{x_n\}) = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq m\}}$;

(iii) si $x \in \lim(\{x_n\})$, entonces $\overline{\{x\}} \subset \lim(\{x_n\})$;

(iv) si $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces $\lim_{\tau_2}(\{x_n\}) \subset \lim_{\tau_1}(\{x_n\})$ y adh$_{\tau_2}(\{x_n\}) \subset$ adh$_{\tau_1}(\{x_n\})$;

(v) si $\{x_{\varphi(n)}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$, se verifica que $\lim(\{x_n\}) \subset \lim(\{x_{\varphi(n)}\})$ y adh$(\{x_n\}) \supset$ adh$(\{x_{\varphi(n)}\})$.

4.- Sean (X,τ_1) y (X,τ_2) espacios topológicos C_I. Son equivalentes

(i) $\tau_1 = \tau_2$,

(ii) toda sucesión converge en (X,τ_1) si y sólo si converge en (X,τ_2) y lo hace al mismo punto.

Esto no es cierto si las topologías no son C_I. Por ello, *las sucesiones no son adecuadas en espacios topológicos* (ver [Ke]).

5.- Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $x_n = 2n-1$ en el espacio topológico $(\mathbb{N}, \tau_{cof})$. Probar que $\lim(\{x_n\}) =$ adh$(\{x_n\}) = \mathbb{N}$.

6.- Sea $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$. Probar que $3 \in \overline{[0,1]}$. ¿Existe alguna sucesión en $[0,1]$ que converja a 3?

7.- En (X,τ), se dice que $x \in X$ es un *punto de condensación* o ω*-punto límite* de $A \subset X$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$, $N \cap A$ es no contable. Se denota por $\widehat{A}$ la familia de los puntos de condensación de A. Probar

(i) si $A \subset B$, entonces $\widehat{A} \subset \widehat{B}$. Además $\widehat{A} \subset A^d$;

(ii) $\widehat{A}$ es un conjunto cerrado;

(iii) $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$ y $\widehat{\widehat{A}} \subset \widehat{A}$;

(iv) si A no es contable y (X,τ) es Lindelöf, entonces $\widehat{A}$ es no vacío;

(v) si (X,τ) es C_{II} y $A \subset X$, entonces $A - \widehat{A}$ es contable. Deducir que $\widehat{A - \widehat{A}} = \emptyset$ y $\widehat{A} = \widehat{\widehat{A}}$. Concluir el *teorema de Cantor-Bendixon*: un espacio C_{II} puede descomponerse como unión de dos conjuntos disjuntos, uno de ellos perfecto (A es *perfecto*, cuando es cerrado y $A \subset A^d$) y el otro contable.

8.- Sea X un conjunto no contable y τ una topología sobre X, tal que $\tau_{cof} \subset \tau.$ Probar

(i) si β es base de τ, entonces $X = \bigcup_{B\in\beta} (X - B)$;

(ii) si X es no contable y τ es τ_{cof} o τ_{coc}, entonces τ no puede tener una base contable.

9.- Probar que en un espacio topológico la combinación de dos cualesquiera de las dos propiedades siguientes no implica la tercera: C_I, separable y Lindelöf.

Tema VI

Continuidad

La continuidad, en sus concepciones más primitivas, se aplica independientemente a dos situaciones: la continuidad en la materia de un objeto y la continuidad del tiempo. Posteriormente y en un estado más avanzado de abstracción, estas dos nociones se fusionan en la de la continuidad del movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria. Es decir, en un instante t, se le asigna un lugar $f(t)$ del recorrido dado. La continuidad del movimiento se traduce entonces en que, al variar t en un intervalo de tiempo, los valores $f(t)$ recorren un camino continuo. Estas observaciones físicas, dan una idea bastante natural de cuando una función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no es continua: si para algún instante de su dominio se produce una *rotura* en su recorrido. El concepto de continuidad debe descansar en el de proximidad.

6.1 Aplicaciones continuas

Definición 6.1 Dada una función entre dos espacios topológicos $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, se dice que f es *continua* en a, si para todo entorno $M \in \mathcal{N}^Y_{f(a)}$, existe $N \in \mathcal{N}^X_a$, tal que $f(N) \subset M$. Esta definición sigue siendo válida si se reemplazan los entornos por entornos básicos. Una función es *continua en* A si lo es en cada punto de A.

Proposición 6.2 *Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función. Son equivalentes*

(i) f es continua en X;

(ii) para cada $x \in X$ y cada entorno $M \in \mathcal{N}^Y_{f(x)}$, es $f^{-1}(M) \in \mathcal{N}^X_x$;

(iii) para cada $x \in X$ y cada $M \in \mathcal{B}^Y_{f(x)}$ (una vez elegida una base local), es $f^{-1}(M) \in \mathcal{N}^X_x$;

(iv) para cada $U \in \tau_Y$, es $f^{-1}(U) \in \tau_X$;

(v) para cada $U \in \beta_Y$ (una vez elegida una base), es $f^{-1}(U) \in \tau_X$;

(vi) para cada $F \in \mathcal{C}_Y$, es $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_X$;

(vii) para cada $A \subset X$, es $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

(viii) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$;

(ix) para cada $B \subset Y$, es $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

Ejemplos 6.3 Algunos ejemplos de funciones continuas son

1) para cada espacio (Y, τ_Y) y toda función f, $f\colon (X, \tau_{dis}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua;

2) para cada espacio (X, τ_X) y toda función f, $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_{ind})$ es continua;

3) toda aplicación constante $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua;

4) si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función continua y se consideran las topologías $\tau_X \subset \tau'_X$ y $\tau'_Y \subset \tau_Y$, también es continua la aplicación $f\colon (X, \tau'_X) \longrightarrow (Y, \tau'_Y)$.

Proposición 6.4 *Sean $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$. Se verifica*

(i) si f es continua en $a \in X$ y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a;

(ii) si f es continua en X y g es continua en Y, entonces $g \circ f$ es continua en X.

6.2 Algunas propiedades de funciones continuas

6.2.1 Continuidad y espacios Hausdorff

Lema 6.5 *Si $f, g\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ son aplicaciones continuas e (Y, τ_Y) es T_2, entonces $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{C}_X$.*

Contraejemplo 6.6 El anterior resultado no es cierto en general: si $f = 1_{\mathbb{R}}$ y $g = -1_{\mathbb{R}}$, $f, g\colon (\mathbb{R}, \tau_{ind}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$, ambas son continuas y $A = \{0\} \notin \mathcal{C}_{ind}$.

Corolario 6.7 (Principio de prolongación de las identidades) *Sean $f, g\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ aplicaciones continuas e (Y, τ_Y) T_2. Si D es denso en X y $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.*

Contraejemplo 6.8 El anterior principio no es cierto en general: si $f = 1_{\mathbb{R}}$ y $g(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, $f, g\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$, ambas son continuas, $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$, pero no son aplicaciones iguales.

Contraejemplo 6.9 Los axiomas T_1 y T_2 no se conservan por aplicaciones continuas: la aplicación continua $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{ind})$ lleva un espacio T_1 y T_2 en otro que no lo es.

6.2.2 Continuidad secuencial

Definición 6.10 Una función $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es *secuencialmente continua*, si dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $a \in X$, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a) \in Y$.

Proposición 6.11 *Una función continua es secuencialmente continua. Si (X, τ_X) es C_I, ambos conceptos de continuidad son equivalentes.*

Contraejemplo 6.12 Esto no es cierto en general: $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, \tau_{con}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ es secuencialmente continua, pero no es continua.

6.2.3 Continuidad y numerabilidad

Proposición 6.13 *La imagen continua de un espacio separable (respectivamente, de Lindelöf) es separable (respectivamente, de Lindelöf).*

Contraejemplo 6.14 Esto no sucede con los axiomas C_I y C_{II}: $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{cof})$ es continua y lleva un espacio C_I y C_{II} en otro que no verifica ninguno de estos dos axiomas.

6.2.4 Criterio de Hausdorff

Proposición 6.15 (Criterio de Hausdorff de comparación de topologías) *Dos topologías sobre X verifican $\tau_2 \subset \tau_1$ si y sólo si la función identidad, $1_X\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (X, \tau_2)$ es continua.*

6.3 Topologías inducidas

6.3.1 Topologías iniciales

Sea (Y, τ_Y) un espacio topológico y X un conjunto. Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una función. Se trata de encontrar una topología τ_f sobre X, tal que $f\colon (X, \tau_f) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ sea continua. Por ejemplo, $f\colon (X, \tau_{dis}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una de ellas. Así, se busca la menos fina entre las que lo verifican

Definición 6.16 La menor topología τ_f sobre X que hace $f\colon (X, \tau_f) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua es $\tau_f = \{f^{-1}(U) : U \in \tau_Y\}$, y se llama *topología inicial* para f.

Se puede generalizar esta situación: sea X un conjunto, $\{(Y_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$, una aplicación $f_i\colon X \longrightarrow Y_i$. Buscamos la menor topología sobre X que haga continuas a todas las funciones f_i a la vez

Lema 6.17 *La familia $\sigma = \{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i, i \in I\}$ es una subbase de una topología $\tau_{in\{f_i\}}$ sobre X, la* topología inicial *sobre X para la familia $\{f_i\}_{i\in I}$, y que es la menos fina sobre X que hace continuas todas las aplicaciones f_i.*

Proposición 6.18 *Sea $\{(Y_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$, $f_i : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y_i, \tau_i)$ una familia de aplicaciones. Entonces, $\tau_X = \tau_{in\{f_i\}}$ si y sólo si (para cada espacio topológico (Z, τ_Z) y aplicación $g : (Z, \tau_Z) \longrightarrow (X, \tau_X)$, g es continua si y sólo si para cada $i \in I$, $f_i \circ g$ es continua).*

Ejemplo 6.19 Si se toma $Y_i = X$ para cada $i \in I$, y consideramos la familia de aplicaciones continuas $1_X^i : X \longrightarrow (X, \tau_i)$, entonces $\tau_{in\{1_X^i\}} = \sup\limits_{i\in I} \tau_i$.

6.3.2 Topologías finales

Se plantea ahora el problema recíproco: sea (X, τ_X) un espacio topológico e Y un conjunto. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se trata de encontrar una topología τ_f sobre Y, tal que $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_f)$ sea continua. Por ejemplo, $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_{ind})$ es una de ellas. Así, se busca la más fina entre las que lo verifican

Definición 6.20 La mayor topología sobre Y que hace la aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_f)$ continua es $\tau_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \tau_X\}$, y se llama *topología final* para f.

Se puede generalizar esta situación: sea Y un conjunto, $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$, una aplicación $f_i : X_i \longrightarrow Y$. Buscamos la mayor topología sobre Y que haga continuas a todas las funciones f_i a la vez

Lema 6.21 *La familia $\tau_{fin\{f_i\}} = \{V \subset Y : f_i^{-1}(V) \in \tau_i, \forall i \in I\}$ es una topología sobre Y, llamada* topología final *para la familia $\{f_i\}_{i\in I}$, y que es la más fina sobre Y que hace continuas todas las aplicaciones f_i.*

Proposición 6.22 *Sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$, $f_i : (X_i, \tau_i) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una familia de aplicaciones. Entonces, $\tau_Y = \tau_{fin\{f_i\}}$ si y sólo si (para cada espacio topológico (Z, τ_Z) y aplicación $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$, g es continua si y sólo si para cada $i \in I$, $g \circ f_i$ es continua).*

Ejemplo 6.23 Si se toma $X_i = X$ para cada $i \in I$, y consideramos la familia de aplicaciones continuas $1_X^i : (X, \tau_i) \longrightarrow X$, entonces $\tau_{fin\{1_X^i\}} = \inf\limits_{i\in I} \tau_i$.

6.4 Problemas

1.- Dado un espacio topológico (X, τ), se introducen los conjuntos

$$C(X) = \{f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us}), f \text{ continua}\} \text{ y } C^*(X) = \{f \in C(X) : f \text{ es acotada}\}.$$

Se definen las funciones con dominio X y codominio $\mathbb{R}$, para $x \in X$ y $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) la *suma*: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,

(b) el *producto*: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$,

(c) el *producto por un escalar* $a \in \mathbb{R}$: $(a.f)(x) = a.f(x)$,

(d) el *cociente*: si $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$, $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$,

(e) el *valor absoluto*: $|f|(x) = |f(x)|$, y

(f) las funciones *máximo y mínimo*: $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ y $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

Se pide probar las siguientes propiedades

(i) las anteriores operaciones son internas en $C(X)$ y $C^*(X)$;

(ii) $C(X)$ y $C^*(X)$ son álgebras sobre $\mathbb{R}$;

(iii) $C^*(X)$ es un espacio vectorial normado, con las operaciones suma y producto escalar y la norma $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$;

(iv) $C(X)$ y $C^*(X)$ son retículos con el orden parcial: $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$, para cada $x \in X$;

(v) dados los espacios (X, τ_X) e (Y, τ_Y), toda aplicación continua $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ induce un homomorfismo entre las álgebras asociadas $F_f\colon C(Y) \longrightarrow C(X)$ (respectivamente, $F_f^*\colon C^*(Y) \longrightarrow C^*(X)$).

2.- En un espacio topológico (X, τ), probar

(i) $\tau = \tau_{dis}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, f es continua;

(ii) $\tau = \tau_{ind}$ si y sólo si para todo (Y, τ_Y) y toda aplicación $f\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau)$, f es continua.

3.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Probar que todo abierto de (Y, τ_Y) es la imagen por f de un abierto saturado de (X, τ_X). Probar la propiedad análoga para cerrados.

4.- Si χ_A es la función característica de A, probar

(i) $\chi_A\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es continua en x si y sólo si $x \notin fr(A)$;

(ii) $\chi_A\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{us})$ es continua en X si y sólo si A es abierto y cerrado.

5.- Caracterizar las funciones continuas $f\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{coc})$.

6.- Dados los conjuntos finitos $X = \{1,2,3,4,5\}$ e $Y = \{a,b\}$ y las topologías sobre ellos $\tau_X = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}\}$ y $\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$, se pide:

(i) encontrar todas las funciones continuas $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$;

(ii) ¿cuántas funciones hay $f\colon X \longrightarrow Y$? ¿cuántas son inyectivas? ¿Y sobreyectivas?

7.- Dado $x \in \mathbb{R}$, se llama *parte entera de* x, $[x]$, al mayor entero que es menor o igual que x. Estudiar la continuidad de la función $f\colon (\mathbb{R},\tau_{sor}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{us})$, si $f(x) = [x]$.

8.- Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X y (Y,τ_Y) un espacio topológico. Probar

(i) si $\tau = \inf\{\tau_1,\tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua si y sólo si $f\colon (X,\tau_i) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua, para $i = 1,2$;

(ii) si $\tau = \sup\{\tau_1,\tau_2\}$, entonces la aplicación $f\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (X,\tau)$ es continua si y sólo si $f\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (X,\tau_i)$ es continua, para $i = 1,2$.

9.- Sea $f\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$. Describir $\tau_{fin\{f\}}$.

10.- Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{us})$, dada por $f(x) = x^2$ y sea $\tau = \tau_{in\{f\}}$. Se pide

(i) en $(\mathbb{R},\tau)$, calcular el interior y la clausura de $[-1,4]$;

(ii) ¿cuáles de las siguientes aplicaciones son continuas?

(a) $g\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau)$, dada por $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

(b) $h\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau)$, dada por $h(x) = \begin{cases} -1-x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1+x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

(c) $k\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau)$, dada por $k(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

11.- Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ continua. Probar que para cada F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto) $B \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un F_σ-conjunto (respectivamente, G_δ-conjunto).

12.- Sea X un conjunto y $f\colon X \longrightarrow (Y,d)$, donde d es una pseudométrica. Probar que la función $\rho\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x,y) = d(f(x),f(y))$ es una pseudométrica sobre X y la topología generada por ρ es la topología inicial para f.

13.- Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios pseudométricos, X un conjunto y para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n: X \longrightarrow X_n$ una función. Probar que $\tau_{in\{f_n:n\in\mathbb{N}\}}$ está generada por una pseudométrica, siguiendo los siguientes pasos

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x_n, y_n \in X_n$, la función $\rho_n(x_n, y_n) = min\{d_n(x_n, y_n), 1\}$ es una pseudométrica sobre X_n;

(ii) d_n y ρ_n son topológicamente equivalentes, es decir, generan las mismas topologías;

(iii) si para cada $x, y \in X$, se define $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(f_n(x), f_n(y)).2^{-n}$, entonces d es una pseudométrica sobre X;

(iv) si τ_d es la topología generada por d, se pide probar

(a) $\tau_{in\{f_n:n\in\mathbb{N}\}} \subset \tau_d$, demostrando que $f: (X, \tau_d) \longrightarrow (X_n, \tau_n)$ es continua, para cada $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\tau_d \subset \tau_{in\{f_n:n\in\mathbb{N}\}}$, probando que las bolas abiertas en (X, d) pertenecen a $\tau_{in\{f_n:n\in\mathbb{N}\}}$.

14.- Una colección $\{f_i: (X, \tau_X) \longrightarrow (X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ de funciones sobre un espacio *separa puntos de cerrados*, si para cada $B \in \mathcal{C}_X$, y cada $x \notin B$, existe $i \in I$, tal que $f_i(x) \notin \overline{f_i(B)}$. Se pide probar

(i) una familia de funciones continuas $\{f_i: (X, \tau_X) \longrightarrow (X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ separa puntos de cerrados, si y sólo si, la familia $\{f_i^{-1}(V_i) : i \in I$ y $V_i \in \tau_i\}$ es una base de τ_X;

(ii) si una familia de funciones continuas $\{f_i: (X, \tau_X) \longrightarrow (X_i, \tau_i)\}$ separa puntos de cerrados en X, entonces τ_X es la topología inicial inducida por las funciones $\{f_i : i \in I\}$.

15.- Sea X un conjunto y $\mathcal{F} = \{f_i: X \longrightarrow (Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de funciones. Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. ¿Es $\tau_{in(\mathcal{G})} \subset \tau_{in(\mathcal{F})}$? ¿Es $\tau_{in(\mathcal{F})} \subset \tau_{in(\mathcal{G})}$?

16.- Encontrar una sucesión de funciones continuas $\{f_n: (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo supremo no sea una función continua.

17.- Consideremos las funciones $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \tau_{us})$, dadas por

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x\chi_{(0,\infty)} \quad \text{y} \quad f_3(x) = -x\chi_{(-\infty,0)}.$$

Describir las topologias iniciales $\tau_{in(f_1)}$, $\tau_{in(f_2)}$, $\tau_{in(f_3)}$, $\tau_{in(\{f_1,f_2\})}$ y $\tau_{in(\{f_1,f_2,f_3\})}$ y compararlas con la topología usual.

18.- Sea $(\mathbb{N}, \tau)$ el espacio topológico del problema 20 en 2.5. Probar que $f: (\mathbb{N}, \tau) \longrightarrow (\mathbb{N}, \tau)$ es continua si sólo si (si m divide a n, entonces $f(m)$ divide a $f(n)$).

19.- Consideremos el espacio $(\mathbb{R}^n, \tau_{Zar})$ definido en el problema 25 de 2.5. Si $\mathcal{P}$ es la colección de los polinomios en n variables reales, se pide

(i) para $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$, la aplicación $P\colon (\mathbb{R}^n, \tau_{Zar}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{Zar})$, definida por $P(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))$, es continua.

(ii) si consideramos cada polinomio $p \in \mathcal{P}$, como una función $p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{cof})$, demostrar que $\tau_{Zar} = \tau_{in\{\mathcal{P}\}}$.

20.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que una aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es *semicontinua inferiormente* (respectivamente, *semicontinua superiormente*), si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que para cada $y \in V$ es $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (respectivamente, $f(y) < f(x) + \varepsilon$). Probar

(i) toda aplicación continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es semicontinua inferior y superiormente. Recíprocamente, toda aplicación semicontinua inferior y superiormente es continua;

(ii) sean las topologías sobre $\mathbb{R}$, τ_{Kol} y $\tau_{scs} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces, $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ (respectivamente, $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{scs})$) es continua;

(iii) sea $\{f_i\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})\}_{i \in I}$ una familia de aplicaciones semicontinuas inferiormente (respectivamente, semicontinuas superiormente). Se supone que $I \neq \emptyset$ y que para cada $x \in X$ el conjunto $\{f_i(x) : i \in I\}$ está acotado superiormente (respectivamente, acotado inferiormente) en $\mathbb{R}$. Entonces, la aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ definida por $f(x) = \sup\limits_{i \in I} f_i(x)$ (respectivamente, $f(x) = \inf\limits_{i \in I} f_i(x)$) es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente);

(iv) si $A \subset X$, χ_A es semicontinua inferiormente (respectivamente, semicontinua superiormente) si y sólo si $A \in \tau$ (respectivamente, $A \in \mathcal{C}$).

Tema VII

Homeomorfismos

Se introduce aquí el concepto de *igualdad topológica*: cuando se define una estructura matemática sobre ciertos conjuntos, la *igualdad* de esta estructura debe obligar a que los conjuntos subyacentes sean *equivalentes*, por consiguiente, por lo menos, la igualdad entre las estructuras dadas debe ser realizada a través de una función biyectiva. Además de esta condición, se debe imponer que esta función y su inversa conserven la estructura. Así, la igualdad topológica vendrá dada por lo que se llamará un *homeomorfismo*. En algunas estructuras matemáticas (como los espacios vectoriales), si una función biyectiva f conserva la estructura, automáticamente se deduce que su inversa f^{-1} también lo hace. Sin embargo, esto no ocurre con los espacios topológicos.

7.1 Aplicaciones abiertas y cerradas

Definición 7.1 Una función $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ se dice *abierta* si para cada $U \in \tau_X$, es $f(U) \in \tau_Y$. Y se dice *cerrada*, si para cada $F \in \mathcal{C}_X$, es $f(F) \in \mathcal{C}_Y$.

Ejemplos 7.2 No hay ninguna relación entre las nociones de función continua, abierta y cerrada

1) la función idénticamente nula $f\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{us})$ es continua, no abierta y cerrada;

2) la función $f\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{us})$ dada por $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq 0 \\ \arctan(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua, no abierta y no cerrada;

3) la primera proyección coordenada $f\colon (\mathbb{R}^2,\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R},\tau_{us})$ dada por $f(x_1,x_2) = x_1$ es continua, abierta y no cerrada;

4) la función $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{ind}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ dada por $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ es no continua, abierta y cerrada;

5) la función $1_{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ es continua, abierta y cerrada;

6) la función $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es continua, no abierta y cerrada;

7) la primera proyección coordenada $f\colon (\Sigma, \tau_M) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})$ es continua, abierta y no cerrada.

A pesar de esto, las aplicaciones cerradas están muy *próximas* a las aplicaciones abiertas, ya que poseen la siguiente propiedad respecto a los abiertos saturados

Lema 7.3 *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una aplicación cerrada, dado $B \subset Y$ y $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(B) \subset U$, existe $V \in \tau_Y$, tal que $B \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$.*

Y análogamente

Lema 7.4 *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una aplicación abierta, dado $B \subset Y$ y $F \in \mathcal{C}_X$ tal que $f^{-1}(B) \subset F$, existe $G \in \mathcal{C}_Y$, tal que $B \subset G$ y $f^{-1}(G) \subset F$.*

7.2 Homeomorfismos

Definición 7.5 Una aplicación $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es un *homeomorfismo*, si f biyectiva, continua y de inversa f^{-1} continua. Se dice también que (X, τ_X) es *homeomorfo* a (Y, τ_Y).

Lema 7.6 *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ son homeomorfismos, entonces*

(i) $f^{-1}\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es un homeomorfismo;

(ii) $g \circ f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es un homeomorfismo.

Corolario 7.7 *La relación "ser homeomorfos" es una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios topológicos.*

Proposición 7.8 *Si $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una función biyectiva, son equivalentes*

(i) f es un homemorfismo;

(ii) f es continua y abierta;

(iii) f es continua y cerrada;

(iv) $U \in \tau_X$ *si y sólo si* $f(U) \in \tau_Y$*;*

(v) $F \in \mathcal{C}_X$ *si y sólo si* $f(F) \in \mathcal{C}_Y$*;*

(vi) para cada $A \subset X$*, es* $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$*;*

(vii) para cada $A \subset X$*, es* $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$*;*

(viii) $V \in \tau_Y$ *si y sólo si* $f^{-1}(V) \in \tau_X$*;*

(ix) $G \in \mathcal{C}_Y$ *si y sólo si* $f^{-1}(G) \in \mathcal{C}_X$*;*

(x) para cada $B \subset Y$*, es* $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$*;*

(xi) para cada $B \subset Y$*, es* $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$*.*

7.3 Propiedades topológicas

Definición 7.9 Una propiedad relativa a espacios topológicos se llama *topológica*, si se conserva bajo homeomorfismos.

Proposición 7.10 *Son topológicas las propiedades* T_1, T_2, C_I, C_{II}*, la separabilidad, la propiedad de Lindelöf y la metrizabilidad.*

Contraejemplo 7.11 Por ejemplo, la acotación (cuando tenga sentido hablar de este concepto) es un ejemplo de propiedad no topológica.

Observación 7.12 Desde el punto de vista de la topología, dos espacios homeomorfos son indistinguibles. La importancia de esta propiedad radica en que, cuando se trabaje con propiedades topológicas, es posible reemplazar espacios *complicados* por otros homeomorfos a ellos, pero más sencillos de manejar.

7.4 Problemas

1.- Para los espacios y las aplicaciones $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$, probar

(i) si f y g son abiertas (respectivamente, cerradas), entonces $g \circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada);

(ii) si $g \circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y f es continua y sobreyectiva, entonces g es abierta (respectivamente, cerrada);

(iii) Si $g \circ f$ es abierta (respectivamente, cerrada) y g es continua e inyectiva, entonces f es abierta (respectivamente, cerrada).

2.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y abierta. Probar

(i) si $\mathcal{B}_x$ una base local en el punto x, $f(\mathcal{B}_x)$ es base local en $f(x)$;

(ii) si además f es sobreyectiva y β es base de τ_X, entonces $f(\beta)$ es base de τ_Y.

3.- Probar que $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es abierta (respectivamente, cerrada), si y sólo si para cada $A \subset X$, es $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$ (respectivamente, $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$).

4.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación sobreyectiva y cerrada. Probar que para cada $U \in \tau_X$, se verifica que $fr(f(\overline{U})) \subset f(\overline{U}) \cap f(X - U)$.

5.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación. Probar que son equivalentes

(i) f es cerrada;

(ii) si $U \in \tau_X$, entonces $\{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U\} \in \tau_Y$;

(iii) si $F \in \mathcal{C}_X$, entonces $\{y \in Y : f^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset\} \in \mathcal{C}_Y$.

6.- Dado un espacio topológico (X, τ), se consideran las álgebras $C(X)$ y $C^*(X)$ introducidas en el problema 1 de 6.4. Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son homeomorfos, ¿qué relación existe entre $C(X)$ y $C(Y)$? ¿Y entre $C^*(X)$ y $C^*(Y)$?

7.- Probar que dos espacios discretos son homeomorfos si y sólo si poseen el mismo cardinal.

8.- Dar un ejemplo de dos espacios topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) no homeomorfos, pero tales que exista una aplicación entre ellos, continua y biyectiva.

9.- Si $n \in \mathbb{Z}$, se define sobre $\mathbb{R}$ la topología τ_n, dada por la base $\beta_n = \beta_{us} \cup \{n\}$. Probar que τ_1 y τ_2 son topologías diferentes, pero que $(\mathbb{R}, \tau_1)$ y $(\mathbb{R}, \tau_2)$ son espacios homeomorfos.

10.- Probar los siguientes enunciados

(i) toda aplicación $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es cerrada;

(ii) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ no son homeomorfos;

(iii) toda aplicación $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ biyectiva y continua, es abierta;

(iv) toda aplicación sobreyectiva $f\colon (X, \tau_{cof}) \longrightarrow (Y, \tau_{cof})$ es abierta y cerrada.

11.- Sea $\chi_{[0,\frac{1}{2}]}\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow (\{0,1\},\tau_{dis})$. Probar que es sobreyectiva, abierta y cerrada, pero no continua.

12.- Sea $X \neq \emptyset$ y $p, q \in X$. Sea $A = \{p\}$ y τ^A la topología A-exclusión. Estudiar la continuidad de la función $f\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow (X,\tau^A)$ dada por $f(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 0, \\ q & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$.

13.- Probar que son homeomorfos la bola cerrada $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},\tau_{us})$ y el cuadrado $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\},\tau_{us})$.

14.- Probar que $(\mathbb{S}^n - \{p\},\tau_{us})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^n,\tau_{us})$, donde $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es la esfera de dimensión n y p es un punto cualquiera sobre ella.

15.- Probar que el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n,\tau_{us})$ es homeomorfo al subespacio $(\mathbb{E}^n,\tau_{us})$, donde $\mathbb{E}^n = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$.

16.- Probar que el n-símplice unidad (Δ^n,τ_{us}), donde

$$\Delta^n = \{(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0,\ \forall i \in \{1,\cdots,n+1\},\ x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1\},$$

es homeomorfo al cubo n-dimensional $([0,1]^n,\tau_{us})$.

17.- Probar los siguientes enunciados

(i) en $(\mathbb{R},\tau_{us})$, son homeomorfos todos los intervalos abiertos;

(ii) no son homeomorfos $((0,1),\tau_{us})$ y $([0,1],\tau_{us})$;

(iii) $((0,1),\tau_{dis})$ y $([0,1],\tau_{dis})$ son homeomorfos;

(iv) $(\mathbb{N},\tau_{us})$ y $(\mathbb{Q},\tau_{us})$ no son homeomorfos;

(v) $(\mathbb{S}^1,\tau_{us})$ no es homeomorfa a $((0,1),\tau_{us})$.

18.- Probar que las siguientes aplicaciones entre espacios euclídeos son homeomorfismos

(i) $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$, definida por $h(x) = \exp(x)$ (su inversa es $h^{-1}(x) = \ln(x)$);

(ii) $h\colon (\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \tan(x)$ (su inversa es $h^{-1}(x) = \arctan(x)$);

(iii) $h\colon (0,\infty) \longrightarrow (-\infty,0)$ (respectivamente, $h\colon [0,\infty) \longrightarrow (-\infty,0]$), definida por $h(x) = -x$ (su inversa es $h^{-1}(x) = -x$);

(iv) $h\colon [0,\infty) \longrightarrow [a,\infty)$ (respectivamente, $h\colon (0,\infty) \longrightarrow (a,\infty)$), definida por $h(x) = x + a$ (su inversa es $h^{-1}(x) = x - a$);

(v) $h: X \longrightarrow Y$, definida por $h(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$, donde ($X = [a,b)$ e $Y = [0,1)$), ó ($X = (a,b)$ e $Y = (0,1)$) ó ($X = [a,b]$ e $Y = [0,1]$) ó ($X = (a,b]$ e $Y = (0,1]$) (su inversa es $h^{-1}(x) = a + (b-a)x$);

(vi) $h: [0,1) \longrightarrow [1,\infty)$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (su inversa es $h^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x}$).

19.- Probar que los espacios euclídeos siguientes son dos a dos homeomorfos

(i) el cilindro vertical $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$,

(ii) el plano privado del origen $Z = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

(iii) la corona circular $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$,

(iv) la esfera privada de los polos norte y sur, $U = \mathbb{S}^2 - \{N,S\}$, donde $N = (0,0,1)$ y $S = (0,0,-1)$,

(v) el cono privado de su vértice $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.

20.- Probar que el primer cuadrante del plano $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}, \tau_{us})$ y el semiplano $(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \tau_{us})$ son homeomorfos.

21.- Probar que las siguientes son propiedades topológicas

(i) X es equipotente a $\mathbb{N}$;

(ii) la topología sobre X tiene el cardinal de $\mathbb{N}$;

(iii) existe $A \subset X$, equipotente a $\mathbb{N}$ y denso;

(iv) X es metrizable;

pero, no son propiedades topológicas

(i) la topología sobre X está generada por la métrica d;

(ii) X es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

22.- Sean dos aplicaciones $f: (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ y $g: (Y,\tau_Y) \longrightarrow (X,\tau_X)$ continuas, tales que $f \circ g = 1_Y$ y $g \circ f = 1_X$. Probar que f y g son homeomorfismos.

23.- Sean $f: (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ un homeomorfismo y $g: (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$. Probar que g es continua si y sólo si $g \circ f$ lo es.

24.- Sea $f: (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una aplicación abierta y cerrada. Sea $\varphi: (X,\tau_X) \longrightarrow ([0,1],\tau_{us})$ continua y para cada $y \in Y$, sea $\phi(y) = \sup\{\varphi(x) : f(x) = y\}$. Probar que ϕ es continua.

25.- Sea (X,τ) un espacio topológico y $H(X)=\{h\colon (X,\tau)\longrightarrow (X,\tau) : h$ homeomorfismo$\}$. Probar

(i) con la composición de funciones como operación, $H(X)$ es un grupo;

(ii) si $X=[0,1]$ y $A=(0,1)\subset X$, sea $\varphi\colon H(X)\longrightarrow H(Y)$ definida por $\varphi(h)=h|_A$. Entonces, φ es un isomorfismo de grupos, aunque los espacios involucrados no son homeomorfos.

Tema VIII

Topología relativa

En general, dada una estructura topológica sobre un conjunto X, todo subconjunto A puede heredarla, por restricción a A de las nociones topológicas (continuidad, convergencia, ...) en X. Posteriormente, se plantea el problema recíproco, que consiste en determinar si un espacio X es topológicamente equivalente a una parte de otro espacio Y.

El artificio de *embeber* un espacio en otro mayor está estrechamente relacionado con la definición de subespacio. Ya muy temprano, se utilizó en ejemplos especiales, como el de la construcción de los números reales a partir de los racionales por Cantor y Dedekind.

8.1 Subespacios

Definición 8.1 Dado un espacio topológico (X, τ), si $A \subset X$, se define una topología sobre A asociada a τ, por $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$, que se llama *topología relativa*. Se dice también que (A, τ_A) es un *subespacio* de (X, τ).

Proposición 8.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces*

(i) si $V \subset A$, es $V \in \tau_A$ si y sólo si existe $U \in \tau$ tal que $V = U \cap A$;

(ii) si $F \subset A$, es $F \in \mathcal{C}_A$ si y sólo si existe $G \in \mathcal{C}$ tal que $F = G \cap A$;

(iii) si β es base de τ, entonces $\beta_A = \{B \cap A : B \in \beta\}$ es base de τ_A;

(iv) si σ es subbase de τ, entonces $\sigma_A = \{S \cap A : S \in \sigma\}$ es subbase de τ_A;

(v) si $a \in A$, $\mathcal{N}_a^A = \{M \cap A : M \in \mathcal{N}_a\}$ es la familia de entornos de a en (A, τ_A);

(vi) si $a \in A$ y $\mathcal{B}_a$ es una base local de a en (X, τ), entonces la familia $\mathcal{B}_a^A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}_a\}$ es una base local de a en (A, τ_A);

(vii) si $B \subset A$, con las notaciones obvias es $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$ y $B^{d_A} = B^d \cap A$;

(viii) si $B \subset A$, con las notaciones obvias es $fr_A(B) \subset fr(B) \cap A$ y $\overset{\circ}{B} \cap A \subset \overset{\circ}{B}^A$, y se dan las igualdades cuando $A \in \tau$.

Proposición 8.3 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. Se puede pensar en B como un subespacio de (X, τ), obteniendo la topología relativa τ_B sobre B, o como subespacio de (A, τ_A), obteniendo la topología relativa $(\tau_A)_B$ sobre B. Entonces, $\tau_B = (\tau_A)_B$.*

Ejemplos 8.4 En los espacios topológicos estudiados, tenemos

1) en (X, τ_{ind}), para todo $A \subset X$, $\tau_A = \tau_{ind}$;

2) en (X, τ_{dis}), para todo $A \subset X$, $\tau_A = \tau_{dis}$;

3) en (X, τ_A), si $B \cap A \neq \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{A \cap B}$ y si $B \cap A = \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{dis}$;

4) en (X, τ^A), si $B \cap A \neq \emptyset$, es $\tau_B = \tau^{A \cap B}$ y si $B \cap A = \emptyset$, es $\tau_B = \tau_{dis}$;

5) en (X, τ_{cof}), si A es infinito, es $\tau_A = \tau_{cof}$ y si A es finito, es $\tau_A = \tau_{dis}$;

6) en (X, τ_{coc}), si A es no contable, es $\tau_A = \tau_{coc}$ y si A es contable, es $\tau_A = \tau_{dis}$.

Lema 8.5 *$i_A : (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es continua, y de hecho, $\tau_A = \tau_{in\{i_A\}}$.*

La continuidad no depende del rango de la función

Corolario 8.6 *$f : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (A, \tau_A)$ es continua si y sólo si $i_A \circ f : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ lo es.*

8.2 Propiedades hereditarias

Definición 8.7 Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice *hereditaria*, si cuando (X, τ) verifica $\mathcal{P}$, la cumple cualquier subconjunto de X. $\mathcal{P}$ se llama *débilmente hereditaria* si la heredan sólo los $A \in \mathcal{C}$, y se llama *casi hereditaria* si pasa únicamente a los $A \in \tau$.

Proposición 8.8 *Son hereditarias la propiedades T_1, T_2, los axiomas C_I y C_{II} y la metrizabilidad.*

Proposición 8.9 *La separabilidad es casi hereditaria y la propiedad de Lindelöf es débilmente hereditaria.*

Proposición 8.10 *En (X, τ), si $A \subset X$, entonces*

(i) $A \in \tau$ si y sólo si $i_A : (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau)$ es abierta;

(ii) $A \in \mathcal{C}$ si y sólo si $i_A : (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau)$ es cerrada;

(iii) cada $B \in \tau_A$ es tal que $B \in \tau_X$ si y sólo si $A \in \tau$;

(iv) cada $B \in \mathcal{C}_A$ es tal que $B \in \mathcal{C}$ si y sólo si $A \in \mathcal{C}$.

8.3 Restricción y extensión de aplicaciones continuas

Definición 8.11 La *restricción de una aplicación* $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ a $A \subset X$, es la función $f \circ i_A = f|_A\colon (A,\tau_A) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$.

Proposición 8.12 *Si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua, para cada $A \subset X$ la restricción $f \circ i_A = f|_A\colon (A,\tau_A) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua.*

Proposición 8.13 *Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ continua y $A \subset X$, $B \subset Y$ tales que $f(A) \subset B$. Entonces la aplicación inducida por $f|_A$, $g\colon (A,\tau_A) \longrightarrow (B,\tau_B)$ es continua.*

Un problema importante en topología es el de extensión de aplicaciones continuas dadas sobre subespacios.

Definición 8.14 Una *extensión* de una aplicación continua $f\colon (A,\tau_A) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ de un subespacio $A \subset X$ al espacio total, es una aplicación continua $g\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$, cuya restricción a A es f.

Un caso particular importante de extensión es el siguiente

Definición 8.15 En (X,τ), $A \subset X$ es un *retracto* de X, si existe una aplicación continua, una *retracción*, $r\colon (X,\tau) \longrightarrow (A,\tau_A)$ que extiende a la identidad de A, $1_A\colon (A,\tau_A) \longrightarrow (A,\tau_A)$, es decir, para cada $a \in A$, es $r(a) = a$.

Ejemplo 8.16 $[0,1]$ es un retracto de $(\mathbb{R},\tau_{us})$, pues una retracción es $r\colon (\mathbb{R},\tau_{us}) \longrightarrow ([0,1],\tau_{us})$, dada por $r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

Observación 8.17 Los retractos tienen propiedades *similares* (desde el punto de vista homotópico, como se verá en el último capítulo) a las de los espacios originales.

8.4 Aplicaciones combinadas

Definición 8.18 Dado un conjunto X, si $\{A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento de X y $\{f_i\colon A_i \longrightarrow Y\}_{i\in I}$ es una familia de funciones tales que $f_i|_{A_i\cap A_j} = f_j|_{A_i\cap A_j}$, para cada $i,j \in I$, se define la *función combinada* de las anteriores, como la función $f\colon X \longrightarrow Y$ definida por $f(x) = f_i(x)$, si $x \in A_i$.

Proposición 8.19 *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos. Con las notaciones de la anterior definición*

(i) si para cada $i \in I$, es $A_i \in \tau_X$ y la función $f_i \colon (A_i, \tau_{A_i}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua, entonces la combinada $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ también lo es;

(ii) si I es un conjunto finito, para cada $i \in I$ es $A_i \in \mathcal{C}_X$ y la función $f_i \colon (A_i, \tau_{A_i}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua, entonces la combinada también lo es.

Contraejemplo 8.20 En el apartado (ii), I debe ser necesariamente finito. En efecto, si $I = \mathbb{R}$, $1_{\mathbb{R}} \colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ no es continua y sin embargo $1_{\mathbb{R}}|_{\{x\}} \colon (\{x\}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{dis})$ es continua, para cada $x \in \mathbb{R}$.

8.5 Embebimientos

Definición 8.21 Un *embebimiento* es una aplicación continua $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, tal que sobre su imagen $g \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (f(X), \tau_{f(X)})$ es un homeomorfismo.

Observación 8.22 Mediante un embebimiento, el espacio (X, τ_X) se piensa como un subespacio de (Y, τ_Y).

8.6 Problemas

1.- Sea $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua, donde (X, τ_X) es T_2 y C_I. Sea D un conjunto denso en X tal que $f|_D \colon (D, \tau_D) \longrightarrow (f(D), \tau_{f(D)})$ es un homeomorfismo. Probar que $f(D) \cap f(X - D) = \emptyset$.

2.- Sea (X, τ) un espacio topológico, A denso en X y $D \subset A$, tal que $\overline{D}^A = A$. Calcular $\overline{D}$.

3.- Sea A un conjunto cerrado en (X, τ) y $f \colon (A, \tau_A) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ una aplicación continua, tal que $f(fr(A)) = \{0\}$. Probar que la aplicación $g \colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$, definida por
$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases}$, es una extensión continua de f.

4.- Probar los siguientes enunciados

(i) en (X, τ), si $x \in X$, X y $\{x\}$ son retractos de X;

(ii) $[0, \infty)$ es un retracto de la recta real;

(iii) en (X, τ_{cof}), todo abierto es un retracto de X;

(iv) la composición de retracciones es una retracción (un retracto de un retracto es un retracto);

(v) A es un retracto de X si y sólo si para toda aplicación $f\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ continua, existe una extensión continua $F\colon (X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$;

(vi) la n-esfera unidad $(\mathbb{S}^n,\tau_{us})$ es un retracto de $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\},\tau_{us})$;

(vii) en $(\mathbb{R}^2,\tau_{us})$, un subconjunto formado por dos puntos no puede ser un retracto de $\mathbb{R}^2$;

(viii) la bola cerrada unidad es un retracto de $(\mathbb{R}^n,\tau_{us})$;

(ix) una aplicación $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$ se dice *idempotente*, si $f\circ f=f$. Probar que toda retracción es una aplicación idempotente. Dada $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(X,\tau)$ idempotente, probar que es continua si y sólo si $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(f(X),\tau_{f(X)})$ es una retracción;

(x) (Y,τ_Y) es homeomorfo a un retracto de (X,τ) si y sólo si existen funciones continuas $f\colon (X,\tau)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ y $g\colon (Y,\tau_Y)\longrightarrow(X,\tau)$, tales que $g\circ f=1_X$.

5.- En (X,τ_X), sean $A,B\subset X$, tales que $X=A\cup B$. Sean $y_0\in Y$ y $f,g\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ dos funciones continuas, verificando la identidad $f(\overline{B})=\{y_0\}=g(\overline{A})$. Probar que la función $h\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$, $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in A\\ g(x) & \text{si } x\in B\end{cases}$, está bien definida y es continua.

6.- Sea (X,τ) y $A\subset X$. Probar

(i) $Card(\tau_A)\leq Card(\tau)$;

(ii) si (X,τ) es T_2 y separable y el subespacio A es denso y contable, entonces se verifica que $Card(C(X))\leq Card(C(A))\leq Card(\mathbb{R})$.

7.- Demostrar que la aplicación $j\colon (\mathbb{R},\tau_{lac})\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\tau_{us})$, dada por

$$j(t)=\begin{cases} (\frac{1}{t},-\frac{1}{t}) & \text{si } t\leq -1\\ (-1,-1-2t) & \text{si } -1\leq t\leq -\frac{1}{2}\\ (2t,0) & \text{si } -\frac{1}{2}\leq t\leq \frac{1}{2}\\ (1,-1+2t) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1\\ (\frac{1}{t},\frac{1}{t}) & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

es un embebimiento.

8.- Probar que la aplicación $f\colon ([0,2\pi),\tau_{us})\longrightarrow(\mathbb{R}^2,\tau_{us})$, dada por $h(x)=\exp(ix)$, es inyectiva y continua, pero no es un embebimiento.

9.- Sea $(\mathbb{R}^2, \tau)$, donde τ es la topología generada por la familia β de las rectas paralelas al eje de abscisas. Se pide

(i) si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$, calcular las topologías inducidas;

(ii) si $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, y \leq 3, x \leq 0\}$, calcular $\overline{M}$ y $\overline{M}^A$;

(iii) si $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2, x \leq 3, y \geq 0\}$, calcular $\overset{\circ}{N}$ y $\overset{\circ}{N}{}^B$;

(iv) hacer lo mismo que en los apartados (i), (ii) y (iii), para $(\mathbb{R}^2, \tau')$, donde τ' está generada por la subbase $\sigma = \beta \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$.

10.- Sea E el eje de abscisas en el plano de Moore (Γ, τ_M). Describir la topología relativa en E y deducir que la separabilidad no es hereditaria.

11.- Sea X un conjunto totalmente ordenado y (X, τ_{ord}). Sobre $A \subset X$ se pueden definir dos topologías: la topología relativa y la topología del orden inducido en A por el orden de X. ¿Hay alguna relación entre estas topologías?

12.- Una aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, es un *homeomorfismo local*, si para cada $x \in X$, existen $U \in \tau_X$ y $V \in \tau_Y$, tales que $x \in U$, $f(x) \in V$ y la restricción $f|_U : (U, \tau_U) \longrightarrow (V, \tau_V)$ es un homeomorfismo. Probar

(i) todo homeomorfismo local es una aplicación continua y abierta;

(ii) todo homeomorfismo es un homeomorfismo local;

(iii) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ y $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ son localmente homeomorfos, pero no homeomorfos.

13.- Consideremos la topología de Zariski $(\mathbb{R}^n, \tau_{Zar})$ definida en el problema 25 de 2.5. Se pide:

(i) si $k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ y $j : (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{Zar})$ es la aplicación dada por $j(x) = (k_1, \ldots, k_{i-1}, x, k_{i+1}, \ldots, k_n)$, entonces j es un embebimiento;

(ii) demostrar que la inyección diagonal $d : (\mathbb{R}, \tau_{cof}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{Zar})$, dada por $d(x) = (x, \ldots, x)$, es un embebimiento.

14.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Se pide

(i) si $\{A_i : i \in I\}$ es un recubrimiento cerrado y localmente finito (ver problema 14, en 4.5) de X, entonces $B \in \tau$ (respectivamente, $B \in \mathcal{C}$) si y sólo si $B \cap A_i \in \tau_{A_i}$ (respectivamente $B \cap A_i \in \mathcal{C}_{A_i}$), para cada $i \in I$;

(ii) si $\{A_i : i \in I\}$ es un recubrimiento cerrado y localmente finito de X y $f_i\colon (A_i, \tau_{A_i}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua, tal que $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$, para cada $i, j \in I$, entonces la aplicación combinada de las $\{f_i : i \in I\}$ es continua;

(iii) sea $\{A_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ el recubrimiento cerrado de $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, donde $A_0 = (-\infty, 0]$ y $A_n = [\frac{1}{n}, \infty)$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que no es localmente finito y que la aplicación $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ definida por: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, no es continua, pero si lo son sus restricciones a cada A_n.

Tema IX

Suma y producto de espacios

9.1 Suma topológica

Como un modo abstracto de detectar *fragmentos* de un espacio, se deduce de la noción de *suma topológica*. Si un espacio es la suma topológica de dos subespacios no vacíos X_1 y X_2, entonces, cada uno de ellos es abierto y cerrado. Esto indica que los puntos de X_1 están *totalmente separados* de los de X_2 y por lo tanto, intuitivamente, no existe una *conexión* entre los puntos de dicho espacio.

9.1.1 Definición y propiedades

Definición 9.1 Sea una familia de espacios topológicos disjuntos $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$, se considera $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, y se define sobre X la topología $\tau_\Sigma = \{U \subset X : \forall i \in I, U \cap X_i \in \tau_i\}$. El par (X, τ_Σ) se llama *suma o unión disjunta* de los espacios dados.

Lema 9.2 *En las condiciones anteriores, para cada $i \in I$, es $\tau_i \subset \tau_\Sigma$.*

Observación 9.3 Esta construcción se puede también realizar en el caso de espacios no disjuntos. En este caso, se consideran el espacio $X_i^* = X_i \times \{i\}$ y la topología $\tau_i^* = \{U_i \times \{i\} : U_i \in \tau_i\}$. Claramente, (X_i^*, τ_i^*) es un espacio homeomorfo a (X_i, τ_i), con la ventaja que ahora los $\{X_i^*\}_{i \in I}$ son dos a dos disjuntos. Se puede entonces definir la suma disjunta (X^*, τ_Σ^*), que es, por definición, la suma disjunta de los espacios originales. Una vez aclarado este procedimiento *hacer disjunto*, a partir de ahora se supone siempre que los espacios originales son dos a dos disjuntos.

Proposición 9.4 *Sea una familia de espacios topológicos disjuntos* $\{(X_i,\tau_i) : i \in I\}$ *y su suma* (X,τ_Σ). *Entonces*

(i) la aplicación inclusión $i_k\colon (X_k,\tau_k) \longrightarrow (X,\tau_\Sigma)$ *es continua, abierta y cerrada. Además, como es inyectiva, se trata de un embebimiento;*

(ii) $\tau_\Sigma = \tau_{fin\{i_k : k \in I\}}$*;*

(iii) una función $f\colon (X,\tau_\Sigma) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *es continua si y sólo si para cada* $k \in I$ *es* $f \circ i_k$ *continua.*

Proposición 9.5 *Sea una familia de espacios topológicos disjuntos* $\{(X_i,\tau_i) : i \in I\}$*, su suma* (X,τ_Σ) *y* $A \subset X$. *Con las notaciones obvias, se verifican las siguientes propiedades*

(i) $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{i \in I} \overset{\circ}{\widehat{A \cap X_i}}^{\,i}$*;* *(ii)* $\overline{A} = \bigcup\limits_{i \in I} \overline{A \cap X_i}^{\,i}$*;*

(iii) $A^d = \bigcup\limits_{i \in I} (A \cap X_i)^{d_i}$*;* *(iv)* $fr(A) = \bigcup\limits_{i \in I} fr_i(A \cap X_i)$.

9.1.2 Propiedades sumables

Definición 9.6 Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice *sumable*, si para cada familia de espacios topológicos $\{(X_i,\tau_i) : i \in I\}$ verificando $\mathcal{P}$, su suma también la verifica.

Proposición 9.7 *Son sumables los axiomas* T_1 *y* T_2*, el axioma* C_I *y la metrizabilidad.*

Contraejemplo 9.8 El axioma C_{II}, la separabilidad y la propiedad de Lindelöf no son sumables: basta con tomar la familia de topologías $\{(X_i = \mathbb{R}, \tau_{us})\}_{i \in \mathbb{R}}$ que verifican los tres axiomas de separación anteriores. Pero, su suma topológica $(X = \mathbb{R}^2, \tau_\Sigma)$ no las verifica, al ser el conjunto de índices no contable.

Proposición 9.9 *Sea* $\{(X_i,\tau_i) : i \in I\}$ *es una familia de espacios disjuntos y su suma* (X,τ_Σ). *Para cada* $i \in I$*, sean* $A_i \subset X_i$*,* $\tau_{\Sigma A_i}$ *la topología suma de los espacios* $\{(A_i,\tau_{A_i}) : i \in I\}$ *y* $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i \subset X$. *Entonces,* $\tau_\Sigma|_A = \tau_{\Sigma A_i}$.

9.2 Topología producto

Las definiciones de las estructuras topológicas sobre productos cartesianos las dieron Steinitz en 1907 y Fréchet en 1910, para productos finitos.

La primera definición de productos arbitrarios se debe a Tietze en 1923. Sin embargo, la topología definida por él es más fina que la utilizada en la actualidad.

La última definición, aceptada como *buena*, fue dada por Tychonoff en 1930.

9.2.1 Definición y propiedades

Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Se desea definir una topología sobre el producto $\prod\limits_{i\in I} X_i$, que sea natural y lo suficientemente *manejable* como para que sean válidos el mayor número de teoremas del tipo "*si* (X_i,τ_i) *tiene la propiedad* $\mathcal{P}$ *para cada* $i\in I$*, entonces su producto también posee* $\mathcal{P}$".

Si la hipótesis de *naturalidad* fuese la única exigida, la tarea sería sencilla, pues bastaría con elegir como base de la topología producto $\beta_{caj}=\{\prod\limits_{i\in I} U_i : U_i\in\tau_i, i\in I\}$. De este modo, se obtendría una topología sobre $\prod\limits_{i\in I} X_i$ denominada *topología caja*, pero no es la que se utiliza habitualmente, pues posee demasiados abiertos, lo cual impide que ciertas propiedades pasen bien al producto.

La definición que vamos a adoptar reduce drásticamente el número de abiertos

Definición 9.10 Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. La *topología producto o de Tychonov*, τ_{Tyc}, sobre $\prod\limits_{i\in I} X_i$ es la topología inicial asociada a la familia de proyecciones $\left\{p_i\colon \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow (X_i,\tau_i)\right\}_{i\in I}$, de otro modo, los abiertos básicos son $p_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap\ldots\cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$, donde $U_{i_j}\in\tau_{i_j}$ para $1\leq j\leq n$.

Observación 9.11 Si I es finito, $\tau_{Tyc}=\tau_{caj}$. En general, $\tau_{Tyc}\subset\tau_{caj}$.

Ejemplos 9.12 Algunos ejemplos de productos son los siguientes

(i) si $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ con $\tau_i=\tau_{ind}$ para cada $i\in I$, entonces $\tau_{Tyc}=\tau_{ind}$;

(ii) si $\{(X_i=\mathbb{R},\tau_i=\tau_{us})\}_{i\in\mathbb{R}}$, un entorno básico de $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es de la forma

$$U(f;F,\varepsilon)=\{g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} : |g(x)-f(x)|<\varepsilon,\forall x\in F\},$$

donde $F\subset\mathbb{R}$ es un conjunto finito y $\varepsilon>0$.

Proposición 9.13 *Para cada* $i\in I$*, la proyección canónica* $p_i\colon(\prod\limits_{i\in I} X_i,\tau_{Tyc})\longrightarrow(X_i,\tau_i)$ *es continua, abierta y sobreyectiva.*

Contraejemplo 9.14 Las proyecciones no son en general cerradas, ni siquiera para productos finitos: si $I=\{1,2\}$, $(X_i=\mathbb{R},\tau_i=\tau_{us})$, en $(\mathbb{R}^2,\tau_{Tyc})$, el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy=1\}$ es cerrado, pero $p_1(A)=\mathbb{R}-\{0\}$ no lo es.

Proposición 9.15 *Una aplicación $f\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (\prod\limits_{i\in} X_i, \tau_{Tyc})$ es continua si y sólo si para cada $i \in I$ es continua la aplicación $p_i \circ f\colon (\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (X_i, \tau_i)$.*

Proposición 9.16 *Sea $(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ y $A_i \subset X_i$, para cada $i \in I$. Con las notaciones obvias*

(i) $\prod\limits_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\prod\limits_{i\in I} A_i}$;

(ii) si $A_i \neq X_i$ para una cantidad infinita de índices, $\overset{\circ}{\overbrace{\prod\limits_{i\in I} A_i}} = \emptyset$. En caso contrario, $\prod\limits_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} = \overset{\circ}{\overbrace{\prod\limits_{i\in I} A_i}}$.

Corolario 9.17 *En las condiciones anteriores, se verifica*

(i) $\prod\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{C}_{Tyc}$ si y sólo si para cada $i \in I$ es $A_i \in \mathcal{C}_i$;

(ii) $\prod\limits_{i\in I} D_i$ es denso en $(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ si y sólo si para cada $i \in I$, D_i es denso en (X_i, τ_i).

9.2.2 Propiedades productivas

Definición 9.18 Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *productiva*, cuando si (X_i, τ_i) cumplen $\mathcal{P}$ para cada $i \in I$, entonces su producto también la verifica.

Proposición 9.19 *$(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es T_1 (respectivamente, T_2) si y sólo si para cada $i \in I$ (X_i, τ_i) es T_1 (respectivamente, T_2).*

Proposición 9.20 *$(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es C_I (respectivamente, C_{II}) si y sólo si para cada $i \in I$ (X_i, τ_i) es C_I (respectivamente, C_{II}) y todos salvo una familia contable de espacios son indiscretos.*

Proposición 9.21 *$(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es separable (respectivamente, metrizable) si y sólo si para cada $i \in I$ (X_i, τ_i) es separable (respectivamente, metrizable) e I es contable.*

Proposición 9.22 *Sea $(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ y para cada $i \in I$ $A_i \subset X_i$. Si τ_{TycA_i} denota la topología producto asociada a la familia de subespacios $\{(A_i, \tau_{A_i})\}_{i\in I}$ y $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$, entonces se verifica la igualdad $\tau_{Tyc}|_A = \tau_{TycA_i}$.*

9.2.3 Productos y espacios de Hausdorff

Teorema 9.23 *(X,τ) es T_2 si y sólo si la diagonal $\Delta(X)=\{(x,x)\in X\times X\}$ es cerrada en $(X\times X,\tau_{Tyc})$.*

Proposición 9.24 *Si $f\colon(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es continua e (Y,τ_Y) es T_2, entonces el conjunto $A=\{(x_1,x_2)\in X\times X : f(x_1)=f(x_2)\}$ es cerrado en $(X\times X,\tau_{Tyc})$.*

Proposición 9.25 *Si $f\colon(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es una aplicación abierta y sobreyectiva y el conjunto $A=\{(x_1,x_2)\in X\times X : f(x_1)=f(x_2)\}$ es cerrado en $(X\times X,\tau_{Tyc})$, entonces (Y,τ_Y) es T_2.*

Corolario 9.26 *Si $f\colon(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es una aplicación abierta, continua y sobreyectiva, entonces el conjunto $A=\{(x_1,x_2)\in X\times X : f(x_1)=f(x_2)\}$ es cerrado en $(X\times X,\tau_{Tyc})$ si y sólo si (Y,τ_Y) es T_2.*

9.3 Problemas

1.- Probar las siguientes propiedades

(i) la suma topológica de espacios discretos es discreta;

(ii) la suma topológica de espacios indiscretos no es un espacio indiscreto.

2.- Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos disjuntos, $(X\cup Y,\tau_\Sigma)$ el espacio suma disjunta y la aplicación $f\colon(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$. Se define la función $F\colon(X\cup Y,\tau_\Sigma)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$, por

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{si } z\in X\\ z & \text{si } z\in Y\end{cases}.$$

Probar que f es continua si y sólo si F lo es.

3.- Sean $\{(X_i,\tau_{X_i})\}_{i\in I}$ e $\{(Y_i,\tau_{Y_i})\}_{i\in I}$ familias de espacios topológicos dos a dos disjuntos y para cada $i\in I$, sea $f_i\colon(X_i,\tau_{X_i})\longrightarrow(Y_i,\tau_{Y_i})$ una aplicación continua. Con las notaciones obvias, sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) las sumas topológicas respectivas. Se define $f\colon(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$, por $f(x)=f_i(x)$ si $x\in X_i$, y se llama *la suma de* las funciones $\{f_i : i\in I\}$. Probar

(i) f es continua;

(ii) f es cerrada (respectivamente, abierta; respectivamente, un embebimiento) si y sólo si para cada $i\in I$, f_i es cerrada (respectivamente, abierta; respectivamente, un embebimiento).

4.- Para $r\geq 0$, sea el espacio (S_r,τ_{us}), donde $S_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=r^2\}$. En el espacio suma topológica $(\bigcup\limits_{r\geq 0}S_r,\tau_\Sigma)$, estudiar los axiomas de separación y de numeración.

5.- Sean $f_i\colon (X,\tau) \longrightarrow (X_i,\tau_i)$, para $i \in I$. La *aplicación evaluación*, $e\colon (X,\tau) \longrightarrow (\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ inducida por la familia $\{f_i\}_{i\in I}$, se define por $p_i(e(x)) = f_i(x)$, para cada $x \in X$. Se dice que la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ *separa puntos* en X, si dados dos puntos en X, $x \neq y$, existe $i \in I$, tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Probar que la aplicación evaluación e es un embebimiento si y sólo si la topología $\tau = \tau_{in\{f_i\}}$ y la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ separa puntos en X.

6.- Sea (X,τ), I un conjunto de índices y la aplicación $d\colon (X,\tau) \longrightarrow (X^I, \tau_{Tyc})$, dada por $p_i(d(x)) = x$. Probar que es un embebimiento, llamado *embebimiento diagonal*.

7.- Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, donde $(X,\tau) = (X_i,\tau_i)$, para cada $i \in I$. Probar que su suma disjunta es homeomorfa al espacio producto $(X \times I, \tau \times \tau_{dis})$.

8.- Probar que $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua si y sólo si $G\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ definida por $G(x) = (x, f(x))$, es un embebimiento.

9.- Sea X un conjunto y $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ una familia de topologías sobre X. Probar que el espacio $(X, \sup\{\tau_i\}_{i=1}^n)$ es homeomorfo a la diagonal del producto $(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i, \tau_{Tyc})$.

10.- Sea I un conjunto de índices. Se pide probar

(i) los productos son *asociativos*, es decir, si $\{I_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una partición de I, entonces el producto $(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (\prod\limits_{i\in I_\lambda} X_i), \tau_{Tyc})$ es homeomorfo a $(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$;

(ii) los productos son *conmutativos*, es decir, si $\psi\colon I \longrightarrow I$ es una aplicación biyectiva, entonces $(\prod\limits_{i\in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es homeomorfo al producto $(\prod\limits_{i\in I} X_{\psi(i)}, \tau_{Tyc})$.

11.- Sean el *plano de Sorgenfrey* $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$ y $A = \{(x,-x); x \in \mathbb{R}\}$. Probar

(i) (A, τ_A) es un espacio discreto;

(ii) A es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$. Deducir que el plano de Sorgenfrey no es Lindelöf: de donde se deduce que la propiedad de Lindelöf no es productiva;

(iii) cada subconjunto $B \subset A$ es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \tau_{sor} \times \tau_{sor})$.

12.- ¿ Es $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \tau_{us})$ homeomorfo a $(\mathbb{N}, \tau_{us})$?

13.- Probar que el producto de espacios cofinitos no es un espacio cofinito.

14.- Sean $p \in X$, $q \in Y$, $A = \{p\}$, $B = \{q\}$ y los espacios topológicos inclusión (X, τ_A) e (Y, τ_B). Sea $C = \{(p,q)\} \subset X \times Y$. Se pide comparar las topologías $\tau_A \times \tau_B$ y τ_C sobre $X \times Y$.

15.- Se consideran las topologías sobre $\mathbb{R}$

$$\tau_2 = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ finito ó } 2 \notin U\} \quad \text{y} \quad \tau_3 = \{U \subset \mathbb{R} : U^c \text{ finito ó } 3 \notin U\}.$$

Describir los abiertos de la topología producto $\tau_2 \times \tau_3$ sobre $\mathbb{R}^2$ y comparar esta topología con $\tau_{(2,3)} = \{W \subset \mathbb{R}^2 : W^c \text{ finito ó } (2,3) \notin W\}$.

16.- Probar que $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_{us})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}, \tau_{us})$, si $n \geq 1$.

17.- Comparar la topología del orden lexicográfico sobre $\mathbb{R}^2$ con la topología producto $\tau_{dis} \times \tau_{us}$.

18.- Describir el *plano de Kolmogorov* $(\mathbb{R}^2, \tau_{Kol} \times \tau_{Kol})$ y comparar su topología con la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Calcular la clausura y el interior de los conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

19.- Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X. Probar que $\tau_1 \cap \tau_2$ es T_2 si y sólo si para cada $p \in X \times X$, $p \notin \Delta$ (la diagonal de $X \times X$), existe un encaje

$$\{p\} \subset W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{2k} \subset W_{2k+1} \subset \cdots X \times X$$

de modo que $W_{2k} \in \tau_1 \times \tau_1$, $W_{2k+1} \in \tau_2 \times \tau_2$ y $p_1(W_k) \cap p_2(W_k) = \emptyset$, para cada $k \geq 0$.

20.- Sean $(\mathbb{R}^I, \tau_{Tyc})$ y $(\mathbb{R}^I, \tau_{ca})$ del problema 7 en 3.4. Probar que son precisamente los espacios producto asociados a la familia de espacios $\{(\mathbb{R}, \tau_{us})\}_{i \in [0,1]}$.

21.- Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$ y sean $r < R$ dos números reales positivos. Sea el conjunto $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$. Probar que la aplicación $f \colon (T, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us} \times \tau_{us})$ definida por

$$f(x,y,z) = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - R}{r}, \frac{z}{r} \right) \right)$$

es un homeomorfismo.

22.- Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios topológicos. Probar que aunque $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ sea homeomorfo a $(X \times Z, \tau_X \times \tau_Z)$, no es necesariamente (Y, τ_Y) homeomorfo a (Z, τ_Z).

23.- Los productos infinitos son utilizados para describir dos importantes espacios topológicos

(i) *el cubo de Hilbert* es el espacio

$$[0,1]^\omega = \{(x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R} : \, 0 \leq x_k \leq \frac{1}{k}, \, k \geq 1\},$$

provisto de la distancia definida por $d(\{x_n\},\{y_n\}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$. La aplicación $f\colon ([0,1]^\omega, d) \longrightarrow (\prod_{n=1}^{\infty}[0,1], \tau_{Tyc})$, definida por $f(\{x_n\}) = (x_1, 2x_2, \ldots, kx_k, \ldots)$, es una biyección continua cuya inversa $g\colon (\prod_{n=1}^{\infty}[0,1], \tau_{Tyc}) \longrightarrow ([0,1]^\omega, d)$, definida por

$$g(\{y_n\}) = (y_1, \frac{1}{2}y_2, \ldots, \frac{1}{k}y_k, \ldots)$$

es también continua. Por lo tanto, $([0,1]^\omega, d)$ es homeomorfo al espacio de las sucesiones sobre $[0,1]$ con la convergencia puntual;

(ii) *el espacio de Cantor* es el espacio $\left(\{0,1\}^\omega = \prod_{n=1}^{\infty}\{0,1\}, \tau_{Tyc}\right)$, es decir el espacio topológico de todas las sucesiones de ceros y unos, con la convergencia puntual. Probar que este espacio es homeomorfo al conjunto de Cantor, exhaustivamente descrito en 18.2;

(iii) probar que el producto numerable de copias del cubo de Hilbert (respectivamente, del espacio de Cantor) es homeomorfo al cubo de Hilbert (respectivamente, al espacio de Cantor);

(iv) demostrar que el cubo de Hilbert es la imagen por una aplicación continua del conjunto de Cantor.

Tema X

Topología cociente

Muchos modelos geométricos sencillos como el cono, el cilindro o la pirámide se construyen habitualmente *pegando* partes de una pieza plana de papel de acuerdo con ciertas reglas. Esta operación es un ejemplo muy simple de la noción de objeto cociente. Habitualmente, éste viene definido por una relación de equivalencia sobre el conjunto subyacente al objeto dado compatible, en cierto sentido, con su estructura. En el caso de los espacios topológicos, se puede dar la noción de espacio topológico cociente para cualquier relación de equivalencia.

La imagen continua de un espacio topológico no es, en general, un espacio cociente. Por ello, se necesita la noción de *aplicación identificación*, que es un caso particular de función continua y sobreyectiva, y que permite la siguiente caracterización de espacio cociente: un espacio topológico (Y, τ_Y) es un espacio cociente de un espacio (X, τ_X) si y sólo si Y es la imagen de X por una aplicación identificación.

10.1 Identificaciones

Definición 10.1 Una *identificación* es una aplicación $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ sobreyectiva, tal que $V \in \tau_Y$ si y sólo si $f^{-1}(V) \in \tau_X$, es decir, f es sobreyectiva y $\tau_Y = \tau_{fin\{f\}}$.

Lema 10.2 *$f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación si y sólo si es sobreyectiva y ($F \in \mathcal{C}_Y$ si y sólo si $f^{-1}(F) \in \mathcal{C}_X$).*

Proposición 10.3 *Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y sobreyectiva. Si f es abierta (respectivamente, cerrada) es una identificación.*

Contraejemplo 10.4 El recíproco no es cierto: sea $\chi_{[0,\frac{1}{2})}\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\{0,1\}, \tau)$, donde τ es la topología final para $\chi_{[0,\frac{1}{2})}$, es decir, $\tau = \{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}\}$. Con esta topología, $\chi_{[0,\frac{1}{2})}$ es una identificación, que no es ni abierta ni cerrada.

Proposición 10.5 *Una identificación inyectiva es un homeomorfismo.*

Proposición 10.6 *La composición de identificaciones es una identificación.*

A continuación, se dan condiciones necesarias y suficientes para que una identificación sea abierta o cerrada en términos de conjuntos saturados

Proposición 10.7 *Si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es una identificación, entonces*

(i) f es abierta si y sólo si para cada $U \in \tau_X$, es $f^{-1}(f(U)) \in \tau_X$;

(ii) f es cerrada si y sólo si para cada $F \in \mathcal{C}_X$, es $f^{-1}(f(F)) \in \mathcal{C}_X$.

Proposición 10.8 *Si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es una identificación y $g\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$ es una aplicación, entonces g es continua si y sólo si $g \circ f$ lo es.*

Teorema 10.9 (de transitividad) *Dadas una identificación $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ y una aplicación sobreyectiva $g\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$, g es identificación si y sólo si $g \circ f$ lo es.*

Proposición 10.10 *Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si existe $s\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (X,\tau_X)$ continua y tal que $f \circ s = 1_Y$ (s se llama una* sección*), entonces f es una identificación.*

Corolario 10.11 *Toda retracción es una identificación.*

10.2 Topología cociente

Definición 10.12 Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow Y$ sobreyectiva. La *topología cociente* τ_f sobre Y es la topología final asociada a f. Con esta topología, $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_f)$ es una identificación.

Definición 10.13 Sea X un conjunto. Una *partición* de X es una familia $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ de conjuntos no vacíos, dos a dos disjuntos, cuya unión es X.

Si se considera la proyección canónica $q\colon (X,\tau) \longrightarrow \mathcal{P}$, que asocia a $x \in X$ el único elemento de $\mathcal{P}$ que lo contiene $q(x) = P_{i_x}$, se deduce que q es sobreyectiva y se puede dotar a $\mathcal{P}$ de la topología cociente asociada a q. Se dice que $\mathcal{P}$ es un *cociente* de (X,τ).

Es claro que toda partición define una relación de equivalencia sobre X,

$$x \simeq y \text{ si y sólo si } x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo elemento de la partición.}$$

Y recíprocamente toda relación de equivalencia $\simeq$ determina una partición $\mathcal{P} = X/\simeq$, cuyos elementos son las clases de equivalencia. $X/\simeq$ es el *cociente* de X por la relación de equivalencia, y se suele denotar $\tau_\simeq$ a la topología cociente.

El rango de una identificación puede interpretarse como un espacio cociente

Proposición 10.14 *Si* $f\colon (X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ *es una identificación, entonces* (Y,τ_Y) *es homeomorfo al cociente de* (X,τ_X) *por la relación de equivalencia* $x_1 \simeq x_2$ *si y sólo si* $f(x_1)=f(x_2)$.

10.3 Propiedades divisibles

Definición 10.15 Una propiedad $\mathcal{P}$ se llama *divisible*, cuando si (X,τ) verifica $\mathcal{P}$, entonces cualquier cociente de (X,τ) la verifica.

Proposición 10.16 *La separabilidad y la propiedad de Lindelöf son divisibles.*

Observación 10.17 Las demás propiedades topológicas vistas hasta ahora no son divisibles, se verán contraejemplos en los problemas 10.5.

10.4 Ejemplos de espacios cociente

10.4.1 Contracción de un conjunto a un punto

Sea (X,τ), $A\subset X$ y $\simeq$ la relación de equivalencia dada por $a\simeq b$ para $a,b\in A$. El espacio cociente $(X/\simeq,\tau_{\simeq})$ se suele denotar $(X/A,\tau_A)$ y se dice que *se ha realizado la contracción de* A *a un punto*.

10.4.2 Adjunción de espacios

Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos disjuntos. Sea $A\in\mathcal{C}_X$ y $f\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación continua. Sobre la suma disjunta $(X\cup Y,\tau_\Sigma)$, se define la relación de equivalencia $a\sim_f f(a)$, para cada $a\in A$. El espacio cociente se denota por $(X\cup_f Y,\tau_f)$ y se llama *espacio de adjunción* de (X,τ_X) y de (Y,τ_Y) por f, la *aplicación de adjunción*.

Ejemplos 10.18 Algunos ejemplos de espacios de adjunción son

1) si $A\subset X$ cerrado, que se adjunta a $Y=\{y_0\}$, por la aplicación $f(A)=y_0$, entonces el espacio de adjunción asociado es homeomorfo al cociente $(X/A,\tau_{X/A})$. En particular, si $X=[0,1]$ y $A=\{0,1\}$, el espacio de adjunción correspondiente es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1,\tau_{us})$;

2) (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos disjuntos, donde (X,τ_X) es T_1. Si $x\in X$ e $y\in Y$, se define el "*wedge*" de X e Y, $(X\vee Y,\tau_\sim)$, como el cociente de su suma disjunta, tras identificar los puntos base x e y.

10.4.3 Variedades y superficies

Vamos a presentar ahora una familia especialmente importante de espacios topológicos, las variedades, y como caso particular las superficies

Definición 10.19 Una *variedad topológica de dimensión* n, (M, τ), es un espacio topológico T_2 y C_{II}, tal que todo $x \in M$ posee un entorno abierto U que es homeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Esta propiedad se puede enunciar de manera abreviada, diciendo que M es un espacio localmente euclídeo. Las hipótesis de ser T_2 y C_{II} excluyen situaciones más generales de las que vamos a ver aquí y permiten circunscribir las variedades a espacios topológicos homeomorfos a subespacios de espacios euclídeos de dimensión suficientemente grande.

Ejemplos 10.20 Algunos ejemplos de variedades son

(i) $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ o cualquier abierto en él es una variedad de dimensión n;

(ii) la esfera $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ es una variedad de dimensión n: en efecto, dado un punto $(a_1, \dots, a_{n+1})$ en $\mathbb{S}^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$, se considera la recta que pasa por ese punto y el polo norte $(0, \dots, 0, 1)$. Esta recta corta al hiperplano $H = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ en el punto $\left(\dfrac{a_1}{1 - a_{n+1}}, \dots, \dfrac{a_n}{1 - a_{n+1}}, 0\right)$. Se define la *proyección estereográfica* como la aplicación $h \colon (\mathbb{S}^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_{us})$, definida por

$$h(a_1, \dots, a_{n+1}) = \left(\frac{a_1}{1 - a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1 - a_{n+1}}\right),$$

que es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^n - \{(0, \dots, 0, 1)\}$ y $\mathbb{R}^n$, lo que permite concluir que la esfera es localmente euclídea en todo punto distinto del polo norte. Y para este punto, se puede utilizar la proyección estereográfica desde el polo sur para concluir un resultado similar;

(iii) el espacio proyectivo real $(\mathbb{RP}^n, \tau_\sim)$ es una variedad de dimensión n: en efecto, este espacio (ver problema 27 en 10.5) puede verse como el cociente de $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ por la relación de equivalencia $x \sim -x$ que identifica puntos antipodales. Si se toman los abiertos $U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\}$ y $U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\}$ y los homeomorfismos $\varphi_i \colon U_i^+ \longrightarrow B$ y $\varphi_i \colon U_i^- \longrightarrow B$, dados por $\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$, donde $B = \{z \in \mathbb{R}^n : z_1^2 + \ldots + z_n^2 < 1\}$, entonces los conjuntos $U_i = \varphi_i(U_i^+)$ son abiertos, pues su imagen recíproca por la aplicación cociente es $U_i^+ \cup U_i^-$. Además, la proyección define un homeomorfismo entre U_i^+ y su imagen U_i.

Como $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \tau_{us} \times \tau_{us})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^{m+n}, \tau_{us})$, el producto de dos abiertos es un abierto y el producto de homeomorfismos es un homeomorfismo, se deduce que

Proposición 10.21 *El producto de una variedad m-dimensional (M, τ_M) y de una variedad n-dimensional (N, τ_N) es una variedad $(m + n)$-dimensional $(M \times N, \tau_M \times \tau_N)$.*

Ejemplos 10.22 Así, $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us})$ es una variedad de dimensión 2. Por lo ya visto, otras variedades de dimensión 2 son el plano euclídeo $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$, la esfera $(\mathbb{S}^2, \tau_{us})$ o el plano proyectivo real $(\mathbb{RP}^2, \tau_{us})$.

Definición 10.23 Una *superficie* S es una variedad de dimensión 2.

A continuación vamos a estudiar las superficies más conocidas.

Definición 10.24 En $([0,1]^2, \tau_{us})$ se identifican

(i) $(x,0) \simeq (x,1)$ para cada $x \in [0,1]$,

(ii) $(0,y) \simeq (1,y)$ para cada $y \in [0,1]$.

Al cociente $([0,1]^2/\simeq, \tau_{\simeq})$ se le llama *toro de dimensión dos* y se suele denotar $(\mathbb{T}^2, \tau_{us})$.

Considerando la aplicación $f\colon ([0,1]^2, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us})$, definida por

$$f(s,t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

que pasa al cociente anterior, se prueba que

Lema 10.25 *El espacio* $(\mathbb{T}^2, \tau_{us})$ *es homeomorfo al producto* $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us})$.

Definición 10.26 En $([0,1]^2, \tau_{us})$ se identifican $(0,y) \simeq (1, 1-y)$, para cada $y \in [0,1]$. Al cociente $([0,1]^2/\simeq, \tau_{\simeq})$ se le llama *banda de Möbius* y se suele denotar $(\mathbb{M}, \tau_{us})$.

Observación 10.27 En realidad, la banda de Möbius es una *superficie con borde*, pero no vamos a alargar más este apartado con esa discusión.

Lema 10.28 *Si* $p\colon ([0,1]^2, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{M}, \tau_{us})$ *es la aplicación cociente, el subespacio de* $\mathbb{M}$ *definido por* $p([0,1] \times \{0,1\})$ *(la* arista de la banda*) es homeomorfo a* $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$.

Definición 10.29 En $([-1,1]^2, \tau_{us})$ se identifican

(i) $(x,0) \simeq (-x,1)$ para cada $x \in [-1,1]$,

(ii) $(0,y) \simeq (1,y)$ para cada $y \in [-1,1]$.

Al cociente $([-1,1]^2/\simeq, \tau_{\simeq})$ se le llama *botella de Klein* y se suele denotar $(\mathbb{K}^2, \tau_{us})$.

Lema 10.30 *La botella de Klein es homeomorfa al espacio de adjunción de dos bandas de Möbius por la aplicación identidad que identifica sus aristas.*

Observación 10.31 Se puede probar (ver [BvR]) que la botella de Klein no puede embeberse en $\mathbb{R}^3$, pero si en $\mathbb{R}^4$: en efecto, se considera $f\colon ([-1,1]^2, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, \tau_{us})$ dada por

$$f(x,y) = \left((1+|x|)\cos \pi y, (1+|x|)\sin \pi y, \sin \pi x \cos \frac{\pi y}{2}, \sin \pi x \sin \frac{\pi y}{2}\right).$$

Entonces, f es continua y pasa al cociente dado en la refinición 10.29

Definición 10.32 Una superficie es *orientable* si no contiene ningún subespacio homeomorfo a la banda de Möbius. En caso contrario se dice *no orientable*.

Lema 10.33 *El plano proyectivo real es homeomorfo al espacio de adjunción de una banda de Möbius y un disco cerrado por la aplicación identidad que identifica la arista de* $\mathbb{M}$ *y la frontera del disco.*

Ejemplos 10.34 De los lemas 10.30 y 10.33, se deduce que la botella de Klein y el plano proyectivo real son no orientables.

Lema 10.35 *La orientabilidad es una propiedad topológica.*

Lema 10.36 *Al contrario que las superficies no orientables, toda superficie orientable puede embeberse en* $\mathbb{R}^3$.

Observación 10.37 El plano proyectivo real puede embeberse en $\mathbb{R}^4$: se considera la función $f\colon(\mathbb{R}^3,\tau_{us})\longrightarrow(\mathbb{R}^4,\tau_{us})$ dada por $f(x,y,z)=(x^2-y^2,xy,yz,xz)$. La imagen por f de dos puntos antipodales de $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ es el mismo punto de $\mathbb{R}^4$, por lo que esta función pasa al cociente dado en el ejemplo 10.20 (iii), definiendo un embebimiento del $\mathbb{RP}^2$ en $\mathbb{R}^4$.

Definición 10.38 Una n-*celda* es un espacio homeomorfo al disco cerrado $(\mathbb{D}^n,\tau_{us})$. Si consideramos $fr(\mathbb{D}^n)=\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{D}^n$, (Y,τ_Y) un espacio topológico y $f\colon(\mathbb{S}^{n-1},\tau_{us})\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación continua, se dice que $Y_f=\mathbb{D}^n\cup_f Y$ es el *espacio obtenido al adjuntar una* n*-celda a* Y *por* f.

Ejemplos 10.39 Algunos ejemplos de adjunción de celdas

1) la botella de Klein $(\mathbb{K}^2,\tau_{us})$ se obtiene adjuntando una 2-celda a $(\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1,\tau_\sim)$;

2) si $(Y,\tau_Y)=(\mathbb{S}^1,\tau_{us})$ y $f\colon(\mathbb{S}^1,\tau_{us})\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ es $f(z)=z^2$, entonces, $\mathbb{D}^2\cup_f Y$ es el plano proyectivo real.

10.5 Problemas

1.- Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos, $\sim_X$ y $\sim_Y$ relaciones de equivalencia sobre X e Y respectivamente y $f\colon(X,\tau_X)\longrightarrow(Y,\tau_Y)$ una aplicación continua preservando las relaciones (es decir, si $a\sim_X b$ entonces $f(a)\sim_Y f(b)$). Probar

(i) la aplicación $f_*\colon(X/\sim_X,\tau_{\sim_X})\longrightarrow(Y/\sim_Y,\tau_{\sim_Y})$, definida por $f_*(p_X(x))=p_Y(f(x))$ (p_X y p_Y son las proyecciones) es continua;

(ii) si f es identificación, entonces f_* también lo es.

2.- Sean $\sim_1$ y $\sim_2$ dos relaciones de equivalencia sobre (X, τ), tales que si $x \sim_1 y$, entonces $x \sim_2 y$. Probar que $(X/\sim_2, \tau_{\sim_2})$ es un cociente de $(X/\sim_1, \tau_{\sim_1})$.

3.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ sobreyectiva y continua. Se considera la relación $R(f)$ asociada a dicha aplicación, $aR(f)b$ si y sólo si $f(a) = f(b)$, y $p\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (X/R(f), \tau_R)$ la proyección canónica. Se considera la aplicación $\overline{f}\colon (X/R(f), \tau_R) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ dada por $\overline{f}(p(x)) = f(x)$. Probar

(i) $\overline{f}$ está bien definida;

(ii) $\overline{f}$ es un homeomorfismo si y sólo si f es una identificación.

4.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Se pide

(i) si $g\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ es continua y $g \circ f$ es una identificación, entonces g también lo es;

(ii) si existe $A \subset X$ tal que $f|_A\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una identificación, entonces f también lo es.

5.- Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre (X, τ), probar que son equivalentes

(i) la proyección canónica es cerrada (respectivamente, abierta);

(ii) para cada $A \in \mathcal{C}$ (respectivamente, $A \in \tau$), su $\sim$-saturación es cerrada (respectivamente, abierta).

6.- Sea (X, τ) un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Probar que son equivalentes

(i) la proyección canónica es abierta (también se dice que $\sim$ es abierta);

(ii) el interior de cada conjunto $\sim$-saturado es $\sim$-saturado;

(iii) la clausura de cada conjunto $\sim$-saturado es $\sim$-saturado.

7.- Sea $r\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (A, \tau_A)$ una retracción. Probar que si $R(r)$ es la relación de equivalencia sobre X inducida por r, entonces el cociente $(X/R(r), \tau_{R(r)})$ es homeomorfo al subespacio (A, τ_A).

8.- Sea (X, τ) y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. Probar

(i) el cociente es indiscreto si y sólo si los únicos abiertos $\sim$-saturados son el vacío y el total;

(ii) si toda clase de equivalencia es densa en (X, τ), entonces el cociente es indiscreto. Aplicarlo al caso de $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ con la relación $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$;

(iii) el cociente es discreto si y sólo si todo conjunto $\sim$-saturado es abierto en (X, τ);

(iv) el cociente es discreto si y sólo si toda clase de equivalencia es abierta en (X, τ).

9.- Sobre (X, τ), se define la relación $x \sim y$ si y sólo si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Probar

(i) todo cerrado en (X, τ) (respectivamente, todo abierto) es un conjunto $\sim$-saturado;

(ii) la proyección canónica es abierta y cerrada.

10.- Sean (X, τ), $A \subset X$ y la relación de equivalencia definida por $a \sim b$ para $a, b \in A$. Sea $p : (X, \tau) \longrightarrow (X/\sim, \tau_\sim)$ la proyección canónica. Se pide

(i) si τ es la topología A-inclusión, probar que $\tau_\sim$ es la topología $p(a)$-inclusión, donde $a \in A$;

(ii) si τ es la topología A-exclusión, probar que $\tau_\sim$ es la topología $p(a)$-exclusión, donde $a \in A$.

11.- Sean (X, τ) y $(X \times [0, 1], \tau \times \tau_{us})$. Sobre $X \times [0, 1]$, se considera la siguiente relación de equivalencia $(x, 1) \sim (y, 1)$, para cada $x, y \in X$. El cociente bajo esta relación se denota por $(C(X), \tau_\sim)$ y se llama *cono* de X. Probar que (X, τ) se identifica con el subespacio $(X \times \{0\}, \tau_\sim)$ de $(C(X), \tau_\sim)$.

Sea $(X \times [-1, 1], \tau \times \tau_{us})$. Sobre $X \times [-1, 1]$, se considera la siguiente relación de equivalencia $(x, 1) \simeq (y, 1)$ y $(x, -1) \simeq (y, -1)$, para cada $x, y \in X$. El cociente se denota $(S(X), \tau_\simeq)$ y se llama *suspensión* de X. Probar

(i) $(S(X), \tau_\simeq)$ es un cociente de $(C(X), \tau_\sim)$;

(ii) toda aplicación continua entre dos espacios topológicos induce otra entre los conos (respectivamente, las suspensiones) correspondientes;

(iii) $(S(\mathbb{S}^n), \tau_\simeq)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^{n+1}, \tau_{us})$, para cada $n \geq 0$;

(iv) $(C(\mathbb{S}^1), \tau_\sim)$ es homeomorfo a la bola cerrada unidad de $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$. En general, $(C(\mathbb{S}^n), \tau_\sim)$ es homeomorfo a la bola cerrada unidad de $(\mathbb{R}^{n+1}, \tau_{us})$.

12.- Se pide probar

(i) el cono de X, $(C(X), \tau_\sim)$, se obtiene adjuntando $(X \times [0, 1], \tau_X \times \tau_{us})$ a $(\{y_0\}, \tau_{dis})$, por la aplicación $f(X \times \{1\}) = y_0$;

(ii) la suspensión de X, $(S(X), \tau_\simeq)$, se obtiene adjuntando $(X \times [-1, 1], \tau_X \times \tau_{us})$ al espacio $(Y = \{a, b\}, \tau_{dis})$ por la función $g(X \times \{1\}) = a$ y $g(X \times \{-1\}) = b$;

(iii) si se adjunta $(X \times [0, 1] \times Y, \tau_X \times \tau_{us} \times \tau_Y)$ a la unión disjunta $(X \cup Y, \tau_\Sigma)$ mediante la aplicación $f(x, 0, y) = x$ y $f(x, 1, y) = y$, se obtiene el "*join*" de X e Y, denotado $(X * Y, \tau_*)$. Entonces, $(X * \{x_0\}, \tau_*)$ es homeomorfo a $(C(X), \tau_\sim)$ y $(X * \mathbb{S}^0, \tau_*)$ es homeomorfo a $(S(X), \tau_\simeq)$.

13.- Sea $(X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}), \tau_\Sigma)$ la suma disjunta de dos copias de la recta real. Sea $\sim$ la relación de equivalencia definida por $(x, 0) \sim (x, 1)$ si $x \neq 0$. Se pide

(i) estudiar si el espacio cociente es T_1 o T_2;

(ii) si p la proyección canónica, ¿es p abierta?

14.- Sean $(X = ([-1, 1] \times \{1\}) \cup ([-1, 1] \times \{-1\}), \tau_{us})$ y la relación de equivaencia que identifica los puntos $(-1, 1) \sim (-1, -1)$ y $(1, 1) \sim (1, -1)$. Probar que el cociente $(X/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$.

15.- Sean $([0, 1], \tau_{us})$, $X_n = [0, 1] \times \{n\}$ y la suma disjunta $(X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n, \tau_\Sigma)$. Se considera sobre X la relación de equivalencia dada por $(0, n) \sim (0, m)$, para cada $m, n \in \mathbb{N}$. Estudiar los axiomas de separación y de numeración en $(X/ \sim, \tau_\sim)$.

16.- Sobre $([-1, 1], \tau_u)$, se identifican los puntos $x \sim -x$ si $x \neq 1, -1$. Probar

(i) la proyección canónica es abierta;

(ii) el espacio cociente bajo esta relación es T_1, pero no T_2.

17.- Sea $(\mathbb{R}, \tau)$, donde τ es la topología $\{0\}$-inclusión. Se identifican los puntos $x \sim -x$, para $x \in \mathbb{R}$. Se pide

(i) demostrar que el espacio cociente $(\mathbb{R}/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0, \infty), \tau_0)$, donde τ_0 es la topología $\{0\}$-inclusión;

(ii) estudiar si la proyección canónica es abierta o cerrada.

18.- Sobre $(\mathbb{R}^2, \tau_{us} \times \tau_{dis})$ se define la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Se pide

(i) demostrar que el cociente $(\mathbb{R}^2/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $([0, \infty), \tau_{us})$;

(ii) estudiar si la proyección canónica es abierta o cerrada;

(iii) hacer el mismo ejercicio, tomando como espacio de partida $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$.

19.- Se considera en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$. Demostrar que el cociente $(\mathbb{R}/ \sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$.

20.- Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ el semiplano superior cerrado. Se considera

(1) para cada punto $p = (x, y) \in \Gamma$ con $y > 0$, $\mathcal{B}_p = \{\overset{\circ}{B}(p, \epsilon) \cap X : \varepsilon > 0\}$,

(2) para cada $p = (x, 0) \in \Gamma$, $\mathcal{B}_p = \{(\overset{\circ}{B}(p, \epsilon) \cap P) \cup \{p\} : \varepsilon > 0\}$.

Se pide

(i) demostrar que queda así definido un sistema fundamental de entornos para una topología τ sobre Γ. Compararla con τ_{us} y la de Moore τ_M;

(ii) se define sobre Γ la relación de equivalencia: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$. Estudiar si la proyección canónica $p \colon (\Gamma, \tau) \longrightarrow (\Gamma/\sim, \tau_\sim)$ es abierta o cerrada;

(iii) demostrar que el cociente $(\Gamma/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a la recta real.

21.- Se consideran los subespacios euclídeos $([0, 1]^n, \tau_{us})$ y

$$(\widetilde{[0,1]}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in [0, 1]^n : \exists j \in \{1, \cdots, n\} : x_j = 0 \text{ ó } 1\}, \tau_{us}).$$

Se define una relación de equivalencia sobre $[0, 1]^n$ por: $x \sim y$ si $x, y \in \widetilde{[0,1]}^n$. Probar que el cociente $([0, 1]^n/\sim, \tau_\sim)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$.

22.- En el plano euclídeo, se considera la relación de equivalencia $(a, x) \sim (a, y)$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$. Se pide

(i) describir el espacio cociente;

(ii) si p denota la proyección canónica, estudiar la convergencia de las sucesiones $\{p(0, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{p(\frac{1}{n}, 0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{p(n, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$.

23.- Sobre $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}, \tau_{us})$, se define la relación de equivalencia $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si $y_1 = y_2 \neq 0$ ó $y_1 = y_2 = 0$ y $x_1 = x_2$. Probar que la proyección canónica no es cerrada.

24.- El *toro generalizado* es un producto de esferas $(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n, \tau_{us})$. El n-cubo $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ tiene como frontera $fr([0, 1]^n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$ existe i tal que $x_i = 0$ ó $1\}$. Así, $fr([0, 1]^m \times [0, 1]^n = [0, 1]^{m+n}) = (fr([0, 1]^m) \times [0, 1]^n) \cup ([0, 1]^m \times fr([0, 1]^n))$. Sean $z_m \in \mathbb{S}^m$ y $z_n \in \mathbb{S}^n$ puntos base. Existe una aplicación$f_k \colon ([0, 1]^k, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^k, \tau_{us})$, tal que $f_k(fr([0, 1]^k)) = z_k$, para $k \in \{m, n\}$, que es un *homeomorfismo relativo*, es decir, tal que la restricción $f_k|_{[0,1]^k - fr([0,1]^k)} \colon ([0, 1]^k - fr([0, 1]^k), \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^k - z_k, \tau_{us})$ es un homeomorfismo. Tomando productos cartesianos en ambas dimensiones, se obtiene una aplicación $f_m \times f_n \colon ([0, 1]^m \times [0, 1]^n, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n, \tau_{Tyc})$, que lleva $fr([0, 1]^{m+n})$ sobre $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$. Concluir, que $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ es homeomorfo al espacio obtenido adjuntando una $(m + n)$-celda a $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ vía la aplicación $f_m \times f_n \colon fr([0, 1]^{m+n}) \simeq \mathbb{S}^{m+n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$.

25.- Sea el espacio $(\mathbb{R}^n, \tau_{Zar})$. Se define sobre $\mathbb{R}^n$ la relación $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ si y sólo si $x_i = y_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Probar que el espacio cociente $(\mathbb{R}^n/\sim, \tau_{\sim})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}^{n-1}, \tau_{Zar})$.

26.- *Separado de un espacio topológico*: sea (X, τ) un espacio topológico. Se define la siguiente relación binaria sobre X: para cada $x, y \in X$, $x \simeq y$ si para cada espacio topológico T_2 (Y, τ_Y) y toda aplicación continua $f \colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, se tiene $f(x) = f(y)$. Se pide probar

(i) $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre X;

(ii) el espacio cociente $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es T_2;

(iii) para cada espacio topológico T_2 (Y, τ_Y) y toda aplicación continua $f \colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, existe una aplicación continua $f \colon (X/\simeq, \tau_{\simeq}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, de manera que $f = g \circ p$, donde $p \colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es la aplicación cociente.

27.- *El espacio proyectivo real de dimensión* n: en $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_{us})$ se identifican dos puntos $(x_1, \ldots x_{n+1}) \simeq (y_1, \ldots y_{n+1})$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x_i = \lambda y_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Al cociente $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\simeq, \tau_{\simeq})$ se le llama *espacio proyectivo real de dimensión* n y se suele denotar $(\mathbb{RP}^n, \tau_{us})$. Se pide probar

(i) $(\mathbb{RP}^n, \tau_{us})$ es homeomorfo al espacio cociente de (iii) en los ejemplos 10.20;

(ii) $(\mathbb{RP}^n, \tau_{us})$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo real de dimensión $n-1$, $(\mathbb{RP}^{n-1}, \tau_{us})$, una n-celda a través de la aplicación canónica $p_{n-1} \colon \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$;

(iii) $\mathbb{RP}^0$ es un punto, $(\mathbb{RP}^1, \tau_{us})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ y $(\mathbb{RP}^n, \tau_{us})$ es homeomorfo al espacio métrico cuyos puntos son rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$ pasando por el origen, donde la métrica se define como el ángulo entre rectas (que toma valores en $[0, \frac{\pi}{2}]$);

(iv) sea $\pi_n \colon (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{RP}^n, \tau_{us})$ la proyección canónica. Probar que es abierta, pero no cerrada;

(v) probar que el conjunto $A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) : \pi_n(x) = \pi_n(y)\}$ es cerrado en $((\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \tau_{Tyc})$ y deducir que $(\mathbb{RP}^n, \tau_{us})$ es T_2.

28.- *El espacio proyectivo complejo de dimensión* n: en el espacio complejo $(\mathbb{C}^{n+1}, \tau_{us})$, se considera el subespacio

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \ldots + \|z_{n+1}\|^2 = 1\}.$$

Se define sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ la relación de equivalencia: $z \sim z'$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{C}$ con $\|c\| = 1$ y $z' = cz$. El cociente bajo esta relación de equivalencia es el *espacio proyectivo complejo de dimensión* n y se suele denotar $(\mathbb{CP}^n, \tau_{us})$. Se pide probar

(i) el espacio proyectivo complejo de dimensión n, $(\mathbb{CP}^n, \tau_{us})$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo complejo de dimensión $n-1$, $(\mathbb{CP}^{n-1}, \tau_{us})$, una $2n$-celda a través de la aplicación canónica $q_{n-1}\colon \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$;

(ii) sea $q_n\colon (\mathbb{S}^{2n+1}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{CP}^n, \tau_{us})$ la aplicación cociente. $\mathbb{S}^{2n+1}$ puede pensarse como un *producto torcido* de $\mathbb{CP}^n$ y $\mathbb{S}^1$: se dice que $\mathbb{S}^{2n+1}$ es un fibrado sobre $\mathbb{CP}^n$, de fibra $\mathbb{S}^1$;

(iii) $\mathbb{CP}^0$ es un punto y $(\mathbb{CP}^1, \tau_{us})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^2, \tau_{us})$. La *aplicación de Hopf* es aplicación cociente $q_1\colon (\mathbb{S}^3, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{CP}^1, \tau_{us})$, función de enorme importancia en Topología y Geometría;

(iv) $(\mathbb{CP}^n, \tau_{us})$ es homeomorfo al espacio métrico cuyos puntos son líneas complejas de $\mathbb{C}^{n+1}$ pasando por el origen, donde la métrica se define como el ángulo entre rectas (que toma valores en $[0, \frac{\pi}{2}]$).

29.- Para cada homeomorfismo $h\colon (\mathbb{S}^{n-1}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^{n-1}, \tau_{us})$ probar que el espacio de adjunción $(\mathbb{D}^n \cup_h \mathbb{D}^n, \tau_{\sim_h})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$.

30.- Probar las siguientes propiedades para superficies

(i) $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us})$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos cilindros $(\mathbb{S}^1 \times [0,1], \tau_{us})$ a través de la aplicación identidad de una copia de cada círculo frontera en una copia del otro;

(ii) $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2, \tau_{us})$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2, \tau_{us})$ a través de la aplicación identidad entre los toros frontera $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us})$;

(iii) $(\mathbb{S}^3, \tau_{us})$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2, \tau_{us})$ a través de la aplicación entre los toros frontera $h\colon (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \tau_{us})$ definida por $h(x,y) = (y,x)$: esta aplicación intercambia los meridianos y paralelos de los toros frontera.

Tema XI

Convergencia

El concepto de convergencia es de importancia fundamental en Análisis. Muchas de las nociones de continuidad, derivabilidad, integral de Riemann,... se definen en términos de límites.

Se necesita también introducir el concepto de límite en espacios topológicos. Las sucesiones no son adecuadas excepto en los espacios C_I (ver el teorema 5.5 y los problemas 3 y 4 en 5.4). La respuesta viene dada por los filtros y las redes

(i) las *redes* o *sucesiones generalizadas* fueron introducidas por Moore y Smith en 1922;

(ii) los filtros, como una teoría formal, fueron definidos por Cartan en 1936.

11.1 Filtros

La definición de filtro está motivada por las propiedades fundamentales de los sistemas de entornos, es decir

(i) los entornos son siempre no vacíos;

(ii) la intersección de dos entornos de un puntos es un entorno del punto;

(iii) un superconjunto de un entorno de un punto es un entorno de dicho punto.

11.1.1 Definición y propiedades

Definición 11.1 Un *filtro* $\mathfrak{F}$ sobre un conjunto X es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de X, verificando

(F1) si $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$,

(F2) si $F \in \mathfrak{F}$ y $F \subset G$, entonces $G \in \mathfrak{F}$.

Observación 11.2 Por lo tanto, para cualquier filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, es $X \in \mathfrak{F}$.

Ejemplos 11.3 Algunos ejemplos de filtros son

1) para cada X, $\mathfrak{F} = \{X\}$ es el *filtro indiscreto*;

2) dado X y $a \in X$, $\mathfrak{F}_a = \{U \subset X : a \in U\}$ es el *filtro principal en* a;

3) dado X y $A \subset X$, $\mathfrak{F}_A = \{U \subset X : A \subset U\}$ es el *filtro principal en* A;

4) dado X infinito, $\mathfrak{F}_{cof} = \{A \subset X : X - A$ es finito$\}$ es el *filtro cofinito*;

5) dado X no contable, $\mathfrak{F}_{coc} = \{A \subset X : X - A$ es contable$\}$ es el *filtro cocontable*;

6) dado (X, τ) y $x \in X$, $\mathcal{N}_x$ es el *filtro de entornos de* x;

7) dado X, $\mathcal{P}(X)$ no es nunca un filtro sobre X.

Definición 11.4 Una subcolección de un filtro $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$ es una *base del filtro* $\mathfrak{F}$ si para cada $F \in \mathfrak{F}$ existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subset F$.

Lema 11.5 *Una familia no vacía de conjuntos no vacíos $\mathfrak{B}$ es una base para algún filtro sobre X si y sólo si verifica*

(BF) para $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$,

y entonces $\mathfrak{F} = \{F \subset X :$ existe $B \in \mathfrak{B} : B \subset F\}$.

Ejemplos 11.6 Algunos ejemplos de bases de filtro son

1) dado X y $a \in X$, $\mathfrak{B}_a = \{\{a\}\}$ es base del filtro principal $\mathfrak{F}_a$;

2) dado X y $A \subset X$, $\mathfrak{B}_A = \{A\}$ es base del filtro principal $\mathfrak{F}_A$;

3) todo filtro es claramente base de sí mismo;

4) $\mathfrak{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es base de un filtro sobre $\mathbb{R}$ llamado *filtro de Fréchet* sobre $\mathbb{R}$;

5) $\mathfrak{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ 0 \in (a, b)\}$ es base de un filtro sobre $\mathbb{R}$ que es precisamente $\mathcal{N}_0^{us}$;

6) si X es un conjunto totalmente ordenado $\mathfrak{B}_1 = \{(\leftarrow, a] : a \in X\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{[a, \rightarrow) : a \in X\}$ son bases de filtro sobre X. Si $X = \mathbb{N}$, el filtro generado por $\mathfrak{B}_2 = \{x \geq a : a \in \mathbb{N}\}$ es el filtro cofinito sobre $\mathbb{N}$ y el filtro generado por $\mathfrak{B}_1 = \{x \leq a : a \in \mathbb{N}\}$ es el filtro principal respecto al punto 1;

7) si $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre X y $f \colon X \longrightarrow Y$ una aplicación, entonces $\mathfrak{B} = \{f(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ es base de un filtro denotado $f(\mathfrak{F})$ y que se llama *imagen por f del filtro* $\mathfrak{F}$;

8) si $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre Y y $f \colon X \longrightarrow Y$ una aplicación, entonces $f^{-1}(\mathfrak{F})$ no es un filtro sobre X y ni siquiera una base de filtro, porque puede existir $F \in \mathfrak{F}$ tal que $f^{-1}(F) = \emptyset$. Pero, si para cada $F \in \mathfrak{F}$ es $f^{-1}(F) \neq \emptyset$, entonces la familia $\mathfrak{B} = \{f^{-1}(F) : F \in \mathfrak{F}\}$ es base de un filtro sobre X denotado $f^{-1}(\mathfrak{F})$ y que se llama *imagen inversa por f del filtro* $\mathfrak{F}$;

9) como caso particular del anterior, si $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre X, $A \subset X$, $i_A \colon A \longrightarrow X$ es la inclusión e $i_A^{-1}(\mathfrak{F})$ existe, se llama *filtro inducido por* $\mathfrak{F}$ sobre A, se denota $\mathfrak{F}_A$ y está generado por la base $\mathfrak{B} = \{F \cap A : F \in \mathfrak{F}\}$.

Definición 11.7 Dados $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ dos filtros sobre X, decimos que $\mathfrak{F}_1$ es *más fino* que $\mathfrak{F}_2$ (o que $\mathfrak{F}_2$ es *menos fino* que $\mathfrak{F}_1$) si $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$.

Definición 11.8 Un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X se llama *fijo* si $\bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} F \neq \emptyset$ y *libre* en caso contrario.

Ejemplos 11.9 Los filtros principales y los filtros de entornos son filtros fijos. El filtro de Fréchet sobre $\mathbb{R}$ y los cofinitos son ejemplos de filtros libres.

Definición 11.10 Sea (X, τ) y un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X. Se dice que

(i) $\mathfrak{F}$ *converge* a x, y se denota $\mathfrak{F} \rightarrow x$, si $\mathcal{N}_x \subset \mathfrak{F}$;

(ii) $\mathfrak{F}$ *tiene a x como punto de aglomeración*, y se denota $\mathfrak{F} \succ x$, si para cada $F \in \mathfrak{F}$ y cada $N \in \mathcal{N}_x$ es $F \cap N \neq \emptyset$.

Lema 11.11 *Sea (X, τ) y un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X. Si $\mathfrak{F} \rightarrow x$, entonces $\mathfrak{F} \succ x$.*

Lema 11.12 *Sea (X, τ) y un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X. Entonces $\mathfrak{F} \succ x$ si y sólo si para cada $F \in \mathfrak{F}$ es $x \in \overline{F}$.*

Ejemplos 11.13 Algunos ejemplos de convergencia de filtros son

1) en (X, τ), sea $\mathfrak{F}$ el filtro indiscreto. Entonces, para cada $x \in X$, es $\mathfrak{F} \succ x$. Y $\mathfrak{F} \rightarrow x$ si y sólo si $\mathcal{N}_x = \{X\}$;

2) en (X, τ), sea $A \neq \emptyset$ y $\mathfrak{F}_A$ el filtro principal asociado a A. Entonces, $\mathfrak{F} \succ x$ si y sólo si $x \in \overline{A}$. Y $\mathfrak{F} \rightarrow x$ si y sólo si para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ es $A \subset U$;

3) en (X, τ), el filtro de los entornos de x, $\mathcal{N}_x$, converge a x;

4) en (X, τ_{ind}), todo filtro converge a cualquier punto del espacio;

5) en (X,τ_{cof}), $\mathfrak{F}_{cof}$ converge a todo punto del espacio.

Teorema 11.14 *En (X,τ), un filtro $\mathfrak{F} \succ x$ si y sólo si existe un filtro $\mathfrak{G}$ más fino que $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G} \to x$.*

Las siguientes propiedades muestran que la convergencia de filtros es adecuada para describir conceptos topológicos

Teorema 11.15 *En (X,τ), si $A \subset X$, es $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe un filtro $\mathfrak{F}$ tal que $A \in \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \to x$.*

Teorema 11.16 *Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$. f es continua en $a \in X$ si y sólo si para cada filtro en X tal que $\mathfrak{F} \to a$ en (X,τ_X), es $f(\mathfrak{F}) \to f(a)$ en (Y,τ_Y).*

Teorema 11.17 *Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $(\prod\limits_{i\in I} X_i,\tau_{Tyc})$ su producto. Un filtro $\mathfrak{F} \to a$ en $(\prod\limits_{i\in I} X_i,\tau_{Tyc})$, si y sólo si para cada $i \in I$ es $p_i(\mathfrak{F}) \to p_i(a)$ en (X_i,τ_i).*

11.1.2 Ultrafiltros

Muchas de las aplicaciones de la convergencia de filtros pueden realizarse de un modo más elegante, usando sólo los ultrafiltros

Definición 11.18 Un filtro $\mathfrak{U}$ sobre X es un *ultrafiltro*, si no existe un filtro estrictamente más fino que él; de otro modo, $\mathfrak{U}$ es un filtro maximal respecto a la relación de inclusión.

Lema 11.19 *Si $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro en (X,τ), $\mathfrak{U} \succ x$ si y sólo si $\mathfrak{U} \to x$.*

Teorema 11.20 *Sea $\mathfrak{U}$ un filtro sobre X. Son equivalentes*

(i) $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro,

(ii) si $A \cup B \in \mathfrak{U}$, es $A \in \mathfrak{U}$ ó $B \in \mathfrak{U}$,

(iii) para cada $A \subset X$, es o bien $A \in \mathfrak{U}$ o bien $X - A \in \mathfrak{U}$,

(iv) para cada $A \subset X$, si A corta a cada elemento de $\mathfrak{U}$, es $A \in \mathfrak{U}$.

Ejemplos 11.21 Algunos ejemplos de ultrafiltros son

1) el filtro principal en un punto es un ultrafiltro;

2) si A posee más de un punto, el filtro principal $\mathfrak{F}_A$ no es un ultrafiltro. De hecho, para cada $a \in A$, $\mathfrak{F}_A \subset \mathfrak{F}_a$, lo que prueba que no hay un único ultrafiltro que contiene a un filtro dado;

3) ni el filtro cofinito ni el cocontable son ultrafiltros;

4) el filtro principal en un punto es un ultrafiltro fijo. Y existen (aunque no se pueden explicitar) ultrafiltros libres: debe serlo uno de los que contiene al filtro de Fréchet sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 11.22 *Se verifica*

(i) un filtro sobre un conjunto está contenido en algún ultrafiltro sobre dicho conjunto;

(ii) un filtro es la intersección de los ultrafiltros que lo contienen;

(iii) la imagen de un ultrafiltro por una aplicación sigue siendo un ultrafiltro.

Teorema 11.23 (X, τ) *es* T_2 *si y sólo si los filtros sobre* X *poseen límites únicos.*

11.2 Redes

Ya hemos visto que las sucesiones no caracterizan la topología, excepto en el caso de espacios C_I. Por ello, debemos introducir una noción de convergencia más descriptiva y aplicable. La teoría de redes proporciona un método alternativo para introducir nociones de convergencia en un espacio topológico. En teoría, no consigue nada que los filtros no hayan conseguido. En este sentido, el desarrollo de la teoría de redes parece que *duplica esfuerzos*. La ventaja con la teoría de redes es que se están generalizando conceptos y pruebas relativos a sucesiones: es una teoría más *cercana* a nuestros conocimientos.

11.2.1 Definición y propiedades

Formalmente, una sucesión en X es una aplicación de $\mathbb{N}$ en X. De una manera más informal, estamos utilizando los números naturales para ordenar la familia de puntos en X. La clave para una buena generalización de la noción de sucesión (para su utilización en espacios topológicos) se basa en la idea de ordenar una colección de puntos en X, llevando un cierto conjunto *ordenado* en X, con menos condiciones que las propias de conjuntos ordenados.

Definición 11.24 D es un *conjunto dirigido* si existe sobre D una relación $\leq$, verificando

(D1) para cada $d \in D$, es $d \leq d$;

(D2) si $d_1, d_2, d_3 \in D$ y $d_1 \leq d_2$ y $d_2 \leq d_3$, entonces $d_1 \leq d_3$;

(D3) si $d_1, d_2 \in D$, existe $d_3 \in D$ tal que $d_1 \leq d_3$ y $d_2 \leq d_3$.

$\leq$ se llama *dirección* sobre D y se dice también que *dirige* D. Se suele hablar del par $(D, \leq)$.

Las condiciones (D1) y (D2) son familiares para una relación de orden. Sin embargo, falta la antisimetría: una dirección no tiene porque ser un orden parcial. (D3) proporciona la orientación positiva que buscamos para D.

Ejemplos 11.25 Algunos ejemplos de direcciones son

1) todo conjunto formado por un único punto es un conjunto dirigido;

2) todo conjunto con un buen orden es un conjunto dirigido. En particular, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ con sus órdenes usuales, son conjuntos dirigidos;

3) dado (X, τ) y $x \in X$, el filtro de entornos $\mathcal{N}_x$ es un conjunto dirigido por $N_1 \leq N_2$ si y sólo si $N_2 \subset N_1$;

4) para cualquier filtro $\mathfrak{F}$ en X, $(\mathfrak{F}, \subset)$ y $(\mathfrak{F}, \supset)$ son conjuntos dirigidos.

El concepto de red, que generaliza al concepto de sucesión, puede introducirse ahora utilizando conjuntos dirigidos arbitrarios en sustitución de $\mathbb{N}$

Definición 11.26 Una *red* en X es una función $\varphi: D \longrightarrow X$, donde $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido. El punto $\varphi(d)$ se denota a veces x_d, y se habla de la red $\{\varphi(d)\}_{d \in D}$.

Definición 11.27 Una *subred* $\phi: E \longrightarrow X$ de una red $\varphi: D \longrightarrow X$, es una composición $\phi = \varphi \circ \lambda$, donde $\lambda: E \longrightarrow D$ es una aplicación cofinal (es decir, para cada $d \in D$ existe $e \in E$ tal que $\lambda(e) \leq d$), creciente y $(E, \leq_E)$ un conjunto dirigido.

Definición 11.28 Si $\varphi: D \longrightarrow X$ es una red y $f: X \longrightarrow Y$ una función, la aplicación obtenida por composición $f \circ \varphi: D \longrightarrow Y$ es una red en Y, llamada *imagen de φ por f*.

Definición 11.29 Dada $\varphi: D \longrightarrow X$ una red, los *tallos* de φ son los conjuntos definidos por $T_{d_0} = \{\varphi(d) : d \geq d_0\}$, para $d_0 \in D$.

Definición 11.30 Dada una red en (X, τ), $\varphi: D \longrightarrow X$, se dice que

(i) φ *converge* a $x \in X$, $\varphi \to x$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$ existe $d_N \in D$ tal que para $d \geq d_N$ es $\varphi(d) \in N$, es decir, $T_{d_N} \subset N$, se dice que φ *está residualmente* (o *eventualmente*) en cada entorno de x;

(ii) φ *tiene a $x \in X$ como punto de aglomeración*, $\varphi \succ x$, si para cada $N \in \mathcal{N}_x$ y cada $d \in D$ existe $d_N \geq d$ tal que $\varphi(d) \in N$, es decir, $T_{d_N} \cap N \neq \emptyset$, se dice que φ *está cofinalmente* (o *frecuentemente*) en cada entorno de x.

Observación 11.31 En la anterior definición basta con considerar bases de entornos.

Lema 11.32 *Si una red en (X, τ) converge a $x \in X$, cualquier subred converge a $x \in X$.*

Ejemplos 11.33 Algunos ejemplos de convergencia de redes son

1) sea (X, τ), $x \in X$ y $D = \mathcal{B}_x$ una base de entornos fijada en x. La relación ($U_1 \leq U_2$ si y sólo si $U_2 \subset U_1$) dirige D. Si se define $\varphi(N) = x_N \in N$, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, se obtiene una red en X, que converge a x;

2) toda sucesión es una red. Toda subsucesión de una sucesión es una subred de la sucesión dada. Sin embargo, una subred de una sucesión no tiene porque ser una subsucesión;

3) la red constante $\varphi\colon D \longrightarrow X$, $\varphi(d) = x$ converge a x en (X, τ).

Teorema 11.34 *Sea (X, τ). Una red $\varphi\colon D \longrightarrow X$ converge a $x \in X$ si y sólo si toda subred ϕ de φ tiene a x como punto de aglomeración.*

Corolario 11.35 *En (X, τ), sea $\varphi\colon D \longrightarrow X$ una red y $\phi\colon E \longrightarrow X$ una subred. Si $\phi \succ x$, es $\varphi \succ x$.*

Las redes constutuye, de hecho, el modo correcto de aproximarse a las cuestiones de convergencia en espacios topológicos

Teorema 11.36 *En (X, τ), si $A \subset X$, es $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red $\varphi\colon D \longrightarrow X$ en A, $\varphi(D) \subset A$, tal que $\varphi \to x$.*

Teorema 11.37 *Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$. f es continua en $a \in X$ si y sólo si para cada red $\varphi\colon D \longrightarrow X$ tal que $\varphi \to a$ en (X, τ_X), es $f(\varphi) \to f(a)$ en (Y, τ_Y).*

Teorema 11.38 *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ su producto. Una red $\varphi\colon D \longrightarrow \prod\limits_{i \in I} X_i$ es tal que $\varphi \to a$ en $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ si y sólo si para cada $i \in I$ es $p_i(\varphi) \to p_i(a)$ en (X_i, τ_i).*

11.2.2 Ultraredes

Definición 11.39 Una red $\varphi\colon D \longrightarrow X$ es una *ultrared o red universal*, si para cada $A \subset X$, φ está residualmente en A o en $X - A$.

Teorema 11.40 *Sea $\varphi\colon D \longrightarrow X$ una red sobre X. Son equivalentes*

(i) φ es una ultrared,

(ii) para cada $A \subset X$, φ está frecuentemente en A si y sólo si está residualmente en A.

Corolario 11.41 *Si $\varphi\colon D \longrightarrow X$ es una ultrared en (X, τ), $\varphi \succ x$ si y sólo si $\varphi \to x$.*

Ejemplo 11.42 Para cada conjunto dirigido, la aplicación constante $\varphi\colon D \longrightarrow X$, $\varphi(d) = x$ se llama *ultrared trivial*. Existen ultraredes no triviales, pero no se pueden construir explícitamente. Para probar que existen tales ultraredes se utiliza el axioma de elección; una vez vista la dualidad entre filtros y redes en 11.3, se puede usar la existencia de ultrafiltros no triviales para probarlo.

Teorema 11.43 *Se verifica*

(i) una subred de una ultrared es una ultrared;

(ii) toda red posee una subred que es universal;

(iii) si $\varphi \colon D \longrightarrow X$ es universal y $f \colon X \longrightarrow Y$ es una aplicación, $f \circ \varphi \colon D \longrightarrow Y$ es una ultrared.

Teorema 11.44 *(X, τ) es T_2 si y sólo si las redes sobre X poseen límites únicos.*

11.3 Relación entre filtros y redes

Definición 11.45 Sea $\varphi \colon D \longrightarrow X$ una red. Sea $\mathfrak{B} = \{T_d : d \in D\}$ la familia de los tallos de la red. $\mathfrak{B}$ es una base de un filtro sobre X, $\mathfrak{F}_\varphi$, llamado *filtro generado por la red φ*.

Definición 11.46 Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X. Sea $D_\mathfrak{F} = \{(x, F) : x \in F \in \mathfrak{F}\}$ que se dirige por la relación $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ si y sólo si $F_2 \subset F_1$. Entonces $\varphi_\mathfrak{F} \colon D_\mathfrak{F} \longrightarrow X$ definida por $\varphi_\mathfrak{F}(x, F) = x$ es una red en X, que se llama *red basada en $\mathfrak{F}$*.

Teorema 11.47 *En (X, τ) se verifica*

(i) $\mathfrak{F} \rightarrow x$ si y sólo si $\varphi_\mathfrak{F} \rightarrow x$;

(ii) $\varphi \rightarrow x$ si y sólo si $\mathfrak{F}_\varphi \rightarrow x$;

(iii) $\mathfrak{F} \succ x$ si y sólo si $\varphi_\mathfrak{F} \succ x$;

(iv) $\varphi \succ x$ si y sólo si $\mathfrak{F}_\varphi \succ x$.

Teorema 11.48 *Sea X un conjunto. Si ϕ es subred de φ, entonces $\mathfrak{F}_\varphi \subset \mathfrak{F}_\phi$.*

Teorema 11.49 *Sea X un conjunto. Entonces*

(i) $\mathfrak{U}$ es ultrafiltro si y sólo si $\varphi_\mathfrak{U}$ es ultrared;

(ii) φ es ultrared si y sólo si $\mathfrak{F}_\varphi$ es ultrafiltro;

(iii) si $\mathfrak{U}$ es ultrafiltro libre, entonces $\varphi_\mathfrak{U}$ es ultrared no trivial.

11.4 Problemas

1.- Dada una red φ sobre (X, τ), se definen los conjuntos siguientes

$$\lim(\varphi) = \{x \in X : \varphi \rightarrow x\} \quad \text{y} \quad \mathrm{adh}(\varphi) = \{x \in X : \varphi \succ x\}.$$

Probar las siguientes propiedades

(i) $\lim(\varphi)$ y adh(φ) son conjuntos cerrados;

(ii) $\lim(\varphi) \subset$ adh(φ);

(iii) si φ es una ultrared, se verifica $\lim(\varphi) =$ adh(φ);

(iv) si $x \in \lim(\varphi)$, entonces $\overline{\{x\}} \subset \lim(\varphi)$;

(v) si $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces $\lim_{\tau_2}(\varphi) \subset \lim_{\tau_1}(\varphi)$ y adh$_{\tau_2}(\varphi) \subset$ adh$_{\tau_1}(\varphi)$;

(vi) si ψ es subred de φ, entonces $\lim(\varphi) \subset \lim(\psi)$ y adh$(\varphi) \supset$ adh(ψ).

2.- Sea X un conjunto. Se pide

(i) probar que la unión de dos filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ sobre X, no es necesariamente un filtro. No está definido, en general, el supremo de dos filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ en X, y en caso de estarlo, se verifica $\sup\{\mathfrak{F}, \mathfrak{G}\} = \{M \cap N : M \in \mathfrak{F}, N \in \mathfrak{G}\}$;

(ii) probar que la intersección de dos filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ sobre X es un filtro: es el ínfimo de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ $\inf\{\mathfrak{F}, \mathfrak{G}\} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} = \{M \cup N : M \in \mathfrak{F}, N \in \mathfrak{G}\}$.

3.- Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en (X, τ) y $\mathfrak{B} = \{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\}$. Probar que $\mathfrak{B}$ es una base de un filtro $\overline{\mathfrak{F}}$, tal que $\overline{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{F}$.

4.- Dado un filtro $\mathfrak{F}$ sobre (X, τ), se definen los conjuntos siguientes

$$\lim(\mathfrak{F}) = \{x \in X : \mathfrak{F} \to x\} \quad \text{y} \quad \text{adh}(\mathfrak{F}) = \{x \in X : \mathfrak{F} \succ x\}.$$

Probar las siguientes propiedades

(i) adh$(\mathfrak{F}) = \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F}$;

(ii) $\lim(\mathfrak{F})$ y adh$(\mathfrak{F})$ son conjuntos cerrados;

(iii) $\lim(\mathfrak{F}) \subset$ adh$(\mathfrak{F})$;

(iv) si $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro, se verifica $\lim(\mathfrak{U}) =$ adh$(\mathfrak{U})$;

(v) si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, entonces $\lim(\mathfrak{F}) \subset \lim(\mathfrak{G})$ y adh$(\mathfrak{F}) \supset$ adh$(\mathfrak{G})$;

(vi) si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son filtros sobre X, entonces $\lim(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}) = \lim(\mathfrak{F}) \cap \lim(\mathfrak{G})$;

(vii) si $x \in \lim(\mathfrak{F})$, entonces $\overline{\{x\}} \subset \lim(\mathfrak{F})$, y en particular $\overline{\{x\}} = \lim(\mathcal{N}_x)$;

(viii) adh$(\mathfrak{F}) =$ adh$(\overline{\mathfrak{F}})$, pero en general $\lim(\mathfrak{F}) \neq \lim(\overline{\mathfrak{F}})$;

(ix) en cualquier espacio topológico es adh$(\mathfrak{F}_A) = \overline{A}$ y $\lim(\mathfrak{F}_x) =$ adh$(\mathfrak{F}_x) = \overline{\{x\}}$;

(x) si $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces $\lim_{\tau_2}(\mathfrak{F}) \subset \lim_{\tau_1}(\mathfrak{F})$ y adh$_{\tau_2}(\mathfrak{F}) \subset$ adh$_{\tau_1}(\mathfrak{F})$.

5.- Dado un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, se llama "*core*" de $\mathfrak{F}$ al conjunto core($\mathfrak{F}$) $= \bigcap\limits_{F\in\mathfrak{F}} F$. Probar

(i) $\mathfrak{F}$ es el filtro indiscreto si y sólo si core($\mathfrak{F}$) $= X$;

(ii) si $A \neq \emptyset$, entonces core($\mathfrak{F}_A$) $= A$. Pero si core($\mathfrak{F}$) $= A$, $\mathfrak{F}$ no es necesariamente el filtro principal en A;

(iii) si $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$, entonces core($\mathfrak{F}$) $\supset$ core($\mathfrak{G}$);

(iv) core($\mathfrak{F}$) $\subset$ adh($\mathfrak{F}$) $=$ core($\overline{\mathfrak{F}}$);

(v) en (X,τ), $y \in$ core($\mathcal{N}_x$) si y sólo si $x \in \overline{\{y\}}$.

6.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$A_{2n+1} = \{0\} \times (-\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n}), \quad \text{y}$$

$$A_{2n} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4n^2}\} \cup \{(-1, 1 + \frac{1}{2n}) \times \{0\}\}.$$

Sea $\mathfrak{B} = \{A_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{A_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Probar

(i) $\mathfrak{B}$ es base de un filtro $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{R}^2$;

(ii) estudiar los puntos de aglomeración y los puntos límite de $\mathfrak{F}$ en los espacios $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$ y $(\mathbb{R}^2, \tau_{us} \times \tau_{dis})$.

7.- Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (X,τ), A el conjunto de los puntos de aglomeración de dicha sucesión y $A_m = \{x_n : n \geq m\}$. Probar que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = A \subset \overline{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$.

8.- Sea $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ y $D = \{(0,a) : a > 0\}$, con la relación

$$(0,a) \leq (0,b) \text{ si y sólo si } (0,a) \subset (0,b).$$

Probar que $(D, \leq)$ es un sistema dirigido y estudiar si la red $\varphi\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por la relación $\varphi((0,a)) = \frac{a}{2}$, posee límites.

9.- Sea D la familia de los subconjuntos finitos de $[0,1]$ que contienen los puntos 0 y 1, es decir $P \in D$ es del tipo $P = \{0 = x_0, x_1, \cdots, x_n = 1\}$. Se define la relación binaria

$$P \leq Q \text{ si y sólo si } P \subset Q.$$

Probar que $(D, \leq)$ es un sistema dirigido. Estudiar los límites de la red basada en dicho conjunto $\varphi(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 (x_i - x_{i-1})$, para cada $P \in D$.

10.- Sea $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$. Se pide

(i) probar que $3 \in \overline{[0,1]}$ y dar una red que converja a 3;

(ii) sea la red $\varphi: D \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $D = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A$ y $X - A$ contable$\}$ está dirigido por la relación $A \leq B$ si y sólo si $B \subset A$ y definida por: $\varphi(A) = x_A \in A$. Probar que $(D, \leq)$ es un sistema dirigido y que φ converge a 0.

11.- Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre X y $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación. Con la notaciones obvias, probar que $\mathfrak{F}_{\varphi_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}_{f(\varphi)} = f(\mathfrak{F}_{\varphi})$.

12.- En $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, se consideran $\mathfrak{F}_1 = \{A \subseteq X : \sqrt{2} \in A\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{A \subseteq X : \sqrt{2}, \sqrt{3} \in A\}$ y $\mathfrak{B} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Probar

(i) $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ son filtros. $\mathfrak{B}$ es base de un filtro, $\mathfrak{F}_3$, pero no un filtro;

(ii) $\mathfrak{F}_1$ es un ultrafiltro, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. $\mathfrak{F}_1$ es convergente y $\mathfrak{F}_2$ no;

(iii) $\mathfrak{F}_3$ no es un ultrafiltro, y no converge;

(iv) si $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro, con $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{F}_3$, entonces $\mathfrak{U}$ no converge.

13.- Probar que toda aplicación sobreyectiva $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, con fibras finitas (es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(n)$ es finito), transforma el filtro de Fréchet en sí mismo.

14.- Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto X. Se llama *filtro elemental asociado a la sucesión*, $\mathfrak{F}_{\{x_n\}}$, al que tiene por base la familia de conjuntos $\mathfrak{B}_{\{x_n\}} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $S_n = \{x_p : p \geq n\}$. Probar que si X es infinito, entonces el filtro cofinito es la intersección de los filtros elementales asociados a sucesiones infinitas de X, cuyos términos son todos distintos.

15.- Probar que la intersección de todos los elementos de un ultrafiltro $\mathfrak{U}$ contiene, a lo sumo, un punto. Además, en caso de que contenga un punto, $\mathfrak{U}$ es el ultrafiltro de los superconjuntos de dicho punto, es decir, el filtro principal en dicho punto.

16.- Describir los filtros y ultrafiltros sobre un conjunto finito. ¿Cuántos filtros y ultrafiltros hay en este caso?

17.- Probar que si $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro más fino que la intersección de un número finito de filtros $\mathfrak{F}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{F}_n$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathfrak{F}_i \subset \mathfrak{U}$.

18.- Sea $\{\tau_i : i \in I\}$ una familia de topologías sobre un conjunto X y $\tau = \sup\{\tau_i : i \in I\}$. Se pide probar

(i) si φ es una red en X, entonces $\varphi \to x$ en (X, τ) si y sólo si $\varphi \to x$ en (X, τ_i), para cada $i \in I$;

(ii) si $\mathfrak{F}$ es un filtro en X, entonces $\mathfrak{F} \to x$ en (X, τ) si y sólo si $\mathfrak{F} \to x$ en (X, τ_i), para cada $i \in I$.

19.- Dado un conjunto X, probar

(i) si $\mathfrak{F}$ es un filtro libre, todo filtro más fino que él es también libre. Si $\mathfrak{F}$ es fijo, todo filtro menos fino es también fijo;

(ii) si X es infinito, $\mathfrak{F}$ es libre si y sólo si contiene al filtro cofinito. Por lo tanto, el filtro cofinito es el filtro libre menos fino sobre X;

(iii) $\mathfrak{F}$ es libre si y sólo si todo ultrafiltro que lo contiene es libre;

(iv) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$ es libre si y sólo si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son libres;

(v) en (X, τ), si adh$(\mathfrak{F}) = \emptyset$, entonces que $\mathfrak{F}$ es libre. El recíproco no es cierto.

20.- En la recta real con la topología enlazada, probar que el filtro de Fréchet converge a 0.

21.- Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Probar

(i) si $\mathfrak{F}$ es un filtro sobre X, entonces $f^{-1}(f(\mathfrak{F})) \subset \mathfrak{F}$ y se da la igualdad si f es inyectiva;

(ii) si $\mathfrak{G}$ es un filtro sobre Y y $f^{-1}(\mathfrak{G})$ existe, entonces $\mathfrak{G} \subset f(f^{-1}(\mathfrak{G}))$ y se da la igualdad si f es sobreyectiva.

22.- Sean $\mathfrak{U}$ y $\{\mathfrak{U}_i : i \in I\}$ ultrafiltros sobre X. Probar que $\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{U}_i \subset \mathfrak{U}$ si y sólo si para cada $U \in \mathfrak{U}$, existe $i \in I$, tal que $U \in \mathfrak{U}_i$.

23.- Sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro libre sobre X. Probar que para cada $U \in \mathfrak{U}$, existe un ultrafiltro $\mathfrak{W}_U$ distinto de $\mathfrak{U}$, tal que $U \in \mathfrak{W}_U$.

Tema XII

Espacios normales. Teoremas de extensión

12.1 El problema de extensión de aplicaciones

Definición 12.1 Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos, $A \subset X$ y $f: (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua. Sea $i_A: (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau_X)$ la inclusión natural. Una *extensión de* f es una función continua $g: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ tal que $g \circ i_A = f$.

El problema de extensión de aplicaciones continuas es un problema complicado y que no siempre tiene solución. Depende de las características del subespacio en cuestión y de las propiedades de (X, τ_X). Aquí se da un tipo de espacios, los espacios *normales*, en el cual el problema de extensión de aplicaciones tiene solución.

12.2 Retractos y retracciones

Aunque esta noción se ha definido anteriormente, la damos de nuevo, desde otro punto de vista

Definición 12.2 Sean (X, τ_X), $A \subset X$ y la identidad $1_A: (A, \tau_A) \longrightarrow (A, \tau_A)$. Una extensión $r: (X, \tau_X) \longrightarrow (A, \tau_A)$ de 1_A (si existe), se llama *retracción* y se dice también que A es un *retracto* de X.

Ejemplo 12.3 $\{0\}$ es un retracto de $([0,1], \tau_{us})$, pues la aplicación $r: ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\{0\}, \tau_{us})$ dada por $r(t) = 0$ es una retracción.

Lema 12.4 *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. $A \subset X$ es un retracto de X si y sólo si para cada espacio (Y, τ_Y) y aplicación continua $f: (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, f se extiende a X.*

12.3 Espacios normales. Caracterización

Definición 12.5 (X, τ_X) se dice *normal*, si dados A y B cerrados disjuntos, existen U y V abiertos disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Ejemplos 12.6 Algunos ejemplos de espacios normales son

1) los espacios discretos, indiscretos y metrizables son normales;

2) todo espacio topológico que no posea cerrados disjuntos es normal, por ejemplo, si $A \subset X$ es propio, el espacio A-exclusión (X, τ^A) es normal.

Proposición 12.7 *En (X, τ) son equivalentes*

(i) (X, τ) es normal;

(ii) dado $F \in \mathcal{C}$ no vacío y $U \in \tau$ tal que $F \subset U$, existe $V \in \tau$ tal que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$;

(iii) dados $F, G \in \mathcal{C}$ disjuntos, existen $U, V \in \tau$ tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, $F \subset U$ y $G \subset V$;

(iv) dados $F, G \in \mathcal{C}$ disjuntos, existe $U \in \tau$ tal que $F \subset U$ y $G \cap \overline{U} = \emptyset$.

Proposición 12.8 *Se verifica que*

(i) la normalidad es débilmente hereditaria;

(ii) la normalidad se preserva bajo aplicaciones continuas y cerradas.

Corolario 12.9 *La normalidad es una propiedad topológica.*

El siguiente resultado se utiliza para construir ejemplos de espacios no normales

Lema 12.10 (de Jones) *En (X, τ), supongamos que*

(1) existe $D \subset X$ denso;

(2) existe $S \in \mathcal{C}$, tal que la topología inducida τ_S es la topología discreta y $Card(S) \leq 2^{Card(D)}$.

Entonces, (X, τ) no es normal.

Contraejemplos 12.11 Algunos ejemplos de espacios no normales:

1) el plano de Moore (Γ, τ_M) no es normal, pues tomando $D = \{(x, y) \in \Gamma : x, y \in \mathbb{Q}\}$ y $S = \mathbb{R} \times \{0\}$ estamos en las condiciones del lema de Jones;

2) la normalidad no es productiva: el plano de Sorgenfrey $(\mathbb{R}^2, \tau_{Sor} \times \tau_{Sor})$ no es normal; tomando S una recta cualquiera en $\mathbb{R}^2$ y $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, estamos en las condiciones del lema de Jones;

3) la normalidad no es hereditaria: el plano de Moore (Γ, τ_M) no es normal, pero puede probarse (ver, por ejemplo [Wi]) que puede embeberse en un determinado cubo (producto de espacios métricos) que es un espacio normal;

4) la normalidad no se preserva bajo aplicaciones continuas, ni siquiera continuas y abiertas: sea $(X, \tau_X) = (\mathbb{R} \times \{0,1\}, \tau_{us})$ que es normal y sea (Y, τ_Y) definido como sigue, $Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y τ_Y generada por la base

$$\beta_Y = \{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,0) \cup \{\infty\} \cup (0,b) : a < 0 < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ definida por $f(x,t) = \begin{cases} \infty & \text{si } (x,t) = (0,1) \\ x & \text{en otro caso} \end{cases}$. Entonces, f es continua, abierta y sobreyectiva y (Y, τ_Y) no es normal;

5) la normalidad no pasa al cociente: sea (X, τ_X) la unión disjunta de dos rectas reales, que es normal. Sea (Y, τ_Y) el cociente obtenido al identificar $(x,0) \simeq (x,1)$, si $x \neq 0$. (Y, τ_Y) no es normal.

12.4 Lema de Urysohn

Las propiedades de separación garantizan la existencia de una cantidad suficiente de abiertos, para los propósitos que se precise. Uno de ellos es asegurar la existencia de funciones continuas. Un teorema fundamental en esta dirección es el *lema de Urysohn*, cuya prueba es inductiva y usa una ingeniosa idea.

Definición 12.12 Un *número diádico* es un número real que puede expresarse como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es una potencia de 2.

Sea $\mathfrak{D} = \left\{ \frac{m}{2^n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \{0,1,2,\dots,2^n\} \right\}$ la familia de los números diádicos en $[0,1]$. $\mathfrak{D}$ es una familia contable, pues $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

La prueba del lema de Urysohn es inductiva, por lo que precisamos dar un orden específico sobre $\mathfrak{D} - \{0\}$: para cada $n \in \mathbb{N}$, se agrupan los elementos de $\mathfrak{D}$ con 2^n en el denominador, y en cada uno de estos grupos se arreglan los números en el orden indicado por los numeradores $1, 3, 5, \dots, 2^n - 1$. De este modo, el inmediato sucesor de $\frac{2^n - 1}{2^n}$ es $\frac{1}{2^{n+1}}$. Si se denotan los elementos ordenados de este modo por $d_1, d_2, \dots$, será $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{1}{4}$, $d_3 = \frac{3}{4}$, $d_4 = \frac{1}{8}$, $d_5 = \frac{3}{8}$, $d_6 = \frac{5}{8}$, $d_7 = \frac{7}{8}$, $d_8 = \frac{1}{16}$, etc.

Lema 12.13 *El conjunto $\mathfrak{D}$ es denso en* $([0,1], \tau_{us})$.

Lema 12.14 *Sea (X, τ) y D denso en $([0,1], \tau_{us})$. Supongamos que para cada $t \in D$, existe $U_t \in \tau$ tal que* *(i) si $s < t$, entonces $\overline{U_s} \subset U_t$;*

(ii) $X = \bigcup_{t \in D} U_t$.

Entonces, la aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_{us})$ definida por $f(x) = \inf\{t \in D : x \in U_t\}$ está bien definida y es continua.

La demostración del siguiente resultado sigue una ingeniosa idea: se construye una familia de abiertos $\{U_t : t \in \mathfrak{D}\}$, verificando las condiciones del lema 12.14, lo que permite construir una determinada función continua

Teorema 12.15 (Lema de Urysohn) *(X, τ) es normal si y sólo si para cada par de cerrados disjuntos F y G, existe una función continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_{us})$, tal que $f(F) = 0$ y $f(G) = 1$. f se llama* función de Urysohn *para F y G.*

Observación 12.16 En el anterior teorema puede reemplazarse $([0, 1], \tau_{us})$ por los espacios $([a, b], \tau_{us})$ o $(\mathbb{R}, \tau_{us})$.

12.5 Teorema de extensión de Tietze

Lema 12.17 *Sea (X, τ) y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ una función continua. Supongamos que existe una serie convergente de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, tal que para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, es $|f_n(x)| \leq M_n$. Entonces, para cada $x \in X$, la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge a un número $f(x)$, y la función así definida $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es continua.*

Teorema 12.18 (de extensión de Tietze) *(X, τ) es normal si y sólo si para cada $A \in \mathcal{C}$ y toda función continua $f\colon (A, \tau_A) \longrightarrow ([-1, 1], \tau_{us})$, existe $F\colon (X, \tau) \longrightarrow ([-1, 1], \tau_{us})$ una extensión continua.*

Teorema 12.19 (de extensión de Tietze, segunda versión) *(X, τ) es normal si y sólo si para cada $A \in \mathcal{C}$ y toda función continua $f\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$, existe una extensión continua $F\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$.*

Observación 12.20 El teorema de extensión de Tietze sigue siendo válido si en vez de $[-1, 1]$ se consideran espacios producto $([a, b]^n, \tau_{us})$ o $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$.

12.6 Problemas

1.- Un espacio (X,τ) se dice *regular* si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes siguientes

(a) *axioma de regularidad*: dado $x \in X$ y $F \in \mathcal{C}$, $x \notin F$, existen abiertos que separan x y F;

(b) dado $x \in X$ y $N \in \mathcal{N}_x$, existe $M \in \mathcal{N}_x$ tal que $\overline{M} \subset N$;

(c) para cada x, $\overline{\mathcal{N}_x}$ (ver problema 3 en11.4) es una base de entornos en x;

(d) cada punto de X posee una base local formada por entornos abiertos;

(e) para cada x, $\overline{\mathcal{N}_x}$ converge a x;

(f) para cada filtro en X, $\mathfrak{F}$, es $\lim(\mathfrak{F}) = \lim(\overline{\mathfrak{F}})$.

Se pide

(i) probar que la regularidad es una propiedad topológica, productiva y hereditaria, pero no pasa al cociente;

(ii) (X,τ) se dice *simétrico* si $x \in \overline{\{y\}}$ implica que $y \in \overline{\{x\}}$. Demostrar que cualquier espacio regular es simétrico.

2.- Un espacio topológico (X,τ) es *completamente regular*, si para cada $F \in \mathcal{C}$ y $x \notin F$, existe una función continua $f\colon (X,\tau) \longrightarrow ([0,1],\tau_{us})$, tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$. Probar

(i) todo espacio completamente regular es regular,

(ii) todo espacio normal es completamente regular; en particular, los espacios métricos son completamente regulares;

(iii) todo espacio completamente regular, es un subespacio de algún espacio normal;

(iv) la regularidad completa es una propiedad topológica, hereditaria y productiva, pero no pasa al cociente;

(v) (X,τ) es completamente regular si y sólo si posee la topología inicial inducida por $C^*(X)$ (ver el problema 1 en 6.4).

3.- Sea (X,τ) un espacio normal y $\simeq$ la relación de equivalencia: $x \simeq y$ si y sólo si para toda aplicación continua $f\colon (X,\tau) \longrightarrow ([0,1],\tau_{us})$, se tiene $f(x) = f(y)$. Probar que $(X/\simeq,\tau_{\simeq})$ es T_2 y normal.

4.- Sea (X,τ) un espacio topológico, $\{A_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de X y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones continuas $f_i\colon (X,\tau)\longrightarrow([0,1],\tau_{us})$. Se dice que la familia es ***una partición de la unidad subordinada*** a $\{A_i\}_{i\in I}$, si

(1) para cada $i\in I$, el ***soporte*** de f_i, $sop(f_i)=\overline{\{x\in X: f_i(x)\neq 0\}}$, verifica la inclusión $sop(f_i)\subset A_i$ y la familia $\{sop(f_i)\}_{i\in I}$ es localmente finita;

(2) para cada $x\in X$, es $\sum\limits_{i\in I} f_i(x)=1$.

Sea (X,τ) un espacio normal. Con las notaciones anteriores, se pide

(i) probar que la aplicación $f\colon (X,\tau)\longrightarrow([0,1],\tau_{us})$ es continua;

(ii) existe una partición de la unidad subordinada a cualquier cubrimiento abierto localmente finito de X.

5.- Probar que si (X,τ) es normal y T_2 y A es un retracto de X, entonces es $A\in\mathcal{C}$.

6.- Probar que un retracto de un espacio normal es normal. Utilizar esta propiedad para concluir que si el producto de una familia arbitraria de espacios topológicos es un espacio normal, entonces cada espacio factor lo es.

7.- Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea (X_n,τ_n) un espacio normal, tal que (X_n,τ_n) es un subespacio de (X_{n+1},τ_{n+1}). Sea $X=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ y τ la topología inducida por esta familia de espacios topológicos. Probar que (X,τ) es normal.

8.- Sea (X,τ) un espacio T_1. Supongamos que en este espacio, para cada $F\in\mathcal{C}$ y cada $W\in\tau$, tal que $F\subset W$, existe una sucesión de abiertos $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $F\subset\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$ y $\overline{W_n}\subset W$. Probar que (X,τ) es normal.

9.- Sea (X,τ) un espacio normal, $A\in\mathcal{C}$ y $f\colon (A,\tau_A)\longrightarrow(\mathbb{S}^n,\tau_{us})$ una función continua no sobreyectiva. Demostrar que f se extiende a X.

10.- Sea $f\colon (X,\tau_f)\longrightarrow(Y,\tau)$ donde τ_f es la topología inicial para f. Si (X,τ_f) es normal, probar que (Y,τ) es normal.

11.- Sea $(X=([-1,1]\times[-1,1])-\{(0,0)\},\tau_{us})$. Sea el subespacio

$$Y=\{(x,y)\in X: x=-1 \text{ ó } x=1\}\cup\{(x,y)\in X: y=-1 \text{ ó } y=1\}.$$

Demostrar que Y es un retracto de (X,τ_{us}). Sean $Z=\{(x,y)\in X: |x|\leq\frac{1}{2}, |y|\leq\frac{1}{2}\}$ y $f\colon (Y\cup Z,\tau_{us})\longrightarrow(\mathbb{R},\tau_{us})$ definida por $f(x,y)=\begin{cases} x & \text{si } (x,y)\in Y\\ y & \text{si } (x,y)\in Z\end{cases}$. ¿Existe una extensión continua de f a X?.

12.- Un espacio normal y T_1 se suele denotar por T_4. Un espacio T_4, (Y, τ_Y), es un *retracto absoluto*, si para cada espacio T_4 (X, τ_X) y cada $A \in \mathcal{C}_X$ toda función continua $f : (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ tiene una extensión continua $F : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$. Se pide

(i) probar que ningún espacio discreto (con más de un punto) es un retracto absoluto;

(ii) sea $\{(X_i = [0,1], \tau_{us})\}_{i \in I}$. Probar que el espacio producto $(\prod\limits_{i \in I} X_i, \tau_{Tyc})$ es un retracto absoluto;

(iii) probar que la propiedad de ser un retracto absoluto es una propiedad topológica;

(iv) si (Y, τ_Y) es un retracto absoluto y es homeomorfo a un subespacio cerrado (A, τ_A) de un espacio T_4 (X, τ_X), entonces A es un retracto de (X, τ_X).

13.- Sea (X, τ) un espacio normal y T_1, con más de un punto. Probar que existe una función $f : (X, \tau) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})$ continua y no constante.

14.- Sea (X, τ) y $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Se pide

(i) si los conjuntos U_i son abiertos dos a dos disjuntos, entonces si cada (U_i, τ_{U_i}) es normal, (X, τ) es también normal;

(ii) si los conjuntos U_i son abiertos y cerrados a la vez, entonces si cada (U_i, τ_{U_i}) es normal, (X, τ) es también normal.

15.- Probar que si (X, τ) es un espacio normal que posee un subespacio no normal, entonces (X, τ) no es metrizable.

16.- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios normales, $A \in \mathcal{C}$ y $f : (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua. Probar que el espacio de adjunción $(X \cup_f Y, \tau_f)$ es normal.

17.- Sean (X, τ) normal y $A \in \mathcal{C}$. Probar que el espacio cociente $(X/A, \tau_A)$ es normal.

18.- Sean (X, τ) un espacio topológico y $\simeq$ la relación de equivalencia sobre X dada por:

$$x \simeq y \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}.$$

Probar que el espacio cociente $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es normal si y sólo si (X, τ) lo es.

19.- Probar el *lema de Tychonoff*: un espacio (X, τ) regular y de Lindelöf es normal. Por lo tanto, un espacio (X, τ) regular y C_{II} es normal.

20.- En (X,τ), un cubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ se llama

(1) *contráctil*, si existe un cubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_i : i \in I\}$, tal que para cada $i \in I$ es $\overline{V_i} \subset U_i$. $\mathcal{V}$ se llama una *contracción* de $\mathcal{U}$;

(2) *punto-finito* si cada $x \in X$ pertenece sólo a una cantidad finita de conjuntos de $\mathcal{U}$.

Probar que (X,τ) es normal si y sólo todo recubrimiento punto-finito y abierto es contráctil.

Tema XIII

Espacios compactos

La compacidad es una propiedad que proporciona a los espacios topológicos que la satisfacen una estructura similar a la que poseen los conjuntos cerrados y acotados en espacios euclídeos. Aquí radica la dificultad: los conjuntos cerrados y acotados de un espacio euclídeo se pueden caracterizar a través del *teorema de Bolzano-Weierstrass* (establecido en términos de conjuntos o de sucesiones), así como el *teorema de Heine-Borel* o el *teorema de Cantor* sobre conjuntos cerrados encajados. Existen, por lo tanto, un gran número de caminos para introducir la noción de compacidad en espacios topológicos. Estas distintas formulaciones tienen sentido en espacios generales, mientras que el concepto inicial de *cerrado y acotado* no lo posee. Sin embargo, estas diferentes nociones de compacidad no son equivalentes en espacios generales. Esto da lugar, en algunas ocasiones, a confusión o ambigüedad a la hora de hablar de compacidad.

Fréchet, en 1906, fue el primero en usar el término compacto: *"A es compacto, si y sólo si cada subconjunto infinito de A posee un punto límite (que está necesariamente en A)"*. Esto se modificó posteriormente por la formulación: *"cada subconjunto infinito de A posee un punto límite en A"*.

Riesz sugirió en 1908 el tratamiento de la compacidad en relación con el comportamiento de familias de cerrados poseyendo la *propiedad de intersección finita*.

En 1924, Alexandroff y Urysohn definieron la *bicompacidad*: *"A es bicompacto, si cada cubrimiento abierto del conjunto tiene un subrecubrimiento finito"*, y establecieron muchas de sus propiedades. Tras probar Tychonoff, en 1936, que el producto arbitrario de espacios bicompactos es bicompacto, la bicompacidad apareció como la definición más apropiada de compacidad en espacios topológicos.

Esto llevó a Bourbaki, en 1940, a eliminar el prefijo *bi* y a dar una definición de compacidad equivalente a la propiedad de Heine-Borel. Esta noción fue adoptada posteriormente por muchos autores. Además, y parece que sin ninguna razón suficiente, Bourbaki requirió también que la compacidad incluyera el axioma T_2; sin embargo, muchos autores no han seguido esta filosofía.

La noción de compacidad ha sido sin duda el concepto fundamental y el motivo estimulante para el desarrollo del Análisis Funcional.

13.1 Espacios y subconjuntos compactos

Cuando un espacio topológico posee una propiedad local, es natural considerar la familia de los entornos abiertos donde se satisface dicha propiedad. Esta familia constituye un recubrimiento del espacio, y en el estudio de la propiedad dada es, sin duda, de gran ayuda saber si este recubrimiento puede ser reducido a uno finito.

La compacidad de un espacio proporciona siempre un recubrimiento finito de cualquier recubrimiento abierto del espacio, y ello permite, bajo ciertas hipótesis, poder pasar de lo local a lo global, es decir, poder obtener una propiedad del espacio como consecuencia de resultados locales en un número finito de puntos.

Definición 13.1 Un espacio (X, τ) es *compacto* si cada cubrimiento por abiertos de X, posee un subrecubrimiento finito. Un subconjunto $A \subset X$ se dice *compacto*, si (A, τ_A) lo es como espacio topológico.

Observaciones 13.2 Con respecto a la compacidad, se verifica

(i) los conjuntos finitos son compactos en cualquier espacio topológico;

(ii) la compacidad es una propiedad absoluta, en el sentido de que, para ver si $K \subset X$ es compacto, basta con estudiar los cubrimientos de K por abiertos de (X, τ);

(iii) en la definición de compacidad, pueden reemplazarse los abiertos por abiertos básicos e incluso por subbásicos (*teorema de la subbase de Alexander*, problema 1 en 13.5);

(iv) si A es compacto en (X, τ) y $\tau' \subset \tau$, entonces A es compacto en (X, τ');

(v) la unión finita de compactos es compacta, no sucede lo mismo con al intersección;

(vi) todo espacio compacto es de Lindelöf.

Ejemplos 13.3 Algunos ejemplos de espacios compactos son

1) en (X, τ_{ind}), todo subconjunto es compacto;

2) en (X, τ_{dis}), los únicos compactos son los conjuntos finitos;

3) en (X, τ_A), B es compacto si y sólo si $B - A$ es finito;

4) en (X, τ^A), si $B \cup A \neq \emptyset$, B es compacto y en caso contrario, es compacto si y sólo si es finito;

5) en (X, τ_{cof}), todo subconjunto es compacto;

6) en (X, τ_{coc}), los únicos compactos son los conjuntos finitos;

7) en $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$, A es compacto si y sólo si está acotado inferiormente e $\inf(A) \in A$;

8) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, A es compacto si y sólo si A es acotado, $A \in \mathcal{C}_{sca}$ y $A \cap \mathbb{I}$ es finito.

Definición 13.4 Una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{F}$, tiene la *propiedad de intersección finita*, si la intersección de cualquier subcolección finita de elementos de $\mathcal{F}$ es no vacía.

Teorema 13.5 *En (X, τ) son equivalentes*

(i) (X, τ) es compacto;

(ii) cualquier familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ con la propiedad de intersección finita, verifica $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$;

(iii) todo filtro en X tiene un punto de aglomeración;

(iv) toda red en X tiene un punto de aglomeración;

(v) toda ultrared en X converge;

(vi) todo ultrafiltro en X converge.

13.2 Propiedades de la compacidad

Proposición 13.6 *La compacidad es débilmente hereditaria.*

Contraejemplo 13.7 La compacidad no es hereditaria: $([0,1], \tau_{us})$ es un espacio compacto, pero $((0,1), \tau_{us})$ no lo es.

Proposición 13.8 *La imagen continua de un compacto es compacta.*

Observación 13.9 Como se preserva bajo aplicaciones continuas, la compacidad es una propiedad divisible y productiva. Sin embargo, no es sumable.

Corolario 13.10 *La compacidad es una propiedad topológica.*

13.3 Compacidad en espacios de Hausdorff

Lema 13.11 *Sea (X, τ) compacto y T_2, $A \subset X$ $x \notin A$. Entonces, existen $U, V \in \tau$ disjuntos, tales que $x \in U$ y $A \subset V$.*

Proposición 13.12 *En un espacio (X, τ) compacto y T_2, $A \subset X$ es compacto si y sólo si $A \in \mathcal{C}$.*

Los compactos en espacios T_2 pueden pensarse como una generalización de los puntos

Proposición 13.13 *Si A y B son compactos disjuntos en (X,τ) T_2, existen abiertos disjuntos U y V, tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Corolario 13.14 *Si (X,τ) es T_2 y compacto, entonces es T_4 (ver problema 12 en 12.6).*

Proposición 13.15 *Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ continua. Si (X,τ_X) es compacto y (Y,τ_Y) es T_2, entonces f es cerrada.*

Corolario 13.16 *Si $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ es continua y biyectiva, (X,τ_X) es compacto e (Y,τ_Y) es T_2, entonces f es un homeomorfismo.*

13.4 Teorema de Tychonoff

Teorema 13.17 (de Tychonoff) *Un producto de espacios es compacto si y sólo si cada espacio factor lo es.*

13.5 Problemas

1.- Probar el *teorema de la subbase de Alexander*: sea (X,τ) un espacio topológico y σ una subbase de τ. (X,τ) es compacto si y sólo si para todo cubrimiento por abiertos subbásicos, existe un subrecubrimiento finito.

2.- Sea (X,τ) un espacio compacto y $U \in \tau$. Sea $\{F_i : i \in I\}$ una familia de cerrados, tal que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \subset U$. Probar que existe J finito $\subset I$, tal que $\bigcap\limits_{i\in J} F_i \subset U$.

3.- Un espacio topológico (X,τ) posee la *propiedad de Bolzano-Weierstrass*, si todo subconjunto infinito en X posee un punto de acumulación. Se pide

(i) probar que si (X,τ) es compacto, posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass;

(ii) si (X,τ) es C_{II} y T_1, probar que son equivalentes

(1) (X,τ) es compacto,

(2) (X,τ) posee la propiedad de Bolzano-Weierstrass,

(3) toda sucesión en (X,τ) posee una subsucesión convergente, es decir, el espacio es *secuencialmente compacto*.

4.- Probar que si la sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a x_0 en (X, τ) y $A = Rg\{x_n\}$, entonces $A \cup \{x_0\}$ es un conjunto compacto.

5.- Sea (X, τ) un espacio C_I, en el que todo compacto es cerrado. Probar que (X, τ) es T_2.

6.- Sea (X, τ) un espacio compacto y T_2. Demostrar que τ es minimal (respectivamente, maximal) en el conjunto ordenado de las topologías T_2 (respectivamente, de las topologías compactas) sobre X.

7.- Se dice que (X, τ) es KC, si todo compacto en X es cerrado. Si (X, τ) es KC, probar

(i) todo conjunto finito es cerrado;

(ii) la intersección arbitraria de conjuntos compactos es compacta;

(iii) las sucesiones poseen límites únicos.

Si (X, τ) es compacto, probar que es maximal-compacto si y sólo si es KC.

8.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar

(i) la unión de finita de compactos en X es un conjunto compacto;

(ii) si (X, τ) es T_2, la intersección arbitraria de compactos es un conjunto compacto;

(iii) si (X, τ) es T_2 y A es compacto, entonces A^d y $\overline{A}$ son compactos.

9.- Sea (X, τ) un espacio compacto y T_2 y $f : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ una aplicación continua. Demostrar que existe $F \in \mathcal{C}$ no vacío, tal que $f(F) = F$.

10.- En (X, τ), sea $\beta_c = \{\emptyset\} \cup \{A \in \tau : X - A$ compacto en $(X, \tau)\}$. Demostrar que β_c es base de una topología τ_c sobre X, tal que $\tau_c \subset \tau$ y (X, τ_c) es compacto.

11.- Sea (X, τ) un espacio compacto y $\mathcal{H} \subset C(X)$, tal que

(i) para $f, g \in \mathcal{H}$, es $f.g \in \mathcal{H}$ y

(ii) para cada $x \in X$, existen $f \in \mathcal{H}$ y $U_x \in \mathcal{N}_x$, tales que $f(z) = 0$ para $z \in U_x$.

Probar que la función idénticamente nula es un elemento de $\mathcal{H}$.

12.- *Teorema de Wallace*: sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios. Para cada $i \in I$, sea A_i un compacto en (X_i, τ_i). Sea $W \in \tau_{Tyc}$, tal que $\prod\limits_{i \in I} A_i \subset W$. Probar que para cada $i \in I$, existe $U_i \in \tau_i$ (donde $U_i \neq X_i$ sólo para una cantidad finita de índices), de modo que $\prod\limits_{i \in I} A_i \subset \prod\limits_{i \in I} U_i \subset W$.

13.- Sea (X, τ_X) un espacio compacto y $p: (X \times Y, \tau_X \times \tau_Y) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ la *proyección paralela al factor compacto* X. Probar que p es cerrada.

14.- Sean (X, τ_X) T_2 e (Y, τ_Y) compacto y T_2. Probar que $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua si y sólo si su grafo G_f es cerrado en $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$.

15.- Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Probar que (X, τ_{ord}) es compacto si y sólo si todo subconjunto no vacío posee supremo e ínfimo.

16.- Una aplicación $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ se llama *perfecta*, si es sobreyectiva, continua y cerrada, tal que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es compacto. Si f es perfecta, probar

(i) si (X, τ_X) es T_2 (respectivamente, C_{II}), entonces (Y, τ_Y) es T_2 (respectivamente, C_{II});

(ii) si (Y, τ_Y) es compacto, entonces (X, τ_X) es compacto,

(iii) para cada K compacto en (Y, τ_Y), $f^{-1}(K)$ es compacto en (X, τ_X), es decir, f es *propia*.

17.- Sea (X, τ_X) compacto y $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Probar que el grafo de f es compacto en $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$.

18.- *Teorema de Alexandroff*: sea (X, τ) un espacio compacto y T_2 y $\simeq$ una relación de equivalencia sobre X, tal que la aplicación cociente $p: (X, \tau) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_\simeq)$ es cerrada. Se pide

(i) probar que existe un único (salvo homeomorfismos) espacio T_2 (Y, τ_Y) y una función $f: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y sobreyectiva, tal que $\simeq = R(f)$ (ver problema 3 en 10.5). Además, (Y, τ_Y) es compacto;

(ii) recíprocamente, para cada función continua $f: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ de un espacio compacto y T_2 (X, τ) sobre un espacio T_2 (Y, τ_Y), la proyección canónica asociada a la relación de equivalencia $R(f)$ es cerrada.

19.- Sea (X, τ_X) T_2 y C_I y $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$. Probar que f es continua si y sólo si para cada K compacto en X, la restricción $f|_K$ es continua.

20.- Probar los espacios proyectivo real $(\mathbb{RP}^n, \tau_{us})$ y proyectivo complejo $(\mathbb{CP}^n, \tau_{us})$ son compactos.

21.- Caracterizar los conjuntos compactos de $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$.

22.- En $(\mathbb{R} \times \{a, b\}, \tau_{us} \times \tau_{ind})$, demostrar que los conjuntos $A = ([0, 1) \times \{a\}) \cup ([1, 2] \times \{b\})$ y $B = ([0, 1] \times \{a\}) \cup ((1, 2] \times \{b\})$, son compactos, pero que $A \cap B$ no lo es.

23.- Sea $\{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto localmente finito de (X, τ). Probar que si $A \subset X$ es compacto, existe un entorno U de A que corta, a lo sumo, a un número finito de conjuntos U_i.

24.- Sea K un conjunto compacto en un espacio (X, τ) completamente regular, y sea U un entorno de K en (X, τ). Probar que existe una aplicación continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_{us})$, tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ 1 & \text{si } x \in X - U \end{cases}$.

25.- Probar que, si un número infinito de espacios coordenados de un producto topológico (X, τ_{Tyc}) son no compactos, entonces cualquier compacto $K \subset X$ tiene interior vacío.

26.- Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre un espacio compacto (X, τ). Probar

(i) si $U \in \tau$ y adh$(\mathfrak{F}) \subset U$, entonces $U \in \mathfrak{F}$;

(ii) si adh$(\mathfrak{F}) = \{x\}$, entonces $\mathfrak{F}$ converge a x.

27.- Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios T_2, $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de compactos. Demostrar que $f(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$.

28.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua, sobreyectiva y cerrada. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes

i) $f^{-1}(y)$ compacto, para todo $y \in Y$;

ii) si $\mathfrak{F}$ es un filtro en X y $f(\mathfrak{F}) \succ y$, entonces existe $x \in f^{-1}(y)$ tal que $\mathfrak{F} \succ x$.

29.- Sea (X, τ) compacto, $\simeq$ una relación de equivalencia sobre X y $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_{\simeq})$ la aplicación cociente. Probar que $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es T_2 si y sólo si p es cerrada.

30.- Sean (X, τ_X) compacto, (Y, τ_Y) T_2 y $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua y sobreyectiva. Probar que si (X, τ_X) es C_{II}, también lo es (Y, τ_Y).

31.- Sea (X, τ) un espacio no compacto. La colección $\mathfrak{B} = \{S \subset X : X - S \text{ es compacto}\}$ es base de un filtro $\mathfrak{F}$ sobre X. Se pide

(i) probar que si (X, τ) es T_2, el filtro $\mathfrak{F}$ es $\{S \subset X : \overline{X - S} \text{ es compacto}\}$;

(ii) probar que si (X, τ) es pseudofinito (es decir, cualquier compacto es finito), entonces $\mathfrak{F}$ es el filtro cofinito.

32.- *Teorema de Kuratowski*: probar que los siguientes enunciados son equivalentes

(i) (X, τ) es compacto,

(ii) para cualquier espacio (Y, τ_Y), la proyección $p\colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es cerrada,

(iii) para cualquier espacio normal (Y, τ_Y), $p\colon (X \times Y, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es cerrada.

33.- Dados dos espacios topológicos (X, τ_1) y (X, τ_2) que poseen las mismos conjuntos compactos, ¿son homeomorfos?

34.- Sea (X, τ) un espacio compacto y $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión decreciente de conjuntos cerrados. Probar que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

35.- Probar que en (X, τ), la intersección de una familia arbitraria de conjuntos cerrados y compactos, es un conjunto cerrado y compacto.

36.- Probar que un espacio (X, τ) es compacto si y sólo si para cada base de filtro $\mathfrak{B}$ formada por conjuntos cerrados, es $\mathrm{core}(\mathfrak{B}) \neq \emptyset$.

37.- En (X, τ), para $K \subset X$, probar que las siguientes propiedades, que ayudan a estudiar la compacidad de un subespacio en términos de los filtros sobre el espacio total, son equivalentes

(i) K es compacto,

(ii) todo filtro $\mathfrak{F}$ sobre X, tal que $K \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ tiene un punto de aglomeración en K,

(iii) para toda base de filtro $\mathfrak{B}$ formada por cerrados de X, tales que $K \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathfrak{B}$, es $K \cap \mathrm{core}(\mathfrak{B}) \neq \emptyset$,

(iv) todo ultrafiltro que contiene a K, converge a un punto de K.

38.- Un espacio topológico (X, τ) se llama *paracompacto* si es T_2 y para cada cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ de X, existe un recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_i : j \in J\}$ localmente finito, que refina a $\mathcal{U}$, es decir, para cada $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $V_j \subset U_i$. Se pide

(i) probar que la paracompacidad es débilmente hereditaria;

(ii) todo espacio paracompacto es normal;

(iii) un espacio compacto y T_2 es paracompacto;

(iv) un espacio metrizable es paracompacto;

(v) la imagen continua y cerrada de un espacio paracompacto y T_2 es paracompacta;

(vi) un espacio T_2 es paracompacto si y sólo si todo cubrimiento abierto admite una partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento (ver problema 4 en 12.6).

39.- En (X, τ) son equivalentes

(i) (X, τ) es T_4;

(ii) (X, τ) es homeomorfo a un subespacio de un *cubo*, es decir, un producto de intervalos cerrados y acotados $(\prod\limits_{i \in I} [0, 1], \tau_{Tyc})$, para algún conjunto de índices I;

(iii) (X, τ) es homeomorfo a un subespacio de un espacio compacto y T_2.

Tema XIV

Compacidad local y compactificaciones

Hay dos maneras estandar de *localizar* propiedades globales: dada una propiedad global $\mathcal{P}$, es decir, referida a un espacio topológico (X, τ)

(L1) (X, τ) es *localmente-*$\mathcal{P}$, si para cada $x \in X$, existe $N \in \mathcal{N}_x$ que verifica $\mathcal{P}$;

(L2) (X, τ) es *localmente-*$\mathcal{P}$ si $\mathcal{P}$ es cierta en entornos arbitrariamente pequeños de cada punto, es decir, para cada $x \in X$, existe $\mathcal{B}_x$ una base local de x, tal que todo $B \in \mathcal{B}_x$ verifica $\mathcal{P}$.

Cada uno de estos acercamientos tiene sus ventajas: tomando (L1), si (X, τ) tiene la propiedad $\mathcal{P}$, también será localmente-$\mathcal{P}$, pues bastaría con tomar $N = X$.

Intuitivamente, las propiedades locales son propiedades que deben heredarse para abiertos, por lo que (L2) es la más adecuada: si $\mathcal{B}_x$ es la base local que verifica $\mathcal{P}$, entonces para cada $x \in X$ y $U \in \tau$, $\mathcal{B}_x^U = \{B \in \mathcal{B}_x : B \subset U\}$ es una base local para x en (U, τ_U) que cumple $\mathcal{P}$.

En general, en espacios T_2, (L1) y (L2) son equivalentes.

14.1 Espacios localmente compactos

Definición 14.1 (X, τ) es *localmente compacto* si cada punto de X posee una base local formada por conjuntos compactos.

Lema 14.2 *Si (X, τ) es T_2, (X, τ) es localmente compacto si y sólo si todo punto posee un entorno compacto.*

Corolario 14.3 *Si (X, τ) es T_2 y compacto, entonces es localmente compacto.*

Ejemplos 14.4 En los espacios ya estudiados, tenemos

(i) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es localmente compacta, pues para cada $x \in \mathbb{R}$, $[x-1, x+1]$ es un entorno compacto;

(ii) (X, τ_{dis}) es localmente compacto, pues para cada $x \in X$, $\{x\}$ es un entorno compacto;

(iii) (X, τ_{ind}) es localmente compacto, pues para cada $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{X\}$ es una base local compacta;

(iv) $(\mathbb{Q}, \tau_{us})$ no es localmente compacto;

(v) (X, τ_{cof}) es localmente compacto, pues para cada $x \in X$, $\mathcal{N}_x$ es una base local compacta;

(vi) (X, τ_{coc}) no es localmente compacto;

(vii) (X, τ_A) con $A \subset X$ propio es localmente compacto, pues para cada $x \in A$, $\mathcal{B}_x = \{A\}$ es una base local compacta y para cada $x \notin A$, $\mathcal{B}_x = \{A \cup \{x\}\}$ es una base local compacta;

(viii) (X, τ^A) con $A \subset X$ propio es localmente compacto, pues para cada $x \in A$, $\mathcal{B}_x = \{X\}$ es una base local compacta y para cada $x \notin A$, $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es una base local compacta.

Proposición 14.5 *Si (X, τ) es localmente compacto y $U \in \tau$, entonces (U, τ_U) es localmente compacto.*

Proposición 14.6 *Si (X, τ) es localmente compacto, T_2 y $F \in \mathcal{C}$, entonces (F, τ_F) es localmente compacto.*

Lema 14.7 *Si (X, τ) es T_2 y (A, τ_A), (B, τ_B) son localmente compactos, entonces $(A \cap B, \tau_{A\cap B})$ es localmente compacto.*

Corolario 14.8 *Si (X, τ) es localmente compacto y T_2, sea $A = U \cap F$, con $U \in \tau$ y $F \in \mathcal{C}$, entonces, (A, τ_A) es localmente compacto.*

Existe un recíproco del resultado anterior

Teorema 14.9 *Si (X, τ) es T_2 y (A, τ_A) es localmente compacto, entonces existen $U \in \tau$ y $F \in \mathcal{C}$, tales que $A = U \cap F$.*

Corolario 14.10 *Si (X, τ) es localmente compacto y T_2. (A, τ_A) es localmente compacto si y sólo si $A = U \cap F$, con $U \in \tau$ y $F \in \mathcal{C}$.*

Corolario 14.11 *Si (X, τ) es compacto y T_2 y $A \subset X$ es denso, entonces (A, τ_A) es localmente compacto si y sólo si $A \in \tau$.*

Proposición 14.12 *Si (X, τ) es localmente compacto y T_2, entonces es normal.*

Teorema 14.13 *Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua, abierta y sobreyectiva. Si (X, τ_X) es localmente compacto, entonces (Y, τ_Y) también lo es.*

Contraejemplo 14.14 La compacidad local no se preserva bajo aplicaciones continuas: la aplicación $1_{\mathbb{Q}}\colon (\mathbb{Q}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \tau_{us})$ es continua, sobreyectiva y no abierta. El primer espacio es localmente compacto y el segundo no.

Corolario 14.15 *La compacidad local es una propiedad topológica.*

La compacidad local se comporta únicamente bien para productos finitos, esencialmente, siguiendo el teorema siguiente

Teorema 14.16 *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios y (X, τ_{Tyc}) su producto. Entonces, (X, τ_{Tyc}) es localmente compacto si y sólo si para cada $i \in I$, (X_i, τ_i) es localmente compacto y todos los (X_i, τ_i), salvo a lo más una familia finita, son compactos.*

14.2 Compactificación de Alexandroff

Definición 14.17 Sea (X, τ) un espacio no compacto. Una *compactificación* de (X, τ) es un par $((X^*, \tau^*), h)$ donde (X^*, τ^*) es un espacio compacto y $h\colon (X, \tau) \longrightarrow (X^*, \tau^*)$ un embebimiento, tal que $h(X)$ es denso en (X^*, τ^*).

Ejemplos 14.18 Algunos ejemplos de compactificaciones son

1) $(([0, 1], \tau_{us}), i)$ es una compactificación de $((0, 1), \tau_{us})$, donde i es la inclusión natural;

2) $((\mathbb{S}^1, \tau_{us}), h)$ es una compactificación de $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, donde h es la proyección estereográfica (ver (ii) en ejemplos 10.20).

Sea (X, τ) un espacio no compacto y $\infty \notin X$. Sea $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ y

$$\widetilde{\tau} = \tau \cup \{U \subset \widetilde{X} : \widetilde{X} - U \text{ compacto y cerrado en } (X, \tau)\}.$$

Lema 14.19 *$\widetilde{\tau}$ es una topología sobre X, respecto de la cual ∞ no es un punto aislado.*

Lema 14.20 *$(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ es compacto.*

Teorema 14.21 *El par $((\widetilde{X}, \widetilde{\tau}), i_X)$ es una compactificación de (X, τ) llamada* compactificación de Alexandroff o por un punto *de X.*

Teorema 14.22 (de Alexandroff) *El par $((\widetilde{X}, \widetilde{\tau}), i_X)$ es T_2 si y sólo si (X, τ) es localmente compacto y T_2.*

Observación 14.23 El par $((\mathbb{S}^1, \tau_{us}), h)$ de (ii) en los ejemplos 14.18, es (*homeomorfo a*) la compactificación de Alexandroff de $(\mathbb{R}, \tau_{us})$.

14.3 Problemas

1.- (X,τ) es un subespacio abierto de un espacio (Y,τ_Y) compacto y T_2, si y sólo si (X,τ) es localmente compacto y T_2.

2.- En un espacio topológico (X,τ) T_2, son equivalentes

(i) (X,τ) es localmente compacto,

(ii) existe una base de τ, cuyos conjuntos son de clausura compacta,

(iii) para todo K compacto y $U \in \tau$, tal que $K \subset U$, existe $V \in \tau$, tal que $\overline{V}$ es compacto y $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$,

(iv) para cada $x \in X$ y $U \in \tau$, tal que $x \in U$, existe $V \in \tau$, tal que $\overline{V}$ es compacto y $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

3.- Determinar en $(\mathbb{R},\tau_{us})$ un subespacio localmente compacto cuyo complementario no lo sea, y dos subespacios localmente compactos, cuya reunión no lo sea. ¿Es localmente compacto el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\} \bigcup \{(0,0)\}$ en $(\mathbb{R}^2,\tau_{us})$?

4.- La imagen continua y cerrada (y el cociente) de un espacio localmente compacto no es necesariamente localmente compacta

(i) en $(\mathbb{R}^2,\tau_{us})$, sea A el eje de abscisas. Se define la relación de equivalencia $a \simeq b$ si y sólo si $a,b \in A$. El espacio cociente no es localmente compacto y la proyección coordenada es cerrada;

(ii) la imagen continua y cerrada de un espacio localmente compacto es localmente compacta, si f es perfecta;

(iii) la condición (ii) no es una condición necesaria.

5.- Probar que un retracto de un espacio localmente compacto, es localmente compacto.

6.- Sea (X,τ_X) un espacio localmente compacto y T_2, (Y,τ_Y) T_2 y $f \colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ una aplicación continua, abierta y sobreyectiva. Probar que para cada compacto K en (Y,τ_Y), existe un compacto C en (X,τ_X) tal que $f(C) = K$.

7.- Sea (X,τ) localmente compacto y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea U_n un abierto denso. Probar que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso en (X,τ).

8.- Sea (X, τ) un espacio localmente compacto y T_2. Probar que puede ser embebido como un G_δ-conjunto en algún espacio compacto y T_2.

9.- Sea (X, τ) un espacio localmente compacto y T_2 y dos conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{C}$. Probar que existe una función continua $f \colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

10.- En (X, τ), probar que si el cono de X es localmente compacto, entonces es compacto.

11.- Probar que en un espacio compacto y T_2, cualquier subconjunto de complementario finito es localmente compacto.

12.- Partiendo de un espacio compacto (X, τ), si se realiza la construcción de la compactificación por un punto. ¿Es el espacio resultante una compactificación de (X, τ)?

13.- En el espacio $(\mathbb{N}, \tau_{dis})$, se pide

(i) probar que es un espacio localmente compacto;

(ii) determinar una base de abiertos de la compactificación de Alexandroff de $(\mathbb{N}, \tau_{dis})$;

(iii) determinar los subconjuntos propios densos de dicha compactificación.

14.- Sea $(\mathcal{P}, \tau_{dis})$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de los números primos, y sea $(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\tau_{dis}})$ su compactificación de Alexandroff. Se pide

(i) determinar los subconjuntos compactos de $(\mathcal{P}, \tau_{dis})$ (respectivamente, $(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\tau_{dis}})$);

(ii) determinar los subconjuntos de clausura compacta en $(\mathcal{P}, \tau_{dis})$ (respectivamente, $(\widetilde{\mathcal{P}}, \widetilde{\tau_{dis}})$).

15.- Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios localmente compactos y T_2 y sea $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación propia (ver el problema 16 en 13.5). Se pide

(i) probar que las aplicaciones propias son las continuas, cuya prolongación a los compactificados de Alexandroff es continua;

(ii) probar que cualquier aplicación propia es cerrada;

(iii) f es homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva y propia;

(iv) si (X, τ_X) es compacto, f es continua si y sólo si es propia;

(v) si (X, τ_X) es un subespacio cerrado de (Y, τ_Y), la inclusión natural es propia;

(vi) si $(X, \tau_X) = (Y, \tau_Y) = (\mathbb{R}, \tau_{us})$, las aplicaciones $f(x) = \sin(x)$ y la constante igual a 1 no son propias.

16.- Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) T_2. Probar que la condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua se extienda a la compactificación de Alexandroff, $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau_X})$, es que la base de filtro $\mathfrak{B} = \{f(X - C) : C \subset X \text{ es compacto}\}$ converja.

17.- Probar que las compactificaciones de Alexandroff de dos espacios homeomorfos son homeomorfas. Sin embargo, dos espacios pueden tener compactificaciones de Alexandroff homeomorfas, sin ser ellos mismos homeomorfos.

18.- Sea (X, τ) compacto y T_2, y $a \in X$ un punto no aislado. Probar que la compactificación de Alexandroff de $(X - \{a\}, \tau)$ es (X, τ).

19.- Sea (X, τ) y $A \subset X$. Probar que en general, la compactificación de Alexandroff de (A, τ_A) no es un subespacio de la compactificación de Alexandroff de (X, τ).

20.- Estudiar las compactificaciones de Alexandroff de los subespacios euclídeos siguientes $[0,1)$, $(0,1) \cup (2,3)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1], y = 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$, $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(0,1)\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

21.- ¿Cuáles de los siguientes subespacios euclídeos son compactificaciones (de cualquier tipo) de la bola abierta $(\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}, \tau_{us})$?
$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $\{(x,y) : |x| \leq 1|y| \leq 3\}$, $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

22.- Sea A un subespacio de (X, τ) localmente compacto y T_2. Sea $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ su compactificación por un punto. Probar que $\overline{A}^X = \overline{A}^{\widetilde{X}}$ si y sólo si A está contenido en un subconjunto compacto de (X, τ).

23.- Probar que $(\widetilde{X \times Y}, \widetilde{\tau_X \times \tau_Y})$ nunca es homeomorfo a $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, \widetilde{\tau_X} \times \widetilde{\tau_Y})$.

24.- Probar que si un espacio es separable, su compactificación de Alexandroff también lo es.

25.- Sea (X, τ) un espacio T_2. Probar

(i) (X, τ) es completamente regular si y sólo si admite una compactificación;

(ii) (X, τ) es localmente compacto si y sólo admite una compactificación y es un subespacio abierto en cada una de sus compactificaciones;

(iii) (X, τ) es compacto si y sólo si (X, τ) es su única compactificación.

Tema XV

Espacios conexos

La cuestión de fijar la definición apropiada de conjunto conexo en un espacio topológico general fue un proceso complicado. Posiblemente, Weierstrass fue el primero que intentó dar una definición precisa, introduciendo el concepto de *conexión por arcos*; en su forma más general, su enunciado es el siguiente: *“A es conexo por arcos si y sólo si para cada $x, y \in A$, existe una imagen homeomorfa de $[0, 1]$ en A, de la cual x e y son los puntos extremos”*. Claramente, una clase suficientemente amplia de espacios no contiene copias homeomorfas de segmentos, y por lo tanto, esta definición no puede aplicarse en general. Y aunque fuera aplicable, la definición no siempre coincide con la usada hoy en día, excepto para conjuntos abiertos.

En 1883, Cantor aproximó el problema de un modo completamente distinto: definió una ε-cadena entre dos puntos a y b, como un conjunto finito de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde $a = x_0$, $b = x_n$ y $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$, para $k \in \{1, \dots, n\}$. Y entonces estableció: *“A es conexo, cuando dos puntos cualesquiera de A pueden unirse por una ε-cadena en A, con ε suficientemente pequeño”*. Como este concepto se basa en la noción de distancia, no se puede usar para espacios topológicos generales. Pero, incluso en espacios métricos, la definición coincide con la usualmente aceptada sólo si el conjunto considerado es cerrado y acotado: $\mathbb{Q}$ es Cantor-conexo, pero no es conexo con la definición de conexión actual; lo mismo sucede para la hipérbola y sus asíntotas.

El siguiente paso fue dado por Jordan en la segunda edición de su *“Cours d’Analyse”* en 1893, donde definió: *“un conjunto cerrado y acotado es conexo si y sólo si no se puede descomponer como la unión de dos conjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos”*. Procedió entonces a probar que, en espacios euclídeos, su definición coincidía con la de Cantor. La ventaja de la definición de Jordan es que tiene sentido en un espacio general: aunque la hipótesis de acotación debe eliminarse (y esto puede hacerse de modo sencillo), queda aún el hecho de que la unión de dos cerrados es un conjunto cerrado, con lo que parece que la definición sólo puede aplicarse a este tipo de conjuntos. También se vió en esta época que una buena definición de conexión para un conjunto abierto sería la no existencia de una descomposición en dos conjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos.

La dificultad de extender esto a conjuntos arbitrarios llegó en 1906, cuando Riesz consideró el conjunto dado con su topología relativa. De hecho, introdujo la *relativización*, para este estudio particular. Riesz dió dos definiciones de conexión, siendo la más fuerte la utilizada en nuestros días. Dió también una formulación (sin usar relativización), que en 1911 fue propuesta por Lennes: *"A es conexo si y sólo si para cualquier descomposición de A en dos conjuntos B_1 y B_2 no vacíos y disjuntos, o bien B_1 contiene puntos límite de B_2 o viceversa"*.

En 1914, Hausdorff, evidentemente ignorando el trabajo de Riesz y Lennes, redescubrió la definición de Riesz por medio de la relativización, y procedió entonces a dar un desarrollo sistemático de las propiedades de los conjuntos conexos. Es él el que introdujo el concepto de componente como subconjunto conexo maximal.

¿Por qué la definición de Riesz-Lennes-Hausdorff se aceptó? La razón es, probablemente, que posee las propiedades siguientes: es general (con lo que puede aplicarse a subconjuntos arbitrarios de espacios topológicos cualesquiera); es un invariante topológico; esta noción y los resultados obtenidos usándola coinciden, en gran medida, con el concepto intuitivo de conexión; es una definición simple y da lugar a una amplia cantidad de resultados.

15.1 Espacios y subconjuntos conexos

La conexión es una extensión de la idea de que un intervalo de la recta real es *de una pieza*. El problema de decidir cuando un espacio topológico es *de una pieza*, se resuelve decidiendo cuando puede *romperse* en dos abiertos disjuntos.

Definición 15.1 Una *separación* de un espacio topológico (X, τ) está definida por un par de abiertos U y V, disjuntos, cuya unión es X. Si uno de los dos abiertos es vacío, se dice que la separación es *trivial*.

Definición 15.2 Un espacio topológico (X, τ) es *conexo*, si la única separación que existe es la trivial, y se dirá *disconexo* en caso contrario. Y $A \subset X$ es conexo, cuando lo es como subespacio.

Lema 15.3 *En (X, τ) son equivalentes*

(i) (X, τ) es disconexo;

(ii) existen F y G cerrados disjuntos, no vacíos, cuya unión es X;

(iii) existe A un subconjunto propio de X, que es abierto y cerrado a la vez;

(iv) existe A un subconjunto propio de X, de frontera vacía;

(v) existe una aplicación $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\{0, 1\}, \tau_{dis})$ continua y sobreyectiva.

Lema 15.4 *Si (X, τ_1) es conexo y $\tau_2 \subset \tau_1$, entonces (X, τ_2) es también conexo.*

Lema 15.5 *La conexión es una propiedad absoluta, en el sentido de que si $B \subset A \subset X$, B es conexo en (X, τ) si y sólo si lo es en (A, τ_A).*

Proposición 15.6 *En (X, τ), si A es abierto y cerrado a la vez y C es conexo, es necesariamente $C \subset A$ o $C \subset X - A$.*

Ejemplos 15.7 En los espacios topológicos conocidos, tenemos

1) el vacío y los puntos son conexos en cualquier espacio topológico;

2) cualquier espacio donde no existan abiertos (o cerrados) disjuntos es conexo;

3) en (X, τ_{ind}), todo subconjunto es conexo;

4) en (X, τ_{dis}), los únicos conexos no vacíos son los puntos;

5) en (X, τ_A), si $B \cap A = \emptyset$, B es conexo si y sólo si se reduce a un punto, y en caso contrario es conexo;

6) en (X, τ^A), si $B \cap A = \emptyset$, B es conexo si y sólo si se reduce a un punto, y en caso contrario es conexo;

7) en (X, τ_{cof}), A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es infinito;

8) en (X, τ_{coc}), A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es no contable;

9) en $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$, todo conjunto es conexo;

10) en $(\mathbb{R}, \tau_{sca})$, los únicos conexos son el vacío y los puntos;

11) en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, los conexos son los intervalos.

Definición 15.8 Un espacio (X, τ) es *totalmente disconexo* si sus únicos conexos son el vacío y los puntos.

Ejemplos 15.9 Los espacios discretos, la recta racional y el conjunto de Cantor, son ejemplos de espacios totalmente disconexos.

15.2 Propiedades de la conexión

Teorema 15.10 *La imagen continua de un conjunto conexo es conexo.*

Observación 15.11 Por lo anterior, la conexión es una propiedad divisible y productiva. Sin embargo, no es una propiedad sumable.

Corolario 15.12 *La conexión es una propiedad topológica.*

La conexión no es hereditaria, aunque existen algunos resultados parciales en subespacios

Definición 15.13 En (X, τ), A y B se dicen *mutuamente separados* si $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

Teorema 15.14 *En (X, τ), C es conexo si y sólo si no existen A y B mutuamente separados y no vacíos, cuya unión sea C.*

Corolario 15.15 *En (X, τ), si A y B están mutuamente separados y C es un conjunto conexo tal que $C \subset A \cup B$, entonces $C \subset A$ ó $C \subset B$.*

Respecto a uniones de conjuntos conexos, se comprueban las siguientes propiedades

Teorema 15.16 *Dada una familia $\{C_i : i \in I\}$ de conjuntos conexos en (X, τ), tales que existe $i_0 \in I$ con $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ para cada $i \in I$, entonces su unión es un conjunto conexo.*

Corolario 15.17 *En (X, τ), se verifica*

(i) dada una familia $\{C_i : i \in I\}$ de conjuntos conexos tales que $\bigcap\limits_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, su unión es un conjunto conexo;

(ii) si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un conjunto conexo C_{xy} que los contiene, entonces X es conexo;

(iii) dada una familia $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos conexos tales que $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces su unión es un conjunto conexo.

Teorema 15.18 *Si C es conexo en (X, τ) y $B \subset X$ es tal que $C \subset B \subset \overline{C}$, entonces B es conexo. En particular, la clausura de cualquier conjunto conexo es un conjunto conexo.*

Teorema 15.19 *El producto de espacios conexos es un espacio conexo si y sólo si cada espacio factor lo es.*

Definición 15.20 Sea (X, τ) un espacio topológico. Una *cadena simple* conectando los puntos a y b es una familia finita $\{U_1, \cdots, U_n\} \subset \tau$, tal que

(a) $a \in U_1$ y $a \notin U_i$ para $i > 1$,

(b) $b \in U_n$ y $b \notin U_i$ para $i < n$,

(c) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

Teorema 15.21 *Si (X, τ) es conexo y $\{U_i : i \in I\}$ un cubrimiento por abiertos de X, entonces para cada $a, b \in X$, existe una cadena simple formada por elementos de $\{U_i : i \in I\}$, que los conecta.*

15.3 Componentes conexas

Se describen las partes conexas *maximales* de un espacio topológico

Definición 15.22 En (X, τ), dado $x \in X$, al mayor conexo $C(x)$ que contiene a x se le llama *componente conexa* del punto x.

Lema 15.23 *Las componentes conexas de (X, τ) constituyen una partición del espacio.*

Teorema 15.24 *En (X, τ) , las componentes conexas son conjuntos cerrados.*

Proposición 15.25 *Sea (X, τ) un espacio topológico.*

(i) (X, τ) es conexo si y sólo si posee una única componente conexa (que es el espacio total);

(ii) (X, τ) es totalemente disconexo si y sólo si sus componentes conexas se reducen a puntos.

Proposición 15.26 *Sea (X, τ) un espacio topológico y C una componente conexa. Si A es conexo, entonces es $A \subset C$ o $A \subset X - C$.*

15.4 Problemas

1.- Estudiar la conexión en la recta real.

2.- Probar que si A es un conjunto convexo en $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$, entonces es conexo. El recíproco no es cierto.

3.- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios conexos y $A \subset X$, $B \subset Y$ subconjuntos propios. Probar que $X \times Y - (A \times B)$ es conexo en $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$.

4.- Si A y B son conexos en (X, τ), probar que $A \cup B$ es conexo si y sólo si $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset$.

5.- Sea C conexo en (X, τ) y $A \subset X$. Probar que si $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap (X - A)$, entonces $C \cap fr(A) \neq \emptyset$.

6.- En (X, τ), probar

(i) el interior, la frontera, la intersección y la unión de conjuntos conexos no tiene porque ser un conjunto conexo;

(ii) si $A, B \in \tau$ (respectivamente, $A, B \in \mathcal{C}$), y $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

7.- Dado (X, τ) conexo, si $\tau' \subset \tau \subset \tau''$, estudiar la conexión de (X, τ') y (X, τ'').

8.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua y (X, τ_X) conexo. Probar que el grafo de f es conexo en $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$.

9.- Sea $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua. Con las notaciones obvias, probar

(i) para cada $x \in X$, $f(C(x)) \subset C(f(x))$;

(ii) si f es un homeomorfismo, f induce una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las componentes conexas de (X, τ_X) y el de las de (Y, τ_Y), siendo homeomorfas las componentes conexas correspondientes;

(iii) si B una componente conexa en (Y, τ_Y), entonces $f^{-1}(B)$ es una unión de componentes conexas. En particular, si $f^{-1}(B)$ es conexo, será una componente conexa.

10.- Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y (X, τ_{Tyc}) su producto. Probar que C es una componente conexa en (X, τ_{Tyc}) si y sólo si es un producto de componentes en cada uno de los espacios factores.

11.- Un conjunto abierto, cerrado y conexo en un espacio topológico, es una componente conexa.

12.- Si (X, τ) es conexo y existe $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ continua y no constante, entonces X es no contable.

13.- Si (X, τ) es conexo y T_1 con más de un punto, entonces X es infinito.

14.- Sea (X, τ) un espacio topológico, $\simeq$ una relación de equivalencia sobre X y la proyección natural $p\colon (X, \tau) \longrightarrow (X/\simeq, \tau_{\simeq})$. Probar

(i) si $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es conexo y todo conjunto abierto y cerrado a la vez en X es saturado, entonces (X, τ) es conexo;

(ii) si toda clase de equivalencia es conexa en (X, τ), entonces B es una componente conexa en $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$, si y sólo si $p^{-1}(B)$ es una componente conexa en (X, τ);

(iii) si $(X/\simeq, \tau_{\simeq})$ es conexo y toda clase de equivalencia es conexa en (X, τ), entonces (X, τ) es conexo;

(iv) si $\simeq_0$ es la relación de equivalencia sobre X cuyas clases son las componentes conexas, entonces $(X/\simeq_0, \tau_{\simeq_0})$ es totalmente disconexo.

15.- Si (X, τ) es conexo y $k \in \mathbb{N}$, x se llama un *punto de corte de orden* k, si $X - \{x\}$ posee exactamente k componentes conexas. Se pide

(i) probar que el número de puntos de un orden fijado es un invariante topológico;

(ii) en la recta real, ¿qué tipos de puntos de corte poseen los intervalos $[0, 1]$, $(0, 1]$ y $(0, 1)$?

(iii) si $n > 1$, $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ posee un punto de corte de orden 1. Deducir que $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ no son homeomorfos.

16.- Se pide probar

(i) si (X, τ) es totalmente disconexo, entonces $\tau_{cof} \subset \tau$;

(ii) la disconexión total es una propiedad hereditaria y productiva;

(iii) la imagen continua de un espacio totalmente disconexo, no es necesariamente totalmente disconexa;

(iv) un espacio (X, τ) compacto y T_2 es totalmente disconexo si y sólo si dados dos puntos $x \neq y \in X$, existe un subconjunto A abierto y cerrado a la vez, tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

17.- Se dice que un espacio (X, τ) es *0-dimensional*, si posee una base β de τ, formada por conjuntos abiertos y cerrados a la vez. Se pide

(i) estudiar si son 0-dimensionales los siguientes espacios: (X, τ_{ind}), (X, τ_{dis}), $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$, $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, $(\mathbb{Q}, \tau_{us})$, $(\mathbb{I}, \tau_{us})$, el conjunto de Cantor;

(ii) probar que la 0-dimensionalidad es hereditaria y productiva;

(iii) la imagen continua de un espacio 0-dimensional, no es necesariamente 0-dimensional;

(iv) un espacio 0-dimensional es o indiscreto o disconexo;

(v) un espacio 0-dimensional y T_1 es totalmente disconexo;

(vi) el recíproco de (v) no es cierto, para probarlo estudiar el *ejemplo de Knaster y Kuratowski*: sean $\mathfrak{C}$ el conjunto de Cantor, $A \subset \mathfrak{C}$ el conjunto de los puntos finales de los intervalos abiertos que se eliminan en la construcción del conjunto de Cantor (ver el apartado 18.2) y $B = \mathfrak{C} - A$. Sea $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $x \in \mathfrak{C}$, sea L_x el segmento de línea recta que une p y $(x, 0)$. Sea

$$L_x^* = \begin{cases} \{(y_1, y_2) \in L_x : y_2 \in \mathbb{Q}\} & \text{si } x \in A, \\ \{(y_1, y_2) \in L_x : y_2 \in \mathbb{I}\} & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Se considera el conjunto $\mathfrak{K} = \bigcup\limits_{x \in \mathfrak{C}} L_x^*$. El subespacio euclídeo $(\mathfrak{K}, \tau_{us})$ es conexo. Sin embargo, $(\mathfrak{K} - \{p\}, \tau_{us})$ es totalmente disconexo y no es 0-dimensional;

(vii) un espacio topológico localmente compacto y T_2 es 0-dimensional si y sólo si es totalmente disconexo.

18.- Probar las siguientes propiedades

(i) si $Y = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$ y $f \colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (Y, \tau_{us})$ es continua y sobreyectiva, entonces $f^{-1}((0,0))$ debe contener al menos tres puntos;

(ii) si $f \colon (\mathbb{S}^1, \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})$ es continua y sobreyectiva, entonces para cada $c \in (0,1)$, el conjunto $f^{-1}(c)$ debe contener más de un punto.

19.- Probar que no son homeomorfos los siguientes pares de espacios

(i)$([0,1], \tau_{us})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{us})$;

(ii) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ y $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ para $n > 1$;

(iii) $([0,\infty), \tau_{us})$ y $(\mathbb{R}, \tau_{us})$;

(iv) $([0,1], \tau_{us})$ y $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$;

(v) $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ y $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ para $n > 1$.

20.- Probar que ninguna imagen continua de la recta real $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, puede representarse como una suma disjunta $(X_1 \cup X_2, \tau_\Sigma)$, donde $X_1 \neq \emptyset \neq X_2$.

21.- Sea una aplicación $f \colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \tau_{us})$. Probar que f es continua si y sólo si es constante.

22.- En un espacio topológico (X, τ) se define la relación binaria $x \sim y$, si no existe ninguna descomposición de X en dos abiertos disjuntos, uno de los cuales contiene a x y el otro a y. Se pide

(i) probar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X: las clases de equivalencia $Q(x)$ se llaman *casi-componentes*;

(ii) probar que cada casi-componente es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados que contienen a un elemento dado;

(iii) probar que para cada $x \in X$ es $C(x) \subset Q(x)$ y toda casi-componente es una unión de componentes;

(iv) una casi-componente abierta es una componente conexa;

(v) si (X, τ) es compacto y T_2, entonces para cada $x \in X$, es $C(x) = Q(x)$;

(vi) se consideran los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$: $L_1 = \mathbb{R} \times \{1\}$, $L_2 = \mathbb{R} \times \{-1\}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, el rectángulo $R_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq n, |y| \leq \dfrac{n}{n+1}\right\}$. Sea $Y = L_1 \cup L_2 \cup (\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} R_n)$.

Probar que en (Y, τ_{us}) la componente de $(0,1)$ es L_1 y su casi-componente es $L_1 \cup L_2$.

23.- Sea (X, τ) localmente compacto y T_2 con un número finito de componentes conexas no compactas. Probar que su compactificación de Alexandroff $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ es conexa. En particular, si C es una unión finita de intervalos abiertos de la recta real, su compactifición de Alexandroff $(\widetilde{C}, \widetilde{\tau_{us}})$ es conexa.

24.- Dado $(\mathbb{N}, \tau_{dis})$, determinar la componente conexa del punto ∞ en su compactificación de Alexandroff $(\widetilde{\mathbb{N}}, \widetilde{\tau_{dis}})$.

25.- Si un espacio (X, τ) es conexo, ¿es su compactificación de Alexandroff conexa?

26.- En un espacio topológico compacto, donde las componentes conexas son abiertas, probar que sólo hay un número finito de componentes conexas.

27.- Sea (X, d) un espacio métrico conexo de diámetro $\delta(X) = \sup\{d(a,b) : a, b \in X\}$ infinito. Probar que en (X, d) toda esfera $S(a, \varepsilon) = \{x \in X : d(a,x) = \varepsilon\}$, donde $a \in X$ y $\varepsilon > 0$, es no vacía.

28.- Probar que $(\mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{S}^n, \tau_{us})$ no es conexo.

29.- Sea U un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$. Probar que el conjunto de las componentes conexas es numerable. Cualquier subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una reunión, a lo sumo numerable, de intervalos abiertos disjuntos.

30.- Sea (X, τ) un espacio T_1. Probar que cualquier conjunto conexo no trivial es *denso en sí mismo*, es decir, no contiene puntos aislados.

31.- En este problema se trata de estudiar alguna de las aplicaciones de la conexión

(i) *teorema del valor intermedio*: si $f\colon ([a,b], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es una aplicación continua, f toma todos los valores entre dos cualesquiera de su imagen;

(ii) *teorema del punto fijo*: si $f\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})$ es una aplicación continua, entonces existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$;

(iii) sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios homeomorfos. Probar que cualquier función continua $h\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (X, \tau_X)$ posee un punto fijo si y sólo si toda $k\colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua posee un punto fijo. Deducir que si $f\colon ([a,b], \tau_{us}) \longrightarrow ([a,b], \tau_{us})$ es una aplicación continua, entonces posee un punto fijo;

(iv) *teorema del punto fijo de Brouwer*: toda aplicación continua $f\colon ([0,1]^n, \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1]^n, \tau_{us})$ posee un punto fijo;

(v) *teorema de Borsuk-Ulam*: si $f\colon (\mathbb{S}^1, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es continua, existen un par de puntos antipodales $z, -z \in \mathbb{S}^1$ tales que $f(z) = f(-z)$.

32.- Sea (X, τ) un espacio T_2 y $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos compactos no vacíos, conexos y encajados. Probar que la intersección de estos conjuntos es un conjunto no vacío, compacto y conexo.

33.- Se dice que $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es *localmente constante* si para cada $x \in X$ existe $U_x \in \tau$, tal que $x \in U_x$, y la restricción de f a U_x es constante. Si (X, τ) es conexo, probar que toda aplicación continua y localmente constante es constante.

34.- Probar

(i) (X, τ) es conexo si y sólo si para cualquier función continua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$, f toma cualquier valor entre dos cualesquiera de su imagen;

(ii) si (X, τ) es conexo, normal y T_1 y X tiene al menos dos puntos, entonces X tiene al menos el cardinal de $\mathbb{R}$;

(iii) si (X, d) es un espacio métrico separable y conexo, o bien X se reduce a un punto o bien tiene el cardinal del $\mathbb{R}$.

35.- Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios conexos, $A \subset X$ no vacío y $f\colon (A, \tau_A) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una función continua. Probar que el espacio de adjunción $(X \cup_f Y, \tau)$ es conexo.

36.- *Un teorema de Darboux:* sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $f\colon (I, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ una plicación derivable. Sea $A = \{(x, y) \in I \times I : x < y\}$. Se pide:

(i) probar que A es una parte conexa de $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$;

(ii) para $(x, y) \in A$, sea $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Probar que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$;

(iii) probar que $f'(I)$ es un intervalo. Este resultado significa que la derivada de toda función derivable posee la *propiedad del valor intermedio*.

37.- Probar que no existe ninguna función continua $f\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$, tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

38.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Probar que son equivalentes

(i) la adherencia de todo conjunto abierto es un conjunto abierto;

(ii) dados $U_1, U_2 \in \tau$ disjuntos es $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$.

Un espacio verificando cualquiera de estas propiedades se dice *extremamente disconexo*. Probar que un espacio extremamente disconexo es totalmente disconexo.

39.- Sea X un conjunto totalmente ordenado provisto de la topología del orden. Se pide

(i) probar que (X, τ_{ord}) es conexo si y sólo si todo conjunto $A \subset X$ no vacío y acotado superiormente admite una cota superior, y para cada $x, y \in X$, $x < y$, el intervalo $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$ es no vacío;

(ii) si (X, τ_{ord}) es conexo, probar que un conjunto $A \subset X$ es un intervalo si y sólo si para $x, y \in X$, con $x < y$, es $(x, y) \subset A$;

(iii) probar que las partes conexas de (X, τ_{ord}) son los intervalos de X.

40.- Sean (M_1, τ_1) y (M_2, τ_2) dos variedades topológicas de dimensión n y conexas. Sean $U_i \subset M_i$ subconjuntos homeomorfos a bolas abiertas euclídeas de un cierto radio fijado r. En cada conjunto U_i se considera B_i, el subconjunto correspondiente bajo el citado homeomorfismo a la bola abierta de radio $r/2$. Elegimos un homeomorfismo $\sigma \colon (fr(B_1), \tau_1) \longrightarrow (fr(B_2), \tau_2)$ (que existe porque ambas fronteras son homeomorfas a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$). Si $M'_i = M_i - B_i$, se define el espacio cociente de la suma disjunta $(M'_1 \sqcup M'_2, \tau_\Sigma)$, identificando cada $q \in fr(B_1)$ con su imagen $\sigma(q) \in fr(B_2)$. El cociente resultante se llama la *suma conexa* de M_1 y M_2, y se denota por $(M_1 \sharp M_2, \tau_{1,2})$. Geométricamente, la suma conexa se obtiene cortando una pequeña bola abierta de cada una de las variedades y pegando los espacios resultantes, a través de sus esferas frontera. Aunque la definición de $(M_1 \sharp M_2, \tau_{1,2})$ depende, a priori, de varias elecciones (los conjuntos B_i y el homeomorfismo σ) se puede probar que diferentes *decisiones* dan lugar a sumas conexas homeomorfas. Se pide probar

(i) si (M_1, τ_1) y (M_2, τ_2) son variedades de dimensión n y conexas, cualquier suma conexa $(M_1 \sharp M_2, \tau_{1,2})$ es una variedad de dimensión n y conexa;

(ii) si (M, τ) es una variedad, $(M \sharp \mathbb{S}^n, \tau')$ es homeomorfa a (M, τ);

(iii) la suma conexa $(\mathbb{T}^2 \sharp \overset{(n)}{\dots} \sharp \mathbb{T}^2, \tau_{us})$ es el *toro de n agujeros* o *esfera de n asas*; esta última nomenclatura se debe a que, de hecho, esta superficie es homeomorfa a la suma conexa $(\mathbb{S}^2 \sharp \mathbb{T}^2 \sharp \overset{(n)}{\dots} \sharp \mathbb{T}^2, \tau_{us})$, y cada toro añadido parece un asa *pegada* a la *esfera base*;

(iv) se verifican las siguientes propiedades, que permiten clasificar las superficies compactas y conexas en (v)

(a) la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa $(\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2, \tau_{us})$;

(b) la suma conexa $(\mathbb{T}^2 \sharp \mathbb{RP}^2, \tau_{us})$ es homeomorfa a $(\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2, \tau_{us})$;

(v) *clasificación de superficies compactas*: sea (M, τ) una superficie conexa y compacta. Entonces (M, τ) es homeomorfa a una de las siguientes

(a) una esfera $(\mathbb{S}^2, \tau_{us})$;

(b) una suma conexa $(\mathbb{T}^2 \sharp \overset{(n)}{\ldots} \sharp \mathbb{T}^2, \tau_{us})$;

(c) una suma conexa $(\mathbb{RP}^2 \sharp \overset{(n)}{\ldots} \sharp \mathbb{RP}^2, \tau_{us})$.

41.- *La circunferencia doble de Alexandroff*: se consideran en el plano dos circunferencias concéntricas

$$C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{y} \quad C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}.$$

Sea $X = C_1 \cup C_2$. Se denota por $p \colon C_1 \longrightarrow C_2$ la *proyección radial*, es decir, la proyección de C_1 sobre C_2 a través del punto $(0, 0)$. Sobre X se define una topología τ, tomando como subbase la familia

$$\sigma = \{\{z\} : z \in C_2\} \cup \{U_k(z) : k \in \mathbb{N}, z \in C_1\},$$

donde $U_k(z) = V_k(z) \cup p(V_k(z) - \{z\})$, siendo $V_k(z)$ el arco de C_1 de centro el punto z y longitud $\frac{1}{k}$. El espacio (X, τ) se llama *circunferencia doble de Alexandroff* o *espacio de las circunferencias concéntricas*. Probar

(i) C_2 es un subespacio discreto de cardinal c, abierto y denso en (X, τ);

(ii) C_1 es compacto en (X, τ);

(iii) (X, τ) es T_2, compacto, C_I, de Lindelöf;

(iv) (X, τ) es no C_{II}, no separable;

(v) (X, τ) es no metrizable, a pesar de ser la unión (no disjunta) de dos de sus subespacios metrizables;

(vi) las componentes conexas de (X, τ) son C_1 y cada uno de los puntos de C_2.

42.- Sobre $([0, 1], \tau_{us})$, se considera la relación de equivalencia

$$xRy \text{ si y sólo si } x, y \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Se pide probar

(i) si $p \colon ([0, 1], \tau_{us}) \longrightarrow ([0, 1]/R, \tau_R)$ es la proyección canónica, probar que es cerrada y no abierta;

(ii) sea $J = \{1\} \times [0, 1]$ y $(X = \mathbb{S}^1 \cup J, \tau_{us})$; entonces la aplicación $f \colon ([0, 1], \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau_{us})$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} (\cos(4\pi t), \sin(4\pi t)) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

es continua y cerrada;

(iii) $f\colon([0,1],\tau_{us})\longrightarrow(X,\tau_{us})$ induce un homeomorfismo entre los espacios $([0,1]/R,\tau_R)$ y (X,τ_{us});

(iv) deducir que $([0,1]/R,\tau_R)$ es T_2, compacto y conexo.

43.- *La topología de los círculos tangentes*: sobre $([0,1],\tau_{us})$, se considera la relación de equivalencia

$$xR_0y \text{ si y sólo si } x,y\in\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}.$$

Si $\mathbb{S}^*=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x+2)^2+y^2=1\}$, se pide demostrar que $([0,1]/R_0,\tau_{R_0})$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1\cup\mathbb{S}^*,\tau_{us})$, y por lo tanto es T_2, compacto, conexo y se puede identificar con la compactificación de Alexandroff de $\Big((0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1),\tau_{us}\Big)$.

Sobre $\mathbb{R}$ se considera la topología $\tau^*\subset\tau_{us}$, definida al considerar los entornos usuales en los puntos $x\neq 0$ y como entornos del 0

$$\mathcal{N}_0=\{N\in\mathcal{N}_0^{us}:\exists\varepsilon>0,\delta<0:(-\infty,\delta)\cup(\varepsilon,\infty)\subset N\}.$$

Se pide

(i) probar que $(\mathbb{R},\tau^*)$ es compacto y T_2;

(ii) dados $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x+1)^2+y^2=1\}$ y $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+y^2=1\}$, se define una aplicación $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow S\cup T$ geométricamente, del modo siguiente

(a) se identifica $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}\times\{0\}\subset\mathbb{R}^2$,

(b) se levanta el intervalo $(-\infty,-2]$ en la semirrecta vertical $L=\{-2\}\times[0,\infty)$ por rotación de centro el punto $(-2,0)$,

(c) cada punto de L se transforma, por una inversión de polo $(0,0)$ en un punto del semicírculo S^+ (es decir, un punto de L se transforma en la intersección de S con la recta pasando por dicho punto y el origen de coordenadas),

(d) cada punto de $[-2,0]$ se proyecta sobre el semicírculo S^-,

(e) cada punto de $[0,2]$ se proyecta sobre el semicírculo T^-,

(f) la semirecta $[2,\infty)$ se transforma en la recta vertical $L^*=\{2\}\times[0,\infty)$ por rotación de centro $(2,0)$,

(g) los puntos de L^* se transforman por una inversión de polo $(0,0)$ en los puntos del semicírculo T^+;

escribir explícitamente la aplicación así definida y probar que es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $T\cup S$;

(iii) probar que f es un homeomorfismo entre los espacios $(\mathbb{R},\tau^*)$ y $(S\cup T,\tau_{us})$;

(iv) probar que $([0,1]/R_0, \tau_{R_0})$ es homeomorfo a $(\mathbb{R}, \tau^*)$;

(v) probar que si $a \neq 0$, el subespacio $(\mathbb{R} - \{a\}, \tau^*)$ es conexo;

(vi) probar que la sucesión $\{(-1)^n n\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a 0 en $(\mathbb{R}, \tau^*)$;

(vii) probar que la aplicación $g\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau^*)$, definida por $g(0) = 0$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, es continua.

Tema XVI

Otras clases de conexión

16.1 Conexión por caminos

La conexión es una propiedad difícil de manejar, al tratarse de una propiedad en sentido negativo (no existe una disconexión...). La conexión por caminos posee la ventaja de ser una propiedad *algebraica* y en sentido positivo.

16.1.1 Espacios y conjuntos conexos por caminos

Definición 16.1 Dado un espacio topológico (X, τ), un *camino* en X es una aplicación continua $\sigma\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau)$. Si $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, se dice que σ es un camino de a a b.

Definición 16.2 (X, τ) es *conexo por caminos*, si para todo par de puntos $a, b \in X$ existe un camino que los une. $A \subset X$ es *conexo por caminos*, si el subespacio (A, τ_A) lo es.

Teorema 16.3 *Si (X, τ) es conexo por caminos, es conexo.*

Contraejemplo 16.4 El recíproco no es cierto: la *curva seno topológico* es el subespacio del plano euclídeo $(A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \left\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\right\}, \tau_{us})$ que es conexo, pero no es conexo por caminos.

Ejemplos 16.5 Algunos ejemplos de espacios conexos por caminos son

1) los espacios indiscretos son conexos por caminos;

2) en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, los conexos y los conexos por caminos coinciden;

3) en $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$, si $A \subset \mathbb{R}^n$

(a) si A es conexo y abierto, es conexo por caminos;

(b) si A es convexo, es conexo por caminos;

(c) si A es contable y $n > 1$, $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos.

16.1.2 Propiedades

Teorema 16.6 *La imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexa por caminos.*

Observación 16.7 Por lo tanto, la conexión por caminos pasa al cociente. Pero, no es una propiedad hereditaria.

Teorema 16.8 *La conexión por caminos es una propiedad topológica.*

Teorema 16.9 *El producto de espacios topológicos es conexo por caminos si y sólo si cada espacio factor lo es.*

16.1.3 Componentes conexas por caminos

Se define sobre (X, τ) la relación binaria $x \sim y$ si y sólo si existe un camino en X que une x e y.

Lema 16.10 $\sim$ *es una relación de equivalencia sobre* X.

Definición 16.11 Las clases de equivalencia por esta relación son las *componentes conexas por caminos* de (X, τ).

Proposición 16.12 *En* (X, τ)*, la componente conexa por caminos de un punto* x*,* $c(x)$*, es el mayor conjunto conexo por caminos en* (X, τ) *que lo contiene.*

Proposición 16.13 *En* (X, τ)*, para cada* $x \in X$*, es* $c(x) \subset C(x)$.

Contraejemplo 16.14 En general, no se da la igualdad: para la curva seno topológico (A, τ_{us}) en el contraejemplo16.4, y para el punto $(0, 0)$, la componente conexa es $C(0, 0) = A$ y la componente conexa por caminos es $c(0, 0) = (-\infty, 0] \times \{0\}$.

16.2 Conexión local y conexión local por caminos

16.2.1 Definición y propiedades

Definición 16.15 (X, τ) es *localmente conexo* (respectivamente, *localmente conexo por caminos*), si cada punto de X posee una base local formada por conjuntos conexos (respectivamente, conexos por caminos). $A \subset X$ es localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos), si el subespacio (A, τ_A) lo es.

Lema 16.16 *En (X, τ) son equivalentes*

(i) (X, τ) es localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos);

(ii) existe una base β de τ formada por conjuntos conexos (respectivamente, conexos por caminos);

(iii) para cada $U \in \tau$, las componentes conexas (respectivamente, componentes conexas por caminos) en U son abiertas.

Corolario 16.17 *Si (X, τ) es localmente conexo, para cada $x \in X$, la componente conexa $C(x)$ es abierta y cerrada a la vez.*

Corolario 16.18 *Si (X, τ) es localmente conexo por caminos, para cada $x \in X$, la componente conexa por caminos $c(x)$ es abierta.*

Proposición 16.19 *Si (X, τ) es localmente conexo, es localmente conexo por caminos.*

Contraejemplo 16.20 El recíproco no es cierto; sea el espacio

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \left(\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \times [0,1] \right) \cup \left([0,1] \times \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \right).$$

(X, τ_{us}) es localmente conexo en $(0,0)$, pero no es localmente conexo por caminos en dicho punto.

Ejemplos 16.21 Algunos ejemplos de estas propiedades locales son

1) (X, τ_{ind}) es localmente conexo y localmente conexo por caminos;

2) (X, τ_{dis}) es localmente conexo y localmente conexo por caminos;

3) $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es localmente conexo y localmente conexo por caminos;

4) $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ es localmente conexo;

5) la curva seno topológico no es localmente conexa ni localmente conexa por caminos;

6) el espacio peine (P,τ_{us}), donde $P=\Big(\Big(\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}\Big)\times[0,1]\Big)\cup([0,1]\times\{0\})$, no es localmente conexo ni localmente conexo por caminos en los puntos de $\{0\}\times[0,1]$ (ver el problema 13 en 16.3).

Proposición 16.22 *Si (X,τ) es localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos) y $U\in\tau$, entonces (U,τ_U) es es localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos).*

Proposición 16.23 *Los cocientes de espacios localmente conexos (respectivamente, localmente conexos por caminos) son localmente conexos (respectivamente, localmente conexos por caminos).*

Proposición 16.24 *La imagen continua y abierta de un espacio localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos) es localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos).*

Contraejemplo 16.25 La conexión local no se preserva bajo aplicaciones continuas: la aplicación $1_{\mathbb{Q}}\colon(\mathbb{Q},\tau_{dis})\longrightarrow(\mathbb{Q},\tau_{us})$ es continua, sobreyectiva y no abierta. El primer espacio es localmente conexo y el segundo no.

La conexión local se comporta únicamente bien para productos finitos esencialmente, de acuerdo con el siguiente teorema

Teorema 16.26 *Sea $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios y (X,τ_{Tyc}) su producto. Entonces, (X,τ_{Tyc}) es localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos) si y sólo si para cada $i\in I$, (X_i,τ_i) es localmente conexo (respectivamente, localmente conexo por caminos) y todos los (X_i,τ_i), salvo a lo más una familia finita son conexos (respectivamente, conexos por caminos).*

16.2.2 Relación con la conexión y la conexión por caminos

Teorema 16.27 *Si (X,τ) es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.*

16.3 Problemas

1.- Probar los siguientes espacios son conexos por caminos

(i) los espacios indiscretos;

(ii) las n-variedades conexas;

(iii) el cono y la suspensión de un espacio (X,τ).

2.- En (X, τ), probar que la unión de cualquier familia de conjuntos conexos por caminos con un punto en común, es un conjunto conexo por caminos.

3.- Probar que un espacio totalmente disconexo y localmente conexo, es discreto.

4.- Si (X, τ) es localmente conexo, probar que todo abierto es unión disjunta de abiertos conexos. En particular

(i) en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, todo abierto es unión disjunta de una familia contable de intervalos abiertos;

(ii) en $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$, si A es abierto, entonces es conexo si y sólo si A es conexo por caminos.

5.- Sea (X, τ) localmente conexo y $\tau' \subset \tau \subset \tau''$ ¿Es (X, τ') localmente conexo? ¿y (X, τ'')?

6.- Sea (X, τ) localmente conexo, $A \subset X$ y C una componente conexa de A. Probar que $\overset{\circ}{C} = C \cap \overset{\circ}{A}$ y $fr(C) \subset fr(A)$. Si A es cerrado, entonces $fr(C) = C \cap fr(A)$.

7.- Sea (X, τ) localmente conexo y no compacto. Probar que su compactificación de Alexandroff $(\widetilde{X}, \widetilde{\tau})$ es conexa si y sólo si ninguna componente conexa de (X, τ) es compacta.

8.- Sea (X, τ) y A, B cerrados localmente conexos. Probar que $A \cup B$ es localmente conexo. Si A y B no son cerrados, esta propiedad no es cierta en general. La unión arbitraria de cerrados localmente conexos, no es necesariamente localmente conexa.

9.- Si X es finito, entonces el espacio (X, τ) es localmente conexo.

10.- Probar que el toro de dimensión n, $(\mathbb{T}^n, \tau_{us})$, y el espacio proyectivo real de dimensión n, $(\mathbb{RR}^n, \tau_{us})$, son localmente conexos.

11.- Para $r \geq 0$, sea el espacio euclídeo $(S_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}, \tau_{us})$ y el espacio suma topológica $(\bigcup\limits_{r \geq 0} S_r, \tau_\Sigma)$. Estudiar la conexión, la conexión local y la conexión local por caminos en este espacio.

12.- Sea $f \colon (\mathbb{N} \cup \{0\}, \tau_{us}) \longrightarrow (\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \tau_{us})$, dada por $f(0) = 0$ y $f(n) = \frac{1}{n}$. Demostrar que f es continua, su dominio es localmente conexo y su rango no.

13.- Estudiar la conexión local y la conexión local por caminos del *espacio peine*, (P, τ_{us}), donde $P = \Big(\big(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\big) \times [0, 1]\Big) \cup ([0, 1] \times \{0\})$. Además, se pide

(i) si $A = \{0\} \times (0,1)$, estudiar la conexión local del subespacio $(P - A, \tau_{us})$ en los puntos $(0,1)$ y $(0,0)$, y la conexión local por caminos en el punto $(0,0)$;

(ii) sea B el conjunto $B = \{(0,y) \in P : y \neq 0, y \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Estudiar la conexión y la conexión por caminos de $(P - B, \tau_{us})$, la conexión local en los puntos $(0,1)$ y $(0,0)$, y la conexión local por caminos en el punto $(0,0)$.

14.- Sea C una componente conexa de $U \in \tau$ en un espacio localmente conexo (X, τ). Probar que $fr(C) \subset fr(U) \subset X - U$.

15.- En $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$ se consideran los conjuntos siguientes

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, y = 0\},$$

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right\}, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}.$$

Se pide

(i) si $X = A \cup B \cup C$, probar que (X, τ_{us}) es conexo por caminos, pero no es localmente conexo por caminos;

(ii) si $Y = A \cup B \cup C \cup D$, probar que (Y, τ_{us}) es localmente conexo por caminos.

16.- Si $\leq$ es el orden lexicográfico sobre $[0,1] \times [0,1]$ y τ_{ord} es la topología del orden asociada, probar que $([0,1] \times [0,1], \tau_{ord})$ es un espacio conexo y localmente conexo, pero no es ni conexo por caminos ni localmente conexo por caminos.

17.- Sea (X, τ) un espacio topológico en el que las clausuras de dos puntos cualesquiera se cortan. Probar que (X, τ) es conexo por caminos.

18.- Probar que, al contrario de lo que sucede con la conexión, la clausura de un conjunto conexo por caminos no es en general conexa por caminos.

19.- Sea (X, τ) un espacio topológico. Se pide

(i) si (X, τ) es localmente conexo, las componentes y las casi-componentes (ver el problema 22 en 15.4) coinciden sobre los conjuntos abiertos;

(ii) (X, τ) es localmente conexo si y sólo si las casi-componentes sobre cada conjunto abierto son abiertas;

(iii) probar que el espacio (Y, τ_{us}) del apartado (vi) del problema 22 en 15.4, no es localmente conexo.

20.- Se considera el *espacio escoba* (E, τ_{us}), donde E es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de los segmentos cerrados que unen el origen de coordenadas con los puntos $\{(1, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, junto con el segmento $\{0\} \times (\frac{1}{2}, 1]$. El *espacio escoba cerrado* $(\widehat{E}, \tau_{us})$ tiene como espacio base $\widehat{E} = E \cup (\{0\} \times (0, 1])$. Se pide probar

(i) (E, τ_{us}) y $(\widehat{E}, \tau_{us})$ son conexos;

(ii) ni (E, τ_{us}) ni $(\widehat{E}, \tau_{us})$ son localmente conexos;

(iii) $(\widehat{E}, \tau_{us})$ es conexo por caminos, pero (E, τ_{us}) no lo es.

21.- Sea (A, τ_{us}) el subespacio de $\mathbb{R}^2$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y < 0\}.$$

Probar que (A, τ_{us}) es conexo, no es localmente conexo y no es conexo por caminos.

Tema XVII

Homotopía de aplicaciones

El problema central de la Topología es el de decidir si dos espacios topológicos son o no homeomorfos. En Topología Algebraica, se usa el siguiente modelo de procedimiento para solucionar este problema: dado un espacio topológico X, se le asocia un objeto algebraico $A(X)$, de modo que si Y es otro espacio homeomorfo a X, el objeto algebraico $A(Y)$ adjudicado a Y por el mismo procedimiento, resulta ser isomorfo a $A(X)$. Es decir, $A(.)$ es lo que se llama un *invariante topológico*. Así, estos objetos algebraicos permiten detectar cuando estos dos espacios topológicos no son homeomorfos, si los invariantes asociados a uno y al otro no son isomorfos. Se pasa de objetos topológicos a algebraicos, porque estos últimos son *más sencillos* de manejar.

La Homotopía, que se introduce a continuación, es el invariante topológico más conocido y utilizado.

17.1 Homotopía de aplicaciones

Definición 17.1 Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $A \subset X$, eventualmente vacío. Si $f, g\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ son aplicaciones continuas, tales que $f|_A = g|_A$, se dice que f y g son *homótopas relativamente a* A, si existe $H\colon (X \times [0,1], \tau_X \times \tau_{us}) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ continua, tal que

(i) $H(x, 0) = f(x)$, para cada $x \in X$,

(ii) $H(x, 1) = g(x)$, para cada $x \in X$,

(iii) $H(x, t) = f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$ y $t \in [0, 1]$.

Se expresa del modo $H : f \simeq g(\text{rel } A)$. Si $A = \emptyset$, se escribe $H : f \simeq g$, y se dice que f y g son *homótopas* (o *libremente homótopas*).

Observación 17.2 Si para $t \in [0,1]$ se define la aplicación continua $h_t \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ por $h_t(x) = H(x,t)$, la homotopía H da lugar a una familia uniparamétrica $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ de funciones continuas, *transformando* (de manera continua) $h_0 = f$ en $h_1 = g$. h_t puede pensarse como la deformación en el instante t.

Ejemplos 17.3 Para ilustrar esta definición

(i) dadas las funciones $f, g \colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_{us})$, definidas por $f(x) = (x, x^2)$ y $g(x) = (x, x)$, la aplicación $H \colon (\mathbb{R} \times [0,1], \tau_{us} \times \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_{us})$ dada por $H(x,t) = (x, x^2 - tx^2 + tx)$, es una homotopía entre ambas;

(ii) la función $f \colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 - \{0\}, \tau_{us})$, $f(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$, es homótopa a la aplicación constante $(1,0)$, y $H \colon [0,1] \times [0,1], \tau_{us} \times \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 - \{0\}, \tau_{us})$, dada por $H(s,t) = (\cos(2\pi st), \sin(2\pi st))$ es una homotopía entre ambas.

Observación 17.4 El ejemplo (ii) prueba que el camino cerrado f alrededor del origen, es homótopo en $(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \tau_{us})$ a un camino constante. Luego, el establecer cuando un camino cerrado en (X, τ_X) es homótopo a una constante, no basta para detectar agujeros en (X, τ_X). La solución a este problema, que veremos más adelante, será considerar *homotopías de caminos*, que dejan los extremos de la deformación fijos.

Teorema 17.5 *La homotopía (rel A) es una relación de equivalencia sobre el conjunto $C(X,Y)$ de las aplicaciones continuas de (X, τ_X) en (Y, τ_Y).*

Así, se puede hablar de *clases de homotopía (rel A)*, de aplicaciones continuas de (X, τ_X) en (Y, τ_Y). Se denota por $[f]_A$ (respectivamente, por $[f]$, si $A = \emptyset$) la clase de homotopía de $f(\text{rel } A)$. Y $[X,Y]_A$ (respectivamente, $[X,Y]$, si $A = \emptyset$) es la familia de dichas clases de homotopía.

17.2 Propiedades de la homotopía

Proposición 17.6 *Sean (X, τ_X), (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z) espacios topológicos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f_0, f_1 \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ y $g_0, g_1 \colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (Z, \tau_Z)$ aplicaciones continuas, verificando que $f_0 \simeq f_1(\text{rel } A)$, $f_0(A) = f_1(A) \subset B$ y $g_0 \simeq g_1(\text{rel } B)$. Entonces, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1(\text{rel } A)$.*

Definición 17.7 Una aplicación continua $f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es una *equivalencia de homotopía*, si existe una aplicación continua $g \colon (Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. En tal caso, se dice que (X, τ_X) tiene el *mismo tipo de homotopía* que (Y, τ_Y), y se escribe $X \simeq Y$.

Lema 17.8 *La relación de ser* “homotópicamente equivalentes” *entre dos espacios topológicos es una relación de equivalencia.*

Observación 17.9 Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son homeomorfos, son homotópicamente equivalentes, pero el recíproco no es cierto.

Definición 17.10 Una aplicación continua $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es *nulhomótopa*, si existe una aplicación constante $c: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$, tal que $f \simeq c$.

Definición 17.11 Un espacio (X, τ_X) se dice *contráctil*, si la identidad $1_X: (X, \tau_X) \longrightarrow (X, \tau_X)$ es una aplicación nulhomótopa. La función $H : 1_X \simeq c$ que define la homotopía se llama entonces una *contracción*.

Ejemplo 17.12 Los conjuntos convexos en $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ son contráctiles.

Proposición 17.13 *Si el espacio* (Y, τ_Y) *es contráctil, dos aplicaciones continuas cualesquiera* $f, g: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ *son homótopas.*

En particular, si (Y, τ_Y) es contráctil, dos aplicaciones constantes de (Y, τ_Y) en sí mismo son homótopas, y a su vez homótopas a la identidad. Así, en un espacio contráctil, 1_Y es homótopa a cualquier aplicación constante sobre este espacio.

Proposición 17.14 *Un espacio es contráctil si y sólo si posee el mismo tipo de homotopía de un punto.*

Corolario 17.15 *Un espacio homotópicamente equivalente a uno contráctil, es contráctil.*

Definición 17.16 Sea $A \subset X$ y la inclusión $i_A: (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau_X)$. Se dice que A es

(i) un *retracto* de (X, τ_X), si existe $r: (X, \tau_X) \longrightarrow (A, \tau_A)$ continua tal que $r \circ i_A = 1_A$ (r se llama *retracción*);

(ii) un *retracto por deformación* de (X, τ_X), si existe $r: (X, \tau_X) \longrightarrow (A, \tau_A)$ continua tal que $r \circ i_A = 1_A$ e $i_A \circ r \simeq 1_X$ (luego, i_A es una equivalencia de homotopía y r su inversa);

(iii) un *retracto por deformación fuerte de* (X, τ_X), si existe $r: (X, \tau_X) \longrightarrow (A, \tau_A)$ continua tal que $r \circ i_A = 1_A$ e $i_A \circ r \simeq 1_X(\text{rel } A)$.

Observación 17.17 Claramente, (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), pero los recíprocos no son ciertos

<u>(i) $\not\Rightarrow$ (ii)</u> dado un espacio (X, τ_X) no contráctil y $p \in X$, $\{p\}$ es un retracto de (X, τ_X), pero no por deformación;

<u>(ii) $\not\Rightarrow$ (iii)</u> dado el *espacio peine* (P, τ_{us}) (ver el problema 13 en 16.3) y $A = \{(0, 1)\} \subset P$, A es un retracto por deformación de (P, τ_{us}), pero que no es fuerte.

Proposición 17.18 *Si* $A \subset X$ *es un retracto por deformación de* (X, τ_X)*, entonces* $A \simeq X$.

Se trata de asociar un grupo topológicamente invariante a un espacio, es decir, de modo que grupos asociados a espacios homeomorfos sean isomorfos.

¿Qué propiedad topológica de un espacio permite distinguir un disco $\mathbb{D}^2$ de una corona circular? En otras palabras, ¿puede detectarse *el agujero* de la corona, sin utilizar para ello ideas no puramente topológicas (como distancias, ángulos,...)? Una respuesta natural se obtiene al intentar contraer un camino cerrado en cada uno de los espacios. Intuitivamente, en $\mathbb{D}^2$, todo camino cerrado puede llevarse a un punto (el camino constante), mientras que esto es imposible en la corona circular, en donde el agujero actúa de *barrera* (para caminos cerrados que rodean a este agujero), impidiendo dicha contracción.

17.3 Homotopía de caminos

Definición 17.19 Dos caminos $\sigma, \tau\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau)$, tales que $\sigma(0) = \tau(0)$ y $\sigma(1) = \tau(1)$ se llaman *caminos homótopos*, si $\sigma \simeq \tau(\text{rel}\{0,1\})$. La homotopía de caminos (es decir, la homotopía con extremidades fijas) se suele denotar por $\sigma \sim \tau$.

Explícitamente, existe una homotopía $H\colon ([0,1] \times [0,1], \tau_{us} \times \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau)$ tal que

(i) $H(t,0) = \sigma(t)$ y $H(t,1) = \tau(t)$, para $t \in [0,1]$,

(ii) $H(0,s) = \sigma(0)$ y $H(1,s) = \sigma(1)$, para $s \in [0,1]$.

Ya sabemos que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de los caminos en (X, τ), $C([0,1], X)$. Denotamos por $[\sigma]$ la clase de homotopía del camino σ.

Definición 17.20 Dados dos caminos $\sigma, \tau\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau)$, tales que $\sigma(1) = \tau(0)$, se define su *producto* como el camino

$$(\tau * \sigma)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Y se define el *camino opuesto* de σ por $\overline{\sigma}(t) = \sigma(1-t)$.

Lema 17.21 *Sean $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1$ caminos en (X, τ) tales que $\sigma_0(1) = \tau_0(0)$, $\sigma_1(1) = \tau_1(0)$ y $\sigma_0 \sim \sigma_1$, $\tau_0 \sim \tau_1$. Entonces, $\tau_0 * \sigma_0 \sim \tau_1 * \sigma_1$.*

Luego es posible multiplicar clases de caminos: si σ, τ son dos caminos, tales que $\sigma(1) = \tau(0)$, entonces, tiene sentido definir el producto de sus clases $[\sigma].[\tau] \stackrel{\text{def}}{=} [\tau * \sigma]$, es decir, la equivalencia de caminos es compatible con su producto.

Aunque la composición de caminos no es asociativa, lo es la composición de sus clases, es decir, en las condiciones anteriores, $[\gamma * (\tau * \sigma)] = [(\gamma * \tau) * \sigma]$

Lema 17.22 *Sean* σ, τ, γ *caminos en* (X, τ)*, tales que* $\sigma(1) = \tau(0)$ *y* $\gamma(0) = \tau(1)$*. Entonces, se verifica que* $\gamma * (\tau * \sigma) \sim (\gamma * \tau) * \sigma$*.*

Sea $\epsilon_x : ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau)$ el camino constante igual a x. Sea $\sigma : ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau)$ un camino con origen el punto x y extremo el punto y. Entonces

Lema 17.23 $\sigma * \epsilon_x \sim \sigma \sim \epsilon_y * \sigma$.

Con esto, hemos probado que $[\sigma * \epsilon_x] = [\sigma] = [\epsilon_y * \sigma]$, es decir, $[\epsilon_x]$ es el neutro a izquierda de $[\sigma]$, y $[\epsilon_y]$ es su neutro a derecha.

Lema 17.24 *En* (X, τ)*, si* σ *y* τ *son caminos tales que* $\sigma(0) = \tau(0)$ *y* $\sigma(1) = \tau(1)$*, entonces si* $\sigma \sim \tau$*, es* $\overline{\sigma} \sim \overline{\tau}$*.*

La clase $[\overline{\sigma}]$ actúa como inversa a izquierda (es decir, $[\overline{\sigma}].[\sigma] = [\epsilon_y]$) y a derecha (es decir, $[\sigma].[\overline{\sigma}] = [\epsilon_x]$) de $[\sigma]$, en el siguiente sentido

Lema 17.25 *En* (X, τ)*, si* σ *es un camino tal que* $\sigma(0) = x$ *y* $\sigma(1) = y$*, entonces* $\overline{\sigma} * \sigma \sim \epsilon_x$ *y* $\sigma * \overline{\sigma} \sim \epsilon_y$*.*

17.4 El grupo fundamental

Definición 17.26 Un camino $\sigma : ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau)$ se llama *cerrado*, si $\sigma(0) = \sigma(1)$. Si $\sigma(0) = \sigma(1) = x$, se dice también que σ es un *lazo basado en* x.

Dado un espacio (X, τ), si $\Omega(X, x)$ es la familia de los lazos basados en x, es claro que el producto y la inversión de caminos son operaciones internas en este conjunto. Sobre $\Omega(X, x)$ se puede considerar la relación de homotopía de caminos. Si $\pi_1(X, x) = \Omega(X, x)/\sim$ es el cociente bajo esta relación, los anteriores resultados prueban que

Teorema 17.27 $\pi_1(X, x)$ *es un grupo, llamado* grupo fundamental *de* (X, τ) *en* x *o* grupo de Poincaré *de* (X, τ) *en* x*.*

Si se cambia el punto base, los grupos correspondientes no guardan, a priori, ninguna relación

Ejemplo 17.28 Si consideramos el subespacio del plano euclídeo $(X = \mathbb{S}^1 \cup \{(0,0)\}, \tau_{us})$, veremos más adelante que $\pi_1(X, (1,0)) \simeq \mathbb{Z}$ y $\pi_1(X, (0,0)) \simeq 0$.

Sin embargo, se verifica que

Teorema 17.29 *Si* $x, y \in X$ *y* σ *es un camino en* (X, τ) *que une* x *e* y*, entonces el homomorfismo de grupos* $\varphi_\sigma : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y)$*, definido por* $\varphi_\sigma([\tau]) = [\sigma * \tau * \overline{\sigma}]$*, es un isomorfismo.*

Corolario 17.30 *Si* (X, τ) *es conexo por caminos, el grupo fundamental* $\pi_1(X, x)$ *no depende del punto* $x \in X$*. En tal caso, se escribe* $\pi_1(X)$*, y se habla sencillamente del grupo de Poincaré de* (X, τ)*.*

¿Qué efecto ejerce una aplicación continua entre espacios topológicos sobre los grupos fundamentales correspondientes? Sea $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ continua. Si σ, τ son dos caminos en (X,τ_X) son, obvias las siguientes propiedades

(i) $f \circ \sigma$ es un camino en (Y,τ_Y),

(ii) si $H : \sigma \sim \tau$, entonces $f \circ H : f \circ \sigma \sim f \circ \tau$,

(iii) si $\sigma \in \Omega(X,x)$, entonces $f \circ \sigma \in \Omega(Y, f(x))$.

Luego, si $[\sigma] \in \pi_1(X,x)$, es $[f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, f(x))$, y

Lema 17.31 $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$, *definida por* $\pi_1(f)([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ *es un homomorfismo de grupos, llamado* homomorfismo inducido por f.

Teorema 17.32 *Si* $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *y* $g\colon (Y,\tau_Y) \longrightarrow (Z,\tau_Z)$ *son aplicaciones continuas, se verifica que*

(i) $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$,

(ii) $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X,x)}$.

Así, el grupo fundamental proporciona una manera de pasar de la Topología al Álgebra

Corolario 17.33 *Si* $f\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *es un homeomorfismo, entonces la aplicación inducida entre los grupos fundamentales,* $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ *es un isomorfismo, para cada* $x \in X$.

Observación 17.34 Esto no significa que dos espacios con grupos de Poincaré isomorfos sean homeomorfos

(i) en (X,τ_{dis}), una aplicación $\sigma\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow (X,\tau_{dis})$ es continua si y sólo si es constante. Luego, $\Omega(X,x) = \{\epsilon_x\}$ y $\pi_1(X,x) = 0$, para cada $x \in X$;

(ii) en (X,τ_{ind}), toda aplicación $\sigma\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow (X,\tau_{ind})$ es continua. Así, en este caso, $\Omega(X,x) = \{\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X : \sigma(0) = x = \sigma(1)\}$. Pero para cada $\sigma, \tau \in \Omega(X,x)$, es $\sigma \sim \tau$. Luego, $\pi_1(X,x) = 0$, para todo $x \in X$.

Aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo sobre grupos fundamentales, salvo un automorfismo interior, que se comprende por el hecho de que dos aplicaciones homótopas pueden enviar el punto base de (X,τ_X) en distintos puntos base de (Y,τ_Y)

Teorema 17.35 *Sean* $f, g\colon (X,\tau_X) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *continuas,* $H : f \simeq g$ *una homotopía y* $x \in X$. *Sea* $\sigma\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$ *el camino dado por* $\sigma(t) = H(x,t)$. *Entonces,* $\pi_1(g) = \varphi_\sigma \circ \pi_1(f)$, *donde* φ_σ *es el isomorfismo inducido por* σ, *según el teorema 17.29.*

Corolario 17.36 *Si dos espacios conexos por caminos tienen el mismo tipo de homotopía, entonces tienen grupos fundamentales isomorfos.*

Corolario 17.37 *Se verifican las siguientes propiedades*

(i) si A es un retracto por deformación de (X,τ) y $a \in A$, entonces la inclusión natural $i_A\colon (A,\tau_A) \longrightarrow (X,\tau)$ induce un isomorfismo entre $\pi_1(A,a)$ y $\pi_1(X,a)$;

(ii) todo espacio contráctil tiene grupo fundamental trivial.

Definición 17.38 Si (X,τ) es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es trivial, se dice que (X,τ) es *simplemente conexo*.

Luego, el corolario 17.37 (ii), dice que un espacio contráctil es simplemente conexo.

Contraejemplo 17.39 El recíproco no es cierto: $(\mathbb{S}^n,\tau_{us})$ (para $n>1$) no es contráctil, pero es simplemente conexo.

Teorema 17.40 *Sean (X,τ_X) e (Y,τ_Y) espacios topológicos, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ y las proyecciones coordenadas $p_X\colon (X\times Y,\tau_{Tyc}) \longrightarrow (X,\tau_X)$ y $p_Y\colon (X\times Y,\tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y,\tau_Y)$; el homomorfismo $\varphi\colon \pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$, definido por $\varphi=(\pi_1(p_X),\pi_1(p_Y))$, es un isomorfismo.*

Corolario 17.41 *El producto de espacios simplemente conexos es simplemente conexo.*

17.5 Teorema de Seifert-Van Kampen

Teorema 17.42 (de Seifert-Van Kampen) *Sea (X,τ) un espacio topológico, $U,V\in\tau$ tales que $X=U\cup V$ y $U\cap V$ es no vacío y conexo por caminos. Si $x_0\in U\cap V$, entonces, $\pi_1(X,x_0)$ es el* producto amalgamado *de los grupos $\pi_1(U,x_0)$ y $\pi_1(V,x_0)$, por el subgrupo $\pi_1(U\cap V,x_0)$,*

$$\pi_1(X,x_0)\simeq \pi_1(U,x_0) *_{\pi_1(U\cap V,x_0)} \pi_1(V,x_0).$$

Observación 17.43 Así, todo camino en (X,τ) (basado en x_0) se puede reescribir como un producto de lazos (basados en x_0), cada uno de los cuales *vive* en U o en V. Así pues, un tal camino en (X,τ) puede expresarse como un elemento del producto libre $\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)$. Un lazo en $U\cap V$ representa sólo una clase de $\pi_1(X,x_0)$, aunque puede verse como copia de dos elementos distintos del producto libre, uno en $\pi_1(U,x_0)$ y otro en $\pi_1(V,x_0)$. Así, $\pi_1(X,x_0)$ puede comprenderse como el cociente de este producto libre, por algunas relaciones de $\pi_1(U\cap V,x_0)$ que manifiestan precisamente esta redundancia.

Corolario 17.44 *Si U y V son simplemente conexos y $U\cap V$ es conexo por caminos, entonces (X,τ) es simplemente conexo.*

Corolario 17.45 *Si $U\cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X,x_0)$ es el producto libre $\pi_1(U,x_0)*\pi_1(V,x_0)$.*

Teorema 17.46 *Si V es simplemente conexo, $\pi_1(X, x_0)$ es el cociente de $\pi_1(U, x_0)$ por el menor subgrupo normal que contiene a $\pi_1(U \cap V, x_0)$.*

Ejemplos 17.47 Como aplicación del teorema de Seifert-Van Kampen, se obtiene

(i) para cada $n > 1$, $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ es simplemente conexa: basta con aplicar este teorema a los abiertos $U = \mathbb{S}^n - \{\mathbf{N}\}$ y $V = \mathbb{S}^n - \{\mathbf{S}\}$, donde **N** y **S** son el polo norte y el polo sur, respectivamente;

(ii) $\pi_1(\mathbf{8})$ es el grupo libre con dos generadores, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

17.6 Grupo fundamental de la esfera

El producto de números complejos, define una estructura de grupo topológico sobre la esfera unidad $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} : \|x\| = 1\}$.

El punto de partida para calcular $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es $\exp\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$, la *aplicación exponencial*, definida por $\exp(t) = e^{2\pi i t}$.

La igualdad $e^{2\pi i(s+t)} = e^{2\pi i s} e^{2\pi i t}$, que expresa sucintamente las fórmulas clásicas del coseno y el seno de una suma, dice que la sobreyección continua $\exp$ es además un homomorfismo del grupo aditivo de los números reales $(\mathbb{R}, +)$ sobre el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1, $(\mathbb{S}^1, .)$. El núcleo de este homomorfismo es $\mathbb{Z}$.

Lema 17.48 $\exp\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ *es una aplicación continua, sobreyectiva y abierta.*

Proposición 17.49 *La restricción de* $\exp$, $\exp|_{(t,t+1)}\colon ((t, t+1), \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$, *a cualquier intervalo de amplitud 1, es un homeomorfismo sobre* $(\mathbb{S}^1 - \{\exp(t)\}, \tau_{us})$.

Sea $\sigma\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ un camino. Para cada $s \in [0,1]$, existe $\widetilde{s} \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(s) = \exp(\widetilde{s})$. El problema es que $\widetilde{s}$ no está determinado de modo único a partir de s. El objetivo ahora, es probar que, para cada $s \in [0,1]$, es posible elegir $\widetilde{s} \in \mathbb{R}$, de modo que $\sigma(s) = \exp(\widetilde{s})$ y que la función $\widetilde{\ }\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$, que lleva s en $\widetilde{s}$, sea continua.

Lema 17.50 (Levantamiento de caminos) *Para todo camino $\sigma\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$, con $\sigma(0) = \exp(0) = 1$, existe un único camino $\widetilde{\sigma}\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$, tal que $\widetilde{\sigma}(0) = 0$ y $\exp \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$. El camino $\widetilde{\sigma}$ se llama un* levantamiento *de σ en $\mathbb{R}$.*

Lema 17.51 (Levantamiento de homotopías) *Sean $\sigma, \tau\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ caminos, tales que $\sigma(0) = \tau(0) = 1 \in \mathbb{S}^1$ y $H : \sigma \sim \tau$. Entonces, existe una única aplicación $\widetilde{H}$, tal que $H = \exp \circ \widetilde{H}$ y $\widetilde{H} : \widetilde{\sigma} \sim \widetilde{\tau}$, donde $\exp \circ \widetilde{\tau} = \tau$, $\exp \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$.*

Definición 17.52 Sea $\sigma\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$, un camino cerrado basado en 1. Se define el *grado de σ*, por $\deg(\sigma) = \widetilde{\sigma}(1)$, donde $\widetilde{\sigma}$ es el único levantamiento de σ con $\widetilde{\sigma}(0) = 0$.

Observación 17.53 En general, deg$(\sigma) = \widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0)$, si no se conoce el origen del camino, donde $\widetilde{\sigma}$ es un levantamiento arbitrario de σ. Observar que $\exp \circ \widetilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = 1$, por lo tanto, $\widetilde{\sigma}(1) \in Ker(\exp) \simeq \mathbb{Z}$.

El grado de un camino cerrado denota el *número líquido* de vueltas que un punto móvil $\sigma(t)$ da a lo largo de $\mathbb{S}^1$, cuando el tiempo t varía de 0 a 1. Donde *líquido* significa la diferencia entre el número de vueltas positivas (sentido contrario a las agujas del reloj) y el número de vueltas negativas. Luego, para cada camino cerrado basado en 1, $\sigma\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$, deg$(\sigma) \in \mathbb{Z}$, de hecho, si $\sigma(t) = \exp(mt)$, es deg$(\sigma) = m$.

Teorema 17.54 *La* función índice, ind: $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$, *definida por* ind$([\sigma])$ = deg(σ) *es un isomorfismo de grupos.*

Corolario 17.55 $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ *no es simplemente conexo.*

Corolario 17.56 *Dos caminos cerrados en* $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$*, basados en* 1 *son homótopos si y sólo si sus grados coinciden.*

Corolario 17.57 $\mathbb{S}^1$ *no es un retracto del disco* $(\mathbb{D}^2, \tau_{us})$*.*

Corolario 17.58 (Teorema del punto fijo de Brouwer) *Cualquier aplicación continua entre discos,* $f\colon (\mathbb{D}^2, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{D}^2, \tau_{us})$*, admite un punto fijo.*

Observación 17.59 Este resultado se generaliza al caso de discos de dimensiones mayores que 2. Se utiliza como herramienta que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $(\mathbb{D}^n, \tau_{us})$, pero no basta con argumentos de homotopía para probarlo.

Lema 17.60 *Sea* $f\colon (\mathbb{D}^2, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_{us})$*, tal que* $f(1) = 1$*. El camino en* $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ *definido por* $\sigma(t) = f(\exp(t))$*, posee grado 0.*

En cada instante, existen sobre la tierra puntos antipodales en los que la temperatura y la presión atmosférica son idénticos

Teorema 17.61 (de Borsuk-Ulam) *Sea* $f\colon (\mathbb{S}^2, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_{us})$ *una función continua. Existen puntos antipodales* $z, -z \in \mathbb{S}^2$*, tales que* $f(z) = f(-z)$*.*

Como consecuencia de lo anterior, se deduce que no es posible dibujar un mapa-mundi (homeomorficamente) sobre la página de un atlas

Corolario 17.62 *La esfera* $(\mathbb{S}^2, \tau_{us})$ *no es homeomorfa a ningún subconjunto de* $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$*.*

El siguiente resultado tiene que ver con la división de volúmenes por planos: es posible, con un único corte de cuchillo, dividir dos trozos de pan y uno de jamón, cada uno de ellos en dos mitades iguales, sin importar lo muy irregulares que puedan ser estas piezas, ni sus posiciones relativas

Teorema 17.63 (del bocadillo de jamón) *Sean U, V y W tres abiertos conexos y acotados de $(\mathbb{R}^3, \tau_{us})$. Existe un plano que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas del mismo volumen.*

Los dos siguientes son los análogos en dimensión 1 a los teoremas de Borsuk-Ulam y del *bocadillo de jamón*

Proposición 17.64 *Sea $f\colon (\mathbb{S}^1, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ una aplicación continua. Existen puntos antipodales $x, -x \in \mathbb{S}^1$, tales que $f(x) = f(-x)$.*

Teorema 17.65 (del pastel) *Sean U y V dos abiertos conexos y acotados de $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$. Existe una recta que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas de la misma área.*

La aplicación índice posee también algunas aplicaciones a campos de vectores

Definición 17.66 Un campo de vectores $X\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es *tangente a* $\mathbb{S}^2$, si para cada $\omega \in \mathbb{S}^2$, es $X(\omega)$ es ortogonal a ω.

Lema 17.67 *Sea $\mathbb{D}^2_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ y $X\colon (\mathbb{D}^2_R, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_{us})$ un campo de vectores sin puntos singulares en su frontera. Si el camino $\sigma\colon ([0, 1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^1_R = fr(\mathbb{D}^2_R), \tau_{us})$ definido por $\sigma(t) = X(R\exp(t))$ no es nulhomótopo, entonces X posee un punto singular en el interior de $\mathbb{D}^2_R$.*

Como consecuencia de este resultado, se prueba que existe siempre un punto sobre la superficie de la Tierra, en el cual el viento no sopla

Teorema 17.68 (de la bola peluda) *Todo campo de vectores tangente a $(\mathbb{S}^2, \tau_{us})$ posee un punto singular.*

Observación 17.69 Sin embargo, es posible *peinar* un toro *peludo*.

17.7 Problemas

1.- Una propiedad relativa a espacios topológicos es una *propiedad de homotopía*, si se conserva por equivalencias de homotopía. Probar

(i) toda propiedad de homotopía es una propiedad topológica;

(ii) la conexión, el número de componentes conexas por caminos (luego, la conexión por caminos) y la contractibilidad son propiedades de homotopía;

(iii) la convexidad (cuando tenga sentido), la compacidad y el axioma T_2, no son propiedades de homotopía.

2.- Probar las siguientes propiedades relativas a espacios contráctiles

(i) todo conjunto convexo en $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ es contráctil;

(ii) todo espacio contráctil es conexo por caminos;

(iii) la imagen continua de un espacio contráctil no es en general contráctil;

(iv) un retracto de un espacio contráctil, es también contráctil;

(v) (X, τ) es contráctil si y sólo si todo átomo $\{x\}$ en X es un retracto por deformación de (X, τ).

3.- Probar las siguientes propiedades relativas a retractos

(i) $\mathbb{S}^n$ es un retracto por deformación fuerte de $(\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}, \tau_{\mathbf{us}})$, donde **0** es el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$;

(ii) el ecuador de $\mathbb{S}^n$ es un retracto por deformación de $(\mathbb{S}^n - \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}, \tau_{us})$, donde **N** es el polo norte y **S** el polo sur;

(iii) el disco cerrado unidad $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$, es un retracto por deformación de $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$;

(iv) $\mathbb{S}^1$ es un retracto por deformación de $(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \tau_{us})$;

(v) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ ó $(x+1)^2 + y^2 = 1\}$ (es decir, la figura de ocho) es un retracto por deformación de $(\mathbb{R}^2 - \{(-1, 0), (1, 0)\}, \tau_{us})$;

(vi) sean los conjuntos $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^2$, definidos por $X = \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ y $Z = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$. Probar que X es un retracto por deformación de $(X \cup Y, \tau_{us})$, pero no sucede lo mismo con $X \cup Z$.

4.- Probar las siguientes propiedades relativas a conos de espacios

(i) el cono de cualquier espacio topológico es un espacio contráctil. Concluir que todo espacio topológico puede embeberse en un espacio contráctil;

(ii) una aplicación continua $f\colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es nulhomótopa si y sólo si posee una extensión continua al cono de X.

5.- Probar las siguientes propiedades relativas a la banda de Möbius $(\mathbb{M}, \tau_{us})$

(i) el ecuador de la banda de Möbius es un retracto por deformación fuerte de $(\mathbb{M}, \tau_{us})$;

(ii) concluir que $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$ tiene el mismo tipo de homotopía que $(\mathbb{M}, \tau_{us})$;

(iii) deducir que $(\mathbb{M}, \tau_{us})$ y el cilindro son homotópicamente equivalentes.

6.- Se pide probar

(i) si $f, g: (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ son aplicaciones continuas, tales que $f(x) \neq -g(x)$ para todo punto $x \in X$, entonces $f \simeq g$. Deducir que si $f: (X, \tau) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ es continua y no sobreyectiva, entonces f es nulhomótopa;

(ii) si $f: (\mathbb{S}^n, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ es continua y sin puntos fijos, es homótopa a la aplicación antipodal;

(iii) si $f: (\mathbb{S}^n, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ es continua y $f(x) \neq -x$, para cada $x \in \mathbb{S}^n$, es homótopa a la identidad.

7.- Sea $p \in \mathbb{S}^n$ y $f: (\mathbb{S}^n, \tau_{us}) \longrightarrow (Y, \tau)$ continua. Probar que son equivalentes

(i) f es nulhomótopa;

(ii) f puede extenderse a una aplicación continua $F: (\mathbb{D}^{n+1}, \tau_{us}) \longrightarrow (Y, \tau)$;

(iii) f es homótopa (rel $\{p\}$) a la aplicación constante igual a $f(p)$.

Concluir que toda aplicación continua $f: (\mathbb{S}^n, \tau_{us}) \longrightarrow (Y, \tau)$, con Y contráctil, tiene una extensión continua a $(\mathbb{D}^{n+1}, \tau_{us})$.

8.- Sea X el complementario de un punto en el toro $(\mathbb{T}^2, \tau_{us})$. Probar que existe un subconjunto de X, homeomorfo a la figura de ocho y que es un retracto por deformación fuerte de (X, τ_{us}).

9.- Probar las siguientes propiedades relativas a productos

(i) dos aplicaciones continuas $f, g: (X, \tau) \longrightarrow (Y_1 \times \ldots \times Y_n, \tau_{Tyc})$ son homótopas si y sólo si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, es $p_i \circ f \simeq p_i \circ g$, donde $p_i: (Y_1 \times \ldots \times Y_n, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (Y_i, \tau_i)$ es la proyección canónica;

(ii) $(Y_1 \times \ldots \times Y_n, \tau_{Tyc})$ es contráctil si y sólo si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, es (Y_i, τ_i) contráctil.

10.- Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos. Probar que $[X, Y]$ tiene un único elemento en los siguientes casos

(i) (Y, τ_Y) es contráctil;

(ii) (X, τ_X) es contráctil e (Y, τ_Y) conexo por caminos.

11.- Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subset X$, $i_A: (A, \tau_A) \longrightarrow (X, \tau)$ la inclusión natural y $r: (X, \tau) \longrightarrow (A, \tau_A)$ una retracción. Dado $a \in A$, demostrar

(i) $\pi_1(r): \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a)$ es un epimorfismo;

(ii) $\pi_1(i_A): \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ es un monomorfismo;

(iii) si r es una retracción por deformación, $\pi_1(i_A)\colon \pi_1(A,a) \longrightarrow \pi_1(X,a)$ es un isomorfismo.

12.- Sea (X,τ) un espacio conexo por caminos, $a,b \in X$ y σ un camino uniendo estos puntos. Demostrar que $\pi_1(X,a)$ es abeliano si y sólo el isomorfismo $\varphi_\sigma\colon \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(X,b)$, definido por σ, no depende de hecho de σ.

13.- Probar que si (X,τ) es un espacio conexo por caminos, son equivalentes

(i) (X,τ) es simplemente conexo,

(ii) dos aplicaciones cualesquiera $f,g\colon (\mathbb{S}^1,\tau_{us}) \longrightarrow (X,\tau)$ son homótopas,

(iii) toda aplicación continua $f\colon (\mathbb{S}^1,\tau_{us}) \longrightarrow (X,\tau)$ se extiende a la bola unidad cerrada $(\mathbb{D}^2,\tau_{us})$.

14.- Sea (X,τ) un espacio topológico, $x \in X$ y $c(x)$ la componente conexa por caminos que contiene a x. Probar que los grupos $\pi_1(X,x)$ y $\pi_1(c(x),x)$ son isomorfos. Por esta razón, basta con enunciar la mayoría de las propiedades de homotopía para espacios conexos por caminos.

15.- Probar que el conjunto de los puntos $z \in \mathbb{D}^2$ para los que $(\mathbb{D}^2 - \{z\},\tau_{us})$ es simplemente conexo es precisamente $\mathbb{S}^1 = fr(\mathbb{D}^2)$. Deducir que si $f\colon (\mathbb{D}^2,\tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{D}^2,\tau_{us})$ es un homeomorfismo, entonces $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

16.- Calcular los grupos fundamentales de

(i) un espacio discreto, un espacio indiscreto, la recta racional, el toro $(\mathbb{T}^2,\tau_{us})$, la figura de ocho en el plano, una corona circular en el plano, $(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},\tau_{us})$;

(ii) la rosa de n pétalos, (G_n,τ_{us}), unión por un punto de n copias de $\mathbb{S}^1$;

(iii) $(X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x,y \leq 1 \text{ y } x \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\},\tau_{us})$;

(iv) si $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}\}$ e $Y = \mathbb{R}^2 - A$, probar que $\pi_1(Y,(1,1))$ es un grupo libre con una cantidad numerable de generadores;

(v) si (X,τ) es el espacio T_2 y $X = A \cup B$, donde A y B son homeomorfos a un toro y $A \cap B = \{x_0\}$, calcular el grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$;

(vi) (X,τ_{us}), el espacio obtenido de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, eliminando k subconjuntos disjuntos y homeomorfos cada uno de ellos al disco abierto $\mathbb{D}^n$;

(vii) $(\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n,\tau_{us})$, $(\mathbb{R}^m - \mathbb{S}^n,\tau_{us})$, $(\mathbb{S}^m - \mathbb{S}^n,\tau_{us})$, cuando tengan sentido;

(viii) (X,τ), donde $X = \{a,b,c,d\}$ y $\tau = \{X,\emptyset,\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{a,d\},\{a\},\{d\}\}$.

17.- Sean σ y τ dos lazos en $(\mathbb{R}^2,\tau_{us})$ con punto base $(0,0)$. Construir una homotopía de caminos entre ellos.

18.- Sean σ y τ los lazos en $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$, $\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ y $\tau(t) = (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t)$. Demostrar que no son caminos homótopos.

19.- Demostrar las siguientes propiedades

(i) $(\mathbb{R}^2 - \{n \text{ puntos}\}, \tau_{us})$ no es homeomorfo a $(\mathbb{R}^2 - \{m \text{ puntos}\}, \tau_{us})$, si $n \neq m$;

(ii) $(\mathbb{R}^n - \{p\}, \tau_{us})$ es simplemente conexo, si $n > 2$;

(iii) $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$ y $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ $(n > 2)$ no son homeomorfos;

(iv) $(\mathbb{S}^2, \tau_{us})$ y $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ $(n > 2)$ no son homeomorfos.

20.- Agrupar los siguientes caracteres del alfabeto por tipos de homotopía
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, Ñ, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, ?, !, :, Á, É, Í, Ó, Ú.

21.- Utilizar las propiedades de la aplicación índice para dar una prueba topológica del *Teorema Fundamental del Algebra*: un polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, de grado $n \geq 1$ y de coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tiene una raíz en el plano complejo.

22.- Sea (X, τ_{us}) el toro $\mathbb{T}^2$ privado de un punto (es decir, un *asa*). Se pide

(i) probar que (X, τ_{us}) tiene el tipo de homotopía de la figura de ocho;

(ii) probar que la inclusión $i: (\mathbb{S}^1, \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau_{us})$ induce sobre los grupos fundamentales la aplicación $\pi_1(i): \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(X)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento $a^{-1}b^{-1}ab$, donde $\pi_1(X)$ es el grupo libre generado por a y b;

(iii) aplicar el teorema de Seifert Van-Kampen para probar que $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ es el grupo con dos generadores a y b y relaciones $a^{-1}b^{-1}ab = 1$.

23.- Sea (Y, τ_{us}) la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ privada de un punto. Se pide

(i) probar que (Y, τ_{us}) tiene el tipo de homotopía de la figura de ocho;

(ii) probar que la inclusión $j: (\mathbb{S}^1 \tau_{us}) \longrightarrow (Y \tau_{us})$ induce sobre los grupos fundamentales la aplicación $\pi_1(j): \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(Y)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento $a^{-1}b^{-1}ab^{-1}$, donde $\pi_1(Y)$ es el grupo libre generado por a y b;

(iii) aplicar el teorema de Seifert Van-Kampen para ver que $\pi_1(\mathbb{K}^2)$ es el grupo con dos generadores a y b y relaciones $a^{-1}b^{-1}ab^{-1} = 1$;

(iv) observar que el asa e (Y, τ_{us}) tienen el mismo tipo de homotopía, sin embargo, no son espacios homeomorfos. ¿Por qué?

24.- Sea (Z, τ_{us}) el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ privado de un punto. Se pide

(i) probar que (Z, τ_{us}) tiene el tipo de homotopía de una circunferencia;

(ii) probar que la inclusión $k: (\mathbb{S}^1, \tau_{us}) \longrightarrow (Z, \tau_{us})$ induce sobre los grupos fundamentales la aplicación $\pi_1(k): \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(Z)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento a^2, donde $\pi_1(Z)$ es el grupo generado por a;

(iii) aplicar el teorema de Seifert Van-Kampen para probar que $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$ es el grupo con un generador a y la relación $a^2 = 1$;

(iv) probar que $\mathbb{S}^1$ no es un retracto de $(\mathbb{RP}^2, \tau_{us})$.

25.- Sea X el conjunto compacto en $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$ que consiste en todos los segmentos que unen el punto $p = (0, 1)$ con $q_n = (\frac{1}{n}, 0)$, para $n \in \mathbb{N}$, junto con el segmento que une p al origen de coordenadas $(0, 0)$. Sea $A = \{(0, 0)\} \subset X$. Se pide probar

(i) la inclusión $i_A: (A, \tau_{us}) \longrightarrow (X, \tau_{us})$ es una equivalencia de homotopía;

(ii) A no es un retracto por deformación fuerte de (X, τ_{us}).

26.- Sea $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ una aplicación continua. Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, demostrándolas o dando un contraejemplo

(i) si f es sobreyectiva, entonces $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es sobreyectiva;

(ii) si f es inyectiva, entonces $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es inyectiva;

(i) si f es biyectiva, entonces $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es biyectiva.

Tema XVIII

Ejemplos adicionales

18.1 Espacios métricos

Para las definiciones básicas relativas a espacios métricos, ver el problema 6 en el párrafo 2.5.

18.1.1 Propiedades

Definición 18.1 En el espacio métrico (X, d), si $A, B \subset X$, se define la *distancia* de A a B, como $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Definición 18.2 En (X, d), si $A \subset X$, el *diámetro* de A es $\delta(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$. Por definición, $\delta(\emptyset) = 0$. Se dice que A es *acotado,* si $\delta(A) \in \mathbb{R}$.

Definición 18.3 Una *isometría* $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ entre dos espacios métricos, es una aplicación biyectiva que preserva las distancias, es decir, para cada par de puntos $a, b \in X$, es $d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b))$.

Lema 18.4 *La relación* "ser isométrico a" *es una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios métricos.*

Definición 18.5 Dos métricas d_1 y d_2 sobre X se dicen *equivalentes* si generan la misma topología.

Lema 18.6 *Toda métrica d sobre X es equivalente a una métrica acotada.*

Lema 18.7 (del cubrimiento de Lebesgue) *Si $\{U_1, \dots, U_n\}$ es un cubrimiento abierto finito de un espacio métrico compacto (X, d), existe $\varepsilon > 0$ tal que si A es un conjunto de diámetro $\delta(A) < \varepsilon$, entonces $A \subset U_i$ para algún i. El valor ε se llama* número de Lebesgue del cubrimiento.

18.1.2 Continuidad en espacios métricos

Definición 18.8 Una aplicación $f\colon (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_X)$ es *uniformemente continua* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que para cada $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta_\varepsilon$, es $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Lema 18.9 *Una función continua es uniformemente continua.*

Definición 18.10 Una función $f\colon (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ se dice *lipschitziana* si existe $\lambda > 0$, tal que para cada $x, y \in X$, se cumple $d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y)$.

Lema 18.11 *Se verifica*

(i) una función lipschitziana es uniformemente continua;

(ii) las isometrías son aplicaciones lipschizianas.

18.1.3 Completitud en espacios métricos

Definición 18.12 Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en (X, d) es *de Cauchy*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_\varepsilon$ es $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Lema 18.13 *En (X, d_X), se verifica*

(i) toda sucesión convergente es de Cauchy;

(ii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y posee una subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente;

(iii) si $f\colon (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ es uniformemente continua y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Definición 18.14 (X, d) es *completo*, si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Lema 18.15 *Si (X, d) es completo, un subespacio (A, d_A) es completo si y sólo si $A \in \mathcal{C}_d$.*

Definición 18.16 (X, d) tiene la *propiedad de Cantor*, si dada cualquier familia decreciente y contable de cerrados no vacíos $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$, tales que $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\delta(C_n)\} = 0$, es $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{\delta(C_n)\} \neq \emptyset$.

Teorema 18.17 (de Cantor) *(X, d) es completo si y sólo si posee la propiedad de Cantor.*

Proposición 18.18 *Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos. Se cumple*

(i) si (X, d_X) e (Y, d_Y) son isométricos, (X, d_X) es completo si y sólo si (Y, d_Y) lo es,

(ii) la completitud no es una propiedad topológica: si (X, d_X) e (Y, d_Y) son homeomorfos, no hay relación entre la completitud de ambos espacios.

Proposición 18.19 (Compleción de un espacio métrico) *Sea (X, d) un espacio métrico no completo. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en (X, d). Entonces*

(i) la relación sobre $\mathcal{C}$ dada por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si $\{d(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$, es una relación de equivalencia sobre $\mathcal{C}$; denotamos $\widetilde{x}$ a la clase de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\widetilde{X}$ al espacio cociente;

(ii) la aplicación $\delta\colon \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\delta(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \{d(x_n, y_n)\}$, define una distancia en $\widetilde{X}$;

(iii)la aplicación $f\colon (X, d) \longrightarrow (\widetilde{X}, \delta)$ que lleva cada $x \in X$ en la clase de la sucesión constante igual a x, es una isometría de (X, d) en una parte densa de $(\widetilde{X}, \delta)$;

(iv) el espacio métrico $(\widetilde{X}, \delta)$ es completo: se dice que es la compleción métrica *de (X, d).*

Teorema 18.20 (del punto fijo) *Sea (X, d) un espacio métrico completo y una aplicación* contractiva *$f\colon (X, d) \longrightarrow (X, d)$, es decir, una función lipschitziana de constante $\lambda < 1$. Si $x_0 \in X$, se define*

$$x_1 = f(x_0), \ \ldots, \ x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0).$$

Entonces

(i) $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$, y por lo tanto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy;

(ii) si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a, entonces a es un punto fijo para f y es el único.

18.1.4 Metrizabilidad

Definición 18.21 Un espacio topológico (X, τ) es *metrizable*, si existe una métrica d sobre X que genera la topología.

Proposición 18.22 *Un producto de espacios es metrizable si y sólo si cada espacio factor lo es y los espacios factores se reducen a un punto para todos, excepto una familia contable de índices.*

Teorema 18.23 (de metrización de Urysohn) *Las siguientes propiedades son equivalentes para un espacio (X, τ) T_1*

(i) (X, τ) es regular y C_{II},

(ii) (X, τ) es separable y metrizable,

(iii) (X, τ) *puede embeberse como un subespacio de un cubo* $([0,1]^{\mathbb{N}}, \tau_{Tyc})$.

Corolario 18.24 *La imagen continua de un espacio métrico compacto en un espacio* T_2 *es metrizable.*

18.2 El conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor puede pensarse como el intermedio entre el punto y la recta: es un conjunto *con muchos agujeros*, de longitud nula, tiene tantos puntos como $\mathbb{R}$, es autosemejante (es decir, cada una de sus partes, observada con una lente de aumento adecuada, reproduce en cierto sentido el conjunto total). Se trata de un conjunto de probada utilidad en topología (foliaciones, teoría de finales), en sistemas dinámicos (teoría ergódica), en teoría de la medida, en álgebra (fracciones continuas), etc. y es una fuente continua de contraejemplos.

18.2.1 Definición y propiedades fundamentales

Se divide el intervalo $[0,1]$ en tres intervalos de la misma amplitud, se elimina el intervalo abierto central (que se llamará intervalo abierto de tipo 1) $\delta = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y se conservan los intervalos cerrados (que se llamarán de tipo 1) $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Se divide cada intervalo cerrado de tipo 1 en tres intervalos de la misma amplitud. Se eliminan de nuevo los intervalos abiertos centrales (intervalos abiertos de tipo 2), $\delta_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $\delta_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, y se conservan los intervalos cerrados (de tipo 2) resultantes, $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $\Delta_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $\Delta_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$.
Se continúa de este modo el proceso, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$, 2^n intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo n donde i_j es 0 ó 1. Cada intervalo cerrado de tipo n se divide en tres partes de la misma amplitud, conservando dos intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n 0}$ y $\Delta_{i_1 \cdots i_n 1}$ (llamados intervalos cerrados de tipo $n+1$) y eliminando cada intervalo abierto $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo $n+1$ que queda entre ellos. Sea C_n la reunión de los intervalos cerrados de tipo n y $\mathfrak{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Definición 18.25 $\mathfrak{C}$ se llama *conjunto perfecto de Cantor, discontinuo de Cantor* o *conjunto ternario de Cantor*.

Proposición 18.26 $\mathfrak{C}$ *verifica las siguientes propiedades en* $([0,1], \tau_{us})$

(i) $\mathfrak{C}$ *es un conjunto cerrado y no vacío, luego compacto;*

(ii) la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso de construcción de $\mathfrak{C}$ *es la longitud del intervalo* $[0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$, *en ese sentido,* $\mathfrak{C}$ *es un conjunto* pequeño*;*

(iii) todo $x \in [0,1]$*, admite al menos un desarrollo triádico* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$*, donde* $a_n \in \{0,1,2\}$*, y se representa del modo* $x = 0.a_1 a_2 \cdots$*. Si* x *admite un desarrollo triádico que no contiene la cifra 1, entonces este desarrollo es único. Además,* $x \in \mathfrak{C}$ *si y sólo si* x *posee una representación ternaria única* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$*, donde* a_n *es* 0 *ó* 2*. Se deduce que* $\mathfrak{C}$ *es no contable y en ese sentido,* $\mathfrak{C}$ *es un conjunto* grande*;*

(iv) $\mathfrak{C}$ *no posee puntos aislados en* $([0,1], \tau_{us})$*, más aún,* $\mathfrak{C}^d = \mathfrak{C}$*, es decir es un conjunto* perfecto*;*

(v) $\mathfrak{C}$ *tiene interior vacío, es decir, es* nada-denso*;*

(vi) $\mathfrak{C}$ *posee dos tipos de puntos*

- *los puntos de* primera especie *son los extremos de los intervalos abiertos eliminados durante el proceso de construcción. Se trata de una cantidad contable de puntos, que son densos en* $(\mathfrak{C}, \tau_{us})$*,*
- *el resto son los* puntos de segunda especie*, y es una familia no contable de puntos;*

(vii) $\mathfrak{C}$ *es totalmente disconexo y no es localmente conexo;*

(viii) $(\mathfrak{C}, \tau_{us})$ *es homeomorfo al espacio* $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,2\}, \tau_{Tyc}\right)$*, producto de una familia numerable de espacios discretos* $(\{0,2\}, \tau_{dis})$*;*

(ix) todo espacio métrico (X,d) *totalmente disconexo, perfecto y compacto es homeomorfo a* $(\mathfrak{C}, \tau_{us})$*: por esta razón, a este tipo de espacios se les llama* espacios de Cantor*;*

(x) todo compacto métrico es la imagen continua de $(\mathfrak{C}, \tau_{us})$*;*

(xi) $\mathfrak{C}$ *es un espacio* homogéneo*, en el sentido de que para cada par de puntos* $x, y \in \mathfrak{C}$*, existe un homeomorfismo* $f : (\mathfrak{C}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathfrak{C}, \tau_{us})$ *tal que* $f(x) = y$*;*

(xii) $\mathfrak{C}$ *es la unión disjunta de dos copias de si mismo, es decir, es* autosemejante*;*

(xiii) todo abierto en $(\mathfrak{C}, \tau_{us})$*, es homeomorfo a* $\mathfrak{C}$ *o a* $\mathfrak{C} - \{0\}$*;*

(xiv) $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} = [0,2]$.

18.2.2 Funciones de Cantor

La escalera del diablo es un ejemplo de *función de Cantor*.

Se construye una aplicación $f : (\mathfrak{C}, \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})$ del modo siguiente: si $c \in \mathfrak{C}$ tiene la expansión ternaria $c = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, con $a_i \neq 1$, entonces se define $f(c) = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$. Esta función es la *escalera del diablo*.

Lema 18.27 *La escalera del diablo es uniformemente continua y sobreyectiva.*

Proposición 18.28 *f posee una extensión continua natural $f^*\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1], \tau_{us})$.*

En efecto: si a y b son los puntos finales (izquierdo y derecho) de un intervalo abierto excluido en el n-ésimo paso de la construcción de $\mathfrak{C}$, entonces es

$$a = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \quad \text{y} \quad b = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n},$$

donde $a_i \neq 1$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Se define en tal caso,

$$f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} = f(b).$$

Y $f^*(x) = f(a) = f(b)$, para $x \in [a,b]$, es la extensión continua de f buscada.

18.2.3 Un Cantor de medida no nula

De $[0,1]$, se elimina un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{4}$. De los dos intervalos restantes, se quita el central de longitud $\frac{1}{16}$. En la k-ésima etapa, se eliminan de las 2^k piezas un segmento abierto de longitud $\frac{1}{4}.2^{-2k}$. En una cantidad numerable de pasos, se elimina un conjunto de longitud total $\frac{1}{4} \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k 2^{-2k} = \frac{1}{2}$, y el conjunto resultante $\mathfrak{C}^*$ es un espacio de Cantor de longitud $\frac{1}{2}$. Así, la propiedad del conjunto ternario de Cantor de poseer medida de Lebesgue nula, puede modificarse hasta obtener espacios de Cantor de longitudes arbitrarias.

18.2.4 El torbellino de Cantor

Sea X el eje de abscisas en el plano $\mathbb{R}^2$, para $A \subset X$, consideramos $S^+(c, A)$ la unión de los semicírculos en el semiplano superior $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, con centro en $(c, 0)$ y puntos finales en A y $S^-(c, A)$ la unión de los semicírculos en el semiplano inferior $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$, con centro en $(c, 0)$ y puntos finales en A.

Sea la inclusión usual de la recta en el plano $i\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tau_{us})$. Sean los conjuntos $T_0 = S^+(\frac{1}{2}, \mathfrak{C}_0)$ y $T_1 = S^-(\frac{3}{4}, \mathfrak{C}_1)$, donde $\mathfrak{C}_0 = i(\mathfrak{C})$ y $\mathfrak{C}_1 = i(\mathfrak{C} \cap (\frac{2}{3}, 1))$. Se considera la similaridad $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$. Para $n > 1$, se define $T_n = f^{(n)}(T_1)$, donde $f^{(n)}$ denota la n-ésima iteración de f. Se observa que $T_2 \cap X$ es la imagen del segundo cuarto de $\mathfrak{C}$, que es el mismo que la última mitad de $\frac{1}{3}\mathfrak{C}$, y, más en general $T_n \cap X = f^{(n)}(\mathfrak{C}_0)$. Al conjunto $\mathfrak{T} = \bigcup\limits_{n\geq 1} T_n$, se le llama *torbellino de Cantor*.

Proposición 18.29 $(\mathfrak{T}, \tau_{us})$ *es compacto, conexo y no es localmente conexo.*

18.2.5 La curva de Sierpinski

La construcción de este conjunto es similar a la del conjunto de Cantor. Se divide el cuadrado unidad $[0,1]^2$ en 9 cuadrados congruentes de lado $\dfrac{1}{3}$ y se prescinde del que queda contenido en el interior de $[0,1]^2$. Sea A_1 la unión de los ocho cuadrados restantes. Cada uno de éstos se vuelve a dividir en 9 cuadrados de lado $\dfrac{1}{9}$, y se prescinde de cada cuadrado contenido el interior del que haya sido dividido. Sea A_2 la unión de los 64 cuadrados restantes. Continuando este proceso, se obtiene inductivamente un conjunto A_n que es unión de 8^n cuadrados cada uno de lado $\dfrac{1}{3^n}$, y se llama *curva de Sierpinki* a la intersección $\mathfrak{S} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Lema 18.30 $(\mathfrak{S}, \tau_{us})$ *es conexo y compacto (es lo que se denomina un* continuo*, es decir, un espacio T_2, conexo y compacto).*

Observar que la conexión es lo que le hace diferir del conjunto de Cantor. Más aún

Proposición 18.31 $\mathbb{R}^2 - \mathfrak{S}$ *se descompone en una cantidad numerable de abiertos disjuntos.*

Notar que al pasar de $\mathbb{R}^2 - A_{n-1}$ a $\mathbb{R}^2 - A_n$ el número de abiertos se incrementa en $2^{3(n-2)}$.

18.3 Curvas de Peano

Es posible rellenar un cuadrado con una curva, o lo que es lo mismo

Proposición 18.32 *Existe una función continua y sobreyectiva* $f\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow ([0,1]^2, \tau_{us})$.

Vamos a construir una: dividimos $[0,1]$ en cuatro intervalos iguales

$$I_1^1 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \quad I_2^1 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad I_3^1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \quad I_4^1 = \left[\frac{3}{4}, 1\right].$$

Y se continúa inductivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ se divide $[0,1]$ en 4^n subintervalos iguales, de modo que si $1 \leq k < 4^n$, $I_k^n \cap I_{k+1}^n$ es un punto y $0 \in I_1^n$. Además, si $i < j$, $x \in I_i^n$ e $y \in I_j^n$ es $x \leq y$. Y $x = y$ si y sólo si $j = i+1$ y $\{x\} = \{y\} = I_i^n \cap I_j^n$.

Por otro lado, se divide $[0,1]^2$ en cuatro cuadrados congruentes Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1 y Q_4^1. Continuamos este proceso, en la etapa n, se divide $[0,1]^2$ en 4^n cuadrados Q_i^n, donde $1 \leq i \leq 4^n$. Estos cuadrados se etiquetan de modo que si $1 \leq i < 4^n$, Q_i^n y Q_{i+1}^n comparten una arista. Por otro lado, se requiere que el primero de los cuatro subcuadrados de Q_i^n viva en el primer cuadrado Q_1^{n-1}, el segundo de los cuatro subcuadrados de Q_i^n debe estar en Q_2^{n-1}, etc. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, es $(0,0) \in Q_1^n$.
Se argumenta de manera inductiva, de modo que el orden en los subcuadrados está unívocamente determinado. El orden de cada etapa junto con el resto de las condiciones determinan el orden de la etapa siguiente. En efecto, para las dos primeras etapas, si $(0,0) \in Q_1^2$, debe ser $Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, Q_4^2 \subset Q_1^1$ y Q_4^2 debe cortar a $Q_5^2 \subset Q_2^1$, todo esto implica que Q_4^2 debe o bien estar en el cuadrado a la derecha de Q_1^2 o en el subcuadrado diagonalmente opuesto ubicado arriba y a la derecha. Pero, no puede estar en esta diagonal, pues esta configuración implicaría que Q_2^2 y Q_3^2 deberían ser subcuadrados diagonalmente opuestos, violando la condición previamente impuesta que afirma que subcuadrados consecutivamente etiquetados deben compartir una arista.
Observar además que si $I_j^{n+1} \subset I_i^n$, entonces es $Q_j^{n+1} \subset Q_i^n$.

Si $a \in [0,1]$, se puede escribir $\{a\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_{n_k}^k$ para una cierta elección de subíndices $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Llamamos $\{f(a)\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Q_{n_k}^k$. Queda así definida la aplicación $f\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow ([0,1]^2,\tau_{us})$ anunciada en la proposicion 18.32, que es continua y sobreyectiva, pero no inyectiva.

En general, pueden probarse resultados del tipo

Proposición 18.33 *Sean X un subconjunto compacto en $(\mathbb{R},\tau_{us})$, $Z \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f\colon (X,\tau_{us}) \longrightarrow (Z,\tau_{us})$ una función continua. Si $a = \inf(X)$ y $b = \sup(X)$, existe una extensión continua de f, $F\colon ([a,b],\tau_{us}) \longrightarrow (Z,\tau_{us})$.*

Proposición 18.34 *Si (X,τ) es un compacto métrico, existe una aplicación continua y sobreyectiva $f\colon (\mathfrak{C},\tau_{us}) \longrightarrow (X,\tau)$.*

Proposición 18.35 *Si $Z \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y convexo, existe una aplicación continua y sobreyectiva $f\colon ([0,1],\tau_{us}) \longrightarrow (Z,\tau_{us})$: es una* curva de Peano.

18.4 Espacios de Baire

Dos de los más poderosos teoremas del Análisis Funcional, el *teorema de la aplicación abierta* y el *principio de la acotación uniforme* (ver [Wi], ejercicio 25D) son consecuencias directas de la aplicación del teorema de Baire, que vamos a ver a continuación.

Definición 18.36 (X,τ) es un *espacio de Baire* si la intersección de toda familia contable de conjuntos abiertos densos en X es denso.

Definición 18.37 $A \subset X$ es *nada denso* en (X, τ) si $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$.

Definición 18.38 $A \subset X$ es *de primera categoría* en (X, τ) si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ donde A_n es nada denso en (X, τ). En otro caso, se dice que A es de *de segunda categoría* en (X, τ). Se pueden pensar los conjuntos de primera categoría como *"delgados"* y los de segunda categoría como *"gruesos"*.

Proposición 18.39 *X es de segunda categoría en (X, τ) si y sólo si la intersección de toda familia contable de abiertos densos en X es no vacía.*

Teorema 18.40 (de Baire) *Todo G_δ-conjunto en un espacio compacto y T_2 es un espacio de Baire.*

Corolario 18.41 *Se verifican las propiedades*

(i) un espacio localmente compacto y T_2 es de Baire;

(ii) un espacio completamente metrizable es de Baire.

Ejemplos 18.42 El anterior resultado puede aplicarse para comprobar que

1) $(\mathbb{Q}, \tau_{us})$ no es completamente metrizable;

2) el subespacio de los números irracionales $(\mathbb{I}, \tau_{us})$ es un espacio de Baire.

18.5 Grupos topológicos

18.5.1 Definición y propiedades

Definición 18.43 Un grupo topológico (G, τ) es un grupo G provisto de una topología τ, de modo que las aplicaciones producto $m : (G \times G, \tau \times \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ e inversión $i : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$, dadas por $m(x_1, x_2) = x_1 x_2$ e $i(x) = x^{-1}$ son aplicaciones continuas.

Ejemplos 18.44 Son grupos topológicos $(\mathbb{Z}, +, \tau_{us})$, $(\mathbb{R}, +, \tau_{us})$, $(\mathbb{R}_+, ., \tau_{us})$, $(\mathbb{S}^1, ., \tau_{us})$ ($\mathbb{S}^1$ se piensa como el espacio de los números complejos de norma 1) y $(\mathbb{R}^n, +, \tau_{us})$.

Lema 18.45 *Sea (G, τ) un grupo topológico y $\alpha \in G$ un punto fijo. Las aplicaciones lineales $f_\alpha, g_\alpha : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ dadas por $f_\alpha(x) = \alpha x$ y $g_\alpha(x) = x\alpha$ son homeomorfismos.*

Corolario 18.46 *Todo grupo topológico (G, τ) es un* espacio homogéneo, *es decir, para cada par de puntos $x, y \in G$, existe un homeomorfismo $h : (G, \tau) \longrightarrow (G, \tau)$ que lleva x en y.*

Si $A, B \subset G$, se definen los conjuntos $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$, $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ y $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$.

Lema 18.47 *Sea (G,τ) un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base de entornos del neutro $e \in G$. Entonces, para cada $x \in G$, las familias $\{xU : U \in \mathcal{B}\}$ y $\{Ux : U \in \mathcal{B}\}$ son bases de entornos en el punto x.*

Proposición 18.48 *Sea (G,τ) un grupo topológico y $\mathcal{B}$ una base de entornos abiertos del neutro $e \in G$. Entonces*

(i) para cada $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subset U$;

(ii) para todo $U \in \mathcal{B}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^{-1} \subset U$;

(iii) para cada $U \in \mathcal{B}$ y $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $xV \subset U$;

(iv) para todo $U \in \mathcal{B}$ y $x \in G$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$;

(v) para cada $U, V \in \mathcal{B}$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W \subset U \cap V$,

(vi) $\{e\} = \bigcap\{U : U \in \mathcal{B}\}$.

Y recíprocamente, dada una colección de conjuntos satisfaciendo (i) a (vi), si se usa el lema18.47 para obtener una base de entornos en cada $x \in G$, se obtiene una topología τ sobre G que hace de G un grupo topológico.

Proposición 18.49 *En (G,τ), los entornos simétricos abiertos del elemento neutro forman una base.*

Lema 18.50 *En (G,τ), si $U, V \in \tau$, es $UV \in \tau$.*

No sucede los mismo para cerrados, pero

Proposición 18.51 *En (G,τ), si $A, B \in \mathcal{C}$ y A es compacto, es $AB \in \mathcal{C}$.*

Proposición 18.52 *En (G,τ), si $A, B \subset G$, se verifica:*

(i) $\overset{\circ}{A}\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{AB}}$; *(ii)* $\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{AB}$;

(iii) $\overset{\circ}{\widehat{(A^{-1})}} = (\overset{\circ}{A})^{-1}$; *(iv)* $\overline{(A^{-1})} = (\overline{A})^{-1}$.

Contraejemplo 18.53 En la proposición anterior, no se dan las igualdades

1) en $(\mathbb{R}, +, \tau_{us})$, si $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{A} = \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$, luego $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} = \emptyset$, pero $\overset{\circ}{\widehat{A+B}} = \mathbb{R}$;

2) en $(\mathbb{R} - \{0\}, ., \tau_{us})$, si $A = \mathbb{Z} - \{0\}$ y $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, es $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, así $\overline{A}.\overline{B} = \mathbb{Q} - \{0\}$, pero $\overline{AB} = \mathbb{R} - \{0\}$.

Proposición 18.54 *Si (G,τ) un grupo topológico es T_1, entonces es T_2 y regular.*

18.5.2 Subgrupos y subespacios

Lema 18.55 *En (G,τ), si H es un subgrupo (respectivamente, subgrupo abeliano, subgrupo normal), lo mismo sucede con $\overline{H}$.*

Proposición 18.56 *En (G,τ), sea H un subgrupo. Se verifica*

(i) H es discreto si y sólo si posee un punto aislado;

(ii) si $H \in \tau$, es $H \in \mathcal{C}$;

(iii) si H es localmente compacto, es $H \in \mathcal{C}$.

Observación 18.57 En (G,τ), si H es un subgrupo y $H \in \mathcal{C}$, no es necesariamente $H \in \tau$.

18.5.3 Productos de grupos topológicos

Si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos, sobre $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ puede definirse una operación de grupo por: si $x, y \in G$, $xy \in G$ está definido por $p_i(xy) = p_i(x)p_i(y)$, con las notaciones obvias. Entonces

Proposición 18.58 *Dada una familia $\{(G_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ de grupos topológicos, se considera el espacio producto $(G = \prod\limits_{i\in I} G_i, \tau_{Tyc})$. Se verifica*

(i) $(\prod\limits_{i\in I} G_i, \tau_{Tyc})$ es un grupo topológico;

(ii) las proyecciones coordenadas $p_i\colon (\prod\limits_{i\in I} G_i, \tau_{Tyc}) \longrightarrow (G_i,\tau_i)$ son homomorfismos continuos y abiertos.

18.5.4 Cocientes de grupos topológicos

Proposición 18.59 *Sea H un subgrupo cerrado y normal en G. Se verifica*

(i) $(G/H,\tau_H)$, la familia de las coclases a izquierda $\{xH : x \in G\}$ de H es un grupo topológico provisto de la topología cociente τ_H y de la estructura de grupo inducida;

(ii) la aplicación cociente $p\colon (G,\tau) \longrightarrow (G/H,\tau_H)$ es continua y abierta;

(iii) $(G/H,\tau_H)$ es discreto si y sólo si $H \in \tau$.

Lema 18.60 *Si $\alpha \in G$, la aplicación continua $f_\alpha\colon (G,\tau) \longrightarrow (G,\tau)$ induce un homeomorfismo $\widetilde{f_\alpha}\colon (G/H,\tau_H) \longrightarrow (G/H,\tau_H)$ que lleva la coclase xH en la coclase $(\alpha x)H$.*

Corolario 18.61 *En las condiciones anteriores, $(G/H, \tau_H)$ es un espacio homogéneo.*

Teorema 18.62 (de isomorfismo de grupos topológicos) *Si (G_1, τ_1) y (G_2, τ_2) son grupos topológicos y $f\colon (G_1, \tau_1) \longrightarrow (G_2, \tau_2)$ es un homomorfismo de grupos topológicos abierto, entonces el cociente $(G_1/Ker(f), \tau_f)$ es homeomomorfo a $(f(G_1), \tau_{f(G_1)})$.*

18.5.5 Conexión en grupos topológicos

Proposición 18.63 *En un grupo topológico (G, τ), se verifica*

(i) la componente conexa del neutro, $C(e)$, es un subgrupo cerrado y normal de (G, τ);

(ii) el cociente $G/C(e)$ es totalmente disconexo, con tantos puntos como componentes conexas tiene (G, τ).

Ejemplos 18.64 $(GL(n, \mathbb{R}), \tau_{us})$, el conjunto de las matrices inversibles de dimensión n, con la topología euclídea (identificando este espacio con $\mathbb{R}^2$) y el producto de matrices es un grupo topológico. Algunos subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$ son

1) $SL(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, el conjunto de las matrices con determinante igual a 1,

2) $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, el subgrupo de las matrices que satisfacen $AA^t = Id$, y

3) $SO(n) = SL(n) \cap O(n)$.

Se verifican las siguientes propiedades

(i) la *aplicación determinante*, det: $(GL(n, \mathbb{R}), \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ es continua;

(ii) $GL(n, \mathbb{R})$ tiene exactamente dos componentes conexas;

(iii) $SL(n)$, $O(n)$ y $SO(n)$ son subgrupos cerrados de $(GL(n, \mathbb{R}), \tau_{us})$;

(iv) $SO(n)$ y $O(n)$ son compactos;

(v) $(SO(2), \tau_{us})$ es homeomorfo a la esfera $(\mathbb{S}^1, \tau_{us})$.

18.6 Dimensión

18.6.1 Dimensión topológica

Las rectas y las curvas tienen dimensión 1, los planos y superficies dimensión 2, los sólidos como los cubos tienen dimensión 3 y así, la dimensión de un objeto es n si se necesitan n variables independientes para describir un entorno de cada punto. Esta es la *dimensión topológica*, introducida por H. Poincaré, que no detecta la *irregularidad* de un objeto .

La definición de dimensión topológica es inductiva. Se define en dos pasos

Definición 18.65 Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que

(i) (X, τ) tiene dimensión ≤ -1, si y sólo si $X = \emptyset$;

(ii) sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que está definido un espacio (X, τ) de dimensión $\leq k$ para todos los enteros $k \leq n-1$. Entonces, se dice que (X, τ) tiene dimensión $\leq n$, si tiene una base β, tal que para cada $B \in \beta$, la frontera $fr(B)$ tiene dimensión $\leq n-1$.

Observación 18.66 Si (X, τ) tiene dimensión $\leq k$ y n es un entero tal que $k \leq n$, entonces (X, τ) tiene dimensión $\leq n$.

Se define entonces la *dimensión topológica* de un espacio por

Definición 18.67 Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces

(i) si $X = \emptyset$, su dimensión es -1;

(ii) si (X, τ) tiene dimensión $\leq n$ y es falso que tiene dimensión $\leq n-1$, entonces se dice que la dimensión de X es n, y se escribe $dim_{top}(X) = n$;

(iii) si para cada $n \in \mathbb{N}$ es falso que la dimensión de X es $\leq n$, entonces X tiene dimensión infinita, $dim_{top}(X) = \infty$.

Ejemplos 18.68 Se verifica que

1) en (X, τ_{dis}) es $dim_{top}(X) = 0$;

2) en $(\mathbb{Q}, \tau_{us})$ es $dim_{top}(\mathbb{Q}) = 0$;

3) en $(\mathbb{R}, \tau_{us})$ es $dim_{top}(\mathbb{R}) = 1$.

Lema 18.69 *En (X, τ) son equivalentes*

(i) $dim_{top}(X) \leq n$,

(ii) para cada $x \in X$ y $U \in \mathcal{N}_x$, existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subset U$ y $dim_{top}(fr(V)) \leq n-1$.

Lema 18.70 *Si (X, τ_X) e (Y, τ_Y) son espacios homeomorfos, $dim_{top}(X) = dim_{top}(Y)$.*

Ejemplos 18.71 Se verifica que

1) en (X, τ_{ind}), es $dim_{top}(X) = 0$;

2) en $(\mathbb{Q}^n, \tau_{us})$, es $dim_{top}(\mathbb{Q}^n) = 0$;

3) en $(\mathbb{I}^n, \tau_{us})$, es $dim_{top}(\mathbb{I}^n) = 0$;

4) en $(\mathfrak{C}, \tau_{us})$, es $dim_{top}(\mathfrak{C}) = 0$;

5) en $(\mathbb{R}^2, \tau_{us})$, es $dim_{top}(\mathbb{R}^2) \leq 2$.

Proposición 18.72 *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se verifica*

(i) si $A \subset X$ y $dim_{top}(X) \leq n$, es $dim_{top}(A) \leq n$;

(ii) si $dim_{top}(X) = n$, existe un subespacio $B \subset X$, con $dim_{top}(B) = n - 1$;

(iiii) si $dim_{top}(X) = n$, para cada entero k, tal que $-1 \leq k \leq n$, existe un subespacio $B_k \subset X$, con $dim_{top}(B_k) = k$.

Proposición 18.73 *En el caso especial de un espacio métrico (X, d), se verifica*

(i) si $S \subset X$, $dim_{top}(S) \leq n$ si y sólo si para cada $x \in S$ y $N \in \mathcal{N}_x$, existe $V \in \tau_d$ tal que $x \in V \subset N$ y $dim_{top}(S \cap fr(V)) \leq n - 1$;

(ii) si $X = A \cup B$ y las dimensiones topológicas $dim_{top}(A)$ y $dim_{top}(B)$ son finitas, entonces $dim_{top}(X) \leq dim_{top}(A) + dim_{top}(B) + 1$;

(iii) si A y B son cerrados disjuntos, entonces, $dim_{top}(A \cup B) = \max\{dim_{top}(A), dim_{top}(B)\}$;

(iv) si X es conexo con más de un punto, entonces $dim_{top}(X) \geq 1$;

(v) si $C \subset X$ es contable, entonces $dim_{top}(C) = 0$.

Ejemplos 18.74 De lo anterior, se deduce

1) la esfera $(\mathbb{S}^n, \tau_{us})$ tiene dimensión $\leq n$;

2) el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$ tiene dimensión $\leq n$;

3) si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ en $(\mathbb{R}^n, \tau_{us})$, entonces $dim_{top}(A) = dim_{top}(\mathbb{R}^n)$;

4) $dim_{top}([0, 1]^n) = dim_{top}(\mathbb{R}^n)$.

18.6.2 Dimensión fractal

¿Cuál es la relación entre el tamaño de un objeto (longitud, área, volumen) y su diámetro?

1) si cubrimos un cuadrado de lado 1 con *cuadraditos* de longitud ε, necesitamos $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ de tales cuadraditos para hacerlo;

(ii) para cubrir un segmento de longitud 1, nos hacen falta $\dfrac{1}{\varepsilon}$ segmentos de longitud ε, y la misma cantidad de cuadrados de longitud ε;

(iii) para cubrir un cubo de lado 1, nos hacen falta $\dfrac{1}{\varepsilon^3}$ *cubitos* de lado ε, etc.

el exponente de ε es la dimensión del objeto a medir, y esto no es una casualidad.

Teniendo en cuenta esta propiedad, definimos la ***dimensión fractal*** de $S \subset \mathbb{R}^n$ del modo siguiente: para $\varepsilon > 0$, sea $N_\varepsilon(S)$ el mínimo número de cubos n-dimensionales de longitud ε para cubrir S. Si existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $N_\varepsilon(S) \sim \dfrac{1}{\varepsilon^d}$ cuando ε tiende a 0, decimos que la ***dimensión fractal*** de S es d, y se denota por $dim_{frac}(S) = d$.

Esto significa que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\dfrac{N_\varepsilon(S)}{\frac{1}{\varepsilon^d}} \right)$ es una constante k. Tomando logaritmos en la anterior expresión es $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\log(N_\varepsilon(S)) + d\log(\varepsilon)) = \log(k)$, luego

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\log(k) - \log(N_\varepsilon(S)}{\log(\varepsilon)} \right) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\log(N_\varepsilon(S)}{\log(\varepsilon)} \right)$$

y como $0 < \varepsilon < 1$, es $\log(\varepsilon) < 0$, y d es positivo.

Esta dimensión coincide con la ***dimensión de Hausdorff*** (de difícil definición), para conjuntos compactos, ***fractales*** (un fractal F es un conjunto tal que $dim_{frac}(F) > dim_{top}(F)$) y autosemejantes.

El ternario de Cantor $\mathfrak{C}$ es un conjunto fractal, ya que no es difícil probar que $dim_{top}(\mathfrak{C}) = 0$ y $dim_{frac}(\mathfrak{C}) = \dfrac{log(2)}{log(3)}$.

18.7 Espacios de funciones

18.7.1 La topología de la convergencia puntual

Definición 18.75 Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Se dice que una familia $\mathcal{F} \subset Y^X = \{f \colon X \longrightarrow Y\}$ tiene la ***topología de la convergencia puntual*** τ_p si posee la topología de subespacio inducida por la topología producto (Y^X, τ_{Tyc}).

Sea $C(X,Y) = \{f \colon (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y) : f$ es continua$\}$.

Observación 18.76 τ_p está determinada sólo por la topología τ_Y sobre Y, la estructura topológica sobre X no juega ningún papel.

Lema 18.77 *Para $\mathcal{F} \subset Y^X$, $a \in X$ y $U \subset Y$, sea el conjunto $(a, U) = \{f \in \mathcal{F} : f(a) \in U\}$. La familia $\sigma = \{(a, U) : a \in X, U \in \tau_Y\}$ es una subbase para la topología τ_p sobre $\mathcal{F}$.*

Lema 18.78 *Si (Y, τ_Y) es T_2, lo mismo sucede con (Y^X, τ_p).*

La denominación de esta propiedad se justifica por propiedades del tipo

Teorema 18.79 *En $(\mathcal{F}, \tau_p)$, una red $\{f_d\}_{d \in D}$ converge a f si y sólo si para cada $x \in X$, la red $\{f_d(x)\}_{d \in D}$ converge a $f(x)$.*

18.7.2 La topología compacto-abierta

Definición 18.80 La *topología compacto-abierta* sobre $\mathcal{F} \subset Y^X$, τ_c, es la topología que tiene como base la familia $\beta = \{(K, U) : K$ compacto en (X, τ_X) y $U \in \tau_Y\}$, donde se define $(K, U) = \{f \in \mathcal{F} : f(K) \in U\}$.

Lema 18.81 *Sobre Y^X, es $\tau_p \subset \tau_c$.*

Ejemplos 18.82 Con las notaciones anteriores

1) si $\tau_X = \tau_{dis}$, las topologías τ_c y τ_p sobre $\mathcal{F} \subset Y^X$ coinciden;

2) si $(X, \tau_X) = (Y, \tau_Y) = ([0, 1], \tau_{us})$, los espacios $(C(X, Y), \tau_p)$ y $(C(X, Y), \tau_c)$ no son iguales: $(C(X, Y), \tau_p)$ no es compacto;

3) si $\mathcal{F}$ es la familia de las aplicaciones $f: (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ constantes, entonces $(\mathcal{F}, \tau_p) = (\mathcal{F}, \tau_c)$ es homeomorfo a (Y, τ_Y).

Teorema 18.83 *Se verifica*

(i) si (Y, τ_Y) es T_1 o T_2, lo mismo sucede con (Y^X, τ_c);

(ii) si (Y, τ_Y) es regular, lo mismo sucede con $(C(X, Y), \tau_c)$.

18.7.3 La topología de la convergencia uniforme

Definición 18.84 Sea X un conjunto e (Y, d_Y) un espacio métrico. Se dice que una sucesión de aplicaciones $\{f_n: X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* hacia una aplicación $f: X \longrightarrow Y$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ y $x \in X$ se tiene $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$.

Vamos a construir una topología sobre Y^X que dé cuenta de la convergencia uniforme de las sucesiones de funciones

Proposición 18.85 *Sea X un conjunto e (Y, d_Y) un espacio métrico. Se verifica*

(i) la aplicación $e: Y^X \times Y^X \longrightarrow [0, \infty)$ definida por $e(f, g) = \sup_{x\in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$ para $f, g \in Y^X$, es una métrica (completa) sobre Y^X. La topología de Y^X asociada a la métrica, τ_{unif}, se llama topología de la convergencia uniforme *asociada a la distancia d_Y;*

(ii) una sucesión de aplicaciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y^X converge uniformemente a $f \in Y^X$, si y sólo si la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en (Y^X, τ_{unif}).

Proposición 18.86 *Sea (X, τ) un espacio topológico e (Y, d_Y) un espacio métrico. Se verifica*

(i) el conjunto de las aplicaciones continuas $C(X, Y)$ es cerrado en (Y^X, τ_{unif});

(ii) si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones convergiendo uniformemente a* $f \in Y^X$ *y cada* $f_n \in C(X,Y)$*, entonces* $f \in C(X,Y)$*;*

(iii) la aplicación $F\colon (C(X,Y) \times X, \tau_{unif} \times \tau) \longrightarrow (Y, d_Y)$ *dada por* $F(f,x) = f(x)$ *es continua;*

(iv) si (X,τ) *es compacto,* $D_\infty\colon (C(X,Y) \times C(X,Y), \tau_{unif} \times \tau_{unif}) \longrightarrow ([0,\infty), \tau_{us})$*, la aplicación dada por* $D_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in X}\{d(f(x),g(x))\}$ *es una distancia, llamada* distancia de la convergencia uniforme. *Además, si* (Y,d_Y) *es completo, entonces* $(C(X,Y), D_\infty)$ *es un espacio métrico completo;*

(v) si (X,τ) *es compacto y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones* $f_n\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ *que convergen simplemente a* f*, entonces para que la sucesión converja uniformemente, es necesario que* f *sea una función continua.*

Contraejemplo 18.87 Pero, la continuidad de f no es una condición suficiente para la convergencia uniforme de la sucesión de funciones: sea $g\colon (\mathbb{R}, \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ ó } t \geq 2 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}.$$

Definimos la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas $f_n\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$, dadas por $f_n(t) = g(nt)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$. Para cada $t \in [0,1]$, $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, pero no hay convergencia uniforme a 0.

Teorema 18.88 (Primer teorema de Dini) *Sea* (X,τ) *un espacio compacto y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones continuas* $f_n\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$*. Se supone que para cada* $x \in X$*, la sucesión* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es creciente y converge hacia un número real* $f(x)$*, de modo que la aplicación* $f\colon (X,\tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ *así definida es continua. Entonces,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f*.*

Teorema 18.89 (Segundo teorema de Dini) *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de aplicaciones crecientes* $f_n\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$*. Se supone que para cada* $x \in [0,1]$*, la sucesión* $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es creciente y converge hacia un número real* $f(x)$*, de modo que la aplicación así definida* $f\colon ([0,1], \tau_{us}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$ *es continua. Entonces,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f*.*

Definición 18.90 Sean (X,τ) un espacio topológico, (Y,d_Y) un espacio métrico y $A \subset Y^X$. Sea $x_0 \in X$. Se dice que A es *equicontinuo en* x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{N}_{x_0}$, tal que para cada $x \in V$ y $f \in A$ es $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Se dice que A es *equicontinuo* si es equicontinuo en todo punto de X.

Proposición 18.91 *Sean (X, τ) un espacio topológico, (Y, d_Y) un espacio métrico y $A \subset Y^X$. Entonces*

(i) si A es equicontinuo en x_0 (respectivamente, equicontinuo), entonces toda $f \in A$ es continua en x_0 (respectivamente, $A \subset C(X, Y)$) y toda parte de A es equicontinua en x_0 (respectivamente, equicontinua);

(ii) si A es equicontinuo en x_0 (respectivamente, equicontinuo), su adherencia en (Y^X, τ_{unif}) es equicontinua en x_0 (respectivamente, equicontinua);

(iii) A es equicontinuo si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una parte abierta $\Omega \subset X \times X$ conteniendo a la diagonal y tal que para cada $(x, x') \in \Omega$ y $f \in A$ es $d(f(x), f(x')) < \varepsilon$;

(iv) si (X, τ) es compacto y la topología está generada por la distancia d_X, A es equicontinuo si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para cada $f \in A$ y $x, x' \in X$, la condición $d_X(x, x') < \delta$ implica que $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Teorema 18.92 (de Ascoli) *Sea (X, τ) un espacio compacto, (Y, d_Y) un espacio métrico y $A \subset C(X, Y)$. Las propiedades siguientes son equivalentes*

(i) $\overline{A}$ es compacto en $(C(X, Y), \tau_{unif})$;

(ii) A es equicontinua y para cada $x \in X$ el conjunto $\overline{\{f(x) : f \in A\}}$ es compacto en (Y, d_Y).

Bibliografia

[Ad] I. Adamson; *A General Topology Workbook*, Birkhäuser, 1995.

[AP] A.V. Arkhangels'kii and V. I. Ponomarev; *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, Reidel, 1983.

[Ar] M.A. Armstrong; *Topología Básica*, Reverté, 1987.

[ADQ] R. Ayala, E. Dominguez y A. Quintero; *Elementos de Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.

[Bak] C.W. Baker; *Introduction to Topology*, Krieger, 1997.

[Bar] S. Barr; *Expériences de Topologie*, Lysimaque, 1987.

[Bau] J.D. Baum; *Elements of point-set Topology*, Dover, 1991.

[Be] C. Berge; *Topological Spaces*, Dover, 1997.

[BRV] F. Bombal Gordón, L. Rodriguez Marín y G. Vera Botí; *Problemas de análisis matemático: espacios métricos y normados. El espacio* $\mathbb{R}^n$, AC, 1987.

[BBIF] Y.U. Borisovich, N. Bliznyakov, Y. A. Izrailevich and T. Fomenko; *Introduction to Topology*, Mir, 1985.

[Bor] C.R. Borges; *Elementary Topology and Applications*, World Scientific, 2000.

[Bou] N. Bourbaki; *Eléments de Mathématiques: Topologie Générale*, Hermann, 1971.

[Bry] V. Bryant; *Metric spaces: iteration and application*, Cambridge University Press, 1996.

[Bu] D. Bushaw; *Elements of General Topology*, John Wiley, 1996.

[BvR] G. Buskes and A. Van der Rooij; *Topological Spaces; from distance to neighborhood*, Springer, 1997.

[Ca] G.L. Cain; *Introduction to General Topology*, Addison Wesley, 1993.

[CF] J.L Carlavilla y G. Fernández; *Aventuras Topológicas*, Rubes, 1994.

[CV] C.O. Christenson y W.L. Voxman; *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, 1998.

[Co] T. Copson; *Metric spaces*, Cambridge University Press, 1988.

[Cu] H. Cullen; *Introduction to General Topology*, Heath nd Co., 1968.

[Cz] A. Czaszar; *General Topology*, A. Hilger, 1978.

[ChH] J. Chailloux y J. Henry; *Problemas (con soluciones detalladas) de Topología*, Toray-Masson, 1976.

[Cho1] G. Choquet; *Topología*, Toray Masson, 1971.

[Cho2] M. Choquet; *Problèmes de théorie des fonctions et topologie*, Les cours de la Sorbonne, 1966.

[De] A. Delachet; *Que sais-je? La Topologie*, Presses Universitaires de France, 1978.

[Di] J. Dixmier; *General Topology*, Springer, 1984.

[Du] J. Dugundji; *Topology*, Allyn and Bacon, 1968.

[E] R. Engelking; *General Topology*, Heldermann, 1989.

[Fa] A. Faisant; *TP et TD de Topologie Générale*, Hermann, 1987.

[FM] G. Fleitas Morales y J. Margalef Roig; *Problemas de Topología General*, Alhambra, 1980.

[Fl] G. Flory; *Ejercicios de Topología y Análisis*, Reverté, 1978.

[Fr] G.K. Francis; *A topological picture book*, Springer, 1987.

[GG] T.W. Gamelin and R.E. Greene; *Introduction to Topology*, Saunders Series, 1983.

[Ge] M.C. Gemignani; *Elementary Topology*, Dover, 1990.

[HF] D. Hinrichsen y J.L. Fernandez; *Topología General*, Urmo, 1977.

[HY] J.G. Hocking and G.S. Young; *Topology*, Dover, 1961.

[Hu] S.T. Hu; *Elements of General Topology*, Holden-Day, 1965.

[Jaf] P. Jaffard; *Traité de Topologie Générale (en vue de ses applications)*, Presses Universitaires de France, 1997.

[Jan] K. Jänich; *Topology*, Springer, 1984.

[Ke] J.L. Kelley; *General Topology*, Springer, 1955.

[Ku] K. Kuratowski; *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie*, Enseignement Mathématique, 1966.

[Lee] J.M. Lee; *Introduction to Topological Manifolds*, University of Washington, 1997.

[Leh] H. Lehning; *Topologie (avec exercices)*, Masson, 1985.

[Lie] W. Lietzmann; *Visual Topology*, Chatto and Windus, 1965.

[Lim] E.L. Lima, *Grupo fundamental e espaços do recobrimiento*, Projeto Euclides (IMPA), 1993.

[Lip] S. Lipschutz; *Topología General*, McGraw Hill, 1967.

[Man] M.J. Mansfield; *Introducción a la Topología*, Alhambra, 1974.

[MOP] J. Margalef Roig, E. Outerelo Dominguez y J.L. Pinilla Ferrando; *Topología*, Alhambra, 1975.

[Mas] X. Masa; *Topoloxia Xeral: introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos*, Publicacions Universidade Santiago de Compostela, 1999.

[Mc] G. McCarty; *Topology: an introduction with applications to Topological Groups*, Dover, 1967.

[Me] B. Mendelson; *Introduction to Topology*, Dover, 1990.

[Mun] J.R. Munkres; *Topology: a first course*, Prentice-Hall, 1975.

[Mur] M.G. Murdeshwar; *General Topology*, Wiley Eastern Limited, 1986.

[Nag] J. Nagata; *Modern General Topology*, North Holland, 1985.

[O] P.V. O'Neil; *Fundamental Concepts of Topology*, Gordon and Breach, 1972.

[Pa] C.W. Patty; *Foundations of Topology*, PWS-Kent, 1993.

[Per] W.J. Pervin; *Foundations of General Topology*, Academic Press, 1964.

[Pr] V.V. Prasolov; *Intuitive Topology*, Math. World, 1995.

[Re] R.B. Reisel; *Elementary theory of metric spaces: a course in constructing mathematical proofs*, Springer, 1982.

[Ro] D. Roseman; *Elementary Topology*, Prentice-Hall, 1999.

[RF] V. Rohlin et D. Fuchs; *Premier cours de Topologie: chapitres Géométriques*, Mir, 1981.

[Sa] G. Salicrup; *Introducción a la Topología*, Aportaciones Matemáticas 1 (Sociedad Matemática Mexicana), 1993.

[Si] A.J. Sieradski; *An introduction to Topology and Homotopy*, PWS-Kent, 1992.

[Sie] W. Sierpinski; *General Topology*, Dover, 2000.

[Sk] G. Skandalis; *Maths pour la licence: topologie et analyse*, Dunod, 2001.

[SS] J.A. Steen and J.A. Seebach; *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

[Su] W.A. Sutherland; *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Oxford Sci. Publications, 1993.

[T] W.J. Thron; *Topological Structures*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[Wa2] C. Wagschal; *Livrets d'exercices: Topologie*, Hermann, 1995.

[WD] G. Whyburn and E. Duda; *Dynamic Topology*, Springer, 1979.

[Wi] S. Willard; *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.